DIFERENSIAL
(Derivatif)

A. Simbol Deferensial

Jika ada Persamaan $y = 3x$, maka simbol dari

Turunan pertama y^1 atau $\frac{dy}{dx}$ atau ditulis $\frac{d\,(3x)}{dx}$

Turunan kedua y^{11} atau $\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}$ atau $\frac{d^2y}{dx^2}$

B. Rumus Dasar Deferensial

$$\boxed{\text{Jika } y = x^n \text{ maka } \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}}$$

Contoh : $y = 10x^2$ maka harga $\frac{dy}{dx} = 20x$

C. Kaidah-kaidah Deferensial

1. Diferensiasi Penjumlahan/Pengurangan fungsi

   $y = U + V$ dimana $U = g(x)$, $V = h(x)$,

   maka $$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}}$$

   contoh : $y = 8x^5 + 4x^3$, maka $\frac{dy}{dx} = 40x^4 + 12x^2$

2. Diferensiasi Perkalian Fungsi

   $y = U \,.\, V$ dimana $U = g(x)$, $V = h(x)$,

   maka $$\boxed{\frac{dy}{dx} = U.\frac{dv}{dx} + V\frac{du}{dx}}$$

   contoh : $y = (6x^2)(5x^3)$

   $$\frac{dy}{dx} = (6x^2)(15x^2) + (5x^3)(12x) = 90x^4 + 60x^4 = 150x^4$$

3. Diferensiasi Pembagian Fungsi

   $y = \frac{U}{V}; U = g(x); V = h(x)$ maka harga

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{V.\frac{du}{dx} - U.\frac{dv}{dx}}{V^2}}$$

contoh : $y = \dfrac{5x^5}{3x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2(25x^4) - 5x^5(6x)}{(3x^2)^2} = \frac{75x^6 - 30x^6}{9x^4}$$

$$= \frac{45}{9}x^2 = 5x^2$$

4. Diferensiasi Fungsi Berpangkat

   $y = U^n$; $u = g(x)$, n = konstanta $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = nU^{n-1}\dfrac{du}{dx}}$

   contoh :

   $y = (x^2 + 3x)^2 \rightarrow \dfrac{du}{dx} = 2x + 3$

   $$\frac{dy}{dx} = 2(x^2 + 3x)(2x + 3) = 2(2x^3 + 6x^2 + 3x^2 + 9x)$$

   $= 4x^3 + 18x^2 + 18x$

5. Diferensiasi Fungsi Logaritmik

   $y = {}^a\log x$, maka $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x \ln a} \; atau = \dfrac{{}^a\log e}{x}}$

   contoh :

   $y = {}^5\log 7$ maka harga $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{7\ln 5} \quad atau \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{{}^5\log e}{7}$

6. Diferensiasi Fungsi Komposit Logaritmik

   $y = {}^a\log u$; $u = g(x)$ maka $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{{}^a\log e}{u}.\dfrac{du}{dx}}$

$$y = \log\frac{(x+5)}{(x+7)} \rightarrow U = \frac{(x+5)}{(x+7)}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{(x+7)(1)-(x+5)(1)}{(x+7)^2} = \frac{2}{(x+7)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\log e}{(x+5)/(x+7)} \cdot \frac{2}{(x+7)^2} = \frac{2\log e}{(x+5)(x+7)}$$

7. Diferensiasi Fungsi Komposit Logaritmik Berpangkat

   y = $({}^{a}\log U)^n ; U = g(x)$ dimana n = konstanta, maka harga

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = n({}^{a}\log U)^{n-1} \cdot \frac{{}^{a}\log e}{U} \cdot \frac{du}{dx}}$$

   contoh :

