I N T E G R A L

(Anti Turunan)

I. Integral Tak Tentu

A. Rumus Integral Bentuk Baku

	Derifatif	***Integral***
1.	d/dx $X^n = nX^{n-1}$	$\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$
2.	d/dx cos x = - sin x	$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$
3.	d/dx sin x = cos x	$\int \cos x\, dx = \sin x + c$
4.	d/dx tg x = $\sec^2 x$	$\int \sec^2 x\, dx = \mathrm{tg}\, x + c$
5.	d/dx ctg x = - $\mathrm{cosec}^2 x$	$\int \mathrm{cosec}^2 x\, dx = -\mathrm{ctg}\, x + c$
6.	d/dx ln x = $\frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + c$
7.	d/dx $a^x = a^x \ln a$	$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
8	d/dx $e^x = e^x$	$\int e^x\, dx = e^x + c$
9.	d/dx arc sin x = $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + c$ $= -\arccos x + c$

10.	d/dx arc cos x = $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ dx = arc cos x + c = -arc sin x + c
11.	d/dx arc tg x = $\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2}$ dx = arc tg x + c = -arc ctg x + c
12.	d/dx arc sec x = $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ dx = arc sec x + c = -arc cosec x + c
13.	d/dx cosh x = sinh x	$\int$ sinh x dx = cosh x + c
14.	d/dx sinh x = cosh x	$\int$ cosh x dx = sinh x + c
15.	d/dx tgh x = sech^{2}x	$\int$ sech^2 x dx = tgh x + c
16.	d/dx ctgh x = - cosech^{2}x	$\int$ cosech^2 x dx = -ctgh x + c
17.	d/dx arc sinh x = $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ dx = arc sinh x + c
18.	d/dx arc cosh x = $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ dx = arc cosh x + c
19.	d/dx arc tgh x = $\frac{1}{1-x^2}$	$\int \frac{1}{1-x^2}$ dx = arc tgh x + c
20.	d/dx arc ctgh x = $\frac{1}{1-x^2}$	$\int \frac{1}{1-x^2}$ dx = arc ctgh x + c

Contoh:

1. $\int x^5\,dx = \frac{1}{5+1} x^{5+1} + c = \frac{1}{6} x^6 + c$

2. $\int e^{5x}\,dx = \frac{1}{5} e^{5x} + c$

3. $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{1}{3/2} x^{3/2} + c$

4. $\int \frac{5}{x}\,dx = 5 \ln x + c$

5. $\int 5^x\,dx = \frac{5^x}{\ln 5} + c$ (rumus 7)

6. $\int 2 \sin x\,dx = 2 \int \sin x\,dx = -2 \cos x + c$

7. $\int \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x \right) dx = \int \frac{x^3}{3}\,dx - \int \frac{x^2}{2}\,dx - \int 6x\,dx$

$$= \frac{1}{3} \int x^3\,dx - \frac{1}{2} \int x^2\,dx - 6 \int x\,dx$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} x^3 - 6 \cdot \frac{1}{2} x^2 + c$$

$$= \frac{1}{12} x^4 - \frac{1}{6} x^3 - 3x^2 + c$$

Rumus Tambahan (Penunjang)

1. $\int a\,du = a \int du$
2. $\int (du + dv) = \int du + \int dv$

Keterangan : a=Konstanta

B. Integral Dengan Cara Substitusi

Maksudnya adalah mengintegrasikan fungsi-fungsi yang bentuknya seperti pada integral baku, melalui substitusi. Sebagai ilustrasi sbb:

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$$

$$\int z^n \, dz = \frac{1}{n+1} z^{n+1} + c$$

$$\int (3 + 5x)^4 \, d(3 + 5x) = \tfrac{1}{5} (3 + 5x)^5 + c$$

tetapi bagaimana yang ini :

$$\int (3 + \underbrace{6x)^7 \, dx}_{\text{tidak sama}} =$$

Agar sama, maka x diganti dengan (3 + 6x), yaitu dengan cara mendeferensialkan fungsi yang ada dalam kurung.

$$Y = (3 + 6x) \longrightarrow dy/dx = 6$$

$$\frac{d(3+6x)}{dx} = 6$$

$$dx = 1/6 \, d(3 + 6x)$$

sehingga

$$\int (3 + 6x)^7 \, dx = \int (3 + 6x)^7 \frac{1}{6} d(3 + 6x)$$

$$= \frac{1}{6} \int (3 + 6x)^7 \, \underbrace{d \; (3 + 6x)}_{\text{sudah sama}}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} (3 + 6x)^8 + c$$

$$= \frac{1}{48} (3 + 6x)^8 + c$$

Catatan : substitusi dipakai bila kesulitan dengan rumus baku

Contoh 2.

