

APLIKASI PERSAMAAN PANAS PADA STERILISASI MINUMAN KEMASAN

Eminugroho R, Fitriana Yuli S. , Dwi Lestari
Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

Abstrak. Persamaan panas memiliki banyak aplikasi. Salah satunya digunakan pada sterilisasi minuman kemasan. Pada makalah ini akan dibahas bagaimana perpindahan panas pada minuman kemasan yang berbentuk kaleng. Dimulai dari pembentukan persamaan panas pada koordinat tabung karena disesuaikan dengan bentuk kemasan minuman, kemudian dicari penyelesaian model. Penyelesaian model yang diperoleh digunakan untuk membuat simulasi dengan bantuan *software* Maple 13. Selanjutnya pada akhir makalah dibahas mengenai nilai sterilisasi minuman.

Kata Kunci: *Persamaan panas dimensi tiga, koordinat tabung, sterilisasi*

1. PENDAHULUAN

Ilmu matematika sangat dekat dengan kehidupan sehari-hari. Perkembangan ilmu seiring perkembangan teknologi makin membuat penyelesaian-penyelesaian pada teori matematika dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang ada. Salah satu teori yang dipelajari mengenai persamaan panas. Adapun aplikasi persamaan panas seringkali dijumpai, khususnya di bidang industri. Penelitian mengenai aplikasi persamaan panas juga telah dilakukan. Kanann [2], [4] dan Dedik [5] menerapkan persamaan panas pada sterilisasi makanan kemasan.

Menurut Muchtadi [6], sterilisasi (*Processing*) pada pengalengan adalah proses pemanasan wadah serta isinya pada suhu dan jangka waktu tertentu untuk menghancurkan mikroba pembusuk dan patogen, selain itu juga bertujuan agar produk menjadi cukup masak. Waktu dan suhu yang diperlukan untuk proses sterilisasi biasanya tergantung pada jenis mikroba yang dihancurkan, kecepatan perambatan panas, suhu awal di dalam wadah, keasaman produk yang dikalengkan, ukuran dan jenis wadah yang digunakan. Sekarang ini, pengemasan dalam kaleng tidak hanya untuk makanan tetapi juga untuk minuman.

Maraknya penjualan minuman dalam kemasan membuat konsumen tertarik untuk membeli. Berdasarkan Nurmawati [7], data tahun 2004 sampai tahun 2009 peningkatan produksi minuman ringan di Indonesia mencapai 7,2% bahkan mencapai 8% pada tahun 2011. Beragam merk dan manfaat yang ditawarkan oleh perusahaan minuman dalam kemasan, membuat konsumen tergiur untuk membeli. Di lain pihak, karena penjualan terus mengalami peningkatan dari tahun ke tahun, perusahaan perlu mempertahankan standar mutu olahan. Hal ini bertujuan agar kasus minuman menjadi berubah rasa, berubah warna, bahkan mudah sekali berubah bentuk (menggumpal) tidak terjadi.

Pada makalah ini akan dibahas mengenai aplikasi persamaan panas pada sterilisasi minuman dalam kemasan. Kemasan yang dimaksud berbentuk kaleng. Pertama akan dibahas terlebih dahulu mengenai pembentukan persamaan panas, kemudian dicari penyelesaiannya secara analitik. Berdasarkan penyelesaian yang diperoleh, dibuat suatu simulasi dengan bantuan MAPLE 13. Terakhir, dibahas mengenai nilai sterilisasi pada minuman dalam kemasan tersebut.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Mekanisme perpindahan panas. Serth [3] dalam bukunya disebutkan bahwa panas atau kalor merupakan suatu bentuk energi yang berpindah dari benda yang suhunya tinggi ke benda yang suhunya lebih rendah. Terdapat tiga cara perpindahan panas: konduksi, konveksi dan radiasi. Konduksi merupakan perpindahan panas dengan penghantar panas tetap. Konveksi merupakan perpindahan panas yang terjadi antara permukaan padat dengan fluida yang mengalir di sekitarnya, dengan menggunakan media penghantar berupa fluida (cairan/gas). Sedangkan radiasi merupakan perpindahan panas yang terjadi karena pancaran/sinaran/radiasi gelombang elektromagnetik, tanpa memerlukan media perantara.

2.2. Sterilisasi minuman kaleng. Terdapat berbagai macam cara pengemasan minuman, misalnya dikemas dalam botol, kardus maupun dikemas dalam kaleng. Pada makalah ini, akan dibahas untuk minuman yang dikemas dalam kaleng. Minuman bersoda, kopi maupun minuman kesehatan merupakan contoh minuman yang dikemas dalam kaleng. Karena bentuknya yang kecil dan praktis sehingga mudah dibawa-bawa membuat konsumen lebih memilih untuk membeli minuman yang dikemas dengan cara ini.