   y = (log 6x^2)$^3 \rightarrow$ U = 6x^2 ; jadi $\frac{du}{dx} = 12x$

$$\frac{dy}{dx} = 3(\log x^2)^2 \cdot \frac{\log e}{6x^2}(12x)$$

$$= \frac{36x(\log 6x^2)^2 \log e}{6x^2} = \frac{6(\log 6x^2)\log e}{x}$$

8. Diferensiasi Fungsi Komposit Logaritmik Napier

   Log. Napier $\rightarrow$ logaritma yang bilangan pokoknya e

   Harga bilangan e = 2,71828

   Bilangan $\boxed{{}^{e}\log\ a \quad \text{ditulis dengan} \quad \ln = a}$

   Jadi harga ln 10 *bisa ditulis* ${}^{e}\log 10$

   Turunan logaritma napier :

   y = ln u; u = g(x) $\rightarrow$ $\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}}$

contoh : y = ln (5x^2 + 7) $\rightarrow$ U = 5x^2 + 7 harga $\frac{du}{dx} = 10x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(5x^2+7)}.10x = \frac{10x}{(5x^2+7)}$$

9. Diferensiasi Fungsi Komposit logaritmik Napier Berpangkat

Y = (lnU)^n ; U = g(x) ; n = konstanta

$$\frac{dy}{dx} = n(\ln U)^{n-1}.\frac{1}{U}.\frac{du}{dx}$$

contoh :

y = (ln 3x^2)^4 $\rightarrow$ U = 3x^2 $\rightarrow$ $\frac{du}{dx} = 2x$

$$\frac{dy}{dx} = V.U^{v-1}\frac{du}{dx} + U^v \ln U \frac{du}{dx}$$

contoh

y = 7x $^{x^5}$ $\rightarrow U = 7x \frac{du}{dx} = 7$

V = x^5 $\frac{du}{dx} = 5x^4$

$$\frac{dy}{dx} = x^5.7x^{x^5-1}.7 + 7x^{x^5}\ln 7x.5x^4$$

= 49x $^{x^5+4}$ +35x $^{x^5+4}$ln.7x

= 35x $^{x^5+4}$ (9/7 + ln 7x)

10. Deferensial Fungsi Eksponensial

Jika y = a x dimana a = konstanta, maka harga

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = a^x \ln a}$$

Contoh y = 6 ^{x} maka harga $\frac{dy}{dx} = 6^x \ln 6$

11. Deferensial Fungsi Komposit Eksponensial

Jika y = a^u dimana u = g(x) maka harga

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = a^u \ln a \; \frac{du}{dx}}$$

Contoh :

y = $5^{(x^2-\ 4)}$ maka harga $\frac{dy}{dx} = 5^{(x^2-\ 4)} \ln 5 \quad 2x$

12. Deferensial Fungsi kompleks

Jika y = u^v dimana u = g (x) dan v = h (x)

Maka harga

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = v \; u^{v-1} \; \frac{du}{dx} + u^v \ln u \; \frac{dv}{dx}}$$

13. Diferensiasi Fungsi Balikan

Jika y = f(x)dan x = g(y) adalah fungsi-fungsi yang berbalikan, maka

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}}$$

contoh :

x = 10y + 3y^4

maka $\frac{dx}{dy} = 10 + 12y^3$ sehingga $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{10+12y^3}$

D. Deferensial Baku Fungsi Trigonometri

1. y = sin x	maka	dy/dx = cos x
2. y = cos x		dy/dx = -sin x
3. y = lg x		dy/dx = $\sec^2$x
4. y = cotg x		dy/dx = -cosec^2 x
5. y = sec x		dy/dx = sec x tg x
6. y = cosec x		dy/dx = -cosec x ctg x
7. y = sinh x		dy/dx = cosh x

8. y = cosh x	dy/dx = sinh x

Bila U = f(x) dapat diturunkan, maka

$$\frac{d\sin U}{dx} = \cos U\frac{du}{dx} \rightarrow \text{no.2 s/d 8 identik}$$

contoh 1.

Hitunglah $\frac{dy}{dx}$ dari $y = \cos^3 5x$

Penyelesaian : $\frac{dy}{dx} = 3(\cos^2 5x)\frac{d\cos 5x}{dx} \rightarrow$ rumus no.2

$= 3(\cos^2 5x)(-\sin 5x)\frac{d5x}{dx}$

$= -15 \sin 5x \cos^2 5x$

contoh 2.

