PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE 2

Model persamaan diferensial orde 2 terdiri dari 4 type, yaitu :

- Tipe $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$
- Tipe $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, \frac{dy}{dx})$
- Tipe $a.\frac{d^2y}{dx^2} + b.\frac{dy}{dx} + c.y = 0$
- Tipe $a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = f(x)$

A. PD Orde 2 Tipe $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$

Contoh : carilah jawaban umum persamaan deferensial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4x^3 + 3x^2 + x$$

Jawab : $\frac{d^2y}{dx^2} = \int 4x^3 + 3x^2 + xdx$

$$\frac{dy}{dx} = x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c_1$$

$$y = \int x^4 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c_1 dx$$

$$y = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + c_1 x + c_2$$

B. PD Orde 2 Tipe $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, \frac{dy}{dx})$

Contoh : $x.\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + x = 0$ → Carilah jawaban umumnya.

Penyelesaian :

misal : $p = \frac{dy}{dx}$ maka $\frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$ ....(1)

apabila persamaan (1) dimasukkan ke soal

$$x.\frac{dp}{dx} + p. + x = 0$$

$$x.\frac{dp}{dx} + p = -x \qquad \text{.................................(2)}$$

ingat rumus $\frac{d(x.p)}{dx} = x.\frac{dp}{dx} + p.\frac{dx}{dx}$

$$\frac{d(x.p)}{dx} = x\frac{dp}{dx} + p1 \qquad \text{........(3)}$$

Jika persamaan (2) = persamaan (3) maka

$$\frac{d(xp)}{dx} = -x$$

Kemudian kedua ruas diintegralkan

$$xp = \int -x \ dx$$

$$xp = -\tfrac{1}{2}x^2 + c_1$$

Dari persamaan (1) diketahui bahwa $p = \dfrac{dy}{dx}$ maka harga p dapat

diganti dengan $\dfrac{dy}{dx}$ menjadi

$$x\frac{dy}{dx} = -\tfrac{1}{2}x^2 + c_1$$ kemudian semua ruas dibagi x

$$\frac{dy}{dx} = -\tfrac{1}{2}x + \frac{c_1}{x}$$

$$y = \int -\tfrac{1}{2}x + \frac{c_1}{x}$$

$$y = -\tfrac{1}{4}x^2 + c_1 . \ell n\, x + c_2$$

C. PD Orde 2 Yang Berbentuk $a.\dfrac{d^2y}{dx^2} + b.\dfrac{dy}{dx} + c.y = 0$

Persamaan tersebut, jika harga

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m^2, \frac{dy}{dx} = m \text{dan } y = 1, \text{sehingga persamaannya menjadi :}$$

$$am^2 + bm + c = 0 \rightarrow \text{disebut persamaan karakteristik.}$$

$$m = m_1 \text{ dan } m = m_2$$

Dimana m = akar-akar penyelesaian

- Jika **m1 ≠ m2** maka harga :

$$\boxed{y = A\,e^{m_1 x} + B\,e^{m_2 x}}$$

A dan B = Konstanta (atau c_1 dan c_2)

- Jika m1 = m2 maka

$$\boxed{Y = e^{m_1 x}(A + B\,x)}$$

- Jika keduanya (akar-akar penyelesaiannya tersebut kompleks), atau m = a + b j, atau m = a + bi

$$\boxed{Y = e^{ax}\left[A\cos\beta x + B\sin\beta.x\right]}$$

Contoh soal :

1. Carilah penyelesaian Persamaan Deferensial berikut ini.

$$1\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

Jawab :

$jika \frac{d^2y}{dx^2} = m^2, \frac{dy}{dx} = m$ dan $y = 1,$ maka

Persamaan karakteristiknya :

$1 m^2 + 3 m + 2 = 0$

(m+1)(m+2)=0

sehingga : m = -1; m = -2. (m1≠m2)

Jadi pemecahan permasalahan tersebut adalah :

$$Y = A.e^{-x} + B.e^{-2x}$$

2. Carilah penyelesaian PD berikut: $1\frac{d^2y}{dx^2}+6\frac{dy}{dx}+9y=0$

Jawab :