Terdapat lima tahapan untuk pengemasan minuman kaleng yang disebutkan oleh Holdsworth [1]:

1. Menyiapkan jenis minuman yang akan dikemas, mengatur kebersihannya dan mengatur keadaan sedemikian sehingga minuman tidak mudah rusak.
2. Mengemas minuman dengan menghilangkan udara yang mungkin ada dalam kaleng.
3. Proses sterilisasi, hal ini merupakan bagian terpenting dalam pengalengan. Sterilisasi adalah proses pemanasan wadah beserta isinya pada suhu dan jangka waktu tertentu untuk menghilangkan atau mengurangi faktor-faktor penyebab kerusakan minuman. Waktu dan suhu yang diperlukan untuk sterilisasi tergantung dari bahan kaleng (aluminium atau besi tipis), keasaman isi kaleng, besar kaleng, kecepatan perambatan panas, jenis mikroba yang dihancurkan dan suhu awal di dalam kaleng.
4. Menyimpan pada temperature yang tepat untuk mencegah pertumbuhan jamur pada minuman.
5. Memberi label.

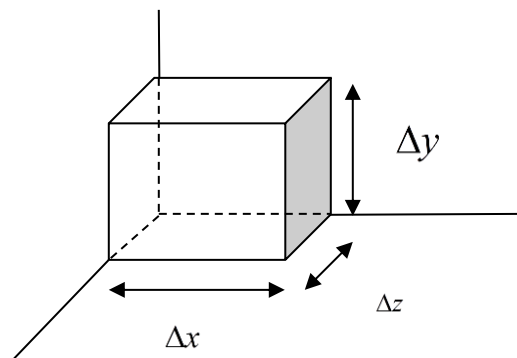
3. PEMBAHASAN

3.1. Pembentukan Persamaan Panas. Dari sudut pandang matematika, proses perpindahan panas dapat dilihat dari dimensi satu, dua maupun tiga. Untuk proses perpindahan panas pada dimensi satu, Serth [3] menyebutkan bahwa dalam hal ini dapat dianalogikan dengan mengambil selembat tipis dinding yang dilewati panas. Selanjutnya, menggunakan hukum termodinamika diperoleh suatu persamaan panas.

Pada setiap tahap pengalengan, terutama pada saat sterilisasi, diperlukan perhatian lebih agar tidak terjadi kesalahan yang menimbulkan kerusakan minuman. Sterilisasi sendiri perlu diperhatikan dalam proses perambatan panas yang dapat ditulis dalam bahasa matematika dengan persamaan diferensial parsial, serta nilai sterilisasi dengan memperhatikan pertumbuhan mikroba dalam kaleng.

Persamaan panas yang akan dibentuk pada makalah ini yaitu pada dimensi tiga. Pemodelan persamaan panas dimensi tiga ini dimulai dari sistem koordinat kartesius yang kemudian di transformasi ke dalam sistem koordinat tabung. Penggunaan sistem koordinat tabung karena disesuaikan dengan bentuk kaleng yang dimaksud dalam makalah ini, yaitu kaleng yang berbentuk tabung.

Didefinisikan c untuk kalor jenis bahan, k untuk konduktivitas suhu bahan, dan massa jenis bahan ρ . Menurut Cengel [8], persamaan konduksi panas pada dimensi tiga dapat diturunkan melalui perubahan volume benda dengan adanya perubahan panjang tiap rusuknya.



Gambar 1.

Perubahan volume dari benda pada Gambar 1 dinotasikan dengan ΔV , yaitu $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$. Jika $U(x, y, z, t)$ menyatakan suhu pada posisi (x, y, z) saat waktu t , maka diperoleh arus konduksi panas pada posisi x saat waktu t adalah

$$J(x, t) = -k \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (4.1)$$

arus konduksi panas pada posisi y saat waktu t adalah

$$J(y, t) = -k \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (4.2)$$

arus konduksi panas pada posisi z saat waktu t adalah

$$J(z, t) = -k \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (4.3)$$

Cengel [8] juga menyebutkan bahwa perubahan massa benda adalah $\Delta m = \rho \Delta V = \rho \Delta x \Delta y \Delta z$. Banyaknya kalor (jumlah panas) adalah

$$Q(x, y, z, t, \Delta x, \Delta y, \Delta z) = c \Delta m U(x, y, z, t) \quad (4.4)$$

Laju perubahan jumlah panas adalah

$$\frac{dQ}{dt} = c \rho \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial U(x, y, z, t)}{\partial t} \quad (4.5)$$

Oleh karena berdasarkan hukum kekekalan energi, bahwa laju perubahan jumlah panas sama dengan aliran panas yang masuk dikurangi dengan aliran panas yang keluar, maka diperoleh

$$\frac{dQ}{dt} = q_x + q_y + q_z - q_{x+\Delta x} - q_{y+\Delta y} - q_{z+\Delta z} \quad (4.6)$$

dengan $q_x, q_y, q_z, q_{x+\Delta x}, q_{y+\Delta y}, q_{z+\Delta z}$ berturut-turut untuk menyatakan laju perpindahan konduksi panas pada posisi $x, y, z, x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$.

