

**LAPORAN PENELITIAN DOSEN JUNIOR
TAHUN ANGGARAN 2010**

**JUDUL PENELITIAN
“PENERAPAN ESTIMASI KALMAN FILTER UNTUK MENGETAHUI
PENCEMARAN AIR SUNGAI DI KALI GAJAH WONG”**



Oleh :

FITRIANA YULI SAPTANINGTYAS.,M.Si.

HUSNA 'ARIFAH
(husnaarifah@uny.ac.id)

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
TAHUN 2010**

LEMBAR PENGESAHAN
LAPORAN PENELITIAN DOSEN YUNIOR

1. Judul Penelitian : PENERAPAN ESTIMASI KALMAN FILTER
UNTUK MENGETAHUI PENCEMARAN
AIR SUNGAI DI KALIGAJAH WONG
2. Ketua Peneliti :
 - a. Nama lengkap : Fitriana Yuli Saptaningtyas, M.Si
 - b. Jabatan : Tenaga Pengajar
 - c. Jurusan : Pendidikan Matematika
 - d. Alamat surat : Perum Villa Cemara No C1,Tamanan
Banguntapan, Bantul
 - e. Telepon rumah/kantor/HP : 08122788679
 - f. Faksimili : -
 - g. Email : anajogja_its@yahoo.com
3. Tema payung penelitian : TERAPAN/REKAYASA/SAINS
4. Skim Penelitian : ~~Fakultas~~/Lemlit/P
5. Program Strategies Nasional : Perubahan Iklim dan Pelestarian Lingkungan
6. Bidang Keilmuan/Penelitian : MIPA dan Sains
7. Tim Peneliti

No	Nama dan Gelar	Bidang Keahlian
1.	Fitriana Yuli Saptaningtyas, M.Si (ketua)	Matematika terapan/Analisis
2.	Husna Arifah,S.Si.	Matematika Terapan/Analisis
3.	(anggota) Nikenasih Binatari, M.Si (anggota)	Matematika Terapan

8. Mahasiswa yang terlibat :

No	Nama	NIM
1.	Anaviroh	07305144027
2.	Bibid Bagasworo	07305141013

9. Lokasi Penelitian : Sungai di Gajah Wong

- 10 Waktu Penelitian : 8 Bulan
11 Dana yang diusulkan : 5juta

Kepala Pusat Studi.Lingkungan Hidup

Yogyakarta, 18 November 2010
Ketua Tim Peneliti,

Satino, M.Si
NIP.19650831 199802 1 001

Fitriana Yuli Saptaningtyas, M.Si.
NIP 132326893

Mengetahui,
Ketua Lembaga Penelitian UNY

Prof. Sukardi, Ph.D.
NIP. 19530519 197811 1 001

ABSTRAK

Air merupakan salah satu kebutuhan pokok manusia. Berdasarkan Undang-Undang no 7 tentang sumber daya air pemerintah telah mewajibkan pada instansi yang bertanggung jawab terhadap pengawasan air. Kegiatan monitoring air mengalami banyak kendala salah satunya mahalnya biaya monitoring air sehingga kegiatan monitoring hanya dapat dilakukan pada sejumlah titik monitoring yang terbatas dan pada periode yang cukup lama. Kondisi ini kurang mencerminkan keadaan yang sesungguhnya. Diperlukan suatu metode yang dapat memonitoring air sungai dengan jumlah titik terbatas namun bisa memonitoring sepanjang titik sungai. Metode yang dapat digunakan antara lain adalah metode kalman filter dan metode volume hingga. Penelitian ini menerapkan metode volume hingga untuk mengetahui pencemaran air sungai di Gajah Wong dan mensimulasikannya dengan bantuan program computer yaitu MATLAB 7.01. Permasalahan pencemaran air sungai dapat diselesaikan dengan mengikuti prosedur dalam metode volume hingga menurut Apsley (2005) yaitu:

- a. Mendefinisikan bentuk geometri aliran.
- b. Domain dari aliran diuraikan dalam mesh atau grid dari volume kontrol yang tidak tumpang tindih yang dapat membentuk persamaan yang dapat dibagikan.
- c. Persamaan yang didiskretkan nilainya merupakan pendekatan dari nilai pada masing-masing titik.
- d. Persamaan yang didiskretkan diselesaikan secara numerik.

dari hasil simulasi penyelesaian masalah pencemaran dengan menggunakan metode volume hingga diperoleh hasil bahwa semakin besar kecepatannya maka akan semakin sedikit jumlah grid yang terjadi penumpukan pencemaran air sungai

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah kami panjatkan syukur kehadiran Allah SWT atas segala rahmat dan hidayah-Nya sehingga kami dapat menyelesaikan laporan penelitian dengan judul “Penerapan Estimasi Kalman Filter untuk Mengetahui Pencemaran air Sungai Gajah Wong” dengan baik.

Penelitian ini dilakukan dengan melibatkan dua mahasiswa sebagai salah satu upaya untuk membantu mempercepat tugas akhir.

Tak lupa kami ucapkan terimakasih kepada lembaga penelitian Universitas Negeri Yogyakarta yang telah memberikan dana sehingga penelitian ini dapat berjalan dengan baik, kami menyadari bahwa masih banyak kekurangan dalam pembuatan laporan penelitian ini sehingga kami dengan sangat terbuka menerima saran dan kritik untuk kebaikan laporan ini.

DAFTAR ISI

	hal
Halaman Judul	i
Halaman Pengesahan	ii
Abstrak	iv
Kata Pengantar	v
Daftar Isi	vi
I. PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang Masalah	1
1.2 Identifikasi Masalah.....	3
1.3 Rumusan Masalah	3
1.4 Tujuan Penelitian	3
1.5 Manfaat Penelitian	4
II. KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Estimasi Kalman Filter	4
2.2 Metode Volum Hingga	6
2.2.1 Teknik Diskretisasi Quick	6
2.2.2 Penerapan Metode Volume Hingga pada pencemaran	9
2.2.3 Aliran air sungai dan penyebaran polutan	12
III. METODE PENELITIAN	13

IV.	HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN	
4.1	Persamaan Matematika Permasalahan Pencemaran pada Sungai....	13
4.2	Persamaan Matematika dari Hukum Konservasi Massa pada Sungai...	13
4.3	Konservasi Massa Ke Arah Sumbu x pada Sungai	15
4.4	Konservasi Massa ke Arah Sumbu-y pada Sungai	15
4.5	Persamaan Matematika dari Hukum Konservasi Momentum pada Sungai utama	15
4.6	Konservasi Momentum ke Arah Sumbu x pada Sungai	16
4.7	Konservasi Momentum ke arah Sumbu y pada Sungai	16
4.8	Penyelesaian Serentak <i>Governing Equation</i> dengan teknik diskretisasi QUICK	16
4.9	Penyelesaian secara Numerik	22
4.10	Hasil Simulasi dan Analisa	26
V.	PENUTUP	
a.	Kesimpulan	28
b.	Saran	29
VI.	DAFTAR PUSTAKA	29

LAMPIRAN - LAMPIRAN

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Air merupakan salah satu kebutuhan pokok bagi manusia. Air diperlukan untuk kebutuhan minum, mandi, mencuci, pengairan dalam bidang pertanian, dan minuman untuk ternak. Selain itu, air juga sangat diperlukan dalam kegiatan industri dan pengembangan teknologi untuk meningkatkan taraf kesejahteraan hidup manusia. Sungai merupakan salah satu sumber untuk mendapatkan air untuk mencukupi kebutuhan hidup manusia. Fungsi penting ini menjadi salah satu alasan pentingnya menjaga air sungai dari pencemaran yang dapat menjadi sumber berbagai penyakit. Studi yang dilakukan pada air sungai di Yogyakarta yaitu sungai Code, Winongo, dan Gajah Wong menunjukkan Kualitas air telah mengalami penurunan. Ketiga sungai yang diteliti tergolong kedalam kelas II atau III atas dasar beberapa parameter penentu kualitas air sesuai dengan PP 82 Tahun 2001[1]. Dari hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa kualitas air sungai di Yogyakarta tidak layak untuk digunakan dalam kegiatan rumah tangga.

Dari hasil penelitian [I] menunjukkan bahwa kualitas air sungai yang paling rendah terjadi pada daerah tengah dan hilir. Pada umumnya terdapat pemukiman penduduk pada daerah sungai bagian tengah dan hilir. Pada daerah ini air sungai menjadi sumber air yang penting untuk kebutuhan sehari-hari. Namun dibalik manfaat-manfaat tersebut, aktivitas manusia di bidang pertanian, industri, dan kegiatan rumah tangga dapat dan telah terbukti menyebabkan menurunnya kualitas air.

Kualitas air secara umum menunjukkan mutu atau kondisi air yang dikaitkan dengan suatu kegiatan atau keperluan tertentu (Efendi, 2003). Dengan demikian, kualitas air akan berbeda dari suatu kegiatan ke kegiatan lain, sebagai contoh: kualitas air untuk keperluan irigasi berbeda dengan kualitas air untuk keperluan air minum. Kualitas air secara umum mengacu pada kandungan polutan yang terkandung dalam air dan kaitannya untuk menunjang kehidupan ekosistem yang ada di dalamnya (Rao, 1992; Ferdias, 1992; Haslam, 1995).