Hitunglah $\frac{dy}{dx}$ dari y = ctg 2x cosec 2x

Penyelesaian : $\rightarrow$ingat y = U.V maka $\frac{dy}{dx} = U\frac{dv}{dx} + V\frac{du}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = ctg\,2x\frac{d\cos ec2x}{dx} + \cos ec2x\frac{dctg\,2x}{dx}$$

= ctg 2x (- cosec 2x.ctg 2x) 2

+ cosec 2x (- cosec^2 2x)^2

= ctg^2 2x (- cosec 2x).2 + cosec 2x (- cosec^2 2x)2

= -2 cosec 2x (ctg^2 2x + cosec^2 2x)

Karena ctg^2 $\alpha = \cos ec^2\alpha - 1,$ maka :

= -2 cosec 2x [(cosec^2 2x – 1) + cosec^2 2x]

= -2 cosec 2x (2 cosec^2 2x – 1)

= 2 cosec 2x – 4 cosec^3 2x

INGAT !

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$1 + \text{ctg}^2 \alpha = \cos ec^2 \alpha$

$1 + \text{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha$

E. Deferensial Fungsi Implisit

$y = x^2 - 4x + 2 \rightarrow$ fungsi eksplisit dari x

$x^2 - 4x - y = 2 \rightarrow$ fungsi implisit dari x

contoh :

jka $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$, tentukan $\frac{dy}{dx}$ di titik x = 3, y = 2

Penyelsaian :

$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$

$2x + 2y \frac{dy}{dx} - 2 - 6\frac{dy}{dx} = 0$

$(2y - 6)\frac{dy}{dx} = 2 - 2x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2-2x}{2y-6} = \frac{1-x}{y-3}$

$\therefore$ di (3, 2) $\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1-3}{2-3} = \frac{-2}{-1} = 2$

F. Diferensiasi Logaritmik Lebih Dari Dua Faktor

Jika $y = \frac{U.V}{W}$ U = f(x) V = g(x) ; W = h(x)

Maka untuk mencari turunan pertamanya adalah dengan logaritma dengan bilangan dasar e

${}^e\log y = {}^e\log \frac{U.V}{W}$ ingat Sifat bil logaritma

ln a.b = ln a + ln b
ln a/b = ln a – ln b
atau
lg a.b = log a + log b
log a/b = log a-log b

Persamaan tersebut dirubah menjadi

ln y = ln U + ln V – ln W

$$\therefore \frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = \frac{1}{U}.\frac{du}{dx} + \frac{1}{V}\frac{dv}{dx} - \frac{1}{W}.\frac{dw}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{1}{U}.\frac{du}{dx} + \frac{1}{V}.\frac{dv}{dx} - \frac{1}{W}.\frac{dw}{dx}\right)$$

jadi jika

y = $\frac{U.V}{W}$ maka $\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{U.V}{W}\left(\frac{1}{U}.\frac{du}{dx} + \frac{1}{V}.\frac{dv}{dx} - \frac{1}{W}.\frac{dw}{dx}\right)}$

Catatan **:**
Gunakanlah selalu cara diferensial logaritmik bila ada lebih dari dua fungsi dalam suatu perkalian atau pembagian maupun dua-duanya.

Contoh:

Carilah harga $\frac{dy}{dx}$ dari persamaan y = $\frac{x^2.\sin x}{\cos 2x}$

Penyelesaian :

ln y = ln (x^2) + ln (sin x) – ln (cos 2x)

1/y dy/dx = $\frac{1}{x^2}.2x + \frac{1}{\sin x}.\cos x - \frac{1}{\cos 2x}(-2\sin 2x)$

ingat : $\frac{\cos x}{\sin x} = ctgx$; $\frac{\sin x}{\cos x} = tgx$

jadi

$$\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2} + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{2\sin 2x}{\cos 2x}$$

$$\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x} + ctgx = 2tg2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 \sin x}{\cos 2x}(2/x + ctgx + 2tg2x)$$

G. Diferensiasi Parsial

Adalah turunan dari suatu fungsi yang terdiri dari beberapa variabel, dan penyelesaiannya dilakukan bagian demi bagian.