Notasi q_x menyatakan laju perpindahan konduksi panas, nilainya diperoleh dengan mengalikan arus konduksi panas pada posisi x dengan luas permukaan area pada sisi benda, sehingga berdasarkan (4.1) diperoleh

$$q_x = J(x, t) \Delta y \Delta z = -k \frac{\partial U}{\partial x} \Delta y \Delta z \quad (4.7)$$

Notasi q_y menyatakan laju perpindahan konduksi panas, nilainya diperoleh dengan mengalikan arus konduksi panas pada posisi y dengan luas permukaan area pada sisi benda, sehingga berdasarkan (4.2) diperoleh

$$q_y = J(x, t) \Delta x \Delta z = -k \frac{\partial U}{\partial y} \Delta x \Delta z \quad (4.8)$$

Notasi q_z menyatakan laju perpindahan konduksi panas, nilainya diperoleh dengan mengalikan arus konduksi panas pada posisi z dengan luas permukaan area pada sisi benda, sehingga berdasarkan (4.3) diperoleh

$$q_z = J(x, t) \Delta x \Delta y = -k \frac{\partial U}{\partial z} \Delta x \Delta y \quad (4.9)$$

Notasi $q_{x+\Delta x}$ menyatakan laju perpindahan konduksi panas di dalam benda, nilainya diperoleh dengan mengalikan arus konduksi panas pada posisi x yang merambat sebesar Δx dengan luas permukaan area pada sisi benda, sehingga diperoleh

$$q_{x+\Delta x} = J(x + \Delta x, t) \Delta y \Delta z = - \left[k \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right] \Delta y \Delta z \quad (4.10)$$

Notasi $q_{y+\Delta y}$ menyatakan laju perpindahan konduksi panas di dalam benda, nilainya diperoleh dengan mengalikan arus konduksi panas pada posisi y yang merambat sebesar Δy dengan luas permukaan area pada sisi benda, sehingga diperoleh

$$q_{x+\Delta x} = J(y + \Delta y, t) \Delta x \Delta z = - \left[k \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right] \Delta x \Delta z \quad (4.11)$$

Notasi $q_{z+\Delta z}$ menyatakan laju perpindahan konduksi panas di dalam benda, nilainya diperoleh dengan mengalikan arus konduksi panas pada posisi z yang merambat sebesar Δz dengan luas permukaan area pada sisi benda, sehingga diperoleh

$$q_{z+\Delta z} = J(z + \Delta z, t) \Delta x \Delta y = - \left[k \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right] \Delta x \Delta y \quad (4.12)$$

Jika Persamaan (4.5), dan Persamaan (4.7) sampai dengan (4.12) disubstitusikan ke Persamaan (4.6), maka diperoleh

$$c\rho \frac{\partial U}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)$$

atau

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \quad (4.13)$$

dengan $\alpha = \frac{k}{c\rho}$ adalah difusitas termal bahan. Jika nilai α semakin besar, maka

semakin cepat panas berdifusi ke bahan. Untuk selanjutnya, Persamaan (4.13) disebut Persamaan Panas pada benda dimensi tiga dalam koordinat kartesius [3].

Oleh karena dalam makalah ini akan dibahas mengenai perambatan panas pada benda yang berbentuk kaleng, maka koordinat yang sesuai yaitu koordinat tabung. Untuk itu, jika $U(x, y, z, t)$ ditransformasi dengan $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ dan $z = z$, maka diperoleh derivative parsial pertama yaitu

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial U}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial U}{\partial y} \quad (4.14)$$

dan

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial U}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial U}{\partial y}. \quad (4.15)$$

