MODUL E-LEARNING

E-LEARNING MATEMATIKA

Oleh :
NURYADIN EKO RAHARJO, M.PD.
NIP. 19721015 200212 1 002

Penulisan Modul e Learning ini dibiayai oleh dana DIPA BLU UNY TA 2010
Sesuai dengan Surat Perjanjian Pelaksanaan e Learning
Nomor 1993a.9/H34.15/PL/2010
Tanggal 1 Juli 2010

JURUSAN PENDIDIKAN TEKNIK SIPIL DAN PERENCANAAN
FAKULTAS TEKNIK
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
TAHUN 2010

BAB IV

PERSAMAAN KUADRAT

A. Persamaan Kuadrat

Persamaan kuadrat adalah **suatu persamaan yang variabelnya mempunyai pangkat tertinggi sama dengan 2.**

Bentuk baku persamaan kuadrat adalah dalam x adalah :

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$ …. rumus 1

Dengan :

$a \neq 0$ dan a, b, c adalah anggota himpunan bilangan nyata.

Ada beberapa bentuk khusus persamaan kuadrat yaitu :

$a = 1 \rightarrow x^2 + bx + c = 0$: persamaan kuadrat biasa

$b = 0 \rightarrow x^2 + c + 0$: persamaan kuadrat murni

$c = 0 \rightarrow x^2 + bx = 0$: persamaan kuadrat tak lengkap

Contoh :

(a) $-x^2 + 4x + 4 = 0$

(b) $x^2 + 2x = 0$

(c) $x^2 + 9 = 0$

B. Akar – akar Persamaan Kuadrat

Nilai yang memenuhi persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ disebut **akar persamaan kuadrat** dan dinotasikan dengan $\mathbf{x_1}$ dan $\mathbf{x_2}$.

Akar – akar persamaan kuadrat dapat dicari dengan beberapa cara, yaitu :

1. Faktorisasi

Bentuk $x^2 + bx + c = 0$ diuraikan kebentuk

$$\boxed{(x - x1)(x - x2) = 0}$$ …………rumus 2

Contoh :

$x^2 + 5x + 6 = 0$

$\rightarrow (x + 3)(x + 2) = 0$

$x + 3 = 0 \rightarrow x1 = -3$

$x + 2 = 0 \rightarrow x2 = -2$

2. Melengkapkan Kuadrat Sempurna

Bentuk $x^2 + bx + c = 0$, dijabarkan kebentuk

$$\boxed{(x + p)^2 = q}$$ …………..rumus 3

Contoh :

a. $x^2 + 4x - 1 = 0$

$x^2 + 4x = 1 \rightarrow$ kemudian masing – masing suku ditambah dengan 4

$x^2 + 4x + 4 + = 1 + 4$

$(x + 2)^2 = 5$

$x + 2 = \pm\sqrt{5}$

Maka $x_1 = \sqrt{5} - 2$ dan $x_2 = -\sqrt{5} - 2$

b. $x^2 - 6x - 2 = 0$

$x^2 - 6x - 2 \rightarrow$ kemudian masing–masing suku ditambahkan dengan 9

$x^2 - 6x + 9 = 2 + 9$

$(x - 3)^2 = 11$

$x - 3 = \pm\sqrt{11} \quad \rightarrow x_1 = \sqrt{11} + 3 \quad dan \quad x_2 = -\sqrt{11} + 3$

3. Menggunakan Rumus abc

Persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, mempunyai akar – akar persamaan :

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$ ………rumus 4

Cara mencari rumus tersebut adalah sebagai berikut :

$ax^2 + bx + c = 0$ $\longrightarrow$ kemudian masing – masing suku dikalikan *4a*

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + (b^2 - b^2) = 0$$

$$(4a^2x^2 + 4abx + b^2) - (b^2 - 4ac) = 0$$

$(2ax + b)^2 - \sqrt{(b^2 - 4ac)^2} = 0 \rightarrow$ kemudian masing-masing suku diakar

$(2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}) = 0 \rightarrow$ harga dari akar bisa (+) dan (-)

Sehingga diperoleh rumus :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

…………*rumus 4*

Nilai $b^2 - 4ac$ disebut ***diskriminan*** dari persamaan $ax^2 + bx + c = 0$ dan ditulis dengan huruf **D**. maka rumus diatas menjadi :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

………*rumus 5*

Contoh :