Carilah $\int \sin (2x - 3) \, dx$

Jawab :

(2x – 3) dideferensialkan $\longrightarrow \frac{d(2x-3)}{dx} = 2 \longrightarrow dx = 1/2 d (2x - 3)$

Sehingga

$$\int \sin (2x - 3) \, dx = \int \sin (2x - 3) \, ½ \, d (2x - 3)$$

$$= 1/2 \int \sin (2x - 3) \, d (2x - 3)$$

$$= - 1/2 \cos (2x - 3) + c$$

Contoh 3.

Hitunglah $\int \sqrt{2x+3} \, dx$

Jawab :

$$\int \sqrt{2x+3}\ dx = \int (2x+3)^{1/2}\ dx$$

$$\frac{d(2x+3)}{dx} = 2 \longrightarrow dx = ½.d\,(2x+3)$$

$$\int (2x+3)^{1/2}\, dx = \int (2x+3)^{1/2}.\ ½.d\,(2x+3)$$

$$= 1/2 \int (2x+3)^{1/2}\ d\,(2x+3)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1/2+1} (2x+3)^{\frac{1}{2}+1} + c$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (2x+3)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{1}{3} (2x+3)^{\frac{3}{2}} + c$$

Dari contoh-contoh tersebut dapat dibuat rumus integral dengan cara substitusi sbb

$$\int (ax+b)^n\, dx = \frac{1}{a(n+1)} (ax+b)^{n+1} + c$$

$$\int \cos(ax+b)\, dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$$

$$\int \sin(ax+b)\, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b)^{n+1} + c$$

Keterangan :

Rumus no.1 di atas hanyalah penjabaran dari rumus baku yang sudah kita pelajari, yaitu :

$$\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$$

Pembuktian :

Hitunglah $\int 4x^2\,dx$

1. Dikerjakan dengan rumus baku

$$\int 4x^2\,dx = 4\int x^2dx = 4.\frac{1}{3}x^3 + c = \frac{4}{3}x^3 + c$$

2. Dikerjakan dengan rumus 1 di atas

$$\int 4x^2\,dx = \int (2x)^2\,dx = \int (2x+0)^2\,dx$$

dari rumus diketahui :

$$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + c$$

$$\int (2x+0)^2\,dx = \frac{1}{2(2+1)}(2x+0)^{2+1} + c$$

$$= \frac{1}{6}(2x)^3 + c$$

$$= \frac{1}{6}.2^3.x^3 + c$$

$$= \frac{1}{6}.8.x^3 + c$$

$$= \frac{8}{6}.x^3 + c$$

$$= \frac{4}{3}.x^3 + c$$

Jadi terbukti bahwa rumus no. 1 tersebut merupakan penjabaran dari rumus bakunya.

C. Integral Trigonometri

Rumus-rumus penunjang untuk mengerjakan integral trigonometri adalah sbb:

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
2. $1 + tg^2\, x = \sec^2 x$
3. $1 + ctg^2\, x = cosec^2\, x$
4. $\sin^2 x = ½\, (1 – \cos 2x)$
5. $\cos^2 x = ½\, (1 + \cos 2x)$
6. $\sin x.\, \cos x = ½ \sin 2x$
7. $\sin x.\, \cos y = ½ \left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right]$
8. $\sin x.\, \sin y = ½ \left[\cos(x+y) - \cos(x+y)\right]$
9. $\cos x.\, \cos y = ½ \left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right]$
10. $1 – \cos x = 2 \sin^2 \frac{1}{2} x$
11. $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{1}{2} x$

contoh 1.