Persamaan (4.14) dan (4.15) dapat ditulis sebagai berikut

$$U_r = \cos \theta U_x + \sin \theta U_y \quad (4.16)$$

dan

$$U_\theta = -r \sin \theta U_x + r \cos \theta U_y. \quad (4.17)$$

Selanjutnya derivative parsial kedua yaitu

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\cos \theta \frac{\partial U}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) + \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) \\
 &= \cos \theta \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial U_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \right) + \sin \theta \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial U_y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \right) \\
 &= \cos \theta (U_{xx} \cos \theta + U_{xy} \sin \theta) + \sin \theta (U_{yx} \cos \theta + U_{yy} \sin \theta) \\
 &= \cos^2 \theta U_{xx} + 2 \sin \theta \cos \theta U_{xy} + \sin^2 \theta U_{yy} \tag{4.18}
 \end{aligned}$$

Berdasarkan Persamaan (4.16), (4.17) dan (4.18) diperoleh

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-r \sin \theta \frac{\partial U}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial U}{\partial y} \right) \\
 &= r \left(-\cos \theta \frac{\partial U}{\partial x} - \sin \theta \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial U_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) - \sin \theta \frac{\partial U}{\partial y} + \cos \theta \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial U_y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) \right) \\
 &= r \left(-\cos \theta U_x - \sin \theta (-r \sin \theta U_{xx} + r \cos \theta U_{xy}) - \sin \theta U_y + \cos \theta (-r \sin \theta U_{yx} + r \cos \theta U_{yy}) \right) \\
 &= -r \cos \theta U_x + r^2 \sin^2 \theta U_{xx} - r^2 \sin \theta \cos \theta U_{xy} - r \sin \theta U_y - r^2 \sin \theta \cos \theta U_{yx} + r^2 \cos^2 \theta U_{yy} \\
 &= r \left(-\cos \theta U_x - \sin \theta U_y \right) + r^2 \left(\sin^2 \theta U_{xx} - 2 \sin \theta \cos \theta U_{xy} + \cos^2 \theta U_{yy} \right) \\
 &= r \left(-\cos \theta \left(\cos \theta U_r - \frac{\sin \theta}{r} U_\theta \right) - \sin \theta \left(\sin \theta U_r + \frac{\cos \theta}{r} U_\theta \right) \right) \\
 &\quad + r^2 \left(\sin^2 \theta U_{xx} + (\cos^2 \theta U_{xx} + \sin^2 \theta U_{yy} - U_{rr}) + \cos^2 \theta U_{yy} \right) \\
 &= r \left(-\cos^2 \theta U_r - \sin^2 \theta U_r \right) + r^2 \left(U_{xx} + U_{yy} - U_{rr} \right) \\
 &= -r U_r + r^2 \left(U_{xx} + U_{yy} \right) - r^2 U_{rr}
 \end{aligned}$$

atau

$$U_{\theta\theta} = -r U_r + r^2 (U_{xx} + U_{yy}) - r^2 U_{rr}$$

atau

$$U_{xx} + U_{yy} = \frac{1}{r^2} U_{\theta\theta} + \frac{1}{r} U_r + U_{rr} \tag{4.19}$$

Jika Persamaan (4.19) disubstitusikan ke Persamaan (4.13), maka diperoleh

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \tag{4.20}$$

Selanjutnya Persamaan (4.20) disebut Persamaan Panas dimensi tiga dalam koordinat tabung [3]. Oleh karena kemasan yang dimaksud dalam makalah ini berupa kaleng yang

berbentuk tabung, maka perambatan panas tidak bergantung pada besarnya sudut [5], maka

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial^2 \theta} = 0.$$

Akibatnya, Persamaan (4.20) menjadi

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (4.21)$$

Persamaan (4.21) merupakan persamaan panas pada kaleng yang berbentuk tabung, dengan $U(r, z, t)$ menyatakan suhu minuman di lokasi kaleng (r, z) dengan $0 \leq r \leq R$ dan $0 \leq z \leq \ell$ saat waktu t . Suhu pada sekeliling, alas dan tutup kaleng dibuat tetap 0° , sehingga syarat awal dan syarat batas untuk Persamaan (4.21) diberikan sebagai berikut

$U(r, z, t_0) = U_0$, dengan t_0 menyatakan waktu mula-mula, $0 \leq r \leq R$ dan $0 \leq z \leq \ell$

$$\begin{aligned} U(r, z, t) &= 0, & 0 \leq z \leq \ell \\ U(r, 0, t) &= 0, & 0 \leq r \leq R \\ (4.22) \\ U(r, \ell, t) &= 0, & 0 \leq r \leq R. \end{aligned}$$

4.2. Penyelesaian Model. Penyelesaian Persamaan (4.21) dengan syarat awal dan syarat batas (4.22) menggunakan Metode Variabel Terpisah, yaitu dicari penyelesaian (4.21) yang berbentuk $U(r, z, t) = y(r, z)T(t)$. Jika $U(r, z, t) = y(r, z)T(t)$ disubstitusikan ke Persamaan (4.21), maka diperoleh

