

OPTIMISASI PERENCANAAN PRODUKSI MODEL PROGRAM LINEAR MULTI OBJEKTIF DE NOVO DENGAN PENDEKATAN *GOAL PROGRAMMING*

DWI LESTARI¹

¹Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY, dwilestari@uny.ac.id

ABSTRAK. Paper ini bertujuan untuk menganalisa masalah perencanaan produksi suatu barang. Beberapa hal yang harus diperhatikan dalam masalah perencanaan produksi yaitu berapa jumlah barang yang harus diproduksi, berapa ongkos produksi yang harus dikeluarkan, berapa laba yang ingin diperoleh, dan berapa besar sumber daya atau budget yang disediakan. Perusahaan berusaha memenuhi jumlah permintaan konsumen salah satunya dengan meningkatkan volume produksinya. Peningkatan tersebut tentunya akan diikuti biaya produksi besar yang harus perusahaan tekan seminimal mungkin sehingga menghasilkan laba yang maksimal. Di sisi lain, perusahaan berusaha memaksimalkan sumber daya atau budget sehingga tidak ada sumber daya yang tersisa. Berkaitan dengan masalah tersebut yang memiliki tujuan lebih dari satu, dibentuk model program linear multi objektif De Novo. Model ini disusun dengan harapan kendala sumber daya tidak menghasilkan sisa. Dalam menyelesaikan model ini digunakan pendekatan *goal programming*. Pendekatan dasar dari *goal programming* adalah untuk menetapkan suatu tujuan yang dinyatakan dengan angka tertentu untuk setiap tujuan, merumuskan suatu fungsi tujuan, dan kemudian mencari penyelesaian dengan meminimumkan jumlah penyimpangan-penyimpangan dari fungsi tujuan. Selanjutnya, diberikan contoh penerapan model ini pada perencanaan produksi suatu barang.

Kata kunci: perencanaan produksi, program linear multi objektif De Novo, goal programming.

1. Pendahuluan

Dalam persaingan usaha, suatu perusahaan berusaha untuk mendapatkan laba yang maksimal. Jumlah permintaan pasar yang meningkat mendorong perusahaan untuk melakukan antisipasi terhadap permintaan tersebut, sehingga dapat memuaskan konsumen. Salah satu cara antisipasi yang bisa dilakukan adalah dengan meningkatkan kapasitas produksi atau perencanaan produksi yang optimal. Dalam Nasution [1] perencanaan produksi adalah perencanaan dan pengorganisasian sebelumnya mengenai orang, bahan, mesin dan peralatan lain serta modal yang diperlukan untuk memproduksi barang pada suatu periode

tertentu di masa depan sesuai dengan yang diperkirakan atau diramalkan. Perencanaan produksi meliputi biaya produksi yang dikeluarkan harus seminimal mungkin dengan tujuan memperoleh laba yang maksimal dan kapasitas produksi terpenuhi.

Zeleny [2] telah mengembangkan model De Novo dari single objektif menjadi multi objektif. Selain itu Fiala [3] dalam penelitiannya mengembangkan model program linear multi objektif De Novo. Model ini dibuat untuk mendapatkan sistem yang optimal dengan membentuk kembali himpunan layak. Selanjutnya Dwi, dkk[4] telah menggunakan pendekatan *goal programming* untuk menyelesaikan masalah program linear multi tujuan. Penelitian Nurullah [5] telah mengembangkan metode *goal programming* untuk menyelesaikan model program linear multi objektif De Novo. Paper akan membahas mengenai analisa pendekatan *goal programming* untuk menyelesaikan model program linear multi objektif dan menerapkannya pada perencanaan produksi suatu barang. Model yang terbentuk menggunakan pendekatan *Goal Programming* sehingga dihasilkan persentase penyimpangan/deviasi nilai fungsi tujuan terhadap nilai solusi ideal. Pada penelitian ini digunakan data dari perusahaan yang memproduksi roti dengan empat kombinasi produk.