$\int \sin^2 x\, dx = \int 1/2\, (1 - \cos 2x)\, dx \longrightarrow$ rumus no. 4

$= \int (1/2 - 1/2 \cos 2x)\, dx$

$= \int 1/2\, dx - \int 1/2 \cos 2x\, dx$

$= \int 1/2\, dx - \int 1/2 \cos 2x\; 1/2\; d(2x)$

$= 1/2\, x – ¼ \sin 2x + c$

ingat $\frac{d(2x)}{dx}$ **= 2, sehingga dx = ½ d (2x)**

contoh 2.

$$\int \cos^2 3x\, dx = \int 1/2\ (1 + \cos 6x)\, dx \longrightarrow \text{rumus no. 5}$$

$$= \int (½ + ½ \cos 6x)\, dx$$

$$= \int 1/2\, dx + \int 1/2\ \cos 6x\, dx$$

$$= \int 1/2\, dx + \int 1/2 \cos 6x\ 1/6\, d(6x)$$

$$= ½ \int dx + 1/12 \int \cos 6x\, d(6x)$$

$$= ½ x + 1/12 \sin 6x + c$$

ingat $\frac{d(6x)}{dx}$ **= 6** $\longrightarrow$ **dx = 1/6 d (6x)**

D. Integral dengan bentuk $f^1(x) / f(x)$ dan $f^1(x) . f(x)$

Contoh $\int$ $f^1(x) / f(x)$:

1. Tentukan harga dari $\int \frac{(2x+3)}{(x^2+3x-5)}\, dx$

Jawab : misal $z = (x^2 + 3x - 5)$

$$\frac{dz}{dx} = 2x + 3$$

sehingga $dz = (2x + 3).\, dx$

$$\int \frac{(2x+3)}{(x^2+3x-5)}\, dx = \int \frac{dz}{z}$$

dapat ditulis $= \int \frac{1}{z} .\, dz$

Sehingga

$$\boxed{\int \frac{1}{z} .\, dz = \ln z + c}$$

$$= \ln (x^2 + 3x - 5) + c$$

2. Tentukan $\int \frac{3x^2}{(x^3-4)}$ dx

Jawab : sesuai dengan rumus diatas, maka

$$\int \frac{3x^2}{(x^3-4)} = \ln(x^3 - 4) + c$$

3. Hitunglah $\int \frac{2x^2}{(x^3-4)}$ dx

Jawab: $\int \frac{2x^2}{(x^3-4)}\,dx = \frac{2}{3}\int \frac{3x^2}{x^3-4}\,dx \longrightarrow$ dikalikan $\frac{3}{3}$

$$= \frac{2}{3}\ln(x^3 - 4) + c$$

Contoh $\int$ f[1] (x). f (x)

1. Tentukan harga $\int$ tg x. $\sec^2$ x dx

Jawab : misal z = tg x

Maka $\frac{dz}{dx}$ = $\sec^2$ x

Sehingga dz = $\sec^2$ x. dx

jadi $\int$ tg x. $\sec^2$ x dx = $\int$ z. dz

$$\boxed{\int z.\,dz = \tfrac{1}{2} z^2 + c}$$

= ½ (tg x $)^2$ + c

2. Tentukan harga $\int (x^2 + 7x - 4)(2x + 7)\,dx$

Jawab : misal $z = (x^2 + 7x - 4)$

Maka $\frac{dz}{dx} = (2x + 7)$

Sehingga $dz = (2x + 7).\,dx$

Jadi $\int (x^2 + 7x - 4)(2x + 7)\,dx$

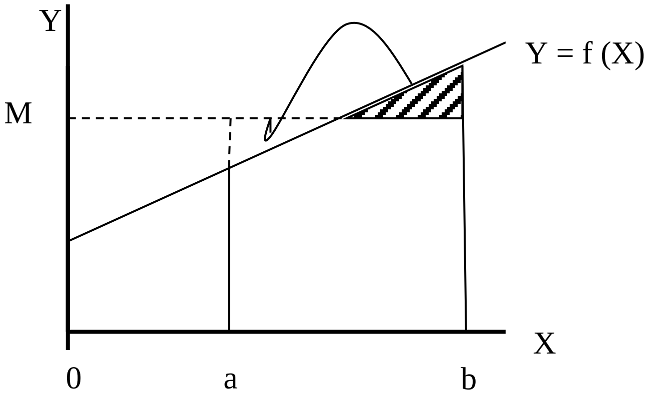
$= \int z.\,dz$

$= \frac{1}{2} z^2 + c$

$= \frac{1}{2}(x^2 + 7x - 4)^2 + c$

4. Harga rata-rata (Mean)

Untk mencari harga mean dari suatu grafik y = f(x) yang dibatas antara X = a dan X = b , kita harus melihat empat persegi panjang yang dibentuk oleh grafik tersebut. Jika luas daerah yang diarsir diberikan kepada luas yang di bawah, maka luas empat persegi panjang tersebut adalah sebagai berikut :