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (y(r, z)T(t)) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (y(r, z)T(t)) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (y(r, z)T(t)) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} (y(r, z)T(t))$$

atau

$$T(t) \frac{\partial^2}{\partial r^2} (y(r, z)) + \frac{1}{r} T(t) \frac{\partial}{\partial r} (y(r, z)) + T(t) \frac{\partial^2}{\partial z^2} (y(r, z)) = \frac{1}{\alpha} y(r, z) \frac{\partial}{\partial t} (T(t)) \quad (4.23)$$

Jika kedua ruas pada Persamaan (4.23) dibagi dengan $y(r, z)T(t)$, maka diperoleh

$$\frac{1}{y(r, z)} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (y(r, z)) + \frac{1}{r} \frac{1}{y(r, z)} \frac{\partial}{\partial r} (y(r, z)) + \frac{1}{y(r, z)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (y(r, z)) = \frac{1}{\alpha} T(t) \frac{d}{dt} (T(t)) \quad (4.24)$$

Jika digunakan konstanta pemisah $-\lambda$, maka diperoleh $\frac{1}{\alpha}T(t)\frac{d}{dt}(T(t)) = -\lambda$ dan

$$\frac{1}{y(r,z)}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(y(r,z)) + \frac{1}{r}\frac{1}{y(r,z)}\frac{\partial}{\partial r}(y(r,z)) + \frac{1}{y(r,z)}\frac{\partial^2}{\partial z^2}(y(r,z)) = -\lambda$$

Sehingga diperoleh dua sistem persamaan

$$T'(t) + \alpha\lambda T(t) = 0 \quad (4.25a)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(y(r,z)) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(y(r,z)) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(y(r,z)) = -\lambda y(r,z) \quad (4.25b)$$

Karena $U(r, z, t) = y(r, z)T(t)$, maka dari Syarat Batas (4.22) diperoleh

$$U(r, 0, t) = y(r, 0)T(t)$$

$$U(r, \ell, t) = y(r, \ell)T(t)$$

Agar didapat penyelesaian non trivial, maka diambil $T(t) \neq 0$, sehingga diperoleh

$$y(r, 0) = 0 \quad \text{dan} \quad y(\ell, 0) = 0 \quad (4.26)$$

Selanjutnya, akan dicari penyelesaian Persamaan (4.25b) menggunakan Metode Variabel Terpisah dengan mensubstitusi

$$y(r, z) = R(r)Z(z)$$

pada Persamaan (4.25b). Sehingga diperoleh

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(R(r)Z(z)) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(R(r)Z(z)) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(R(r)Z(z)) = -\lambda R(r)Z(z) \quad (4.27)$$

Jika kedua ruas pada Persamaan (4.27) dibagi dengan

$$R(r)Z(z)$$

maka diperoleh

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d^2}{dr^2}R(r) + \frac{1}{rR(r)}\frac{d}{dr}R(r) - \lambda + \frac{1}{Z(z)}\frac{d^2}{dz^2}Z(z) = 0.$$

Jika digunakan konstanta pemisah $-\mu$, maka diperoleh dua system persamaan

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d^2}{dr^2}R(r) + \frac{1}{rR(r)}\frac{d}{dr}R(r) + \lambda = \mu \quad (4.28a)$$

$$\frac{d^2}{dz^2}Z(z) + \mu Z(z) = 0. \quad (4.28b)$$

Berdasarkan (4.26) diperoleh

$$y(r, 0) = R(r)Z(0)$$

$$y(r, \ell) = R(r)Z(\ell)$$

agar diperoleh penyelesaian non trivial, maka dipilih $R(r) \neq 0$, sehingga diperoleh

$$Z(0) = 0 \quad \text{dan} \quad Z(\ell) = 0. \quad (4.29)$$

Selanjutnya akan dicari penyelesaian non trivial Masalah Syarat Batas (4.28b) dan (4.29). Persamaan karakteristik (4.28b) adalah $m^2 + \mu = 0$. Dapat ditunjukkan bahwa untuk $\mu = 0$ dan $\mu < 0$ tidak terdapat penyelesaian non trivial. Sedangkan penyelesaian non trivial diperoleh untuk $\mu > 0$ dan penyelesaian (4.28b) adalah

$$Z(z) = A \cos \sqrt{\mu} z + B \sin \sqrt{\mu} z, \quad (4.30)$$

dengan A dan B konstanta sebarang. Substitusi (4.29) ke (4.30) diperoleh

$$Z_n(z) = B \sin \sqrt{\mu_n} z, \quad \mu_n = \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.31)$$

Berikutnya akan dicari penyelesaian (4.28a). Jika kedua ruas pada Persamaan (4.28a) dikalikan dengan r^2 , maka diperoleh