Carilah akar – akar dari persamaan kuadrat : $4x^2 + 5x + 1 = 0$

Jawab

$4x^2 + 5x + 1 = 0$ $\quad\rightarrow a = 4, b = 5$ *dan* $c = 1$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4.4.1}}{2.4} \qquad x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{8}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 3}{8}$$

$$x1 = \frac{-5 - 3}{8} = -1 \qquad x_2 = \frac{-5 + 3}{8} = -\frac{1}{4}$$

C. Jumlah dan hasil kali akar – akar persamaan kuadrat

Misal akar – akar dari persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ adalah x_1 dan x_2. Rumus pemyelesaian dari persamaan kuadrat tersebut :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \quad \text{dan} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

Maka jumlah akar-akar tersebut adalah : $x_1 + x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{D}-b-\sqrt{D}}{2a}$

Atau $\boxed{x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}}$ ……………rumus 6

Sedangkan hasil kali akar – akar tersebut adalah :

$$x_1 . x_2 = \frac{\left\{(-b)^2 - (\sqrt{D})^2\right\}}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2}$$

Atau $\boxed{x_1 . x_2 = \dfrac{c}{a}}$ ………..rumus 7

Selisih akar – akar tersebut adalah :

$x_1 - x_2 = \dfrac{2\sqrt{D}}{2a}$ sehingga $\boxed{x_1 - x_2 = \dfrac{\sqrt{D}}{a}}$ ….rumus 8

Atau $\boxed{D = a^2 (x_1 - x_2)^2}$ ………rumus 9

Contoh :

$2x^2 + 4x + 6 = 0$

Tentukan nilai $x_1^2 + x_2^2$ tanpa mencari x_1 dan x_2

Jawab

$2x^2 + 4x + 6 = 0 \quad \rightarrow a = 2, \quad b = 4 \quad dan \quad c = 6$

$x_1 + x_2 = -\dfrac{4}{2} = -2$

$x_1 . x_2 = \dfrac{6}{2} = 3$

$$\boxed{x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2.x_1.x_2}$$

$$= (-2)^2 - 2.3 = -2$$

D. Jenis akar – akar persamaan kuadrat

Akar – akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ adalah x_1 dan x_2 dimana

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}$$ ………..rumus 5

$D = b^2 – 4ac$ adalah diskriminan.

Jenis akar – akar persamaan berdasarkan diskriminan adalah :

1. Jika D > 0, Maka terdapat dua akar real yang tidak sama ($x_1 \neq x_2$)
2. Jika D = 0, Maka akar – akarnya kembar atau sama dan real ($x_1 = x_2$).
3. Jika D < 0, Maka kedua akar tidak real atau tidak mempunyai akar – akar yang real(akarnya imaginer).

Contoh :

1). Tentukan q supaya persamaan $x^2 + qx + q = 0$ mempunyai dua akar nyata dan berlainan.

Jawab

$x^2 + qx + q = 0$

mempunyai dua kar berlainan, maka D > 0

$D = b^2 - 4ac = q^2 -4 . 1 . q = q^2 – 4q > 0$

Atau $q (q – 4) > 0$

$q_1 = 0$; $(q – 4) = 0 \rightarrow q_2 = 4$

Maka : $q < 0$ ataua $q > 4$.

2). Tentukan nilai p agar persamaan kuadrat $x^2 – (2 + p)x + 4= 0$ mempunyai akar – akar kembar.

Jawab :

$x^2 – (2 + p)x +4 = 0$

akar – akarnya kembar, maka D = 0

$D = b^2 – 4ac$

$= - (2 + p)^2 -4 . 1. 4$

$= 4 + 4p + p^2 – 16$

$p^2 + 4p - 12 = 0$

$(p + 6)(p - 2) = 0$

$p_1 = -6$ dan $p_2 = 2$

E. Contoh Soal dan Penyelesaian

1). Apabila *m* menjalani bilangan – bilangan nyata, selidikilah banyaknya akar – akar persamaan : $x^2 - 2(1 + 3m)x + 7(3 + 2m) = 0$

Jawab

Banyaknya akar – akar persamaan kuadrat ditentukan adanya diskriminan itu. Kita hitung dahulu besarnya diskriminan itu yaitu :