Air sungai yang telah mengalami pencemaran logam berat dan penurunan kualitas, apabila digunakan sebagai air konsumsi rumah tangga ataupun untuk pengairan, terutama untuk tanaman pangan akan menimbulkan dampak yang sangat berbahaya bagi konsumen. Logam-logam berat yang terdapat di dalam air tersebut, pada gilirannya akan terakumulasi pada tanaman, dan lewat tanaman ini pada akhirnya logam-logam berat

tersebut akan masuk ke dalam tubuh hewan dan manusia yang dapat menimbulkan berbagai jenis penyakit terutama kanker (Siradz, 2001).

Pemerintah lewat PP Nomor 82 Tahun 2001 telah menetapkan baku mutu kualitas air untuk berbagai jenis penggunaan air. Mutu air ditentukan antara lain oleh beberapa sifat fisik air seperti suhu, warna, kekeruhan air dan total dissolved solid (TDS); taraf keudaraan di dalam tubuh air yang diidentifikasi lewat beberapa sifat a.l. dissolved oxygen (DO) dan chemical oxygen demand (COD); taraf kehidupan mikroba air biological oxygen demand (BOD), dan juga atas dasar kandungan beberapa logam berat As, Hg, Cr, Pb.

Daerah Aliran Sungai Code, Winongo dan Gajahwong sebagian besar dimanfaatkan untuk berbagai kegiatan domestik, industri, dan pertanian. Limbah dari kegiatan-kegiatan tsb yang umumnya langsung dibuang ke dalam sungai dan akan berdampak sangat buruk terhadap kualitas air sungai-sungai tsb. Dampak buruk terhadap kualitas air sungai tergantung dari jenis, jumlah dan sifat dari limbah yang masuk ke dalam sungai.

Informasi mengenai tingkat pencemaran sungai diperlukan setiap saat sehingga ketika terjadi suatu permasalahan yang berkaitan dengan pencemaran sungai dapat segera ditangani. Berdasarkan Undang-Undang no 7 tentang sumber daya air pemerintah telah mewajibkan pada instansi yang bertanggung jawab terhadap pengawasan air yaitu salah satunya BAPEDAL untuk selalu mengadakan pemantauan terhadap air sungai. Namun karena mahalnya biaya untuk mengadakan pengujian terhadap kualitas air sungai pemantauan hanya dapat dilakukan pada sejumlah titik sungai yang terbatas dan hanya dilakukan pada periode tertentu.

Pengamatan terhadap kondisi sungai yang hanya bisa dilakukan pada sejumlah sampel dari titik sungai tertentu dan pada periode tertentu dapat diatasi dengan metode volume hingga. Jumlah sampel yang minim dirasa masih kurang bisa mewakili kondisi sungai yang sesungguhnya. Karena itu perlu dikembangkan suatu metoda untuk mengestimasi kondisi kualitas air sungai pada ruas yang tidak terdapat stasiun monitoring dan dapat dilakukan setiap saat diinginkan.

Pada penelitian sebelumnya yaitu oleh Ali Masduqi dan Erna Apriliani pada tahun 2008 telah meneliti mengenai estimasi kalman filter untuk mengetahui kualitas air di kali Surabaya. Selain itu, telah dilakukan penelitian mengenai penerapan metode volume hingga untuk mengetahui penyebaran sedimen pasir pada daerah pertemuan sungai oleh Fitriana pada tahun 2007. Pada awal penelitian, peneliti akan menggunakan

metode kalman filter untuk mengestimasi pencemaran air sungai di Gajah Wong. Beberapa kendala ditemui oleh peneliti untuk menggunakan metode kalman filter yaitu keterbatasan waktu dan keterbatasan literatur sehingga peneliti memilih metode yang lain yaitu metode volume hingga. Pada penelitian ini akan menganalisa penerapan metode volume hingga untuk mengestimasi kadar pencemaran air yang terjadi pada sungai dengan menggunakan data pada titik monitoring sungai yang jumlahnya terbatas. Penelitian ini akan mengkaji mengenai persamaan polutan, metode volume hingga, dan menerapkannya untuk mengetahui kadar pencemaran air di sepanjang sungai dan mensimulasikan hasilnya dengan menggunakan bantuan MATLAB 7.01.

1.2 Identifikasi masalah

Berdasarkan latar belakang masalah di atas, maka dapat diidentifikasi beberapa permasalahan. Pentingnya pemantauan air sungai untuk mengetahui kualitas air sungai sehingga dapat dimanfaatkan dengan tepat. Monitoring air sungai seharusnya dilakukan dalam periode yang tidak terlalu lama karena perubahan pemanfaatan sungai oleh penduduk yang berubah dengan cepat. Kegiatan Monitoring air sungai memerlukan dana yang mahal sehingga kegiatan monitoring hanya dapat dilakukan pada titik sungai yang jumlahnya sangat terbatas dan dalam periode yang cukup lama. Kondisi ini menjadi kendala dalam kegiatan monitoring air sungai. Penelitian ini akan menerapkan metode volume hingga untuk mengetahui pencemaran air sungai di dan membuat program dengan bantuan Matlab 7.01 untuk mensimulasikan kondisi tersebut.

1.3 Rumusan masalah

Berdasarkan identifikasi masalah di atas, dirumuskan permasalahan dari penelitian ini yaitu bagaimana menerapkan metode volume hingga untuk mengetahui pencemaran air sungai dan bagaimana membuat program yang dapat mensimulasikan kadar pencemaran air sungai dengan bantuan MATLAB 7.01.

1.4 Tujuan penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui bagaimana menerapkan metode volume hingga untuk mengetahui pencemaran air sungai dan bagaimana membuat program yang dapat mensimulasikan kadar pencemaran air sungai dengan bantuan MATLAB 7.01.

1.5 Manfaat penelitian

Manfaat dari penelitian ini yaitu dapat mengatasi permasalahan monitoring pencemaran air sungai yang hanya mampu memonitoring titik tertentu sehingga kurang mewakili kondisi sebenarnya. Dengan menerapkan metode volume hingga dapat mengatasi keterbatasan jumlah sampling sehingga dapat memonitoring pencemaran air sungai di dengan baik. Selain itu juga mengembangkan dan menerapkan ilmu yang peneliti tekuni.

II. KAJIAN PUSTAKA

2.1 ESTIMASI KALMAN FILTER

Filter Kalman adalah suatu pendekatan teknis menaksir fungsi parameter dalam peramalan deret berkala (*time series*). Keunggulan filter Kalman adalah kemampuan mengestimasi suatu keadaan berdasarkan data yang minim. Filter Kalman merupakan suatu algoritma yang menggabungkan model dan pengukuran. Data pengukuran terbaru menjadi bagian penting dari algoritma filter Kalman karena data mutakhir akan mengoreksi hasil prediksi, sehingga hasil estimasi selalu mendekati kondisi yang sebenarnya.

Persamaan dasar yang digunakan dalam estimasi adalah persamaan linier untuk *continuous-time Kalman filter* sebagai berikut:

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)w(t)$$

dengan kondisi awal $x(t)=x_0$.

Keterangan:

$x(t)$ = *state vector* berdimensi $n \times 1$, yang menyatakan *error model state*

$F(t)$ = matriks $n \times n$, yang menyatakan dinamika model sistem dan *error*

$G(t)$ = matriks $n \times r$, disebut juga *noise gain matrix*, yang menyatakan pengaruh dinamika input

$w(t)$ = vektor input stokastik berdimensi $r \times 1$

Persamaan model estimasi tersebut didukung dengan persamaan yang menyatakan data pengukuran sebanyak m buah, yaitu:

$$z(t) = H(t)x(t) + v(t) \quad (2)$$

dengan:

$z(t)$ = vector berdimensi $m \times 1$, vektor pengukuran atau output

$H(t)$ = matriks $m \times n$, disebut juga matriks pengukuran atau observasi

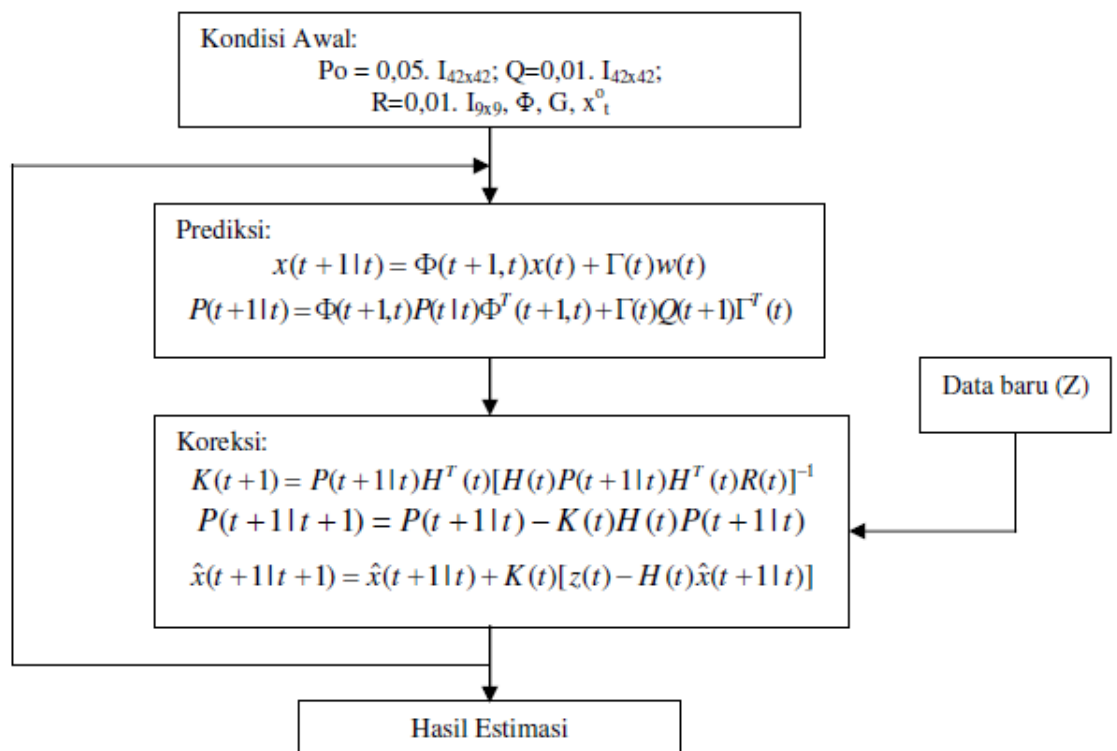
$v(t)$ = vector error observasi stokastik berdimensi $m \times 1$

Dalam prakteknya, algoritma filter Kalman diimplementasikan dalam komputer digital yang hanya menerima data diskret atau *data sequence*. Model *discrete-time Kalman filter* serupa dengan model *continuous-time Kalman filter* yang menggunakan pendekatan *forward Euler*.

Langkah-langkah algoritma *discrete-time Kalman filter* meliputi:

- a. *State prediction*
- b. *Observation prediction*
- c. *Innovations*
- d. *Covariance prediction*
- e. *Innovation covariance*
- f. *Kalman gain*
- g. *State update*
- h. *Covariance update*

Langkah-langkah di atas dapat digambarkan dengan diagram alir seperti pada Gambar 1.



Algoritma filter Kalman telah banyak diaplikasikan pada pemodelan hidrologi [7], seperti pemodelan air tanah, limpasan hujan, air permukaan dan sebagainya. Referensi [8] menggunakan filter Kalman *ensemble* untuk estimasi model hidrologi, yaitu model aliran air tanah, kelembaban tanah, presipitasi, dan aliran sungai. Gambar 1 Algoritma Filter Kalman (dimodifikasi dari referensi [6])

Keterangan notasi:

P = matriks kovarians error

I = *identity matrix*

Q = matriks $r \times r$, disebut *system noise strength*

R = matriks $m \times m$, disebut *measurement noise strength*

$\square \square$ = *state transition matrix*, matriks $m \times n$, disebut juga matriks pengukuran atau observasi

$\square \square$ = *vector error observasi stokastik* berdimensi $m \times 1$

K = *Kalman gain*

2.2 METODE VOLUME HINGGA

Metode volume hingga adalah salah satu metode yang dapat digunakan untuk pemodelan matematika. Menurut Apsley (2005) metode volume hingga sesuai diterapkan pada masalah aliran fluida dan aerodinamika. Aliran fluida memenuhi sifat fisis tertentu, dengan memperhatikan sifat-sifat fisis tersebut dapat dibangun persamaan matematika. Pada umumnya fluida memenuhi hukum kekekalan massa, kekekalan energi, hukum kekekalan momentum, dan hukum fisika lain sesuai dengan permasalahannya.

Pada metode volume hingga harus diketahui domainnya dengan jelas, dari domain tersebut dibagi menjadi grid-grid baik terstruktur maupun tidak. Pada masing-masing grid memenuhi persamaan matematika yang terbentuk. Persamaan yang terbentuk dalam *face* sehingga perlu dirubah menjadi *node* agar tidak saling tumpang tindih. Dalam metode ini perlu dilakukan pendiskritan sehingga persamaan yang terbentuk merupakan nilai *node*. Pendiskritan diperlukan untuk mengubah kontrol *face* menjadi kontrol *node*. Terdapat

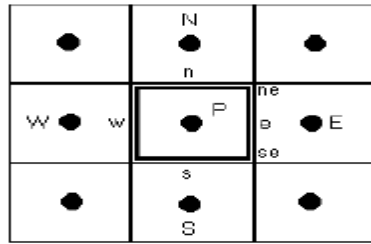
beberapa teknik pendiskritan dalam volume hingga, pemilihan teknik pendiskretan disesuaikan dengan permasalahan yang akan diselesaikan. Teknik–teknik pendiskritan tersebut yaitu diantaranya dengan menggunakan metode *Upwind Interpolation Sistem* (UDS), *Linier Interpolation System* (CDS), *Quadratic Upwind Interpolation Convective Kinematics* (QUICK), *Higher Order Schemes*, dan *Other Schemes*.

Prosedur dalam metode volume hingga menurut Apsley (2005) adalah:

1. Mendefinisikan bentuk geometri aliran.
2. Domain dari aliran diuraikan dalam mesh atau grid dari volume kontrol yang tidak tumpang tindih yang dapat membentuk persamaan yang dapat dibagikan.
3. Persamaan yang didiskretkan nilainya merupakan pendekatan dari nilai pada masing-masing titik.
4. Persamaan yang didiskretkan diselesaikan secara numerik.

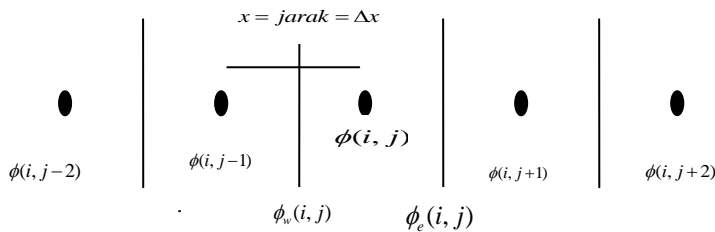
2.2.1 Teknik Diskretisasi *Quadratic Upwind Interpolation Convective Kinematics* (QUICK)

Bentuk geometris dari aliran fluida pada masing-masing domain dibuat dalam bentuk grid. Grid dari domain dapat berupa grid yang terstruktur atau yang tidak terstruktur, ataupun grid dalam koordinat kartesius atau grid yang non kartesius. Masing-masing grid memiliki kontrol *face* dan kontrol *node*. Kontrol *face* untuk dua dimensi terdiri dari $\phi_e, \phi_w, \phi_n, \phi_s$ sedangkan kontrol *node* terdiri dari $\phi_E, \phi_W, \phi_N, \phi_S$. Model matematis dua dimensi penyebaran sedimen pasir pada arah memanjang aliran sungai (pada sumbu x) dan arah melebar sungai (pada sumbu y) akan dimodelkan dalam penelitian ini. Pembagian kontrol volume untuk dua dimensi pada masing masing *node* diilustrasikan pada Gambar 3.



Gambar 2.2 Pembagian kontrol volume dua dimensi

Pendiskritan dengan menggunakan metode QUICK untuk merubah nilai pada *face* menjadi nilai pada *node*, diilustrasikan pada gambar 2.3.



Gambar 2.3 Diskretisasi QUICK

Menurut Apsley (2005), QUICK *scheme* untuk kecepatan lebih besar nol adalah

$$\phi_e(i, j) = \phi(i, j) + g_1(\phi(i, j+1) - \phi(i, j)) + g_2(\phi(i, j) - \phi(i, j-1)), \quad \text{dengan} \quad \text{bobot}$$

$$g_1 = \frac{(x_e(i, j) - x(i, j))(x_e(i, j) - x(i, j-1))}{(x(i, j+1) - x(i, j))(x(i, j+1) - x(i, j-1))}, \text{ dan bobot untuk } g_2 \text{ yaitu,}$$

$$g_2 = \frac{(x_e(i, j) - x(i, j))(x(i, j+1) - x_e(i, j))}{(x(i, j) - x(i, j-1))(x(i, j+1) - x(i, j-1))}. \text{ Diperoleh formula untuk } \phi_e(i, j), \text{ yaitu:}$$