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} R(r) + r \frac{d}{dr} R(r) + (\lambda - \mu) r^2 R(r) = 0. \quad (4.32)$$

Jika $a = r\sqrt{\lambda - \mu}$ disubstitusi pada Persamaan (4.32), maka diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dr} &= \frac{dR}{da} \frac{da}{dr} = \sqrt{\lambda - \mu} \frac{dR}{da} \\ \frac{d^2 R}{dr^2} &= \frac{d}{dr} \left(\sqrt{\lambda - \mu} \frac{dR}{da} \right) = \sqrt{\lambda - \mu} \frac{d}{da} \left(\frac{dR}{da} \right) \frac{da}{dr} = (\lambda - \mu) \frac{d^2 R}{da^2} \end{aligned}$$

Akibatnya, pada Persamaan (4.32) menjadi

$$a^2 \frac{d^2 R}{da^2} + a \frac{dR}{da} + a^2 R(a) = 0. \quad (4.33)$$

Persamaan (4.33) disebut sebagai Persamaan Bessel [9]. Untuk menyelesaikan (4.33), digunakan substitusi deret pangkat

$$R(a) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i a^{i+p} \quad (4.34a)$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} R'(a) &= \sum_{i=0}^{\infty} (i+p) C_i a^{i+p-1} \\ R''(a) &= \sum_{i=0}^{\infty} (i+p)(i+p-1) C_i a^{i+p-2} \end{aligned} \quad (4.34b)$$

Jika (4.34a) dan (4.34b) disubstitusi ke Persamaan (4.33), maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 & a^2 \sum_{i=0}^{\infty} (i+p)(i+p-1)C_i a^{i+p-2} + a \sum_{i=0}^{\infty} (i+p)C_i a^{i+p-1} + a^2 \sum_{i=0}^{\infty} C_i a^{i+p} = 0 \\
 & \sum_{i=0}^{\infty} (i+p)(i+p-1)C_i a^{i+p} + \sum_{i=0}^{\infty} (i+p)C_i a^{i+p} + \sum_{i=0}^{\infty} C_i a^{i+p+2} = 0 \\
 & \sum_{i=0}^{\infty} ((i+p)(i+p-1) + (i+p))C_i a^{i+p} + \sum_{i=0}^{\infty} C_i a^{i+2} a^p = 0 \\
 & \sum_{i=0}^{\infty} (i+p)^2 C_i a^i + \sum_{i=2}^{\infty} C_{i-2} a^i = 0 \\
 & C_0 p^2 + C_1 (1+p)^2 a + \sum_{i=2}^{\infty} ((i+p)^2 C_i + C_{i-2}) a^i = 0
 \end{aligned}$$

Karena $C_0 \neq 0$, maka $p=0$. Akibatnya $C_1=0$ dan untuk $i \geq 2, p=0$ diperoleh $(i+p)^2 C_i + C_{i-2} = 0 \Leftrightarrow C_i = -\frac{C_{i-2}}{(i+p)^2} = -\frac{C_{i-2}}{(i)^2}, i=2,3,\dots$. Relasi rekurensi ini mengatakan dua hal yaitu selalu memberikan koefisien genap dimulai dari C_0 , sedangkan koefisien ganjil $C_1 = C_3 = C_5 = \dots = 0$.

Diperhatikan bahwa

$$i = 2, \quad C_2 = \frac{-1}{2^2} C_0$$

$$i = 4, \quad C_4 = \frac{-1}{4^2} C_2 = \frac{(-1)^2}{4^2 2^2} C_0$$

⋮

$$i = 2s, \quad C_{2s} = \frac{(-1)^s}{(s!2^s)^2} C_0, \quad s = 1, 2, 3, \dots$$

maka

$$R(a) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i a^{i+p} = a^p \sum_{i=0}^{\infty} C_i a^i = a^0 \sum_{s=0}^{\infty} C_{2s} a^{2s} = \sum_{s=0}^{\infty} C_{2s} a^{2s}, \quad C_{2s} = \frac{(-1)^s}{(s!2^s)^2} C_0$$

(4.35)

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa Deret pada (4.35) konvergen menggunakan tes rasio.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{2(s+1)} a^{2(s+1)}}{C_{2s} a^{2s}} \right| = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{|a^{2(s+1)}| (-1)^{s+1} (s!2^s)^2}{((s+1)!2^{s+1})^2 (-1)^s |a|^{2s}} = -\frac{a^2}{4} \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{(s+1)^2} = 0, \text{ oleh}$$

karena nilai limit tersebut sama dengan nol, maka terbukti bahwa Deret pada (4.35) konvergen.

