ANALISIS KESTABILAN PENYEBARAN PENYAKIT CAMPAK (*MEASLES*) DENGAN VAKSINASI MENGGUNAKAN MODEL ENDEMI *SIR*

Marhendra Ali Kurniawan
Fitriana Yuli S, M.Si
Jurdik Matematika FMIPA UNY

Abstrak: Makalah ini bertujuan untuk mengkaji model *SIR* dari penyebaran penyakit campak dengan vaksinasi, mencari titik kesetimbangan model, menganalisis kestabilan di sekitar titik kesetimbangan, serta menginterpretasikan perilaku solusi pada populasi *susceptible, infected*, dan *recovered*. Terdapat dua titik kesetimbangan model yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit ($\bar{E}$) dan titik kesetimbangan endemi (E^*) . Berdasarkan titik kesetimbangan yang diperoleh, selanjutnya dapat diketahui kriteria kestabilan di sekitar titik kesetimbangan yang dilihat dari nilai eigennya (λ). Titik kesetimbangan ($\bar{E}$) stabil asimtotik jika $\lambda_{1,2} < 0$ dan jika $\lambda_{1,2} > 0$ titik kesetimbangan endemi (E^*) tidak stabil.

Kata kunci: model *SIR* dengan vaksinasi, titik kesetimbangan, dan analisis kestabilan di sekitar titik kesetimbangan.

A. PENDAHULUAN

Perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi, serta perubahan lingkungan hidup dapat mempengaruhi perubahan pola penyakit yang dapat menimbulkan endemi dan membahayakan kesehatan masyarakat. Salah satu penyakit yang menyebabkan endemi yaitu penyakit campak (*Measles*). Oleh karena itu perlu adanya tindakan pencegahan untuk mengurangi laju penyebaran penyakit tersebut, tindakan yang dinilai paling efektif untuk mencegah penyebaran penyakit adalah dengan cara vaksinasi. Kejadian pencegahan penularan wabah penyakit campak yang terjadi pada suatu populasi dapat dimodelkan ke dalam bentuk matematis, salah satunya adalah model *SIR* (*Susceptible, Infected, Recovered*).

B. KONSTRUKSI MODEL

Asumsi – asumsi yang digunakan dalam model penyebaran penyakit campak adalah sebagai berikut:

1. Populasi tidak tertutup. Oleh karena itu, ada populasi yang masuk atau keluar dari populasi tersebut. Total populasi diasumsikan tetap atau konstan.
2. Penyebaran penyakit terjadi pada populasi yang bersifat tidak tertutup sehingga pengaruh migrasi diperhatikan. Proses migrasi hanya terjadi pada populasi *recovered*
3. Laju kelahiran tidak sama dengan laju kematian. Setiap individu yang baru lahir diasumsikan dalam keadaan sehat tetapi masih dapat terinfeksi penyakit karena belum kebal terhadap penyakit.
4. Populasi diasumsikan terdapat kontak yang tetap dari subpopulasi S dan I dalam populasi. Tidak terdapat periode latent untuk penyakit ini, maka penyakit ini ditularkan secara seketika melalui kontak.
5. Individu yang terinfeksi penyakit dapat sembuh dari penyakit dan dapat meninggal akibat penyakit.
6. Tidak ada individu terinfeksi yang akan menjadi rentan kembali.

Selanjutnya, program vaksinasi diperhatikan dalam model endemi *SIR*. Asumsi yang digunakan terhadap vaksinasi tersebut adalah sebagai berikut:

1. Vaksin hanya diberikan pada individu yang baru lahir atau masih dalam usia batuta (kurang dari 1 tahun). Individu batuta yang memperoleh vaksin diasumsikan hanya sebagian, sehingga terdapat individu yang tidak mendapatkan vaksin.
2. Individu yang mendapatkan vaksin akan kebal dari penyakit dan masuk ke populasi R.
3. Individu yang belum mendapatkan vaksin masuk ke populasi *Susceptible,* dan berpotensi terjangkit penyakit.
4. Kekebalan yang terjadi karena vaksin bersifat permanen. Hal tersebut berarti individu yang mendapatkan vaksin tidak dapat terinfeksi oleh penyakit yang sama sampai waktu yang tidak terbatas.