$$\begin{aligned} \phi_e(i, j) &= \phi(i, j) + g_1(\phi(i, j+1) - \phi(i, j)) + g_2(\phi(i, j) - \phi(i, j-1)) \\ \phi_e(i, j) &= \phi(i, j) + \frac{(\frac{1}{2}\Delta x)(\frac{3}{2}\Delta x)}{(\Delta x)(2\Delta x)}(\phi(i, j+1) - \phi(i, j)) + \frac{(\frac{1}{2}\Delta x)(\frac{1}{2}\Delta x)}{(\Delta x)(2\Delta x)}(\phi(i, j) - \phi(i, j-1)) \\ \phi_e(i, j) &= \phi(i, j) + \frac{3}{8}(\phi(i, j+1) - \phi(i, j)) + \frac{1}{8}(\phi(i, j) - \phi(i, j-1)) \\ \phi_e(i, j) &= \phi(i, j) + \frac{3}{8}\phi(i, j+1) - \frac{3}{8}\phi(i, j) + \frac{1}{8}\phi(i, j) - \frac{1}{8}\phi(i, j-1) \\ \phi_e(i, j) &= -\frac{1}{8}\phi(i, j-1) + \frac{3}{4}\phi(i, j) + \frac{3}{8}\phi(i, j+1) \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama diperoleh nilai $\phi_w(i, j)$, $\phi_n(i, j)$, dan $\phi_s(i, j)$ yaitu:

$$\phi_w(i, j) = (-1/8)\phi(i, j-2) + (3/4)\phi(i, j-1) + (3/8)\phi(i, j)$$

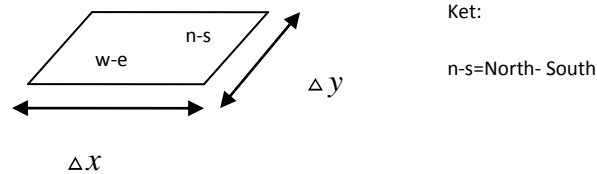
$$\phi_n(i, j) = (-1/8)\phi(i+1, j) + (3/4)\phi(i, j) + (3/8)\phi(i-1, j)$$

$$\phi_s(i, j) = (-1/8)\phi(i+2, j) + (3/4)\phi(i+1, j) + (3/8)\phi(i, j)$$

2.2.2 Penerapan Metode Volume Hingga pada pencemaran

Persamaan matematika pada permasalahan pencemaran pada sungai gajah wong dibangun berdasarkan fenomena-fenomena alam yang memenuhi hukum fisika yang sesuai dengan permasalahan tersebut.

Fenomena pencemaran pada aliran sungai memenuhi hukum kekekalan massa, hukum kekekalan momentum, dan hukum angkutan pencemaran. Persamaan matematis masalah angkutan pencemaran dapat dibangun berdasarkan hukum-hukum tersebut. Pada permasalahan pencemaran air pada daerah sungai. Grid volume kontrol pada tiap domain arah memanjang sungai dan arah melebar sungai dua dimensi akan digunakan dalam penelitian ini. Grid pada tiap kontrol volume dua dimensi penyebaran sedimen pasir pada arah memanjang aliran sungai (pada sumbu x) dan arah melebar sungai (pada sumbu y) diilustrasikan pada Gambar 2.5.



Gambar Penyebaran polutan dua dimensi

Persamaan matematika permasalahan penyebaran polutan pada sungai gajah wong didasari oleh hukum konservasi massa, hukum konservasi momentum, dan persamaan angkutan pencemaran. Hukum konservasi massa dan hukum konservasi momentum dalam metode volume hingga dibangun didasari oleh persamaan skalar transport. Persamaan skalar transport menurut Apsley (2005) dirumuskan:

$$\frac{d}{dt}(\text{amount}) + \text{net flux} = \text{Sources} \quad (2.17)$$

$$\frac{d}{dt}(\rho V_i \phi_i) + \sum_{\text{faces}} (C_i \phi_i - \Gamma_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} A_i) = S_i V_i \quad (2.18)$$

Dimana $\frac{d}{dt}(\rho V_i \phi_i)$ merupakan rata-rata perubahan sesuai dengan permasalahan yang dibahas, dalam hal ini adalah perubahan pencemaran pada waktu tertentu. Dengan ρ adalah massa jenis sedimen, V adalah volume, dan ϕ adalah konsentrasi sesuai dengan permasalahan yang dibahas, dalam hal ini adalah perubahan sedimen pasir. Pada kasus yang *steady state* atau kontrol volumenya tidak berubah terhadap waktu maka nilai pada bagian ini adalah nol.

$\sum_{\text{faces}} (C \phi)$ merupakan persamaan yang menyatakan terjadinya proses adveksi pada permasalahan yang akan diselesaikan. Dengan $C \phi$ disesuaikan pada permasalahan dan hukum fisika

yang berlaku. $\sum_{faces} \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial n} A$ merupakan persamaan yang menyatakan terjadinya proses difusi pada permasalahan yang akan diselesaikan. Dengan $\Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial n} A$ disesuaikan pada permasalahan dan hukum fisika yang berlaku. $S V$ merupakan persamaan yang menyatakan sumber energi yang ada pada permasalahan yang akan diselesaikan dan disesuaikan dengan hukum fisika yang berlaku pada permasalahan tersebut.

Permasalahan sedimentasi tidak terjadi proses difusi yang berarti sehingga pada suku difusi bernilai nol. Berdasarkan uraian di atas terbentuklah konservasi massa dan momentum yang diturunkan dari persamaan skalar transport. Persamaan umum skalar transport dari konservasi massa adalah:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\text{mass}) + \text{net outward mass flux} &= 0 \\ \frac{d}{dt}(\rho V) + \sum_{faces} \rho u_n A &= 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Persamaan umum skalar transport dari konservasi momentum adalah:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\text{momentum}) + \text{net outward momentum flux} &= \text{force} \\ \frac{d}{dt}(\rho V u) + \sum_{faces} (\rho u_n A) u &= F \end{aligned} \quad (2.20)$$

Menurut Ferziger (2002), dalam konservasi momentum kecepatan merupakan momentum per unit massa maka kecepatan sama dengan konsentrasi. Konsentrasi dalam permasalahan ini adalah konsentrasi sedimen persatuan massa. Persamaan konservasi momentum dapat dirumuskan sebagai:

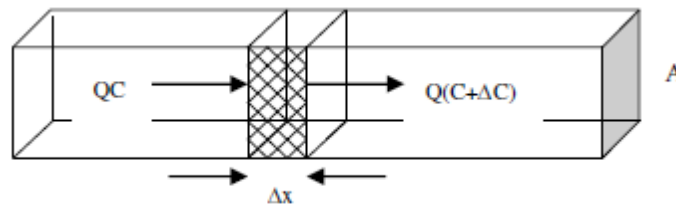
$$\frac{d}{dt}(\text{momentum}) + \text{net outward momentum flux} = \text{force}$$

$$\frac{d}{dt}(\rho V \phi) + \sum_{\text{faces}} (\rho u_n A) \phi = F \quad (2.21)$$

2.2.3 ALIRAN AIR SUNGAI DAN PENYEBARAN POLUTAN

a. Model Penyebaran Polutan

Kualitas air dapat dinyatakan dengan parameter BOD (*biochemical oxygen demand*) yang menyatakan besarnya kebutuhan oksigen untuk menguraikan bahan organik yang mencemari air sungai. Perhitungan BOD dalam sistem sungai dapat didekati dengan model *plug flow* [9] dengan volume kontrol pada Gambar 2.



Gambar 2 Volume Kontrol Aliran Sistem Plug Flow

Perhitungan volume kontrol adalah sebagai berikut:

Accumulation = Inputs – Outputs + Reactions

$$\frac{d(VC)}{dt} = QC - Q(C + \Delta C) - kCV$$

$$C \frac{dV}{dt} + V \frac{dC}{dt} = QC - Q(C + \Delta C) - kCV$$

Persamaan (2) dibagi dengan V, untuk $V = A \cdot \Delta x$ dan

$dV/dt = 0$, maka:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{QC}{A\Delta x} - \frac{QC}{A\Delta x} - \frac{Q\Delta C}{A\Delta x} - kC$$

Untuk limit $\Delta x \rightarrow 0$, maka:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{Q\partial C}{A\partial x} - kC$$

Bila $Q/A = \bar{u}$, maka:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\bar{u} \frac{\partial C}{\partial x} - kC$$

dengan:

Q = debit sungai

III. METODE PENELITIAN

Penelitian ini termasuk dalam penelitian penerapan. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah dengan mengumpulkan informasi baik dari buku atau jurnal yang berkaitan dengan metode volume hingga dan pencemaran polutan dan menerapkannya untuk mengetahui pencemaran air sungai di Gajah Wong dengan titik pengamatan yang terbatas untuk mendapatkan estimasi di sepanjang titik sungai.

IV. HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Dalam penelitian ini akan dikaji tentang metode volume hingga untuk mengetahui pencemaran air sungai Gajah Wong. Sungai Gajah Wong dalam penelitian ini dibagi menjadi grid grid.

4.1 Persamaan Matematika Permasalahan Pencemaran pada Sungai

Pada sungai *Governing Equation* atau persamaan matematika dibangun dari hukum konservasi massa, hukum konservasi momentum, dan persamaan angkutan pencemaran Kalinske Frijlink. Pada domain ini gaya yang bekerja adalah gaya hidrostatis (P_I), gaya hidrostatis kontrol volume sungai (P_{3I}), gaya berat (W_I), gaya geser antar muka kontrol volume satu dan dua (S), dan gaya gesek akibat dasar dan dinding sungai (Fb_I).