A = M (b – a) , sehingga $M = \frac{A}{(b-a)}$

Dengan menggunakan rumus luas seperti yang telah diuraikan di depan, maka tinggi M (harga Rata-rata) adalah sebagai berikut :

Jadi $\boxed{M = \frac{A}{(b-a)} \int_a^b y \ dx}$

Contoh :

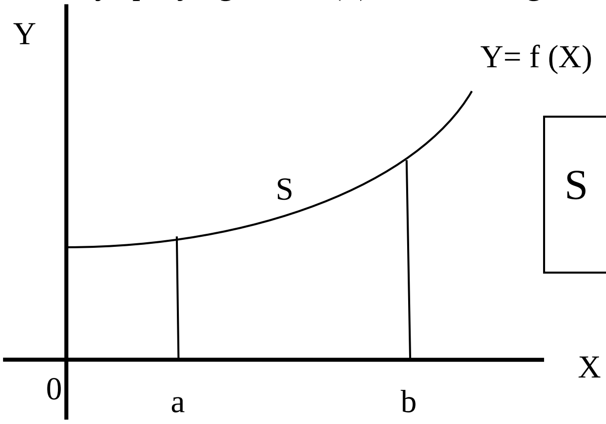
Carilah harga mean dari persamaan Y = $3X^2$ + 4X + 1 yang dibatasi antara X = -1 dan X = 2

Jawab : M $= \frac{A}{(b-a)} \int_a^b y \ dx$

$$= \frac{1}{(2-(1)} \int_{-1}^{2} (3x^2 + 4x + 1)\, dX = 6$$

5. Mencari Pannjang Kurva

Pada gambar di bawah, kurva y = f(x) yang dibatasi   x = a   dan   x = b, maka besarnya panjang kurva (S) adalah sebagai berikut :



$$S = \int_a^b \sqrt{(1 + (\frac{dy}{dx})^2)}\, dx$$

Contoh :

Tentukanlah panjang kurva $Y^2 = X^3$ yang dibatasi oleh garis X = 0 dan X = 4 untuk cabang y > 0

Jawab :

$Y^2 = X^3$ jadi harga $Y = X^{3/2}$

Harga $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} X^{1/2}$ sehingga $(\frac{dy}{dx})^2 = \frac{9x}{4}$

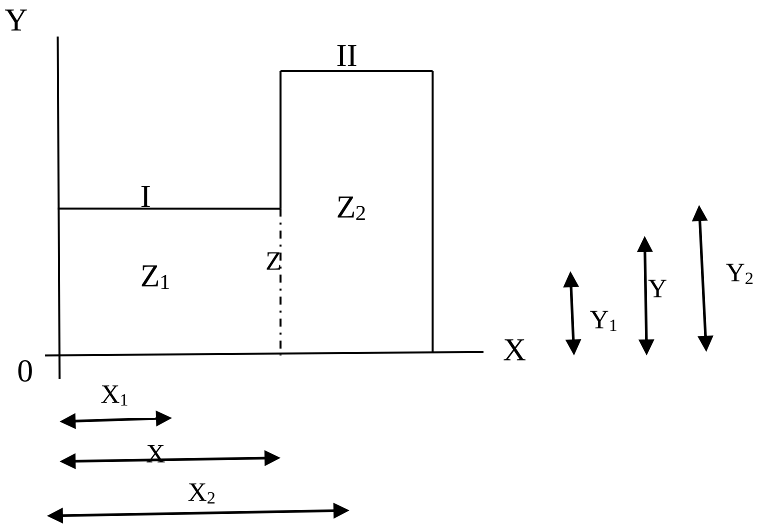
$$= \int_0^4 \{ [1 + \left(\frac{9x}{4}\right)]^{1/2} \}\, dx \;=\; 9,37$$

Soal Latihan :

1. Tentukan panjang kurva $y = x^2$ diantara X = 0 dan x = 4 untuk cabang x > 0
2. Tentukanlah panjang kurva dari grafik y = 2x yang dibatasi oleh garis x = 2   dan x= 5.

