MODUL E-LEARNING

E-LEARNING MATEMATIKA

Oleh :
NURYADIN EKO RAHARJO, M.PD.
NIP. 19721015 200212 1 002

Penulisan Modul e Learning ini dibiayai oleh dana DIPA BLU UNY TA 2010
Sesuai dengan Surat Perjanjian Pelaksanaan e Learning
Nomor 1993a.9/H34.15/PL/2010
Tanggal 1 Juli 2010

JURUSAN PENDIDIKAN TEKNIK SIPIL DAN PERENCANAAN
FAKULTAS TEKNIK
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
TAHUN 2010

BAB V

PERSAMAAN LINIER

1). Persamaan Linier Satu Variabel

Bentuk umum : $ax + b = 0$, dimana $a \neq 0$ dan b = konstanta

Penyelesaian : $x = -\dfrac{b}{a}$

Contoh : 1). $5x + 10 = 0 \rightarrow x = -\dfrac{10}{5} \rightarrow x = -2$

2). $x + 8 = 0 \rightarrow x = -\dfrac{8}{1} \rightarrow x = -8$

2). Persamaan Linier 2 Variabel

Bentuk umum : $ax + by = c$ dimana : a, b, c adalah konstanta

3). Persamaan Linier Tiga Variabel

Bentuk umum : $ax + by + cz = d$ dimana : a, b, c, d adalah konstanta. Penyelesaian persamaan linier dua Variabel dan tiga variable (**persamaan linier simultan)** dilakukan dengan : (1) Eliminasi, (2) Substitusi, (3) Interasi dan (4) Determinan.

1. Cara Eliminasi

Eliminasi berarti meniadakan atau menghilangkan harga – harga *unknown.*

Contoh :

Tentukan harga – harga x, y dan z dalam persamaan linier simultan :

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 2 \\ x + 2y - 3z &= 1 \\ -3x - 5y + z &= 0 \end{aligned}$$

Jawab :

Misal

$$\begin{aligned} (p1) &\rightarrow 2x + 3y + z = 2 \\ (p2) &\rightarrow x - 2y - 3z = 1 \\ (p3) &\rightarrow -3x - 5y + z = 0 \end{aligned}$$

Eliminasi *x*

$(p1).1 \rightarrow 2x + 3y + \quad z = 2$; Tanda . adalah operasi kali

$(p2). \rightarrow \underline{2x - 4y - 6z = 2}\ _{-}$

$+ 7y + 7z = 0 \qquad \cdots\cdots (P4)$

$(p2).3 \rightarrow 3x - 6y - 9z = 3$

$(p3).1 \rightarrow \underline{-3x - 5y + z = 0}\ _{+}$

$-11y - 8z = 3 \qquad \cdots\cdots (P5)$

Eliminasi y :

$(p4).\frac{11}{7} \rightarrow 11y + 11z = 0$

$(p5).1 \rightarrow \underline{-11y - 8z = 3}\ _{+}$

$3z = 3$

$z = 1$

Menentukan harga *unknown* Y:

Untuk harga z = 1 maka persamaan (P4) adalah :

$7y + 7.1 = 0$

$7y = -7$ atau $y = -1$

Jika digunakan p5 untuk z = 1 persamaannya adalah :

$-11y - 8.1 = 3$

$-11y = 11$ atau $y = -1$

Menentukan harga *unknown x* :

Harga x dapat ditentukan dari persamaan (p1), atau (p2), atau (p3), untuk harga z = 1 dan y = -1 dengan persamaan (p1) menghasilkan :

$(p1) \rightarrow 2x + 3.(-1) + 1 = 2$

$2x - 3 + 1 = 2$

$2x - 2 = 2$

$2x = 4$

$x = 2$

2. **Cara Substitusi**

Substitusi berarti mengganti salah satu *unknown* yang mewakili *unknown* – *unknown* lain. Pada suatu persamaan linier tiga variabel terdapat 3 buah *unknown* x, y, z maka substitusi dapat dilakukan dengan 6 macam yaitu :

x, y; x,z; y, x; y, z; z, x; dan z, y.

contoh:

Selesaikan persamaan linier simultan dengan cara substitusi :

$$2x + 3y + z = 2$$
$$x - 2y - 3z = 1$$
$$-3x - 5y + z = 0$$

Jawab

Misalkan : (p1) → $2x + 3y + z = 2$

(p2) → $x - 2y - 3z = 1$

(p3) → $-3x - 5y + z = 0$

Substitusi x

Dari persamaan linier (p1) diperoleh harga x dalam bentuk term y dan z sebagai berikut :

$$2x + 3y + z = 2$$
$$2x = 2 - 3y - z$$
$$x = 1 - 1{,}5y - 0{,}5z \quad \cdots\cdots \quad (p4)$$

Substitusi harga x tersebut kedalam persamaan (p2) dan (p3) diperoleh :

P4→ P2 $(1 - 1{,}5y - 0{,}5z) - 2y - 3z = 1$

$\Leftrightarrow \quad 1 - 1{,}5y - 0{,}5z - 2y - 3z = 1$

$\Leftrightarrow \quad -3{,}5y - 3{,}5z = 0$

$\Leftrightarrow \quad -3{,}5y = 3{,}5z$

$\Leftrightarrow \quad y = -z \quad \cdots\cdots (p5)$

P4→ P3 $-3.(1 - 1{,}5y - 0.5z) - 5y + z = 1$

$\Leftrightarrow \quad -3 + 4{,}5y + 1{,}5z - 5y + z = 0$

$\Leftrightarrow \quad -0{,}5y + 2{,}5z = 3 \quad \cdots\cdots (p6)$

Substitusi y:

Dari persamaan p5 dapat diketahui harga y dalam term z. substitusi harga y dalam persamaan p6 diperoleh :

P5→ p6 $-0{,}5(-z)+2{,}5z=3$

$\Leftrightarrow \quad 0{,}5z+2{,}5z=3$

$\Leftrightarrow \quad 3z=3$

$\Leftrightarrow \quad z=1 \quad \cdots\cdots(p7)$

Jadi harga z = 1

Substitusi kembali :

Substitusi kembali z dalam p7 pada p5 diperoleh :

P7→ P5 $y=-z$

$\Leftrightarrow \quad y=-1 \quad \cdots\cdots(p8)$

Substitusi kembali y pada p8 dan z pada p7 ke dalam p4 diperoleh :

P8→ P7→ P4 $x=1-1{,}5y-0{,}5z$

$\Leftrightarrow \; x=1-1{,}5.(-1)-0{,}5.1$

$\Leftrightarrow \; x=1+1{,}5-0{,}5$

$\Leftrightarrow \; x=2 \quad \cdots\cdots(p9)$

Dari hasil substitusi di atas dapat ditentukan harga – harga penyelesaian persamaan linier simultan adalah :

$x=2$

$y=-1$

$z=1$

3. Cara Interasi

Cara interasi adalah cara coba – coba memasukkan harga tertentu ke dalam *unknown* – *unknown* sampai ditemukan harga x, y dan z

4. Penyelesaian dengan cara determinan

Sebelumnya disusun koefisien – koefisien dan konstanta – konstanta pada persamaan linier simultan yang membentuk formasi baris dan kolom. Setiap bilangan yang menempati suatu baris dan kolom disebut elemen.

Contoh :

$$a1x + b1y = c1 \quad \cdots (i)$$
$$a2x + b2y = c2 \quad \cdots (ii)$$

Maka persamaan linier simultan tersebut disusun dalam bentuk kolm dan baris sebagai berikut :

$$\begin{array}{cccl} a1 & b1 & c1 & \rightarrow \text{baris 1} \\ a2 & b2 & c2 & \rightarrow \text{baris 2} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \text{elemen} \\ \text{Kolom a} & \text{kolom b} & \text{kolom c} & \end{array}$$

Dengan cara determinan, harga – harga (*unknown*) dicari dengan menentukan determinanya terlebih dahulu. Cara menyusun determinan x misalkan cukup mengganti bilangan – bilangan pada kolom x dengan kolom konstanta.

a. cara Cramer

rumus untuk mencari harga – harga dalam determinan linier simultan adalah membagi determinannya dengan determinan. Misalkan mencari harga x adalah dengan membagi determinan x dengan determinan. Demikian juga untuk mencari harga y maka determinan y dibagi dengan determinan.