4.2 Persamaan Matematika dari Hukum Konservasi Massa pada Sungai

Persamaan umum skalar transport dari konservasi massa (2.19) adalah:

$$\frac{d}{dt}(\text{mass}) + \text{net outward mass flux} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\rho V) + \sum_{\text{faces}} \rho u_n A = 0$$

Permasalahan pencemaran sungai pada daerah pertemuan sungai dalam penelitian ini akan dimodelkan secara dua dimensi sehingga nilai $V = A = \Delta x \Delta y$; dengan nilai $A_e = A_w = \Delta y$; $A_n = A_s = \Delta x$. Persamaan skalar transport dijabarkan secara dua dimensi sehingga diperoleh persamaan di bawah ini:

$$\frac{d}{dt}(\rho A) + (\rho u_n \Delta y)_e - (\rho u_n \Delta y)_w + (\rho v_n \Delta x)_n - (\rho v_n \Delta x)_s = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\rho A) + \rho \Delta y u_{ne} - \rho \Delta y u_{nw} + \rho \Delta x v_{nn} - \rho \Delta x v_{ns} = 0$$

Keterangan u_{ne} = komponen kecepatan yang tegak lurus bidang ke arah sumbu x pada *face east*.

u_{nw} = komponen kecepatan yang tegak lurus bidang ke arah sumbu x pada *face west*.

v_{nn} = komponen kecepatan yang tegak lurus bidang ke arah sumbu y pada *face north*.

v_{ns} = komponen kecepatan yang tegak lurus bidang ke arah sumbu y pada *face south*.

Persamaan matematika dari hukum konservasi massa dijabarkan secara dua dimensi ke arah sumbu x dan sumbu y.

4.3 Konservasi Massa Ke Arah Sumbu x pada Sungai

Persamaan konservasi massa pada sungai utama ke arah sumbu x:

$$\frac{d}{dt}(\rho A) + \rho u_n \Delta y u_{ne} - \rho \Delta y u_{nw} + \rho \Delta x v_{nn} - \rho \Delta x v_{ns} = 0$$

Karena ke arah sumbu x maka $v_{nn} = v_{ns} = 0$, persamaan menjadi:

$$\frac{d}{dt}(\rho A) + \rho \Delta y u_{ne} - \rho \Delta y u_{nw} = 0$$

$$\rho \Delta y u_{ne} = \rho \Delta y u_{nw} - \frac{d}{dt}(\rho A) \quad (4.1)$$

4.4 Konservasi Massa ke Arah Sumbu-y pada Sungai

Persamaan konservasi massa pada sungai ke arah sumbu y:

$$\frac{d}{dt}(\rho A) + \rho \Delta y u_{ne} - \rho \Delta y u_{nw} + \rho \Delta x v_{nn} - \rho \Delta x v_{ns} = 0$$

Karena ke arah sumbu y maka $v_{ne} = v_{nw} = 0$, persamaan menjadi:

$$\frac{d}{dt}(\rho A) + \rho \Delta x v_{nn} - \rho \Delta x v_{ns} = 0$$

$$\rho \Delta x v_{nn} = \rho \Delta x v_{ns} - \frac{d}{dt}(\rho A) \quad (4.2)$$

4.5 Persamaan Matematika dari Hukum Konservasi Momentum pada Sungai

Utama

Persamaan umum skalar transport dari konservasi momentum (2.21) adalah:

$\frac{d}{dt}(\text{momentum}) + \text{net outward momentum flux} = \text{force}$

$$\frac{d}{dt}(\rho V \phi) + \sum_{\text{faces}} (\rho u_n A) \phi = F$$

Permasalahan pencemaran pada daerah sungai gajah wong dalam penelitian ini akan dimodelkan secara dua dimensi sehingga persamaan skalar transport dijabarkan ke arah sumbu x dan sumbu y.

4.6 Konservasi Momentum ke Arah Sumbu x pada Sungai

Persamaan konservasi momentum pada sungai arah sumbu x adalah:

$$\frac{d}{dt}(\rho V \phi) + \sum_{\text{faces}} (\rho u_n A) \phi = F$$

Karena dua dimensi maka nilai $V = A = \Delta x \Delta y$; $A_e = A_w = \Delta y$; $A_n = A_s = \Delta x$

$$\frac{d}{dt}(\rho A \phi) + (\rho u_n \Delta y)_e \phi_e - (\rho u_n \Delta y)_w \phi_w + (\rho v_n \Delta x)_n \phi_n - (\rho v_n \Delta x)_s \phi_s = B_1 - S - F_{b1}$$

$$\frac{d}{dt}(\rho A \phi) + \rho \Delta y u_{ne} \phi_e - \rho \Delta y u_{nw} \phi_w + \rho \Delta x v_{nn} \phi_n - \rho \Delta x v_{ns} \phi_s = B_1 - S - F_{b1}$$

Karena ke arah sumbu x maka $u_{nn} = u_{ns} = 0$ sehingga persamaan menjadi:

$$\frac{d}{dt}(\rho A \phi) + \rho \Delta y u_{ne} \phi_e - \rho \Delta y u_{nw} \phi_w = B_1 - S - F_{b1} \quad (4.3)$$

4.7 Konservasi Momentum ke arah Sumbu-y pada Sungai

Persamaan konservasi momentum pada sungai ke arah sumbu y adalah:

$$\frac{d}{dt}(\rho V \phi) + \sum_{faces} (\rho u_n A) \phi = F$$

Karena dua dimensi maka nilai $V = A = \Delta x \Delta y$; $A_e = A_w = \Delta y$; $A_n = A_s = \Delta x$

$$\frac{d}{dt}(\rho A \phi) + (\rho u_n \Delta y)_e \phi_e - (\rho u_n \Delta y)_w \phi_w + (\rho v_n \Delta x)_n \phi_n - (\rho v_n \Delta x)_s \phi_s = P_1 - P_{31} + W_1$$

$$\frac{d}{dt}(\rho A \phi) + \rho \Delta y u_{ne} \phi_e - \rho \Delta y u_{nw} \phi_w + \rho \Delta x v_{nn} \phi_n - \rho \Delta x v_{ns} \phi_s = P_1 - P_{31} + W_1$$

Karena ke arah sumbu y maka $v_{ne} = v_{nw} = 0$, sehingga persamaan menjadi:

$$\frac{d}{dt}(\rho A \phi) + \rho \Delta x v_{nn} \phi_n - \rho \Delta x v_{ns} \phi_s = P_1 - P_{31} + W_1 \quad (4.4)$$

ϕ pada persamaan diatas menunjukkan konsentrasi pencemaran pada anak sungai.

Jumlah pencemar yang terangkut dalam domain kontrol volume sungai adalah menggunakan persamaan angkutan pencemaran.

4.8 Penyelesaian Serentak *Governing Equation* dengan Teknik Diskretisasi QUICK

Penyelesaian serentak dilakukan terhadap persamaan konservasi massa dan persamaan konservasi momentum. Dari substitusi persamaan konservasi massa (4.1) terhadap konservasi momentum (4.3) diperoleh:

$$\frac{d}{dt}(\rho A \phi) + \rho \Delta y u_e \phi_e - \rho \Delta y u_w \phi_w = B_1 - S - F_{b1}$$

$$\frac{d}{dt}(\rho A \phi) + (\rho \Delta y u_{nw} - \frac{d}{dt}(\rho A)) \phi_e - \rho \Delta y u_{nw} \phi_w = B_1 - S - F_{b1}$$

$$(\rho \Delta y u_{nw} - \frac{d}{dt}(\rho A)) \phi_e - \rho \Delta y u_{nw} \phi_w = B_1 - S - F_{b1} - \frac{d}{dt}(\rho A \phi) \quad (4.8)$$

Hasil substitusi persamaan konservasi massa (4.2) terhadap persamaan konservasi momentum (4.4) diperoleh:

$$\frac{d}{dt}(\rho A \phi) + \rho \Delta x v_{ms} \phi_n - \rho \Delta x v_{ns} \phi_s = P_1 - P_{31} + W_1$$

$$\frac{d}{dt}(\rho A \phi) + (\rho \Delta x v_{ns} - \frac{d}{dt}(\rho A)) \phi_n - \rho \Delta x v_{ns} \phi_s = P_1 - P_{31} + W_1$$

$$(\rho \Delta x v_{ns} - \frac{d}{dt}(\rho A)) \phi_n - \rho \Delta x v_{ns} \phi_s = P_1 - P_{31} + W_1 - \frac{d}{dt}(\rho A \phi) \quad (4.9)$$