3. Tentukanlah panjang kurva dari grafik $y = -2x$ yang dibatasi garis $x = -1$ dan garis $x = -4$.

6. Mencari Titik Berat



Dimana :

\X_1 : Jarak titik berat benda I terhadap sumbu Y
X_2 : Jarak titik berat benda II terhadap sumbu Y
X : Jarak titik berat gabungan benda 1 dan II terhadap sumbu Y
Y_1 : Jarak titik berat benda I terhadap sumbu X
Y_2 : Jarak titik berat benda II terhadap sumbu X
Y : Jarak titik berat gabungan benda 1 dan II terhadap sumbu X
F1 : Luas benda I
F2 : Luas benda II
F : Luas gabungan benda I dan II

Dengan dalil momen, gambar diatas dapat dicari letak titik beratnya.

Momen luasan terhadap sumbu X adalah : $\Sigma F Y = F_1 Y_1 + F_2 Y_2$

$$\boxed{\mathbf{Y} = \frac{\boldsymbol{F_1 Y_1 + F_2 Y_2}}{\boldsymbol{\Sigma F}}}$$

$F_1 Y1 + F_2 Y_2$ disebut dengan M_x atau momen luas terhadap sumbu X

Sehingga

$$\boxed{Y = \frac{M_x}{Luas}}$$

Momen Luasan terhadap sumbu Y adalah

$\Sigma F X = F_1 X_1 + F_2 X_2$

$$\boxed{Y = \frac{F_1 X_1 + F_2 X_2}{\Sigma F}}$$

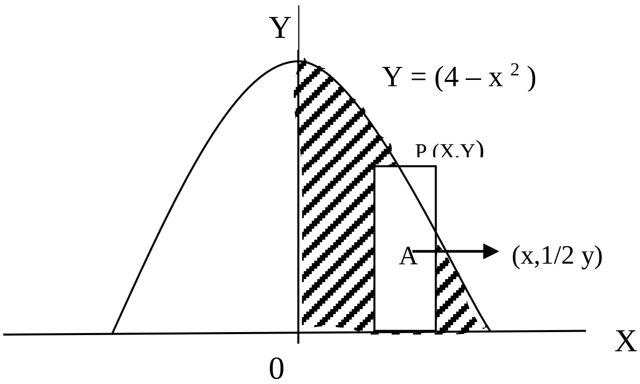
$F_1 X1 + F_2 X_2$ disebut dengan M_y atau momen luas terhadap sumbu Y

Sehingga

$$\boxed{X = \frac{M_y}{Luas}}$$

Contoh Soal

Carilah letak titik berat dari gambar berikut ini.



Jawab :

Titik berat segi empat yang ditinjau misal A (X, ½ Y)

Luasdaerah yang diarsir (F) adalah F = $\int_0^2 y\ dx = \int_0^2 (4 - X^2)\ dx = \frac{16}{3}$

Besarnya momen luas terhadap sumbu Y atau My adalah :

My = Luas x Jarak (diukur dari titk berat yang ditinjau ke sumbu Y)

$= \int_0^2 y \ dx \,. x \ = \ \int_0^2 \ x \ y \ dx \ = \ \int_0^2 x \,(4 - x^2) \, dx = \int_0^2 4x - \ x^3 \ ) \, dx$

= 4

Besarnya momen luas terhadap sumbu X atau Mx adalah =

Mx = Luas x Jarak (diukur dari titk berat yang ditinjau ke sumbu X)

$= \int_0^2 y \, dx \,. \frac{1}{2} y = \int_0^2 \frac{1}{2} \ y^2 \ dx \ = \frac{1}{2} \ \int_0^2 y^2 \ dx = \frac{1}{2} \ \int_0^2 (4 - \ x^2)^2$ dx

$= \frac{128}{15}$

Jadi Titi beratnya adalah X $= \frac{My}{Luas} \ = \ \frac{4}{\frac{16}{3}} = \ \frac{3}{4}$

Y $= \frac{Mx}{Luas} \ = \ \frac{128}{16/3}$ = 8/5

Soal Latihan :

Carlah titik berat benda yang terjadi luas daerah yang dibatasi oleh garis berikut ini :

