MODEL INDEKS TUNGGAL (SINGLE INDEX MODEL)

1. Konsep Dasar *Single Index Model*
2. Formula SIM untuk Sekuritas
3. SIM untuk Sekuritas Tunggal
4. SIM untuk Portofolio
5. Portofolio Optimal Berdasarkan SIM

Muniya Alteza
m_alteza@uny.ac.id

Konsep Dasar *Single Index Model*

- Masalah dalam *mean-variance model* :

  Kesulitan menerapkan model untuk portofolio yang terdiri dari banyak saham.

- Untuk menyederhanakan analisis portofolio dikembangkan Model Indeks Tunggal / *Single Index Model* (SIM) oleh William Sharpe.

- Dasar *Single Index Model:*
  - Harga suatu sekuritas berfluktuasi searah dengan indeks pasar
  - Return-return sekuritas berkorelasi karena adanya reaksi umum (*common response*) terhadap perubahan nilai pasar →terdapat sebuah faktor/ variabel yang memengaruhi return semua sekuritas yaitu indeks pasar

m_alteza@uny.ac.id

Formula *SIM* Untuk Sekuritas

- Perumusan:

$$R_i = a_i + \beta_i R_m$$

R_i = tk. keuntungan saham i

a_i = tk. keuntungan saham i yang tidak dipengaruhi perubahan pasar

β_i = beta

R_m = tk. keuntungan indeks pasar

Formula *SIM* Untuk Sekuritas (Lanjutan)

- Parameter a_i dapat dipecah menjadi α (nilai pengharapan a_i) dan e_i (elemen acak dari a_i) sehingga:

  $a_i \quad = \alpha_i + e_i$

  $$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + e_i$$

  Oleh karena e_i besarnya= 0 maka tk. keuntungan saham bisa dituliskan:

  $$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m$$

- SIM membagi komponen *return* menjadi 2:
  - Komponen terkait dengan keunikan perusahaan (α_i)
  - Komponen terkait dengan pasar (β_i)

m_alteza@uny.ac.id

Formula *Expected Return SIM* Untuk Sekuritas Tunggal

- Berdasar persamaan di atas dapat dirumuskan formula untuk sekuritas individual:

$$E(R_i) = E(\alpha_i) + E(\beta_i R_m) + e_i$$

$$E(R_i) = \alpha_i + \beta_i E(R_m)$$

Contoh Soal

- Diketahui *expected return* dari indeks pasar adalah 25%. Bagian dari *expected return* suatu sekuritas XYZ yang independen terhadap pasar (α_i) adalah 4% dan β_i sebesar 0,75. Ternyata return realisasi sebesar 26%.
- Berapakah *expected return* sekuritas XYZ?

- Jawab:

$E(R_i) = \alpha_i + \beta_i \, . \, E(RM)$

$E(R_i) = 4\% + 0{,}75 \, . \, 25\%$

$E(R_i) = 22{,}75\%$

Jadi nilai return realisasi berdasarkan *single index model* adalah $R_i = 22{,}75\% + e_i$. Oleh karena itu maka kesalahan estimasi (e_i) adalah sebesar 26%- 22,75% = 3,25%

Jika nilai return realisasi sama dengan nilai *expected return,* maka investor mengestimasi *expected return* tanpa kesalahan.

Asumsi *Single Index Model*

- Kesalahan residu dari sekuritas ke-i tidak berkovari (berkorelasi) dengan kesalahan residu sekuritas ke-j atau e_i tidak berkovari dengan e_j untuk semua nilai dari i dan j. Asumsi ini secara matematis dapat dituliskan sebagai:

$$\text{Cov}\,(e_{i,}e_j) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$E\,(e_i.e_j) = 0$$

m_alteza@uny.ac.id

Asumsi *Single Index Model*

- Return indeks pasar (RM) dan kesalahan residu untuk setiap sekuritas (e_i) merupakan variabel-variabel acak. Oleh karena itu, e_i tidak berkovari (berkorelasi) dengan return indeks pasar, R_M. Asumsi ini dapat dinyatakan secara matematis sebagai:

$$\mathrm{Cov}\,(e_{i,}R_M) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$E\,(e_i\,[R_M - E(R_M)]) = 0$$

Formula Risiko *SIM* Untuk Sekuritas Tunggal

Secara umum varians *return dari suatu sekuritas sebagai berikut:*

$$\sigma_i^2 = E[R_i - E(R_i)]^2$$

Apabila:

$R_i = \alpha_i + \beta_i \,.\, R_M + e_i$

$E(R_i) = \alpha_i + \beta_i \,.\, E(R_M)$

Subsitusikan kedua rumus tersebut ke dalam rumus varian maka rumus varian return sekuritas berdasarkan *single index model* sebagai berikut:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 . \sigma_M^2 + \sigma_{ei}^2$$

m_alteza@uny.ac.id

Formula Risiko *SIM* Untuk Sekuritas Tunggal (Lanjutan)

- SIM membagi komponen risiko menjadi 2:
  - Komponen terkait dengan keunikan perusahaan (σ_{ei}^2)
  - Komponen terkait dengan pasar ($\beta_i^2 \sigma_m$)