Persamaan (4.8) dan (4.9) didiskritkan dengan mengubah ϕ face menjadi ϕ node dengan teknik diskretisasi QUICK untuk $u > 0$. Diskretisasi dari persamaan (4.8) diperoleh:

$$\begin{aligned} & (\rho \Delta y u_{nw} - \frac{d}{dt}(\rho A))((-1/8)\phi(i, j-1) + (3/4)\phi(i, j) + (3/8)\phi(i, j+1)) - \\ & \rho \Delta y u_{nw}((-1/8)\phi(i, j-2) + (3/4)\phi(i, j-1) + (3/8)\phi(i, j)) \\ & = B_1 - S - F_{b1} - \frac{d}{dt}(\rho A \phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ((-1/8)\rho \Delta y u_{nw} + (1/8)\frac{d}{dt}(\rho A))\phi(i, j-1) + ((3/4)\rho \Delta y u_{nw} - (3/4)\frac{d}{dt}(\rho A))\phi(i, j) + \\ & ((3/8)\rho \Delta y u_{nw} - (3/8)\frac{d}{dt}(\rho A))\phi(i, j+1) + (1/8)\rho \Delta y u_{nw}\phi(i, j-2) - (3/4)\rho \Delta y u_{nw}\phi(i, j-1) - \\ & (3/8)\rho \Delta y u_{nw}\phi(i, j) \\ & = B_1 - S - F_{b1} - \frac{d}{dt}(\rho A \phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (1/8)\rho \Delta y u_{nw}\phi(i, j-2) + ((-1/8)\rho \Delta y u_{nw} + (1/8)\frac{d}{dt}(\rho A))\phi(i, j-1) - \\ & (3/4)\rho \Delta y u_{nw}\phi(i, j-1) + ((3/4)\rho \Delta y u_{nw} - (3/4)\frac{d}{dt}(\rho A))\phi(i, j) - \\ & (3/8)\rho \Delta y u_{nw}\phi(i, j) + ((3/8)\rho \Delta y u_{nw} - (3/8)\frac{d}{dt}(\rho A))\phi(i, j+1) \\ & = B_1 - S - F_{b1} - \frac{d}{dt}(\rho A \phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1/8)\rho\Delta y u_{nw}\phi(i, j-2) + ((-7/8)\rho\Delta y u_{nw} + (1/8)\frac{d}{dt}(\rho A))\phi(i, j-1) + \\
& ((3/8)\rho\Delta y u_{nw} - (3/4)\frac{d}{dt}(\rho A))\phi(i, j) + ((3/8)\rho\Delta y u_{nw} - (3/8)\frac{d}{dt}(\rho A))\phi(i, j+1) \\
& = B_1 - S - F_{b1} - \frac{d}{dt}(\rho A\phi) \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Diskretisasi dari persamaan (4.9) diperoleh:

$$(\rho\Delta x v_{ns} - \frac{d}{dt}(\rho A))\phi_n - \rho\Delta x v_{ns}\phi_s = P_1 - P_{31} + W_1 - \frac{d}{dt}(\rho A\phi) \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
& (\rho\Delta x v_{ns} - \frac{d}{dt}(\rho A))((-1/8)\phi(i+1, j) + (3/4)\phi(i, j) + (3/8)\phi(i-1, j)) - \\
& \rho\Delta x v_{ns}((-1/8)\phi(i+2, j) + (3/4)\phi(i+1, j) + (3/8)\phi(i, j)) \\
& = P_1 - P_{31} + W_1 - \frac{d}{dt}(\rho A\phi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& ((-1/8)\rho\Delta x v_{ns} + (1/8)\frac{d}{dt}(\rho A))\phi(i+1, j) + ((3/4)\rho\Delta x v_{ns} - (3/4)\frac{d}{dt}(\rho A))\phi(i, j) + \\
& ((3/8)\rho\Delta x v_{ns} - (3/8)\frac{d}{dt}(\rho A))\phi(i-1, j) + (1/8)\rho\Delta x v_{ns}\phi(i+2, j) - \\
& (3/4)\rho\Delta x v_{ns}\phi(i+1, j) - (3/8)\rho\Delta x v_{ns}\phi(i, j) \\
& = P_1 - P_{31} + W_1 - \frac{d}{dt}(\rho A\phi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1/8)\rho\Delta x v_{ns}\phi(i+2, j) + ((-1/8)\rho\Delta x v_{ns} + (1/8)\frac{d}{dt}(\rho A))\phi(i+1, j) - \\
& (3/4)\rho\Delta x v_{ns}\phi(i+1, j) + ((3/4)\rho\Delta x v_{ns} - (3/4)\frac{d}{dt}(\rho A))\phi(i, j) - (3/8)\rho\Delta x v_{ns}\phi(i, j) + \\
& ((3/8)\rho\Delta x v_{ns} - (3/8)\frac{d}{dt}(\rho A))\phi(i-1, j) \\
& = P_1 - P_{31} + W_1 - \frac{d}{dt}(\rho A\phi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1/8)\rho\Delta x v_{ns}\phi(i+2, j) + ((-7/8)\rho\Delta x v_{ns} + (1/8)\frac{d}{dt}(\rho A))\phi(i+1, j) + \\
& ((3/8)\rho\Delta x v_{ns} - (3/4)\frac{d}{dt}(\rho A))\phi(i, j) + \\
& ((3/8)\rho\Delta x v_{ns} - (3/8)\frac{d}{dt}(\rho A))\phi(i-1, j) \\
& = P_1 - P_{31} + W_1 - \frac{d}{dt}(\rho A\phi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
((3/8)\rho\Delta x v_{ns} - (3/4)\frac{d}{dt}(\rho A))\phi(i, j) &= (-1/8)\rho\Delta x v_{ns}\phi(i+2, j) + ((7/8)\rho\Delta x v_{ns} - \\
& (1/8)\frac{d}{dt}(\rho A))\phi(i+1, j) + ((-3/8)\rho\Delta x v_{ns} + \\
& (3/8)\frac{d}{dt}(\rho A))\phi(i-1, j) + P_1 - P_{31} + W_1 - \\
& \frac{d}{dt}(\rho A\phi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi(i, j) &= \frac{(-1/8)\rho\Delta x v_{ns}}{(3/8)\rho\Delta x v_{ns} - 3/4\frac{d}{dt}(\rho A)}\phi(i+2, j) + \\
& \frac{((7/8)\rho\Delta x v_{ns} - (1/8)\frac{d}{dt}(\rho A))}{((3/8)\rho\Delta x v_{ns} - (3/4)\frac{d}{dt}(\rho A))}\phi(i+1, j) + \\
& \frac{((-3/8)\rho\Delta x v_{ns} + (3/8)\frac{d}{dt}(\rho A))}{((3/8)\rho\Delta x v_{ns} - (3/4)\frac{d}{dt}(\rho A))}\phi(i-1, j) + \\
& \frac{P_1 - P_{31} + W_1 - \frac{d}{dt}(\rho A\phi)}{((3/8)\rho\Delta x v_{ns} - (3/4)\frac{d}{dt}(\rho A))} \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Hasil diskretisasi persamaan (4.10) dan persamaan (4.11) disubstitusikan sehingga diperoleh persamaan akhir berikut:

$$\begin{aligned}
& (1/8)\rho\Delta y u_{nw}\phi(i, j-2) + ((-7/8)\rho\Delta y u_{nw} + (1/8)\frac{d}{dt}(\rho A))\phi(i, j-1) + \\
& ((3/8)\rho\Delta y u_{nw} - (3/4)\frac{d}{dt}(\rho A))\left(\frac{(-1/8)\rho\Delta x v_{ns}}{((3/8)\rho\Delta x v_{ns} - (3/4)\frac{d}{dt}(\rho A))}\phi(i+2, j) + \right. \\
& \left. \frac{((7/8)\rho\Delta x v_{ns} - (1/8)\frac{d}{dt}(\rho A))}{((3/8)\rho\Delta x v_{ns} - (3/4)\frac{d}{dt}(\rho A))}\phi(i+1, j) + \frac{((-3/8)\rho\Delta x v_{ns} + (3/8)\frac{d}{dt}(\rho A))}{((3/8)\rho\Delta x v_{ns} - (3/4)\frac{d}{dt}(\rho A))}\phi(i-1, j) + \right. \\
& \left. \frac{P_1 - P_{31} + W_1 - \frac{d}{dt}(\rho A\phi)}{((3/8)\rho\Delta x v_{ns} - (3/4)\frac{d}{dt}(\rho A))}\right) + ((3/8)\rho\Delta y u_{nw} - (3/8)\frac{d}{dt}(\rho A))\phi(i, j+1) \\
& = B_1 - S - F_{b1} - \frac{d}{dt}(\rho A\phi) \\
& (1/8)\rho\Delta y u_{nw}\phi(i, j-2) + ((-7/8)\rho\Delta y u_{nw} + (1/8)\frac{d}{dt}(\rho A))\phi(i, j-1) + \\
& ((3/8)\rho\Delta y u_{nw} - (3/8)\frac{d}{dt}(\rho A))\phi(i, j+1) + \\
& \left(\frac{((3/8)\rho\Delta y u_{nw} - (3/4)\frac{d}{dt}(\rho A))(-1/8)\rho\Delta x v_{ns}}{((3/8)\rho\Delta x v_{ns} - (3/4)\frac{d}{dt}(\rho A))}\right)\phi(i+2, j) + \\
& \frac{((3/8)\rho\Delta y u_{nw} - (3/4)\frac{d}{dt}(\rho A))((7/8)\rho\Delta x v_{ns} - (1/8)\frac{d}{dt}(\rho A))}{((3/8)\rho\Delta x v_{ns} - (3/4)\frac{d}{dt}(\rho A))}\phi(i+1, j) + \\
& \left(\frac{((3/8)\rho\Delta y u_{nw} - (3/4)\frac{d}{dt}(\rho A))((-3/8)\rho\Delta x v_{ns} + (3/8)\frac{d}{dt}(\rho A))}{((3/8)\rho\Delta x v_{ns} - (3/4)\frac{d}{dt}(\rho A))}\right)\phi(i-1, j) + \\
& = B_1 - S - F_{b1} - \frac{d}{dt}(\rho A\phi) - \\
& \frac{((3/8)\rho\Delta y u_{nw} - (3/4)\frac{d}{dt}(\rho A))(P_1 - P_{31} + W_1 - \frac{d}{dt}(\rho A\phi))}{((3/8)\rho\Delta x v_{ns} - (3/4)\frac{d}{dt}(\rho A))} \quad (4.12)
\end{aligned}$$

Masing-masing node memenuhi persamaan diatas, persamaan tersebut diselesaikan secara numerik dengan bantuan MATLAB 6.5.