Contoh :

Z = $2x^2 - 3xy + 4y^2$ atau Z = y (x, y)

Dalam fungsi tersebut ada dua variabel bebas, yaitu x dan y, maka berapakah dz/dx dan dz/dy ?

<u>Cara penyelesaian :</u>

Ada beberapa anggapan/kemungkinan, a.l :

1. variabel x berubah-ubah, y konstan. Maka Z = fungsi x

   $\therefore$ Turunannya ke x atau dz/dx

   Z = $2x^2 - 3xy + 4\,y^2$

   $$\frac{dz}{dx} = 4x - 3y + 0 = 4x - 3y$$

2. Kemungkinan variabel y berubah-ubah, x konstan maka Z = fungsi y

   $\therefore$ Turunannya ke y atau dz/dy

   Z = $2x^2 - 3xy + 4y^2$

   $$\frac{dz}{dy} = 0 - 3x + 8y = -3x + 8y$$

3. Atau untuk mencari $\frac{dz}{dx} dan \frac{dz}{dy}$, fungsi tersebut dirubah menjadi fungsi implisit Z = $2x^2 - 3xy + 4y^2$

   Jika ditulis dalam bentuk implisit :

   $$2x^2 - 3xy + 4y^2 - = 0$$

   a. perlakukan y konstan dan cari $\frac{dz}{dx}$

   $$\frac{d(2x^2)}{dx} - \frac{d(3xy)}{dx} + \frac{d(4y^2)}{dx} - \frac{d(z)}{dx} = 0$$

$4x - 3y + 0 - \dfrac{dz}{dx} = 0$

$\therefore \dfrac{dz}{dx} = 4x - 3y$

b. perlakukan x konstan dan cari $\dfrac{dz}{dy}$

$2x^2 - 3xy + 4y^2 - z = 0$

$$\frac{d(2x^2)}{dy} - \frac{d(3xy)}{dy} + \frac{d(4y^2)}{dy} - \frac{dz}{dy} = 0$$

$0 - 3x + 8y - \dfrac{dz}{dy} = 0$

$\therefore \dfrac{dz}{dy} = -3x + 8y$

contoh :

$Z = (2x - y)^4$

Carilah dz/dx dan dz/dy

Penyelesaian :