1). Untuk persamaan linier simultan dengan dua cara persamaan linier

$$a1x + b1y = c1$$
$$a2x + b2y = c2$$

Kolom x	kolom y	kolom c
(Kx)	(Ky)	(Kc)
$a1$	$b1$	$c1$
$a2$	$b2$	$c2$

- Determinan ∇ dibentuk dari elemen-elemen pada kolom x dan y :

$$\begin{array}{cc} Kx & Ky \end{array}$$

Determinan ∇ = $\begin{vmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{vmatrix} = a1.b2 - a2.b1$

- Determinan x yaitu ∇ x dibentuk dengan mengganti kolom x dengan kolom c sebagai berikut :

$$\begin{array}{cc} Kc & Ky \end{array}$$

$$\nabla x = \begin{vmatrix} c1 & b1 \\ c2 & b2 \end{vmatrix} = c1.b2 - c2.b1$$

Harga $x = \dfrac{\nabla x}{\nabla} = \dfrac{\begin{vmatrix} c1 & b1 \\ c2 & b2 \end{vmatrix}}{\nabla} = \dfrac{c1.b2 - c2.b1}{a1.b2 - a2.b1}$

- Determinan y yaitu ∇ y dibentuk dengan mengganti kolom y dengan kolom c sebagai berikut :

KxKc

$$\nabla y = \begin{vmatrix} a1 & c1 \\ a2 & c2 \end{vmatrix} = a1.c2 - a2.c1$$

Harga y = $\dfrac{\nabla y}{\nabla} = \dfrac{\begin{vmatrix} a1 & c1 \\ a2 & c2 \end{vmatrix}}{\nabla} = \dfrac{a1.c2 - a2.c1}{a1.b2 - a2.b1}$

2). Untuk persamaan linier simultan dengan tiga persamaan linier.

$$a1x + b1y + c1z = d1$$
$$a2x + b2y + c2z = d2$$
$$a3x + b3y + c3z = d3$$

Disusun sebagai berikut :

$$\begin{array}{cccc} Kx & Ky & Kz & Kd \\ a1 & b1 & c1 & d1 \\ a2 & b2 & c2 & d2 \\ a3 & b3 & c3 & d3 \end{array}$$

Determinan ∇ dibentuk dari elemen – elemen pada kolom x, y dan z dengan menempatkan elemen – elemen dari baris yang atas dan masing – masing dikalikan dengan minornya

Contoh

Minor dari *a1* adalah $\begin{vmatrix} b2 & c2 \\ b3 & c3 \end{vmatrix}$ yang didapat dari gambar berikut :

$$\begin{matrix} a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \\ a3 & b3 & c3 \end{matrix}$$

Determinan ∇ adalah sebagaio berikut :

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} \text{Kd} & \text{Ky} & \text{Kz} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \\ \nabla = & \begin{vmatrix} a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \\ a3 & b3 & c3 \end{vmatrix} \end{array} = a1.\begin{vmatrix} b2 & c2 \\ b3 & c3 \end{vmatrix} - b1\begin{vmatrix} a2 & c2 \\ a3 & c3 \end{vmatrix} + c1.\begin{vmatrix} a2 & b2 \\ a3 & b3 \end{vmatrix}$$

Menentukan harga determinan dengan cara ini disebut *ekspansi determinan.* Selanjutnya harga – harga x, y dan z dirumuskan dengan cara determinan sebagai berikut :

$$x = \frac{\nabla x}{\nabla} = \frac{\begin{array}{c} \begin{matrix} \text{Kd} & \text{Ky} & \text{Kz} \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} d1 & b1 & c1 \\ d2 & b2 & c2 \\ d3 & b3 & c3 \end{vmatrix} \end{array}}{\nabla}$$

$$y = \frac{\nabla y}{\nabla} = \frac{\begin{array}{c} \begin{matrix} \text{Kx} & \text{Kd} & \text{Kz} \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} a1 & d1 & c1 \\ a2 & d2 & c2 \\ a3 & d3 & c3 \end{vmatrix} \end{array}}{\nabla} \qquad z = \frac{\nabla z}{\nabla} = \frac{\begin{array}{c} \begin{matrix} \text{Kx} & \text{Ky} & \text{Kd} \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} a1 & b1 & d1 \\ a2 & b2 & d2 \\ a3 & b3 & d3 \end{vmatrix} \end{array}}{\nabla}$$

b. Cara Sarrus

Cara Sarrus ini terlebih dahulu disusun elemen-elemen determinan, kemudian ditulis kembali dua kolom yang pertama. Cara Sarrus ini disusun **hanya untuk susunan bilangan yang mempunyai tiga baris dan tiga kolom saja.** Harga determinan dengan cara ini dihasilkan melalui operasi perkalian diantara elemen-elemen diagonal. Perkalian elemen diagonal dari atas ke bawah tandanya positif (+). Sedangkan perkalian elemen diagonal dari bawah ke atas tandanya negatif (-).