Parameter model *SIR* dengan vaksinasi:

N = besarnya populasi, N > 0,

θ = laju kelahiran populasi rentan, diukur dari jumlah populasi yang lahir tiap satuan waktu, $\theta > 0$

σ = laju vaksin antara individu rentan dengan individu sembuh, $0 \leq \sigma \leq 1$,

β = laju kontak antara individu rentan dengan individu terinfeksi, $\theta > 0$,

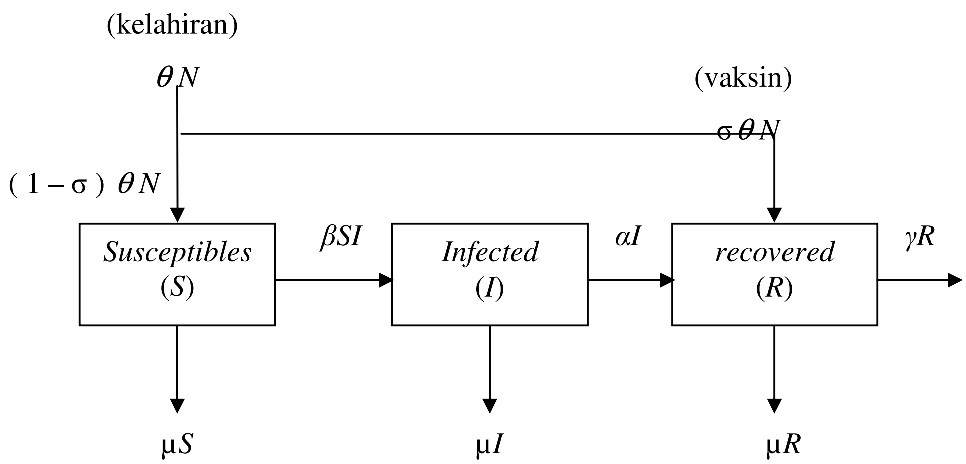
α = laju pengobatan, α > 0,

γ = laju migrasi, $\gamma > 0$,

μ = laju kematian, μ > 0,

t = waktu

Diagram transfer yang sesuai dengan asumsi-asumsi di atas adalah sebagai berikut:



Gambar 1. Model endemi *SIR* dengan vaksinasi

Dari diagram transfer di atas, maka persamaan model matematikanya adalah:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= (1-\sigma)\theta - \beta SI - \mu S \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \alpha I - \mu I \\ \frac{dR}{dt} &= \sigma\theta + \alpha I - \gamma R - \mu R \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

dengan $S + I + R = 1$

C. ANALISA MODEL

Titik Kesetimbangan adalah solusi konstan sistem, pada sistem (1) variabel *R* tidak muncul pada persamaan baris pertama dan kedua. Hal ini menunjukkan bahwa jumlah individu pada kelompok *R* tidak mempengaruhi laju perubahan jumlah individu pada kelompok *S* maupun *I*, maka titik kesetimbangan diperoleh apabila $\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} = 0$. Dengan demikian, berdasarkan kondisi tersebut, diperoleh dua titik kesetimbanga sebagai berikut:

1) Titik kesetimbangan bebas penyakit

Diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit yaitu:

$$\bar{E} = \left(\frac{(1-\sigma)\,\theta}{\mu}, 0 \right)$$

Nilai $I = 0$ berarti tidak ada individu pada kelompok *I* yang dapat menyebarkan penyakit.

2) Titik kesetimbangan endemi

Diperoleh titik kesetimbangan endemi yaitu:

$$E^* = \left(\frac{\alpha + \mu}{\beta},\ \frac{(1-\sigma)\beta\,\theta - \mu(\alpha + \mu)}{\beta(\alpha + \mu)} \right)$$

Nilai *I* yang tidak nol menunjukkan bahwa terdapat individu pada kelompok *I* yang dapat menyebarluaskan penyakit dan menyebabkan endemi.

Analisa Kestabilan di sekitar titik kesetimbangan

Didefinisikan fungsi-fungsi sebagai berikut:

$f_1(S, I) = (1 - \sigma)\,\theta - \beta SI - \mu S$

$f_2(S, I) = \beta SI - \alpha I - \mu I$

Untuk menyelidiki kestabilan titik kesetimbangan dilakukan linearisasi terhadap persamaan non linear di atas

$$\frac{\partial f_1\,(S,I)}{\partial S} = \frac{\partial((1-\sigma)\,\theta - \beta SI - \mu S)}{\partial S} = -\beta I - \mu$$

$$\frac{\partial f_1 \ (S,I)}{\partial I} = \frac{\partial((1-\sigma)\,\theta - \beta SI - \mu S)}{\partial I} = -\beta S$$

$$\frac{\partial f_2 \ (S,I)}{\partial S} = \frac{\partial(\beta SI - \alpha I - \mu I)}{\partial S} = \beta I$$

$$\frac{\partial f_2 \ (S,I)}{\partial I} = \frac{\partial(\beta SI - \alpha I - \mu I)}{\partial I} = \beta S - \alpha - \mu$$

Dibentuk matriks Jacobian sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}((S,I)) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}((S,I)) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}((S,I)) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}((S,I)) \end{bmatrix}$$

1) Kestabilan di Titik Kesetimbangan $\bar{E}$

Matriks Jacobian di titik $\bar{E} = (\bar{S}, \bar{I}) = \left(\frac{(1-\sigma)\,\theta}{\mu}, 0\right)$ adalah

$$J(\bar{\boldsymbol{E}}) = \begin{bmatrix} -\mu & -\beta\bar{S} \\ 0 & \beta\bar{S} - \alpha - \mu \end{bmatrix}$$

yang mempunyai nilai eigen $\lambda_1 = -\mu$ dan $\lambda_2 = \beta\bar{S} - \alpha - \mu$.