$D = 4(1 + 3m)^2 - 28(3 + 2m)$

$= 4 + 24m + 36m^2 - 84 - 56m$

$= 36m^2 - 32m - 80$

Ada 3 kemungkinan :

a). Kalau D > 0 atau $36m^2 - 32m\ 80 > 0$ maka

$36m^2 - 32m - 80 > 0$ disederhanakan menjadi

$4(9m^2 - 8m - 20) > 0$

$4(9m + 10)(m - 2) > 0$

Kalau D > 0, maka m > 2 atau $m < -\frac{10}{9}$

Yang berarti persamaan di atas mempunyai dua akar yang nyata dan berlainan

b). Kalau D = 0 atau $36m^2 - 32m - 80 = 0$ akan memberikan $m_1 = 2$ atau $m_2 = -\frac{10}{9}$

untuk m_1 dan m_2 sebesar tersebut diatas, maka persamaan tersebut diatas mempunyai dua akar yang nyata dan kembar.

Untuk $m = -\frac{10}{9}$, akar kembar itu adalah :

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ → karena D = 0 maka

$$x_{1,2} = \frac{-b}{2a} = \frac{2(1+3m)}{2.1} = \frac{2+6.(-10/9}{2}$$
$$= 1 + 3.(-10/9) = 1 - 10/3$$
$$= -7/3$$

c). kalau D < 0 atau $36m^2 - 32m\ 80 < 0$, maka persamaan diatas tidak mempunyai akar yang nyata.

2). Tentukan akar – akar persamaan

$$\frac{x^2 - 7x}{x^2 - 9} + 1 = \frac{x^2 - 21}{x^2 - 9}$$

Jawab:

Jika 1 diganti dengan $\frac{x^2 - 9}{x^2 - 9}$ maka

$$\frac{x^2 - 7x}{x^2 - 9} + 1 = \frac{x^2 - 21}{x^2 - 9}$$

$x^2 - 7x + x^2 - 9 = x^2 - 21$

$x^2 - 7x - 9 = -21$

$x^2 - 7x + 12 = 0$

$(x-4)(x-3) = 0$

$x - 4 = 0 \rightarrow \quad x_1 = 4$

$x - 3 = 0 \rightarrow \quad x_2 = 3$

$x_2 = 3$ apabila dimasukkan ke soal, persamaannya tidak terdefinisikan.

Maka akarnya adalah x = 4

3). Akar – akar persamaan kuadrat $2x^2 - 6x - p = 0$ ialah x_1 dan x_2 jika $x_1^2 - x_2^2 = 15$.

Tentukan harga p !

Jawab :

$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ maka $x_1 + x_2 = -\frac{(-6)}{2} = 3$ ……….. (1)

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ maka $x_1 \cdot x_2 = -\frac{P}{2}$ ……….. (2)

$x_1^2 - x_2^2 = 15$ ……….. (3)

$(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 15$ (*)

$3(x_1 - x_2) = 15 \rightarrow \quad (x_1 - x_2) = 5$ ……….. (4)

Dengan mengeleminasi persamaan (1) dan (4) :

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 3 \\ \underline{x_1 - x_2 = 5+} \qquad \rightarrow x_1 = 4 \rightarrow -1 \\ \quad 2x_1 = 8 \end{array}$$

Dari persamaan (2) $\rightarrow x_1 \,.\, x_2 = -\dfrac{P}{2}$

$$4.(-1) = -\frac{P}{2} \rightarrow p = 8$$

Catatan :

(*) ingat rumus $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$

$= 3(x_1 - x_2)$

4). Tentukan harga x dari persamaan $\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{6}{x} - 3 = 0$

Jawab :

Bentuk lain dari persamaan tersebut adalah $4.x^{-2} - 6.x^{-1} - 3 = 0$

Selanjutnya direduksi dengan memisalkan $t = x^{-1}$,

Sehingga $t^2 = x^{-2}$

Dengan demikian persamaan di atas menjadi $4.t^{-2} - 6.t - 3 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4.4(-3)}}{2.4} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 46}}{8}$$

$$t_1 = \frac{6 + \sqrt{84}}{8} \text{ dan } t_2 = \frac{6 - \sqrt{84}}{8}$$

karena $t = x^{-1}$ maka $x = \frac{1}{t}$ sehinga :

$$x_1 = \frac{1}{t_1} = \frac{1}{\frac{6+\sqrt{84}}{8}} = \frac{8}{6+\sqrt{84}} = 0{,}5275$$

$$x_2 = \frac{1}{t_2} = \frac{1}{\frac{6-\sqrt{84}}{8}} = \frac{8}{6-\sqrt{84}} = -2{,}5275$$