1. Y = X^2 Y = 9 dan X = 0 dan sumbu Y
2. Y = X^2 Y = 9 dan X = 0 dan sumbu X
3. Y = 4x - x^2 dan Y = X dan sumbu X
4. Y = 4x - x^2 dan Y = X dan sumbu X
5. Y = 4x - x^2 dan Y = 0

8. Untuk Mencari momen Inersia (I)

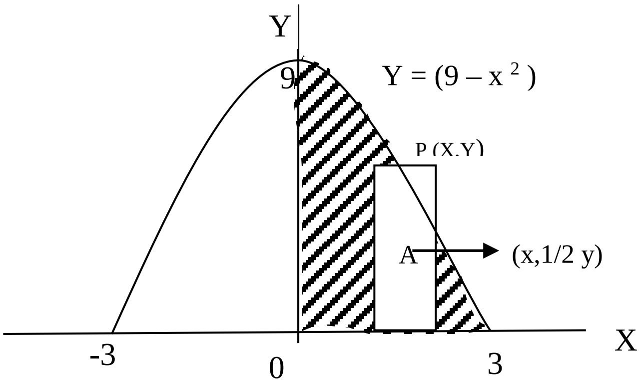
Momen Inersia (I) = Luas x Kuadrat jarak

Keterangan : Jarak diukur dari titik berat sampai sisi yang ditinjau.

Contoh soal 1 :

Carilah momen Inersia terhadap sumbu Y (Iy) dari daerah antara parabola y = 9 - x^2 dan sumbu X.

Jawab :



Untuk persegi panjang yang didekati luasnya (L) = y . dx

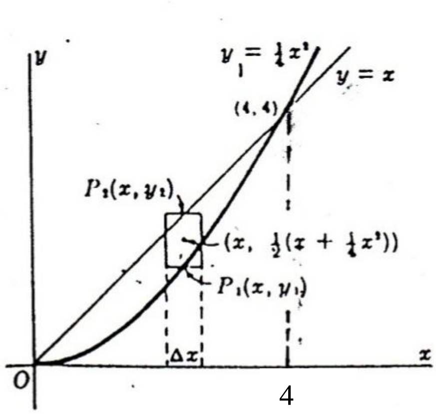
Titik beratnya = (x, ½ y)

Momen Inersianya (I y) sebagai berikut :

I y $= \int_{-3}^{3} y\ dx\ .\ x^2 = \int_{-3}^{3} x^2\, y\ dx = \int_{-3}^{3} x^2\ (9 - x^2)dx = \frac{324}{5}$

Contoh 2 :

Carilah momen Inersia terhadap sumbu Y dari daerah kuadran I yang dibatasi parabola $x^2 = 4y$ dan garis $y = x$



Jawab :

Luas segi empat yang ditinjau adalah :

L = $(y_2 - y_1)$ dx = $(x - \frac{1}{4} x^2)$ dx

Titik beratnya adalah = (x , ½$(y_2 + y_1)$) = [x , ½ $(x + \frac{1}{4} x^2)$]

Luas daerah yang diarsir adalah (L) = $\int_0^4 (x - \frac{1}{4}x^2)\ dx = 8/3$

Jadi momen inersianya terhadap sumbu Y adalah sebagai berikut :

$$I_y = \int_0^4 x^2 \left(x - \frac{1}{4} x^2 \right) dx = \int_0^4 \left(x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right) dx =$$

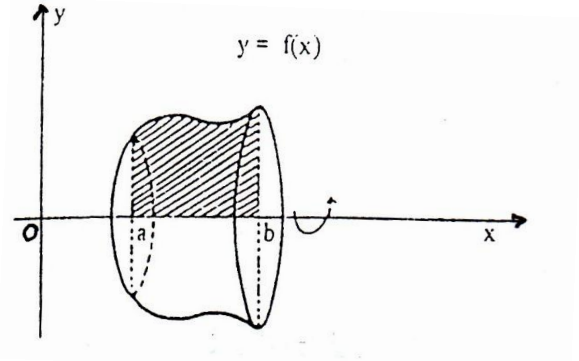
Soal Latihan :

Carilah momen inersia dari daerah yang dibatasi oleh garis berikut ini :