Jadi, diperoleh $R(a) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(s!2^s)^2} C_0 a^{2s} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(s!)^2} C_0 \left(\frac{a}{2}\right)^{2s}$ merupakan

Fungsi Bessel [9]

$$J_0(a) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(s!)^2} C_0 \left(\frac{a}{2}\right)^{2s} .$$

(4.36)

Oleh karena $a = r\sqrt{\lambda - \mu}$, maka diperoleh $R(a) = J_0(r\sqrt{\lambda_n - \mu_n})$.

Selanjutnya penyelesaian Persamaan (4.25a) adalah $T(t) = e^{-\alpha\lambda t}$. Berdasarkan (4.31), maka diperoleh

$$T_n(t) = e^{-\alpha\lambda_n t} .$$

(4.37)

Sehingga, berdasarkan (4.31), (4.36), (4.37) dan prinsip superposisi diperoleh penyelesaian Persamaan Panas pada koordinat tabung dimensi tiga (4.21) yaitu

$$U(r, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_n \sin \frac{n\pi}{\ell} z \right) J_0(r\sqrt{\lambda - \mu}) e^{-\alpha\lambda_n t}$$

(4.38)

Syarat awal dari (4.21) yaitu $U(r, z, 0) = U_0$, sehingga diperoleh

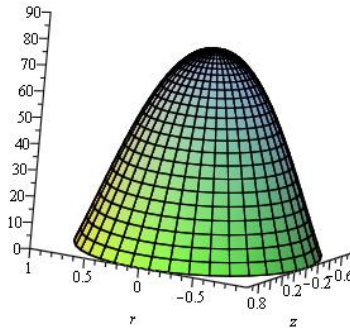
$$U(r, z, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(C_n \sin \frac{n\pi}{\ell} z \right) J_0(r\sqrt{\lambda - \mu}) = U_0$$

(4.39)

Persamaan (4.39) merupakan Deret Fourier-Bessel pada dimensi tiga dengan koefisien

$$C_n = \frac{\int_0^c U_0 J_0(r\sqrt{\lambda_n - \mu_n}) r dr}{\int_0^c J_0^2(r\sqrt{\lambda_n - \mu_n}) r dr}$$

4.3. Simulasi Model. Berikut diberikan simulasi dari Persamaan (4.38) dengan jari-jari kaleng=3 cm, tinggi kaleng=12 cm dan syarat awal $U(r, z, 0) = 90$, maka perpindahan panas akan tampak pada gambar berikut



Gambar 2

Berdasarkan Gambar 2, jika diberikan suhu awal 90, maka seiring dengan pertambahan jari-jari dan tinggi kaleng, panas akan merambat sehingga terjadi penurunan suhu. Artinya, pada selimut kaleng, akan lebih lama menerima perpindahan panas.

4.4. Nilai Sterilisasi Minuman. Sterilisasi minuman kemasan, dalam hal ini berbentuk kaleng, dilakukan untuk mengurangi risiko penyebab kerusakan makanan, seperti kerusakan nutrisi, kerusakan pigmen maupun rasa. Jika nilai sterilisasi diberikan dengan G dan $h(r, z, t)$ menyatakan konsentrasi mikroba di (r, z) saat waktu t , maka $h(R, z, t)$ menyatakan konsentrasi mikroba pada sekeliling (selimut) kaleng. Hancurnya mikroba akibat pemanasan akan mengikuti persamaan berikut

$$\frac{dh(R, z, t)}{dt} = -Kh(R, z, t) \quad (4.40)$$

dengan $h(R, z, t_0) = h_0$ menyatakan konsentrasi awal.

Penyelesaian Persamaan (4.40) adalah

$$\begin{aligned} \ln \frac{h}{h_0} &= -Kt \Leftrightarrow \frac{h}{h_0} = e^{-Kt} \Leftrightarrow \log \frac{h}{h_0} = \log e^{-Kt} \Leftrightarrow \log \frac{h}{h_0} = -Kt(0.4342) \\ \Leftrightarrow \log \frac{h}{h_0} &= \frac{-Kt}{2.303} \Leftrightarrow \log \frac{h}{h_0} = \frac{-t}{\gamma} \end{aligned}$$

Nilai $\gamma = \frac{2.303}{K}$ sangat dipengaruhi oleh suhu. Berdasarkan Kanann [4], semakin tinggi suhu pemanasan, maka semakin pendek waktu yang diperlukan untuk menghancurkan mikroba. Jika suhu ω dibutuhkan untuk mereduksi nilai γ yang tergantung suhu acuan U_{acuan} , maka diperoleh

$$\gamma = \gamma_{acuan} \exp \left(2.303 \frac{U(R, z, t) - U_{acuan}}{\omega} \right).$$