2. Model Matematis

Dalam kehidupan nyata banyak permasalahan yang dapat diselesaikan menggunakan model matematis. Proses penyelesaian masalah tersebut dikenal dengan nama pemodelan matematika. Dalam pemodelan matematika dipelajari terdapat tahap-tahap yang sistematis. Karena kondisi real yang kompleks maka beberapa asumsi perlu dibangun sehingga model matematis yang terbentuk dapat diselesaikan dengan lebih mudah. Namun demikian, asumsi model yang dibuat sebaiknya diminimalisir supaya solusi yang didapat mendekati permasalahan nyata. Berbagai model matematis yang dapat dipakai salah satunya adalah program linear. Banyak sekali masalah nyata yang dapat diselesaikan dengan program linear. Masalah yang membutuhkan jawaban optimal (maksimal atau minimal) dapat menggunakan model program linear.

Masalah program linear memiliki satu fungsi tujuan (*single objective*) atau banyak fungsi tujuan (*multi objective*). Pada kenyataannya, permasalahan nyata kadang memiliki fungsi tujuan lebih dari satu, dalam kasus ini dibahas permasalahan yang memiliki fungsi tujuan lebih dari satu. Selain itu, beberapa fungsi tujuan yang ada bisa jadi saling bertentangan misalnya memaksimalkan laba dan meminimumkan jam lembur. Oleh karena itu diperlukan model program linear multi objektif. Selanjutnya, perlu adanya perluasan model yang dibentuk untuk menyelesaikan permasalahan yang melibatkan ketersediaan budget yang akan dimaksimalkan sehingga tidak menimbulkan sisa. Dalam hal ini dibentuk model yang baru yakni model program linear multi objektif De Novo. Model ini merupakan perluasan dari model program linear yang menyertakan kendala budget sehingga diharapkan tidak ada kendala yang tersisa. Adapun bentuk model program linear multi objektif De Novo sebagai berikut:

Memaksimalkan $Z_k = C^1 x$

Meminimumkan $W_s = C^2 x$

dengan kendala:

$$Ax - b \leq 0$$

$$pb \leq B$$

(1)

$$x \geq 0$$

dimana $C^1 x = \sum_{j=1}^n c_{kj} x_j$, $k=1,2,\dots,l$ dan $C^2 x = \sum_{j=1}^n c_{sj} x_j$, $s=1,2,\dots,r$. Matriks

$A \in R^{m \times n}$, $p \in R^m$, $b \in R^m$ dan B jumlah budget.

Dari hubungan pertidaksamaan $pAx \leq pb \leq B$ sehingga model (1) dapat ditulis sebagai:

Memaksimalkan $Z_k = C^1 x$

Meminimumkan $W_s = C^2 x$

dengan kendala:

$$Vx \leq B$$

$$x \geq 0$$

(2)

$$\begin{aligned} \text{dengan: } Z_k &= (Z_1, Z_2, \dots, Z_l) \\ W_s &= (W_1, W_2, \dots, W_r) \\ V &= (V_1, V_2, \dots, V_n) = pA \in R^n. \end{aligned}$$

Permasalahan model (2) diselesaikan dengan metode optimisasi multi kriteria yakni mencari solusi untuk setiap fungsi tujuan sehingga diperoleh $Z_k^* = (Z_1^*, Z_2^*, \dots, Z_l^*)$ dan $W_s^* = (W_1^*, W_2^*, \dots, W_r^*)$.

Oleh karena diperoleh solusi optimum yang berbeda untuk masing-masing fungsi tujuan maka perlu dicapai suatu nilai Z_k^* dan W_s^* sesuai dengan budget yang diberikan. Selanjutnya, solusi x^* dan b^* diperoleh dengan menyelesaikan model berikut:

Meminimumkan Vx

dengan kendala:

$$\begin{aligned} C^1 x &\geq Z_k^* \\ C^2 x &\geq W_s^* \\ x &\geq 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Menyelesaikan model (3) ekuivalen dengan meminimumkan budget sehingga diperoleh B^* . Nilai B^* yang melebihi budget B kemudian diselesaikan dengan *optimum-path ratio* yakni

$$r = \frac{B}{B^*}. \tag{4}$$

Solusi akhir diperoleh menggunakan formula:

$$x = rx^*, b = rb^*, Z = rZ_k^* \text{ dan } W = rW_s^*. \tag{5}$$

Metode penyelesaian model program linear multi objektif De Novo dengan telah digunakan oleh Zeleny[2]. Selanjutnya dikembangkan pendekatan *Goal Programming* untuk menyelesaikan masalah program linear multi objektif De Novo [5]. *Goal programming* merupakan perluasan dari program linear (*linear programming*) untuk mencapai tujuan atau sasaran yang diinginkan. Pendekatan dasar dari *goal programming* adalah untuk menetapkan suatu tujuan yang dinyatakan dengan angka tertentu untuk setiap tujuan, merumuskan suatu fungsi tujuan, dan kemudian mencari penyelesaian

dengan meminimumkan jumlah (tertimbang) penyimpangan-penyimpangan dari fungsi tujuan [6].

Menurut Li dan Lee dalam Nurullah [5], digunakan solusi ideal positif dan solusi ideal negatif untuk pendekatan *Goal Programming* dalam menyelesaikan program linear multi objektif De Novo, yakni:

Solusi positif ideal sebagai berikut:

$$I^+ = \{Z_1^+, \dots, Z_l^+; W_1^+, \dots, W_r^+\} \quad (6)$$

dengan $Z_k^+ = \text{maks } Z_k$, dan $W_s^+ = \text{min } W_s$.

Solusi negatif ideal sebagai berikut:

$$I^- = \{Z_1^-, \dots, Z_l^-; W_1^-, \dots, W_r^-\} \quad (7)$$

dengan $Z_k^- = \text{min } Z_k$, dan $W_s^- = \text{maks } W_s$.

3. Model program linear multi objektif De Novo dengan pendekatan *Goal Programming*.

Goal programming merupakan metode yang tepat digunakan dalam pengambilan keputusan untuk mencapai tujuan-tujuan yang bertentangan di dalam batasan-batasan dalam perencanaan produksi. Metode *goal programming* juga membantu memperoleh solusi optimal yang paling mendekati sasaran yang diinginkan. Adapun model program linear multi objektif De Novo dengan pendekatan *Goal Programming* disajikan sebagai berikut:

Meminimumkan d

dengan kendala:

$$\begin{aligned} Z_k + n_k - p_k &= Z_k^* \\ \alpha_k \frac{n_k}{t_k} &\leq d \\ W_s + n_s - p_s &= W_s^* \end{aligned} \quad (8)$$

$$\beta_s \frac{p_s}{t_s} \leq d$$

$$Vx \leq B$$

untuk $k=1,2,\dots,l$ dan $s=1,2,\dots,r$. Nilai d merupakan deviasi maksimum, α_k dan β_s adalah bobot positif, serta $t_k = Z_k^+ - Z_k^-$ dan $t_s = W_s^+ - W_s^-$.

Solusi model (8) menggambarkan seberapa besar deviasi fungsi tujuan terhadap solusi ideal. Laju penyimpangan/deviasi disimbolkan sebagai d dengan nilai $0 \leq d \leq 1$. Nilai d sama dengan nol artinya nilai fungsi tujuan dicapai pada nilai ideal positif. Sedangkan jika nilai d sama dengan satu artinya nilai fungsi tujuan dicapai pada nilai ideal negatif. Dengan kata lain nilai d berarti menunjukkan persentase nilai pencapaian fungsi tujuan terhadap nilai solusi ideal.

4. Aplikasi Model untuk Perencanaan Produksi.

Model program linear multi objektif de Novo akan diaplikasikan pada perencanaan produksi di sebuah perusahaan roti. Input model berupa data produksi, permintaan produk, ketersediaan bahan baku, dan keuntungan. Dalam hal ini perhitungan keuntungan diasumsikan tidak menyertakan biaya tenaga. Output dari model berupa solusi optimum yaitu jumlah kombinasi produk yang direncanakan untuk diproduksi sehingga menghasilkan keuntungan maksimal dan memenuhi kapasitas produksi. Adapun tahapan membentuk model diawali dengan (1) meramalkan jumlah permintaan produk untuk satu tahun yang akan datang. Hasil peramalan merupakan batas kendala permintaan produk. (2) menentukan fungsi tujuan, untuk model ini yaitu memaksimalkan keuntungan dan memenuhi kapasitas produksi. (3) menentukan fungsi kendala biaya bahan baku yang dibatasi oleh budget yang diberikan perusahaan. (4) menentukan solusi meta optimum. (5) menentukan solusi ideal positif dan solusi ideal negatif. (5) selanjutnya membentuk model *Goal Programming* dengan fungsi tujuan meminimumkan penyimpangan pada kedua fungsi tujuan model de Novo.