1. $Y = 4 - x^2$ dibatasi oleh x = 0 y = 0 , sumbu x dan sumbu y
2. $Y = 8x^3$ dibatasi oleh x = 0 y = 0 , sumbu x dan sumbu y
3. $4x^2 + 9y^2 = 36$ dibatasi oleh sumbu x dan sumbu y

9. Isi Benda Putar

Jika ada sebuah bangun datar yang dibatasi oleh kurva y = f (x) yang dibatasi oleh sumbu , garis x = a dan x = b dan diputar mengelilingi sumbu X , maka bangun datar tersebut akan membentuk benda putar. Untuk mencari volume (V) benda putar digunakan rumus sebagai berikut :

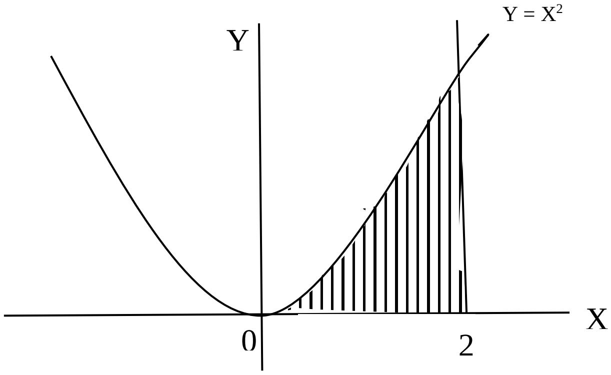


$$\boxed{V = \int_a^b \pi\, y^2\ dx}$$ atau $$\boxed{V = \pi \int_a^b y^2\ dx}$$

Contoh Soal :

Tentukan voume benda putar dari kurva $y = x^2$ yang dibatasi $X = 2$ dan sumbu X serta diputar mengelilingi sumbu X

Jawab :



$$V = \int_a^b \pi\, y^2 \; dx$$

$$\mathrm{V} = \pi \int_0^2 (x^2)^2 \; dx = \pi \int_0^2 x^4 \; dx = \frac{32}{5}\, \pi$$

Keterangan :
di dalam menyelesaiakn soal volume benda putar cukup dibuat gambar daerah yang dputar, sedangkan benda putarnya sendiri tidak perlu digambar.

Soal Latihan :

1. Carilah volme benda putar dari daerah yang dibatasi oleh $y^2 = 8x$ dan garis $x = 2$ (sumbu X sebagai sumbu putarnya).
2. Carilah volume benda putar dari daerah yang dibatasi oleh $y = 4x - x^2$ dengan sumbu x sekeliling garis $y = 6$
3. Cari lah volume benda putar dari daerah yang dibatas oleh $y = -x\ 2\ - 3x + 6$ dan garis $x + y - 3 = 0$ dan diputar pada garis $x = 3$

10. Luas Permukaan Putaran

Jika suatu kurva y = f (x) yang dibatasi oleh x = x1 dan x = x2 kurva tersebut diputar melalui sumbu x, maka luas permukaan putaran adalah sebagai berikut :

$$\boldsymbol{A = \int_{X1}^{X2} 2\ \pi\ y \sqrt{[1 + \frac{(dy)^2}{(dx)^2}}\ \ dx}$$

Contoh soal :

Tentukan luas permukaan yang terjadi jika busur parabola $y^2 = 8x$ dengan Y > 0 yang dibatasi garis x = 0 dan x = 0 dan diputar mengelilingi sumbu x.

Jawab :

$$A = \int_0^2 2\ \pi\ y \sqrt{[1 + \frac{(dy)^2}{(dx)^2}}\ \ dx$$

$y^2 = 8\,x$, maka harga $y = 2\sqrt{2x}$ sehingga harga $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}$

sehingga harga $(\frac{dy}{dx})^2 = \frac{2}{x}$

$$A = \int_0^2 2\ \pi\ y \sqrt{[1 + \frac{(dy)^2}{(dx)^2}} = dx \int_0^2 2\ \pi\ y \sqrt{[1 + \frac{2}{x}]}\ dx = 19{,}5\,\pi$$

Carilah luas permukaan benda dari daerah grafik :

1. y = x+1 diputar terhadap sumbu x yang dibatasi oleh garis x = 1 dan x = 5
2. y = - x+1 diputar terhadap sumbu x yang dibatasi oleh garis x = 11 dan x = -5