$Z = (2x - y)^4$

a. perlakukan y konstan

$$\frac{dz}{dx} = 4(2x - y)^3 . \frac{d(2x - y)}{dx}$$

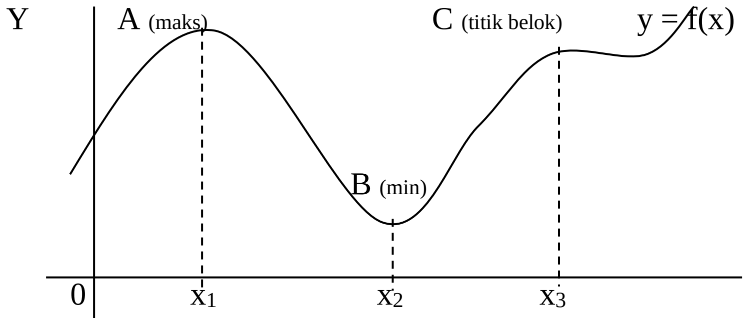
b. perlakukan x konstan

$$\frac{dz}{dy} = 4(2x - y)^3 . \frac{d(2x - y)}{dy}$$

$= 4(2x - y)^3(-1)$

$= -4(2x - y)^3$

H. Harga Maksimum dan Minimum dari Suatu Fungsi



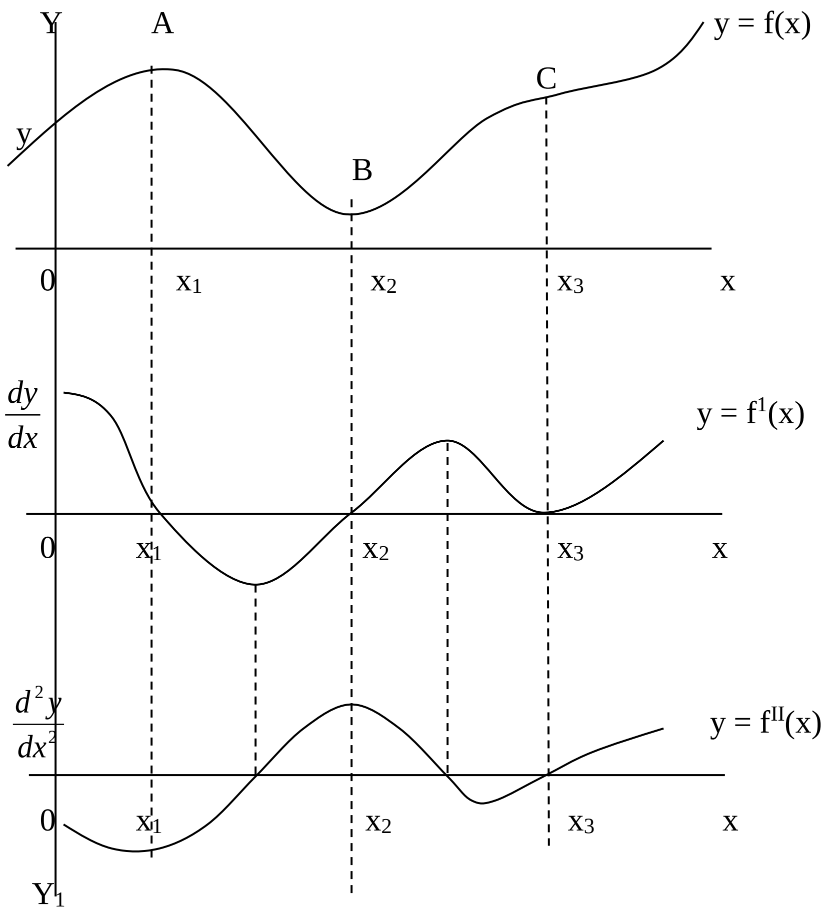
Keterangan :

A = harga maksimum (pada $x = x_1$), karena harga y dititik ini lebih besar daripada y di kanan kirinya.

B = harga minimum (pada $x = x_2$), karena harga y di titik ini lebih kecil daripada harga y di kanan kirinya.

C = titik belok/point of inflection yaitu dari lengkung kanan menjadi lengkung kiri (atau sebaliknya)

Perhatikan gambar di bawah ini :



Dari gambar di atas bahwa :

1. Harga maks, min dan titik belok tercapai bila dy/dx = 0
2. Untuk harga y maksimum (titik A), maka turunan ke-dua d^2y/dx^2 = negatif
3. Untuk harga y minimum (titik B), maka turunan ke-dua d^2y/dx^2 = positif
4. Untuk titik belok (titik C), maka turunan ke-dua $d^2y/dx^2 = 0$

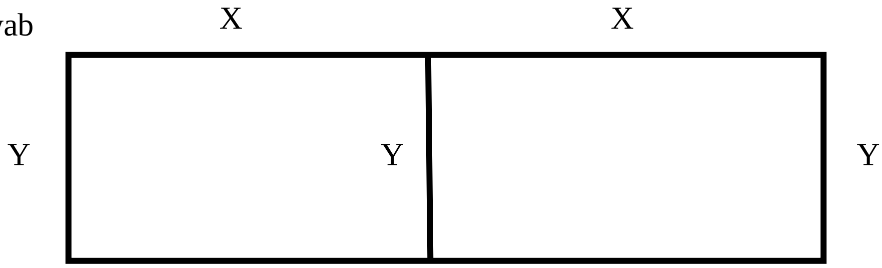
Untuk Aplikasi dalam memecahkan suatu persoalan hal yang perlu di INGAT BAHWA :

Harga maksimum atau minimum dari suatu fungsi akan tercapai bila turunan pertamanya = 0 atau ditulis $\frac{dy}{dx} = 0$

Contoh :

1. Akan dibuat buah ruangan bersisian dengan memanfaatkan dinding yang sudah ada. Bahan pembuat ruang cukup dengan sekat, tersedia untuk 300 meter agar. Tentukan ukuran ruangan agar luas ruangan keduanya maksimum.