4.9 Penyelesaian secara Numerik

Untuk mendapatkan solusi dilakukan pencarian nilai ϕ (i,j) pada persamaan (4.12) dan (4.21). Untuk mendapatkan nilai pada masing-masing node dengan menggunakan teknik diskretisasi QUICK secara dua dimensi, maka nilai masing-masing node dipengaruhi oleh enam node disekitarnya. Teknik diskretisasi QUICK merupakan salah satu teknik pendiskritan yang mendapat jaminan kestabilan secara numerik.

Untuk mendapatkan solusi nilai ϕ minimal domainnya dibagi menjadi enam node sehingga diperoleh persamaan matematika yang konsisten dengan jumlah variabel sama dengan jumlah persamaan dalam bentuk sistem persamaan $AX=B$. Dalam permasalahan sedimentasi pada daerah pertemuan sungai, A merupakan koefisien dari ϕ , X merupakan ϕ , dan B merupakan nilai dari

$$B_1 - S - F_{b1} - \frac{d}{dt}(\rho A \phi) - \frac{((3/8)\rho \Delta y u_{nw} - (3/4)\frac{d}{dt}(\rho A))(P_1 - P_{31} + W_1 - \frac{d}{dt}(\rho A \phi))}{((3/8)\rho \Delta x v_{ns} - (3/4)\frac{d}{dt}(\rho A))} \text{) untuk}$$

persamaan (4.12) sedangkan untuk persamaan (4.21) nilai B menyatakan

$$B_2 - S_2 - F_{b2} - F_s - \frac{d}{dt}(\rho A \phi \cos \varphi) - \frac{((3/8)\rho \Delta y u_{nw} \cos \varphi - (3/4)\frac{d}{dt}(\rho A))(P_2 - P_{32} + W_2 - \frac{d}{dt}(\rho A \phi \cos \varphi))}{((3/8)\rho \Delta x v_{ns} \cos \varphi - (3/4)\frac{d}{dt}(\rho A))} \cdot$$

Sebagai contoh, untuk dua belas node, dengan empat node arah memanjang sungai dan tiga node arah melebar sungai, terbentuk dua belas grid sebagai berikut:

$\phi(i, j)$	$\phi(i, j+1)$	$\phi(i, j+2)$	$\phi(i, j+3)$	Lebar sungai
$\phi(i+1, j)$	
$\phi(i+2, j)$	$\phi(i+2, j+3)$	

Panjang Sungai

Gambar 4.2 Grid sungai untuk ukuran panjang 4 grid dan lebar 3 grid

Pada kasus diatas untuk menyelesaikan persamaan (4.11) maka terbentuk sistem persamaan $AX=B$ dengan nilai matriknya yaitu:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & B & 0 & 0 & C & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ A & 0 & B & 0 & 0 & C & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ H & A & 0 & B & 0 & 0 & C & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & H & A & 0 & 0 & 0 & 0 & C & 0 & 0 & 0 & E \\ F & 0 & 0 & 0 & 0 & B & 0 & 0 & C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F & 0 & 0 & A & 0 & B & 0 & 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F & 0 & H & A & 0 & B & 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F & 0 & H & A & 0 & 0 & 0 & 0 & C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & F & 0 & 0 & 0 & B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F & 0 & 0 & A & 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F & 0 & H & A & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F & 0 & H & A & 0 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} [\phi(i, j)] \\ [\phi(i, j+1)] \\ [\phi(i, j+2)] \\ [\phi(i, j+3)] \\ [\phi(i+1, j)] \\ [\phi(i+1, j+1)] \\ [\phi(i+1, j+2)] \\ [\phi(i+1, j+3)] \\ [\phi(i+2, j)] \\ [\phi(i+2, j+1)] \\ [\phi(i+2, j+2)] \\ [\phi(i+2, j+3)] \end{bmatrix},$$

dimana nilai A,B,C,E,H, dan F yaitu:

$$A = ((-7/8)\rho\Delta y u_{nw} + (1/8)\frac{d}{dt}(\rho A))$$

$$B = (3/8\rho\Delta y u_{nw} - 3/8\frac{d}{dt}(\rho A))$$

$$C = \frac{(3/8\rho\Delta y u_{nw} - 3/4\frac{d}{dt}(\rho A))(7/8\rho\Delta x v_{ns} - 1/8\frac{d}{dt}(\rho A))}{(3/8\rho\Delta x v_{ns} - 3/4\frac{d}{dt}(\rho A))}$$

$$E = \left(\frac{(3/8\rho\Delta y u_{nw} - 3/4 \frac{d}{dt}(\rho A)) - 1/8\rho\Delta x v_{ns}}{(3/8\rho\Delta x v_{ns} - 3/4 \frac{d}{dt}(\rho A))} \right)$$

$$F = \left(\frac{(3/8\rho\Delta y u_{nw} - 3/4 \frac{d}{dt}(\rho A))(-3/8\rho\Delta x v_{ns} + 3/8 \frac{d}{dt}(\rho A))}{(3/8\rho\Delta x v_{ns} - 3/4 \frac{d}{dt}(\rho A))} \right)$$

$$H = 1/8\rho\Delta y u_{nw}$$

Nilai B =

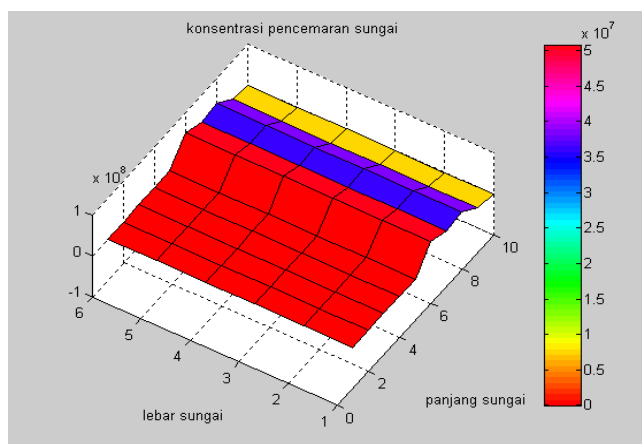
Pada perhitungan numerik diatas agar diperoleh solusi yaitu berupa nilai konsentrasi node pada masing-masing *node* maka persyaratan yang harus dipenuhi yaitu nilai determinan matrik A harus lebih besar dari pada nol.

4.10 Hasil Simulasi dan Analisa

Karena model dan perhitungan numerik tak dapat dipisahkan satu dengan yang lainnya maka perlu dilakukan analisis perhitungan numerik. Adapun analisis hasil yang dilakukan adalah dengan menjalankan program Matlab menggunakan parameter tertentu yang dipilih. Dalam hal ini parameter yang dipilih misalnya kedalaman hulu dan hilir. Yang diubah parameternya adalah kecepatan lebar sungai, dan panjang sungai.

Adapun pengambilan banyaknya grid arah memanjang misalnya 10 buah dan banyaknya grid arah melebar sungai sebanyak 6 buah agar memenuhi syarat kestabilan numerik. Output dalam program ini adalah berupa konsentrasi pencemaran air pada masing-masing node, dengan mengetahui konsentrasi pada masing-masing node akan diketahui profil perubahan pencemaran sungai.

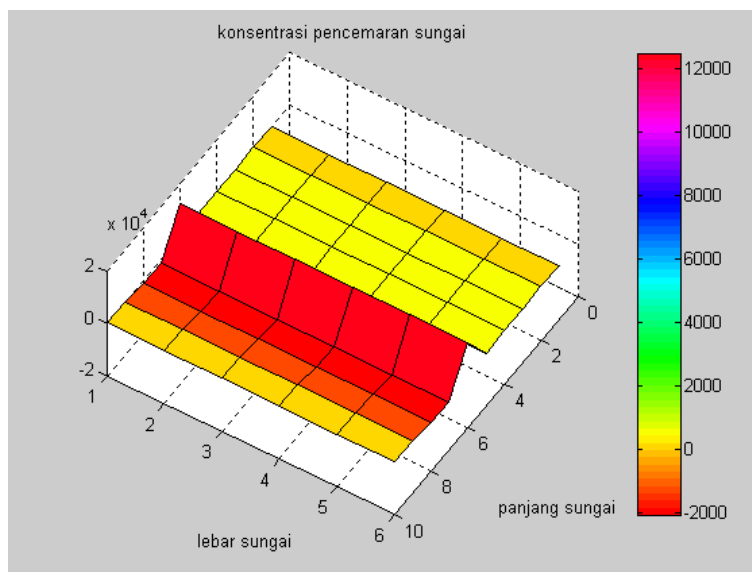
Diberikan panjang sungai 4.5 m, dan lebar 0.3 m. Dengan kecepatan 0.5 m/s. Hasil simulasi seperti gambar 1 di bawah ini.