Berdasarkan data dari perusahaan produksi roti "XYZ",

Misalkan, X_1 = Rata – rata penjualan per bulan kue jenis I

X_2 = Rata – rata penjualan per bulan kue jenis II

X_3 = Rata – rata penjualan per bulan kue jenis III

X_4 = Rata – rata penjualan per bulan kue jenis IV

dibentuk model multi objektif De Novo sebagai berikut.

Memaksimalkan

$$Z_1 = 15.000 X_1 + 13.000 X_2 + 15.000 X_3 + 10.000 X_4 \text{ (Profit)}$$

$$Z_2 = 4 X_1 + 1,5 X_2 + X_3 + 3 X_4 \text{ (Kapasitas produksi)}$$

Fungsi Kendala :

Biaya bahan baku (*budget*)

$$8.430 X_1 + 8.630 X_2 + 6.760 X_3 + 19.780 X_4 \leq 6.500.000$$

Permintaan Produk

$$X_1 \leq 250$$

$$X_2 \leq 225$$

$$X_3 \leq 200$$

$$X_4 \leq 225$$

(9)

Kendala non negatif

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

$$X_3 \geq 0$$

$$X_4 \geq 0$$

Berdasarkan model tersebut diperoleh solusi $Z^* = \{10230490; 1709,2\}$ dengan hasil selengkapnya pada tabel 1.

Tabel 1. Solusi Meta Optimum

Variabel keputusan	Z_1^*	Z_2^*
X_1	250	250
X_2	225	225
X_3	200	0
X_4	55,55	123,9

Adapun solusi ideal positif dan solusi ideal negatifnya yaitu:

$$I^+ = \{10230490; 1709,2\} \quad (10)$$

$$I^- = \{5366726; 996,23\}$$

Selanjutnya bentuk model De Novo Goal Programming model (9) sebagai berikut:

Meminimumkan d

dengan kendala:

$$15.000 X_1 + 13.000 X_2 + 15.000 X_3 + 10.000 X_4 + n_1 - p_1 = 10230490$$

$$4 X_1 + 1,5 X_2 + X_3 + 3 X_4 + n_2 - p_2 = 1709.201$$

$$0.0000002056 n_1 \leq d$$

$$0.00140259 n_2 \leq d$$

$$X_1 \leq 250$$

$$X_2 \leq 225$$

$$X_3 \leq 200$$

$$X_4 \leq 225 \quad (11)$$

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

$$X_3 \geq 0$$

$$X_4 \geq 0$$

Berdasarkan perhitungan menggunakan LINGO, diperoleh nilai $d = 0.00045$ dan

$$X_1 = 250$$

$$X_2 = 225$$

$$X_3 = 12,6$$

$$X_4 = 119.6$$

Ini berarti, persentase penyimpangan pencapaian nilai fungsi tujuan terhadap solusi ideal positif sebesar 0,045%. Jadi, hasil perhitungan dengan model De Novo Goal Programming disajikan pada tabel 2.

Tabel 2. Hasil perhitungan dengan model (11)

Variabel keputusan	(dalam dus)
X_1	250
X_2	225
X_3	13
X_4	120

dengan jumlah keuntungan Rp 8.059.891,00 dan jumlah kombinasi produk yang diproduksi 608 dus, yaitu roti jenis I diproduksi sebanyak 250 dus, roti jenis II diproduksi sebanyak 225 dus, roti jenis III diproduksi sebanyak 13 dus, dan roti jenis IV diproduksi sebanyak 120 dus. Dalam hal ini, terdapat peningkatan jumlah keuntungan sebesar 47,75% dari keuntungan awal yakni Rp 5.455.000,00. Selain itu, terjadi peningkatan produksi sebesar 51,8% dari produksi awal yakni 400 dus. Berdasarkan perhitungan dengan model De Novo –Goal Programming, pihak pengambil keputusan dapat membandingkan kriteria keputusan yang optimal.