Jawab



Keliling = 3 Y + 4 X

300 = 3 Y + 4 X

$$Y = 100 - \frac{4}{3} X$$

Luas (L) = 2 X . Y

$$= 2 X (100 - \frac{4}{3} X) = 200 X - \frac{8}{3} X^2$$

Luas akan maksimum akan dicapai bila $\frac{dL}{dx} = 0$

Harga $\frac{dL}{dx} = 200 - \frac{16}{3} X$, sehingga

$200 - \frac{16}{3} X = 0$ maka harga X = 37,5 m

Harga $Y = 100 - \frac{4}{3} X$, maka harga Y = 50 M

Jadi agar luas ruangan tersebut di atas, maka ukuran X = 37, 5 m

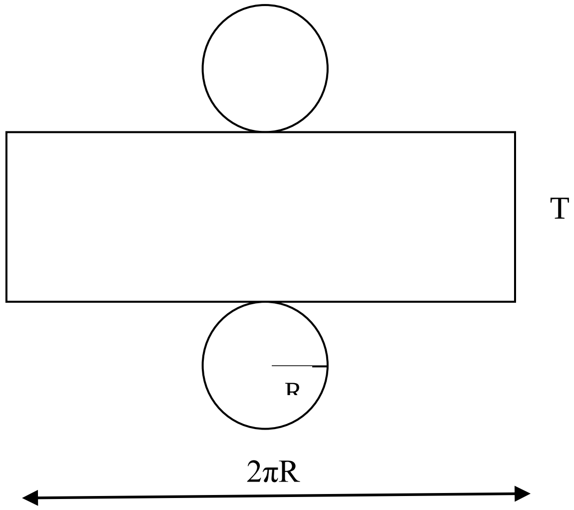
Y = 50 m

Bukti :

	Harga X	Harga Y	Luas = 200 X - $\frac{8}{3}$ X ^{2}	Keterangan
Hasil Perhitungan	37,5	50		Terbukti
Dicoba	40			
Dicoba	30			

2. Akan dibuat kemasan untuk kaleng cat yang berisi 5 liter dengan tutupnya. Berapakahbesarnya ukuran Jari-jari dan tinggi kaleng (R dan T) agar bahan yang digunakan minimum ?

   Jawab :
   Gambar bukaan kaleng cat seperti di bawah ini



Luas (L) = $2\pi R\,T + 2\pi R^2$

Volume = $\pi R^2\ T$

5000 = $\pi R^2\ T$ sehingga harga $T = \frac{5000}{\pi R\ 2}$

Luas (L) = $2\pi R\ \frac{5000}{\pi R^2} + 2\pi R^2$

$= \frac{10.000}{R} + 2\ \pi R^2$

Agar volume maksimum, maka luasnya juga harus maksimum agar luasnya maksimum, maka turunan pertama luas terhadap jari-jari harus sama dengan nol atau ditulis $\frac{dL}{dR} = 0$