Dari sini titik kesetimbangan $\bar{E}$ akan stabil asimtotik jika $\lambda_{1,2} < 0$ hal tersebut terjadi jika $\mu < 0$ dan $\beta\bar{S} < \alpha + \mu$, dan titik kesetimbangan $\bar{E}$ tidak stabil jika $\beta\bar{S} > \alpha + \mu$.

2) Kestabilan di Titik Kesetimbangan E^*

Matriks Jacobian di titik $E^* = (S^*, I^*) = \left(\frac{\alpha+\mu}{\beta}, \ \frac{(1-\sigma)\beta\,\theta - \mu(\alpha+\mu)}{\beta(\alpha+\mu)}\right)$ adalah

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -\beta I^* - \mu & -\beta S^* \\ \beta I^* & \beta S^* - \alpha - \mu \end{bmatrix}$$

dengan $S^* = \frac{\alpha+\mu}{\beta}$ dan $I^* = \frac{(1-\sigma)\beta\,\theta - \mu(\alpha+\mu)}{\beta(\alpha+\mu)}$.

Diperoleh persamaan karakteristiknya yaitu

$$\lambda^2 + \left(\frac{(1-\sigma)\beta\,\theta}{(\alpha+\mu)}\right)\lambda + \left((1-\sigma)\beta\,\theta - \mu(\alpha+\mu)\right) = 0$$

Berdasarkan persamaan karakteristik di atas diperoleh akar-akar persamaan karakteristik, yaitu:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\left(\frac{(1-\sigma)\beta\,\theta}{(\alpha+\mu)}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{(1-\sigma)\beta\,\theta}{(\alpha+\mu)}\right)^2 - 4((1-\sigma)\beta\,\theta - \mu(\alpha+\mu))}}{2}$$

(i) Jika $\left(\frac{(1-\sigma)\beta\,\theta}{(\alpha+\mu)}\right)^2 - 4((1-\sigma)\beta\,\theta - \mu(\alpha+\mu)) > 0$ maka titik kesetimbangan E^* memenuhi kriteria kestabilan:

a. Jika

$$\sqrt{\left(\frac{(1-\sigma)\beta\,\theta}{(\alpha+\mu)}\right)^2 - 4\Big((1-\sigma)\beta\,\theta - \mu(\alpha+\mu)\Big)} < \left(\frac{(1-\sigma)\beta\,\theta}{(\alpha+\mu)}\right)$$

maka $(\lambda_{1,2}) < 0$, sehingga titik kesetimbangan endemi E^* stabil asimtotik.

b. Jika

$$\sqrt{\left(\frac{(1-\sigma)\beta\,\theta}{(\alpha+\mu)}\right)^2 - 4\Big((1-\sigma)\beta\,\theta - \mu(\alpha+\mu)\Big)} > \left(\frac{(1-\sigma)\beta\,\theta}{(\alpha+\mu)}\right)$$

maka $(\lambda_1) > 0$, sehingga titik kesetimbangan endemi E^* tidak stabil.

c. Jika

$$\sqrt{\left(\frac{(1-\sigma)\beta\,\theta}{(\alpha+\mu)}\right)^2 - 4\Big((1-\sigma)\beta\,\theta - \mu(\alpha+\mu)\Big)} = \left(\frac{(1-\sigma)\beta\,\theta}{(\alpha+\mu)}\right)$$

maka $\lambda_1 = 0$, sehingga titik kesetimbangan tidak hiperbolik. Dengan demikian, kestabilan titik kesetimbangan tidak dapat ditentukan berdasarkan linierisasinya.

(ii) Jika $\left(\frac{(1-\sigma)\beta\,\theta}{(\alpha+\mu)}\right)^2 - 4((1-\sigma)\beta\,\theta - \mu(\alpha+\mu)) \leq 0$

maka $Re(\lambda_{1,2}) = -\left(\frac{(1-\sigma)\beta\,\theta}{(\alpha+\mu)}\right) < 0$, sehingga titik kesetimbangan E^* stabil asimtotik.