5. Kesimpulan

Berbagai masalah dalam kehidupan dapat dimodelkan ke bentuk

matematis. Salah satunya dengan Model program linear multi objektif De Novo. Pada penelitian ini dibahas pendekatan *Goal Programming* untuk menyelesaikan model program linear multi objektif De Novo. Langkah kerja metode ini adalah dengan meminimumkan deviasi nilai fungsi tujuan terhadap solusi ideal. Berdasarkan data produksi roti perusahaan “XYZ” diperoleh hasil terdapat penyimpangan/deviasi nilai fungsi tujuan terhadap solusi ideal sebesar 0,045%. Adapun peningkatan nilai fungsi tujuan dibandingkan dengan nilai awal yaitu peningkatan jumlah keuntungan sebesar 47,75% dan peningkatan produksi sebesar 51,8%. Dengan demikian, kriteria pengambilan keputusan ini dapat menjadi bahan pertimbangan perusahaan. Sebagai bahan penelitian selanjutnya, dapat diselidiki perbandingan keefektifan antara penyelesaian permasalahan perencanaan produksi menggunakan model program linear multi objektif De Novo dan model program linear multi objektif De Novo- *Goal Programming*

6. Daftar Pustaka

- [1] Nasution, Arman Hakim, *Perencanaan dan Pengendalian Produksi*. Guna Widya, Bandung, 1999.
- [2] Zeleny, M., The Evolution of Optimality: De Novo Programming; G.A. Coello Coello et al. (Eds.): EMO 2005, LNCS 3410, pp. 1-13.
- [3] Fiala, P., Multiobjective De Novo Linear Programming, Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Fac. rer. nat. *Mathematica*, 2011 Vol.50 No.2 , pp.29-36
- [4] Dwi Lestari, dkk. Optimisasi Persediaan Bahan Bakar Minyak (BBM) di Yogyakarta Menggunakan Goal Programming. *Prosiding*, Seminar Nasional Penelitian 2013. Yogyakarta, FMIPA UNY
- [5] Nurullah Umarusman, Min-Max Goal Programming Approach For Solving Multi Objective De Novo Programming Problems. *International Journal of Operation Research* Tahun 2013 Vol 10 No 2, 92-99.
- [6] Hillier, F. dan Lieberman, G. 1994. Pengantar Riset Operasi. Jilid 1 Edisi Kelima, Jakarta: Erlangga.

Lampiran

DATA HASIL PRODUKSI BULAN FEB 2013 –MARET 2014

dalam satuan dos

Bulan	Jenis Produk			
	Bolu Gulung	Bolu Kismis	Bolu Kenari	Mandarin
Feb	250	50	55	100
Mar	200	50	50	100
April	250	65	80	50
Mei	200	100	50	100
Juni	200	50	50	50
Juli	150	50	50	100
Agst	200	50	55	100
Sept	200	100	50	80
Okt	200	75	50	55
Nov	150	50	50	150
Des	100	55	75	100
Jan	300	50	55	50
Feb	200	45	50	100
Mar	200	50	50	55
Total	2.800	840	770	1.190
Rata-rata per bulan	200	60	55	85

DATA PERMINTAAN PRODUK BULAN FEB 2013 – MARET

2014

Variabel	Jenis Produk	Permintaan	Rata – rata Permintaan per bln
X_1	Bolu Gulung	3500	250
X_2	Bolu Kismis	3150	225
X_3	Bolu Kenari	2800	200
X_4	Mandarin	3150	225

DATA KOMPOSISI BAHAN BAKU PER UNIT PRODUK

Jenis Bahan Baku	Jenis Produk			
	Bolu Gulung	Bolu Kismis	Bolu Kenari	Mandarin
Telur (kg)	0,4375	0,25	0,1875	0,5
Gula Pasir (kg)	0,05	0,15	0,08	0,3
Tepung Terigu (kg)	0,04	0,1	0,08	0,180
Margarin (kg)	0,05	0,075	0,03	0,2
Baking Powder (kg)	0,02	0,02	-	0,02
Susu Kental Manis (kg)	0,02	0,02	-	0,03
Gula Halus (kg)	0,1	-	-	-
Kismis (kg)	-	0,03	-	-
Emulsifier (kg)	-	-	0,015	0,02
Kenari (kg)	-	-	0,03	-
Tepung Maizena (kg)	-	-	-	0,02
Selai nanas (kg)	-	-	-	0,1