Di lain pihak, karena $\gamma = \frac{2.303}{K}$, maka diperoleh

$$K = \frac{2.303}{\gamma_{acuan} \exp\left(\frac{2.303}{\omega} \frac{U(R, z, t) - U_{acuan}}{\omega}\right)}$$
 dan dari Persamaan (4.40) diperoleh

$$\begin{aligned} \ln \frac{h}{h_0} &= - \int_{t_0}^{t_i} K dt \Leftrightarrow \ln \frac{h}{h_0} = - \int_{t_0}^{t_i} \frac{2.303}{\gamma_{acuan} \exp\left(\frac{2.303}{\omega} \frac{U(R, z, t) - U_{acuan}}{\omega}\right)} dt \\ &\Leftrightarrow \ln \frac{h}{h_0} = - \frac{2.303}{\gamma_{acuan}} \int_{t_0}^{t_i} \exp\left(\frac{2.303}{\omega} \frac{U(R, z, t) - U_{acuan}}{\omega}\right)^{-1} dt \end{aligned}$$

Nilai sterilisasi pada waktu t didefinisikan dengan [5]

$$G_0(t) = \int_{t_0}^{t_i} \exp\left(\frac{2.303}{\omega} \frac{U(R, z, t) - U_{acuan}}{\omega}\right)^{-1} dt$$

Sehingga pada akhir waktu, dibuat sedemikian sehingga $G_0(t_i) \geq G$, $U(R, z, t) \leq U_i$

dan konsentrasi mikroorganisme $h(R, z, t) \leq h_0 \exp\left(-\frac{2.303}{\gamma_{acuan}} G_0\right)$.

5. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan perpindahan panas pada minuman yang dikemas dalam kaleng, dapat disimpulkan

1. Persamaan panas dimensi tiga dengan koordinat tabung adalah

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

dengan $U(r, z, t)$ menyatakan suhu di lokasi kaleng (r, z) dengan $0 \leq r \leq R$ dan $0 \leq z \leq \ell$ saat waktu t . Suhu pada sekeliling, alas dan tutup kaleng dibuat tetap 0° , sehingga syarat awal dan syarat batas diberikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} U(r, z, t_0 = 0) &= U_0, \text{ dengan } t_0 \text{ menyatakan waktu mula-mula, } 0 \leq r \leq R \text{ dan } \\ &0 \leq z \leq \ell \\ U(r, z, t) &= 0, \quad 0 \leq z \leq \ell \end{aligned}$$

$$U(r, 0, t) = 0, \quad 0 \leq r \leq R$$

$$U(r, \ell, t) = 0, \quad 0 \leq r \leq R.$$

2. Nilai sterilisasi untuk jaminan keamanan mutu minuman harus memenuhi $G_0(t_i) \geq G$, $U(R, z, t) \leq U_i$ dan konsentrasi mikroorganisme

$$h(R, z, t) \leq h_0 \exp\left(-\frac{2.303}{\gamma_{acuan}} G_0\right), \quad \text{dengan}$$

$$G_0(t) = \int_{t_0}^{t_i} \exp\left(2.303 \frac{U(R, z, t) - U_{acuan}}{\omega}\right)^{-1} dt.$$

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Holdsworth, D., Ricardo S. *Thermal Processing of Packaged Food*. Springer (2007)
- [2] Kannan, A., Gourisankar S., Heat Transfer Analysis of Canned Food Sterilization in a Still Retort. *Journal of Food Engineering*. (2008)
- [3] Serth, R. *Heat Transfer Principal and Applications*. Elsevier Science & Technology Books. (2007)
- [4] Kannan, A., Korribili N., Estimation of Energy Consumption in Thermal Sterilization of Canned Liquid Foods in Still Retort. *Journal Engineering Applications of Computational Fluids Mechanics* Vol 1. No.4. pp. 288-303 (2007)
- [5] Dedik Ardian, Lukman H., Mardlijah. Heat equation analize and sterilized value of canned food sterilization process. 2007. ITS Surabaya.
- [6] Muchtadi T.R. *Teknologi Proses Pengolahan Pangan*. Bogor: ITP IPB. (2008)
- [7] Nurmayanti. 2012. *Penjualan Minuman Siap Saji*. <http://www.indonesiainancetoday.com> diakses tanggal 24 Januari 2012.
- [8] Cengel, Yunus. A., *Heat and Mass Transfer: A Practical Approach*. McGraw Hill (2006).
- [9] Kreyszig, E., *Advanced Engineering Mathematics 9th Edition*. John Wiley & Sons. (2006)