$$\frac{dL}{dR} = \frac{-10.000}{R^2} + 4\pi R$$

$$0 = \frac{-10.000}{R^2} + 4\pi R$$, semua dikalikan dengan R^2

Maka $R^3 = \frac{10.000}{4\ \pi}$

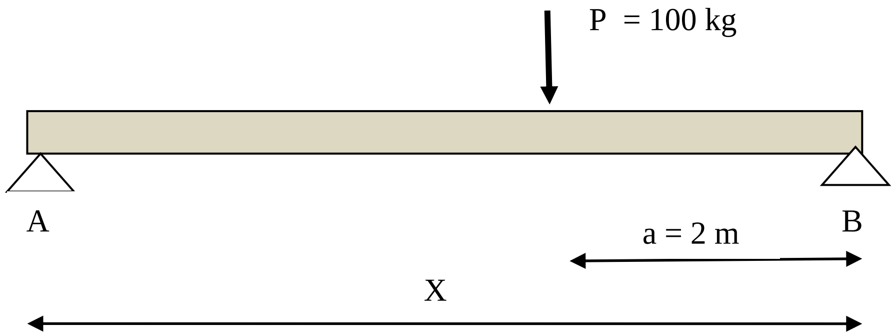
$R = 9{,}27$ cm dan $T = \frac{5000}{\pi R^2} = 18{,}537$ cm

Bukti :

	Harga R	Harga T	Luas Bahan (L)= $2\pi R\ T + 2\pi R^2$	Keterangan
Hasil Perhitungan	9,27	18,537		Minimum
Dicoba	12			
Dicoba	8			

3. Sebuah batang AB yang beratnya 20 kg/m ditumpu dengan dua tumpuan seperti gambar. Batang tersebut dibebani muatan titik sebesar 100 kg yang terletak 2 meter dari B. Tentukan panjang bentang AB agar gaya reaksidi A sekecil-kecilnya serta berapa besar gaya reaksi di A dan di B (R_A dan R_B) ?

Jawab :



Misal gaya reaksi di A = Y kg , sehingga Y = R_1 + R_2

Dimana R_1 = beban akibat gaya P dan R_2 = beban merata

$R_1 = \frac{P\,.a}{X}$ dan R_2 = 0.5 . 20 . X = 10 X

$Y = \frac{P\,.a}{X} + 10\,X = \frac{100\,.2}{X} + 10\,X = \frac{200}{X} + 10\,X$

$Y = \frac{200}{X} + 10\,X$

Sehingga harga $\frac{dy}{dx} = \frac{-200}{X^2} + 10$

Agar harga Y sekecil-kecilnya, maka harga $\frac{dy}{dx} = 0$, sehingga

$\frac{-200}{X^2} + 10 = 0$, harga $X = \sqrt{20} = 4{,}472$ m

Untuk harga X = 4,472, maka besarnya gaya reaksi di titik A atau Y adalah sebagai berikut

$Y = \frac{200}{X} + 10\,X = \frac{200}{X} + 10\,.\,4{,}472 = 89{,}44$ kg

Besarnya gaya reaksi di titik B = jumlah total beban - gaya reaksi di titik A atau (Y)

Gaya Reaksi di titik B = 100 + (20 . 4,472) – Y

= 100 + (20. 4,472) – 89,44 = 99,99 kg

Latihan Soal

1. Penampang suatu saluran terbuka berbentuk trapesium dengan alas (sisi bawah) panjangnya 60 cm dan sisi miring panjangngnya 100 cm. Tentukan panjang sisi atas agar saluran tersebut dapat menampung air sebanyak-banyaknya.

2. Akan dibuat bak penampung bahan berbentuk bujur sangkar dengan sisi 120 cm. Untuk ini dilakukan pemotongan tiap-tiap ujung plat dengan bentuk bujur sangkar kecil dan kemudian dilipat ke atas. Berapa luas bujur sangkar kecil harus dipotong dari tiap-tiap ujung agar volume tersebut maksimum ?
3. Akan dibuat bak sampah dari plat baja berbentuk silnder yang dapat memuat air sebanyak 1 m^3 (tanpa tutup). Tentukan ukuran diameter dan tingginya agar plat yang dgunakan minimal.
4. Akan dibuat talang dari seng berbentuk U . Tentukan lebar dan tinggi talang agar dapat menampung air yang sebanyak-banyaknya dengan bahan talang yang terbatas, yaitu lebar seng 90 cm.
5. Kawat sepajang 100cm dipotong menjadi dua, dan akan dibentuk benda yang berbentuk lingkaran dan benda lain berbentuk bujur sangkar. Tentukan ukuran masing-masing benda tersebut agar ke-dua luas benda tersebut maksium.