Dari analisa kestabilan disekitar titik $\bar{E}$ dan E^* di atas dapat disimpulkan bahwa:

1. Jika titik kesetimbangan bebas penyakit $\bar{E}$ stabil asimtotik maka titik kesetimbangan endemi E^* tidak stabil yang artinya dalam kondisi seperti ini

maka setelah waktu yang cukup lama, tidak ada penyebaran penyakit campak atau tidak ada individu yang masuk ke populasi *Infected*.

2. Jika titik kesetimbangan bebas penyakit $\bar{E}$ tidak stabil maka titik kesetimbangan endemi E^* stabil asimtotik yang artinya dalam kondisi seperti ini maka setelah waktu yang cukup lama, penyakit akan selalu ada dalam populasi tersebut dan selalu ada individu yang masuk ke populasi *Infected*.

D. KESIMPULAN

Model *SIR* merupakan salah satu model yang digunakan untuk menganalisa perilaku suatu sistem di sekitar titik kesetimbangan. Model matematika yang diperoleh mempunyai dua titik kesetimbangan yaitu:

1) Titik kesetimbangan bebas penyakit $\bar{E} = \left(\frac{(1-\sigma)\,\theta}{\mu}, 0\right)$

2) Titik kesetimbangan endemi $E^* = \left(\frac{\alpha + \mu}{\beta}, \frac{(1-\sigma)\beta\,\theta - \mu(\alpha+\mu)}{\beta(\alpha+\mu)}\right)$

Setelah mengetahui titik kesetimbangannya, diperoleh kestabilan disekitar titik kesetimbangan.

1) Kestabilan di Titik Kesetimbangan $\bar{E}$

   Titik kesetimbangan $\bar{E}$ akan stabil asimtotik jika $\lambda_{1,2} < 0$, dengan syarat $\beta\bar{S} < \alpha + \mu$, sedangkan tidak stabil jika $\lambda_2 > 0$ dengan syarat $\beta\bar{S} > \alpha + \mu$.

2) Kestabilan di Titik Kesetimbangan E^*

   (i) Jika $\left(\frac{(1-\sigma)\beta\,\theta}{(\alpha+\mu)}\right)^2 - 4((1-\sigma)\beta\,\theta - \mu(\alpha+\mu)) > 0$ maka titik kesetimbangan E^* memenuhi kriteria kestabilan:

   a. Jika

$$\sqrt{\left(\frac{(1-\sigma)\beta\,\theta}{(\alpha+\mu)}\right)^2 - 4\left((1-\sigma)\beta\,\theta - \mu(\alpha+\mu)\right)} < \left(\frac{(1-\sigma)\beta\,\theta}{(\alpha+\mu)}\right)$$

maka $(\lambda_{1,2}) < 0$, sehingga titik kesetimbangan endemi E^* stabil asimtotik.

b. Jika

$$\sqrt{\left(\frac{(1-\sigma)\beta\,\theta}{(\alpha+\mu)}\right)^2 - 4\left((1-\sigma)\beta\,\theta\; - \;\mu(\alpha+\;\mu)\right)} > \left(\frac{(1-\sigma)\beta\,\theta}{(\alpha+\mu)}\right)$$

maka $(\lambda_1) > 0$, sehingga titik kesetimbangan endemi E^* tidak stabil.

c. Jika

$$\sqrt{\left(\frac{(1-\sigma)\beta\,\theta}{(\alpha+\mu)}\right)^2 - 4\left((1-\sigma)\beta\,\theta\; - \;\mu(\alpha+\;\mu)\right)} = \left(\frac{(1-\sigma)\beta\,\theta}{(\alpha+\mu)}\right)$$

maka $\lambda_1 = 0$, sehingga titik kesetimbangan tidak hiperbolik. Dengan demikian, kestabilan titik kesetimbangan tidak dapat ditentukan berdasarkan linierisasinya.

(ii) Jika $\left(\frac{(1-\sigma)\beta\,\theta}{(\alpha+\mu)}\right)^2 - 4((1-\sigma)\beta\,\theta\; - \;\mu(\alpha+\;\mu)) \leq 0$

maka $Re(\lambda_{1,2}) = -\left(\frac{(1-\sigma)\beta\,\theta}{(\alpha+\mu)}\right) < 0$, sehingga titik kesetimbangan E^* stabil asimtotik.

E. DAFTAR PUSTAKA

1. Ayres, Frank, Y. R. 1999. *Persamaan Diferensial*. Alih Bahasa Lili Ratna. Jakarta: Erlangga.
2. Perko, Lawrence. 2000. *Differential Equations and Dynamical Systems*. 3rd. ed. Springer Verlag. New York Berlin Heidelberg.
3. Burghes, D.N. 1981. *Modelling With Differential Equations*. England: Ellis Horwood Limited.
4. Purcell, E.J & Varber D. 1999. *Kalkulus dan Geometri Analitis*. Edisi Kelima. Jakarta: Erlangga.