

# **Chaos Dimensi Dua atau Chaotik Kuat Fungsi Horseshoe**

Rosita Kusumawati, S.Si.  
Jurusan Pendidikan Matematika Universitas Negeri Yogyakarta  
sita\_ugm97@yahoo.com

## **Abstrak**

Pada makalah ini akan dibahas kondisi chaotik pada sistem dinamik yang bergantung pada dua variabel. Makalah ini melengkapi tulisan penulis sebelumnya. Dalam makalah ini akan dipelajari kondisi chaos pada dimensi dua menggunakan analogi kondisi chaos pada dimensi satu dan contohnya pada fungsi horseshoe.

kata kunci: chaos, dimensi dua, horseshoe

## **I. Pendahuluan**

Salah satu cabang yang dipelajari dalam matematika adalah sistem dinamik, yaitu salah satu cabang matematika yang mempelajari proses-proses gerakan. Beberapa contoh sistem dinamik yang bergantung pada banyak variabel yaitu pergerakan planet-planet dan bintang-bintang, pergerakan grafik permintaan barang yang berubah terhadap waktu dan pergerakan bola pada roda rolet, pergerakan populasi. Sistem dinamik dapat berperilaku aneh atau dalam kondisi chaotik. Perilaku atau kondisi chaotik dapat terjadi pada sistem dinamik dengan banyak variable maupun sederhana. Pada makalah ini akan dibahas kondisi chaotik pada sistem dinamik yang bergantung pada dua variabel. Makalah ini melengkapi tulisan penulis sebelumnya.

## **II. Dasar Teori**

Sebelumnya akan dibahas beberapa definisi dan teorema yang diperlukan untuk mendukung kondisi chaotik pada dimensi dua.

## **III. Kondisi Chaos**

Konsep dari kondisi chaotik pada sistem dinamik yaitu ketergantungan sensitif pada kondisi awal.

### Definisi

Diberikan interval  $S$  dan fungsi  $f: J \rightarrow J$ . Fungsi  $f$  mempunyai ketergantungan sensitif pada kondisi awal pada titik  $x$  jika terdapat  $\varepsilon > 0$  sehingga untuk setiap  $\delta > 0$ , terdapat  $y \in J$  dan  $n \in \mathbb{N}$  dengan sifat  $|x - y| < \delta$  dan  $|f^n(x) - f^n(y)| < \delta$ .

### Definisi

Fungsi  $f$  dikatakan chaotik kuat jika

- i.  $f$  chaotik
- ii.  $f$  memiliki titik periodik yang padat dalam domainnya ( $D_f$ )
- iii.  $f$  transitif

### IV. Fungsi Horseshoe

Akan dibuktikan bahwa fungsi horseshoe chaotik kuat. Fungsi horseshoe terbukti chaotik kuat karena fungsi horseshoe konjugat terhadap fungsi  $\sigma: Z \rightarrow Z$  yang chaotik kuat.

Akan dibuktikan bahwa fungsi  $\sigma: Z \rightarrow Z$  yang chaotik kuat.

### Teorema

Fungsi  $\sigma: Z \rightarrow Z$  merupakan fungsi chaotik kuat

Bukti:

- i. Akan dibuktikan bahwa fungsi  $\sigma: Z \rightarrow Z$  ketergantungan sensitif pada kondisi awal. Dengan kata lain jika diambil sembarang  $z \in Z$  maka terdapat  $\varepsilon > 0$  sedemikian sehingga untuk setiap  $\delta > 0$ , terdapat  $x \in Z$  dan bilangan bulat  $n > 0$  dengan sifat  $\|x - z\| < \delta$  dan  $\|\sigma^{n+1}(x) - \sigma^{n+1}(z)\| > \varepsilon$ . Ambil sembarang  $z = \dots z_3 z_2 z_1 \dots \in Z$  maka terdapat  $x \in Z$  dengan  $x_k = z_k$ , untuk setiap  $k$  dengan  $|k| \leq n$  dan  $x_{n+1} \neq z_{n+1}$  sehingga  $\|x - z\| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|x_k - z_k|}{2^{|k|}} \leq \frac{1}{2^{n-1}} < \delta$ . Untuk bilangan bulat  $n > 0$ ,  $\sigma^{n+1}(z) = \dots z_n \cdot z_{n+1} \dots$  dan  $\sigma^{n+1}(x) = \dots x_n \cdot x_{n+1} \dots$  dapat diperoleh  $\|\sigma^{n+1}(x) - \sigma^{n+1}(z)\| \geq 1 > \varepsilon$ . Terbukti bahwa fungsi memiliki ketergantungan

sensitif pada kondisi awal pada, untuk  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ,  $\delta > 0$ , dan  $n$  yang sangat besar sehingga  $\frac{1}{2^{n-1}} < \delta$ .

- ii. Akan dibuktikan bahwa fungsi  $\sigma : Z \rightarrow Z$  mempunyai himpunan titik periodik yang padat dalam domainnya. Ambil sembarang  $z = \dots z_3 z_2 z_1 \dots \in Z$  dan  $n$  sembarang bilangan bulat positif. Jika  $x$  adalah titik periodik periode  $2n+1$ .
- iii. Akan dibuktikan bahwa fungsi  $\sigma : Z \rightarrow Z$  transitif. Dapat ditunjukkan bahwa orbit dari  $z^*$  padat dalam  $Z$ .

Akan dibuktikan bahwa ada fungsi  $h: C^* \rightarrow Z$  merupakan fungsi satu-satu dan pada

Akan dibuktikan bahwa ada fungsi  $h: C^* \rightarrow Z$  kontinu. Dan karena fungsi  $h: C^* \rightarrow Z$  kontinu dan merupakan fungsi satu-satu dan pada, maka jelas fungsi  $h: Z \rightarrow C^*$  juga kontinu.

## V. Simpulan

Kondisi chaos tercapai bila ada ketergantungan sensitif pada kondisi awal. Suatu sistem dikatakan chaotic kuat jika memenuhi kondisi chaos, mempunyai himpunan titik periodik yang padat dalam domainnya, dan bersifat transitif. Fungsi horseshoe terbukti chaotic kuat karena fungsi horseshoe konjugat terhadap fungsi yang chaotic kuat pada

## Daftar Pustaka

Bartle and Sherbert, 1982, *Introduction to Real Analysis*, John Wiley & Sons, Canada, United State of America.

Gullick, Denny, 1992, *Encounter With Chaos*, International Edition, McGraw-Hill, Inc., Singapore.