- *Total risk* = *unsystematic risk* + *systematic risk*
  = *diversifiable risk*+ *nondiversifiable risk*

m_alteza@uny.ac.id

Formula Kovarians Antara Sekuritas Menurut *SIM*

- Dalam model indeks tunggal, kovarians antara saham i dan saham j hanya bisa dihitung atas dasar kesamaan respons kedua saham tersebut terhadap return pasar.
- Oleh karena itu, risiko yang relevan dalam model tersebut hanyalah risiko pasar. →beta (β)
- Secara sistematis, kovarians antar saham i dan j yang hanya terkait dengan risiko pasar bisa dituliskan sebagai:

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_m^2$$

Formula *Expected Return SIM* Untuk Portofolio

Expected return portofolio menggunakan rata-rata tertimbang alpha dan beta portofolio

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{n} wi.\beta i$$

$$\alpha_p = \sum_{i=1}^{n} wi.\alpha i$$

$$E(R_P) = \sum_{i=1}^{n} w_i.\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} w_i.\beta_i.E(R_M)$$

$$E(R_p) = \alpha_p + \beta_p.E(R_M)$$

m_alteza@uny.ac.id

Formula Risiko *SIM* Untuk Portofolio

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{n} wi.\beta i$$

$$\sigma_p{}^2 = (\sum_{i=1}^{n} w_i.\beta_i)^2.\sigma M^2 + (\sum_{i=1}^{n} w_i.\sigma_{ei})^2$$

$$\sigma p^2 = \beta i^2.\sigma M^2 + (\sum_{i=1}^{n} wi.\sigma ei)^2$$

$$\boxed{\sigma_p{}^2 = \beta_p{}^2\sigma_m{}^2 + \sum_{t=1}^{n} W_i{}^2\sigma_{ei}{}^2}$$

- Term pertama menunjukkan komponen risiko sistematis portofolio
- Term kedua menunjukkan komponen risiko tidak sistematis portofolio (risiko residual)

m_alteza@uny.ac.id

Formula Risiko *SIM* Untuk Portofolio (Lanj.)

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_m^2 + \sum_{t=1}^{n} W_i^2 \sigma_{ei}^2$$

- Bila investor mempunyai dana dengan proporsi sama pada N saham yang semakin besar, maka nilai term kedua menjadi semakin kecil dan mendekati 0, sehingga persamaan di atas dapat ditulis menjadi:

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_m^2$$

$$\sigma_p = [\beta_p^2 \sigma_m^2]^{1/2}$$

$$\sigma_p = \beta_p \sigma_m$$

$$\sigma_p = \sigma_m [\sum X_i \beta_i]$$

Risiko portofolio yang terdiversifikasi dengan baik hanya terdiri dari unsur sistematik saja

Portofolio Optimal Berdasarkan SIM

- Portofolio optimal berdasar SIM berpatokan pada *excess return to beta*, yang mengukur kelebihan return relatif terhadap satu unit risiko yang tidak terdiversifikasi (beta)
- Portofolio optimal berisi aset dengan ERB tinggi→penentuan menggunakan *cut-off point*

Langkah-langkah Penentuan Portofolio Optimal

1. Mengurutkan sekuritas berdasar nilai ERB terbesar ke nilai ERB terkecil.

$$E(RB)_i = \frac{\left[E(R_i) - Rf\right]}{\beta_i}$$

2. Menghitung nilai A_i dan B_i untuk tiap-tiap sekuritas ke-i

$$A_i = \frac{\left[E(R_i) - Rf\right]\beta_i}{\sigma_{ei}^2}$$

$$B_i = \frac{\beta_i^2}{\sigma_{ei}^2}$$

Langkah-langkah Penentuan Portofolio Optimal

3. Menghitung nilai C_i

$$C_i = \frac{\sigma_M^2 \sum_{j=1}^{i} Aj}{1 + \sigma_M^2 \sum_{j=1}^{i} Bj}$$

C_i adalah nilai C untuk sekuritas ke-i yang dihitung dari kumulasi nilai A_1 sampai A_i dan B_1 sampai B_i. Misal C3 menunjukkan nilai C untuk sekuritas ke-3 yang dihitung dari kumulasi A_1, A_2, A_3 dan B_1,B_2,B_3

4. *Cut-off point* (C*) adalah nilai C_i dimana nilai ERB terakhir > nilai C_i

m_alteza@uny.ac.id

Langkah-langkah Penentuan Portofolio Optimal (Lanjutan)

5. Sekuritas yang membentuk portofolio optimal adalah sekuritas yang mempunyai nilai ERB $\geq$ ERB di titik C*

   Sekuritas dengan ERB $<$ ERB di tiitk C* tidak perlu diikut sertakan dalam pembentukan portofolio optimal.

m_alteza@uny.ac.id

Langkah-langkah Penentuan Portofolio Optimal (Lanjutan)

6. Proporsi untuk sekuritas ke-i dalam portofolio optimal dapat dihitung dengan rumus sbb:

$$W_i = \frac{X_i}{\sum_{j=1}^{k} X_j}$$

Dimana:

$$X_i = \frac{\beta_i}{\sigma_{ej}^2}\left(ERB_i - C^*\right)$$

W_i	= proporsi sekuritas ke-i
k	= jumlah sekuritas di portofolio optimal
β_i	= beta sekuritas ke-i
σ_{ei}^2	= varians residual sekuritas ke-i
ERB_i	= *excess return to beta* sekuritas ke-i
C*	= *cut-off point*

m_alteza@uny.ac.id