Contoh

$$\begin{array}{c} \\ \nabla = \end{array} \begin{array}{ccccc} Kx & Ky & Kz & Kx & Ky \\ \left| \begin{array}{ccc} a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \\ a3 & b3 & c3 \end{array} \right. & & & & \end{array}$$

$$\nabla = \begin{array}{ccccc} Kx & Ky & Kz & Kx & Ky \\ \hline a1 & b1 & c1 & a1 & b1 \\ a2 & b2 & c2 & a2 & b2 \\ a3 & b3 & c3 & a3 & b3 \end{array}$$

$$= + (a1.b2.c3 + b1.c2.a3 + c1.a2.b3) - (a3.b2.c1 + b3.c2.a1 + c3.a2.b1)$$

Untuk mencari harga x maka determinan ∇ x dibagi dengan determinan ∇. Demikian juga harga y dan harga z. Hanya operasinya menggunakan cara Sarrus.

Contoh soal-Penyelesaian

1. Tentukan harga x dan y dalam persamaan linier simultan sebagai berikut dengan cara determinan yang menggunakan aturan Cramer.

$$6x - 9y = -15$$
$$6x + 4y = 24$$

Jawab:

Susunan kolom x, kolom y dan kolom c adalah :

Kx	Ky	Kc
6	-9	-15
6	4	24

$$x = \frac{\nabla x}{\nabla} = \frac{\begin{vmatrix} -15 & -9 \\ 24 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -9 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{(-15)(4) - (24)(-9)}{(6)(4) - (6)(-9)} = \frac{-60 + 216}{24 + 54} = \frac{156}{78} = 2$$

$$y = \frac{\nabla y}{\nabla} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -15 \\ 6 & 24 \end{vmatrix}}{78} = \frac{(6)(24) - (6)(-15)}{78} = \frac{144 + 90}{78} = \frac{234}{78} = 3$$

Jadi harga yang memenuhi persamaan linier simultan tersebut adalah x = 2 dan y = 3.

2. selsesaikan persamaan linier simultan seperti dibawah ini dengan cara determinan yang menggunakan aturan cramer.

$$2x + 3y + z = 2$$
$$x - 2y - 3z = 1$$
$$-3x - 5y + z = 0$$

Jawab

Determinan ∇ =

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} - 3.\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}$$

$= 2.\{(-2.1) - (-5)(-3)\} - 3.\{(1)(1) - (-3)(-3)\} + 1.\{(1)(-5) - (-3)(-2)\}$

$= 2.(-2 - 15) - 3.(1 - 9) + 1.(-5 - 6)$

$= 2.-17 - 3.-8 + 1.-11$

$= -34 + 24 - 11$

$= -21$

Determinan ∇ x = $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} - 3.\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}$

= 2.{(-2)(1) - (-5)(-3)} – 3.{(1)(1) – (0)(-3)} + 1.{(1)(-5)-(0)(-2)}

= 2.(-2-15) - 3(1-0) + 1(-5-0)

= 2.-17 – 3.1 + 1.-5 = -34 - 3 – 5

= -42

Determinan $\nabla y = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2.\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + .\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}$

= 2. {(1).(1) – (0)(-3)} – 2.{(1)(1) – (-3)(-3)} + 1.{(1)(0) – (-3)(1)}

= 2.(1-0) – 2.(1-9) + 1(0+3)

= 2.1 + 2.8 + 1.3 = 2 + 16 + 3

= 21

Determinan $\nabla z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 3.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} + 2.\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}$

= 2.{(9-2)(0) – (-5)(1)} – 3{(1)(0) – (-3)(1)} + 2{(1)(-5) – (-3)(-2)}

= 2(0+5) – 3(0+3) + 2(-5-6)

= 10 – 9 – 22 = -21