$m^2+6m+9=0$

$(m+3)(m+3)=0 \Rightarrow m=-3$ akar kembar sehingga

$Y=e^{-3x}(A+Bx)$

D. PD Orde 2 Yang Berbentuk $a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=f(x)$

Pada persamaan deferensial bentuk ini dikenal dua istilah, yaitu :

1). **FUNGSI KOMPLEMENTER** : diperoleh dengan memecahkan persamaan bila *f(x)=0*, seperti dalam bagian program sebelum ini.

Adapun pemecahannya, jika *f(x)=0*, adalah :

- Untuk akar yang berbeda $Y=A\,e^{m_1x}+B\,e^{m_2x}$
- Untuk akar kembar $Y=e^{m_1x}(A+Bx)$
- Untuk akar imaginer $Y=e^{ax}\left[A\cos\beta x+B\sin\beta.x\right]$

2). **INTEGRAL KHUSUS** : Diperoleh dengan menggunakan bentuk umum dari fungsi ruas kanan persamaan yang diberikan, yaitu dengan mensubtitusikan bentuk umum tersebut ke dalam persamaannya dan kemudian menyamakan koefisien-koefisiennya.

- Jika ruas kanan adalah fungsi berderajat dua, bentuk umum nya :

$$Y = C\,x^2 + D\,x + E$$

- Jika ruas kanan berderajat satu, maka persamaan umumnya : $Y = Cx + D$.

3). Jawaban yang sesungguhnya = **jawaban fungsi komplemerter** + **integral khusus.**

Contoh :

Selesaikan persamaan deferensial dari $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = x^2$

Jawab :

1). Fungsi Komplementer, pemecahannya dengan persamaan kiri = 0, yaitu :

$\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$ yang memberikan

$m^2 - 5m + 6 = 0$

$(m - 2)(m - 3) = 0$

$m = 2$ atau $m = 3$

Jawaban fungsi komplementer :

$$\boxed{Y = A\,e^{2x} + B\,e^{3x}}$$

2). Integral khusus :

Karena ruas kanan adalah fungsi berderajat dua (x^2)sehingga bentuk umum persamaan berderajat dua adalah :

$$Y = C\,x^2 + D\,x + E$$

maka $\dfrac{dy}{dx} = 2\,C\,x + D$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\,C$$

harga y, $\dfrac{dy}{dx}$ dan $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ dimasukkan ke persamaan semula (soal) , yaitu :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = x^2$$

$$2C - 5\,(2\,Cx + D) + 6\,(Cx^2 + Dx + E) = x^2$$

$$2C - 10\,Cx - 5D + 6Cx^2 + 6Dx + 6\,E = x^2$$

$$6Cx^2 + (6D - 10\,C)x + (2C - 5D + 6E) = x^2$$

bentuk ini bisa ditulis :

$$\mathbf{6\,Cx^2} + (6D - 10C)x + \mathbf{(2x\text{-}5D + 6E)} = 1x^2 + 0x + \mathbf{0}$$

dengan menyamakan koefisien dari x yang berpangkat sama, kita dapatkan :

$x^2 \;\Rightarrow\; 6c = 1$

$$c = \frac{1}{6}$$

$x \;\Rightarrow\; 6\,D - 10\,c = 0$

$$6D - 10.\frac{1}{6} = 0 \Rightarrow D = \frac{5}{18}$$

$$0 \quad \Rightarrow 2c - 5D + 6E = 0$$

$$2.\frac{1}{6} - 5.\frac{5}{18} + 6.E = 0$$

$$E = \frac{19}{108}$$

Jadi Integral khususnya adalah :

$$Y = cx^2 + Dx + E$$
$$= \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{19}{108}$$

Sehingga jawaban yang sebenarnya adalah :

Y = ***Fungsi Komplementer*** + ***Integral Khusus***

$$= Ae^{2x} + Be^{3x} + \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{19}{108}$$