Gambar 1. Konsentrasi pencemaran air sungai dengan kecepatan 0.5 m/s

Dari hasil simulasi tersebut Nampak bahwa mulai terjadi penumpukan pencemaran yaitu pada grid ke7 atau sekitar 3.15 m dari total panjang sungai 4.5 m. panjang penumpukan pencemaran yaitu sekitar 1.35 m kemudian setelah itu konsentrasi pencemaran relative konstan.

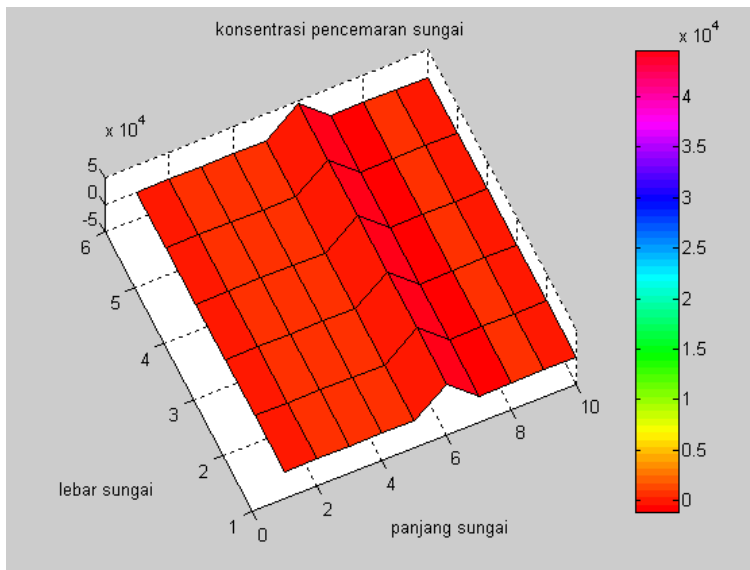
Diberikan panjang sungai 4.5 m, dan lebar 0.3 m. Dengan kecepatan 4.5 m/s. Hasil simulasi seperti gambar 2 di bawah ini.



Gambar 2. Konsentrasi pencemaran air sungai dengan kecepatan 4.5 m/s

Dari hasil simulasi tersebut Nampak bahwa mulai terjadi penumpukan pencemaran yaitu pada grid ke3 atau sekitar 1,35m dari total panjang sungai 4.5 m. Panjang penumpukan pencemaran yaitu sekitar 1.35 m kemudian setelah itu konsentrasi pencemaran relative konstan.

Diberikan panjang sungai 4.5 m, dan lebar 0.3 m. Dengan kecepatan 5.5 m/s. Hasil simulasi seperti gambar 3 di bawah ini.



Gambar 2. Konsentrasi pencemaran air sungai dengan kecepatan 5.5 m/s

Dari hasil simulasi tersebut Nampak bahwa mulai terjadi penumpukan pencemaran yaitu pada grid ke5 atau sekitar 2,25m dari total panjang sungai 4.5 m. Panjang penumpukan pencemaran yaitu sekitar 1.35 m kemudian setelah itu konsentrasi pencemaran relative konstan.

Dari hasil simulasi dapat diketahui bahwa semakin besar kecepatannya maka akan semakin sedikit jumlah grid yang terjadi penumpukan pencemaran.

VI. PENUTUP

a. KESIMPULAN

1. Permasalahan pencemaran air sungai dapat diselesaikan dengan mengikuti prosedur

dalam metode volume hingga menurut Apsley (2005) yaitu:

a. Mendefinisikan bentuk geometri aliran.

b. Domain dari aliran diuraikan dalam mesh atau grid dari volume kontrol yang tidak tumpang tindih yang dapat membentuk persamaan yang dapat dibagikan.

c. Persamaan yang didiskretkan nilainya merupakan pendekatan dari nilai pada masing-masing titik.

d. Persamaan yang didiskretkan diselesaikan secara numerik.

2. Hasil simulasi penyelesaian masalah pencemaran dengan menggunakan metode volume hingga diperoleh hasil bahwa semakin besar kecepatannya maka akan semakin sedikit jumlah grid yang terjadi penumpukan pencemaran air sungai.

b. SARAN

Untuk penelitian selanjutnya dapat dilakukan dengan menggunakan metode yang berbeda.

VII. DAFTAR PUSTAKA.

- [1] Syamsul A Siradz, Endra Setyo H, DAN Ismi, *Kualitas Air Sungai Code, Winongo Dan Gajahwong, Daerah Istimewa Yogyakarta*, Jurnal Ilmu Tanah dan Lingkungan Vol. 8, No. 2 (2008) p: 121-125
- [2] Ali Masduqi dan Erna Apriliani, *Estimation of Surabaya River Water Quality*, IPTEK, *The Journal for Technology and Science*, Vol. 19, No. 3, August 2008 87
- [3] Apsley, D., 2005, *Computational Fluid Dynamic*, Springer, New York
- [4] Anggraheni, 2005, *Hidrolika Saluran Terbuka*, Srikandi, Surabaya
- [5] Duan, J.G., and Nanda, S.K., 2006, Two Dimensional Depth Averaged Model Simulation Of Suspended Sediment Concentration Distribution In A Groyne Field, *Journal of Hydrology* Vol. 327, 426-437.
- [6] Drécourt, JP., "Kalman filtering in hydrological modeling", *DAIHM Technical Report 2003-1*, DHI Water & Environment, Agern All 11, 2970 Hørsholm, Denmark. 2003.
- [7] Effendi, H. 2003. Telaah Kualitas Air Bagi Pengelolaan Sumber Daya dan Lingkungan Perairan. Kanisius. Yogyakarta. Fardiaz, S. 1992. Polusi Air dan Udara. Kanisius. Yogyakarta.
- [8] Ferziger, J.H. and Peric, M., 2002, *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Springer, New York.
- [10] Hardjosuwarno, S., 2003, Dampak Kegiatan Penambangan Pasir Terhadap Keamanan Bangunan Air Di daerah Endapan Sedimen Gunung Api, *Kolukium Hasil*

Penelitian Dan Pengembangan Sumber Daya Air, Balai Sabo, Puslitbang Sumber Daya Air Yogyakarta

- [11] Haslam, S.M. 1995. *River Pollution and Ecological Perspective*. John Wiley and Sons.
- [12] Hsu, Hieh, C., Lee, W.J., and Chang, C.H., 1998, Subcritical Open-Channel Junction Flow, *Journal Of Hydraulic Engineering*, ASCE, 847-855.
- [13] Komura, S., 1973, River Bed Variations at Confluences, *International Symposium on River Mechanics*, Bangkok, Thailand.
- [14] Linsley, R.K., 1996, *Hidrologi Untuk Insinyur*, Erlangga, Jakarta.
- [15] Liu, Z., 2001, *Sediment Transport*, Laboratoriet for Hydraulik og Haunebygning Institutet for Vand, Jord og Mljoteknk Aalborg Universitet.
- [16] Limited. New Delhi. Siradz, S.A. 2001. Monitoring dan Pengendalian Pencemaran Logam-logam Berat pada Beberapa sungai di Jawa Tengah dan Jawa Timur. Fakultas Pertanian UGM. Yogyakarta.
- [17] Makrup, L., 2001, *Dasar-Dasar Analisis Aliran Di Sungai Dan Muara*, UII Press, Yogyakarta.
- [18] Munson, B.R., Young, F.D., dan Okiishi, T.H., 2002, *Mekanika Fluida*, Erlangga, Jakarta.
- [19] Moradkhani, H., S. Sorooshian, H.V. Gupta, dan P.R. Houser, "Dual state-parameter estimation of hydrological models using ensemble Kalman filter", *Advances in Water Resources* 28, p, 135-147. 2005.
- [20] Sudarta, 2003, Pengkajian Pengelolaan Penambangan Pasir Pada Alur Sungai, *Kolukium Hasil Penelitian Dan Pengembangan Sumber Daya Air*, Balai Sungai, Puslitbang Sumber Daya Air Surakarta
- [21] Siouris, G.M., *An Engineering Approach to Optimal Control and Estimation Theory*, John Wiley & Sons, Inc, New York. 1996.
- [23] Schnoor, J.L., *Environmental Modeling, Fate and Transport of Pollutants in Water, Air, and Soil*, John Wiley & Sons, Inc, New York. 1996