DAFTAR HARGA BAHAN BAKU

No.	Jenis Bahan Baku	Harga
1.	Telur (kg)	Rp 10.000,-
2.	Gula Pasir (kg)	Rp 9.500,-
3.	Tepung Terigu (kg)	Rp 7.500,-
4.	Margarin (kg)	Rp 25.000,-
5.	Baking Powder (kg)	Rp 16.500,-
6.	Susu Kental Manis (kg)	Rp 35.000,-
7.	Gula Halus (kg)	Rp 10.000,-
8.	Kismis (kg)	Rp 35.000,-

9.	Emulsifier (kg)	Rp 25.000,-
10.	Kenari (kg)	Rp 80.000,-
11.	Tepung Maizena (kg)	Rp 10.000,-
12.	Selai nanas (kg)	Rp 35.000,-

DATA KETERSEDIAAN BAHAN BAKU

BULAN FEB 2013 – MARET 2014

Per 1 (satu) bulan

No.	Jenis Bahan Baku	Jumlah yang tersedia (Kg)
1.	Telur (Kg)	200
2.	Gula Pasir (kg)	80
3.	Tepung Terigu (kg)	60
4.	Margarin (kg)	60
5.	Baking Powder (kg)	8
6.	Susu Kental Manis (kg)	12
7.	Gula Halus (kg)	23
8.	Kismis (kg)	3
9.	Emulsifier (kg)	4
10.	Kenari (kg)	2
11.	Tepung Maizena (kg)	4
12.	Selai nanas (kg)	15

KEUNTUNGAN MASING – MASING PRODUK

No.	Jenis Produk	Keuntungan (Rp)
1.	Bolu Gulung	Rp 15.000,-
2.	Bolu Kismis	Rp 13.000,-
3.	Bolu Kenari	Rp 15.000,-
4.	Mandarin	Rp 10.000,-

Keterangan : X_1 = Rata – rata penjualan per bulan bolu gulung

X_2 = Rata – rata penjualan per bulan bolu kismis

X_3 = Rata – rata penjualan per bulan bolu kenari

X_4 = Rata – rata penjualan per bulan bolu mandarin

Lingo 13.0 - [Lindo Model - Lingo17]

File Edit LINGO Window Help

ifungsi tujuan;
Min d

subject to
 $15.000x_1 + 13.000x_2 + 15.000x_3 + 10.000x_4 + n_1 - p_1 = 10230.490$
 $4x_1 + 1.5x_2 + x_3 + 3x_4 + n_2 - p_2 = 1709.201$
 $0.0000002056n_1 - d \leq 0$
 $0.00140259n_2 - d \leq 0$
 $8.430x_1 + 8.630x_2 + 6.760x_3 + 19.780x_4 = 6500.000$
 $X_1 \leq 250$
 $X_2 \leq 225$
 $X_3 \leq 200$
 $X_4 \leq 225$
 $x_1 \geq 0$
 $x_2 \geq 0$
 $x_3 \geq 0$
 $x_4 \geq 0$

end

Lingo 13.0 - [Solution Report - KNM-GP-budget65]

File Edit LINGO Window Help

Global optimal solution found.
 Objective value: 0.4462750E-03
 Infeasibilities: 0.000000
 Total solver iterations: 5

Model Class: LP

Total variables: 9
 Nonlinear variables: 0
 Integer variables: 0

Total constraints: 14
 Nonlinear constraints: 0

Total nonzeros: 29
 Nonlinear nonzeros: 0

Variable	Value	Reduced Cost
D	0.4462750E-03	0.000000
X1	250.0000	0.000000
X2	225.0000	0.000000
X3	12.59561	0.000000
X4	119.5957	0.000000
N1	2170.598	0.000000
P1	0.000000	0.1926599E-06
N2	0.3181793	0.000000
P2	0.000000	0.8827675E-04

Row	Slack or Surplus	Dual Price
-----	------------------	------------

For Help, press F1

Start [Taskbar icons]