

TRIGONOMETRI

I. KOMPETENSI YANG DICAPAI

Mahasiswa dapat :

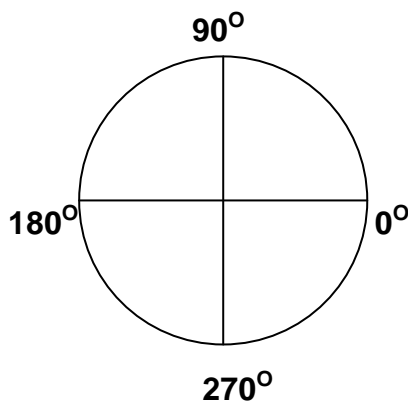
1. Membuktikan identitas trigonometri.
2. Menghitung hubungan antara sudut dan sisi segitiga dengan Rumus Sinus.
3. Menghitung hubungan antara sudut dan sisi segitiga dengan Rumus Cosinus.
4. Menghitung luas segitiga dari dua sisi dan satu sudut yang diapit.
5. Menghitung luas segitiga dari tiga sisinya.
6. Menyelesaikan persamaan trigonometri

II. MATERI

A. Pengertian

Arti trigonometri adalah ilmu ukur segitiga atau pengukuran segitiga. Trigonometri mempelajari sudut dan fungsinya. Aplikasi matematika dalam bidang keteknikan banyak menggunakan hubungan antara sudut-sudut dan sisi-sisi segitiga. Hubungan tersebut disebut fungsi trigonometri.

Satuan Sudut : Derajat



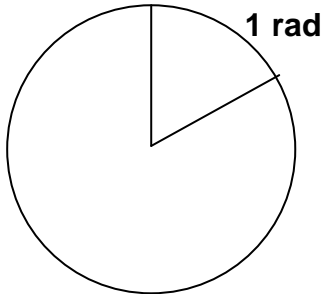
Apabila satu lingkaran penuh dibagi menjadi 360 bagian yang sama, maka setiap bagian disebut satu derajat.

Satu derajat dapat didefinisikan sebagai sudut yang besarnya $\frac{1}{360}$ keliling lingkaran.

Simbol derajat adalah $^{\circ}$.

Satu derajat dapat dibagi 60 bagian yang sama besar, yang disebut satu menit ($'$), dan satu menit dibagi menjadi 60 bagian sama besar yang disebut satu detik ($''$).

Satuan Sudut : Radian



Satu radian adalah besarnya sudut dalam lingkaran yang panjang busur di depannya sama dengan jari-jarinya.

Simbol radian adalah rad.

Apabila keliling lingkaran K dan jari-jarinya r , maka $K = 2 \pi r$, sehingga besar sudut satu keliling lingkaran adalah 2π radian.

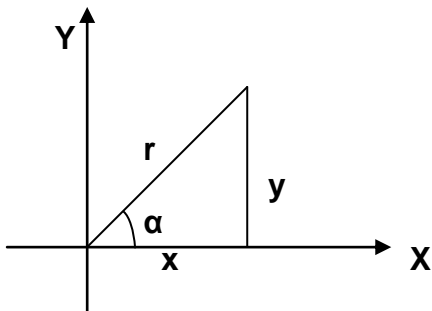
Jadi konversi derajat dan radian adalah :

$$2 \pi \text{ rad} = 360^\circ$$

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ$$

$$\text{Harga } \pi = 3,14 \dots$$

B. Fungsi Trigonometri



Untuk sudut-sudut lancip (sudut yang lebih kecil dari 90°) berlaku fungsi-fungsi trigonometri berikut :

Fungsi	Singkatan	Perbandingan
Sinus α	Sin α	y/r
Cosinus α	Cos α	x/r
Tangen α	Tan α	y/x
Cotangen α	Cot α	x/y
Secan α	Sec α	r/x
Cosecan α	Cosec α	r/y

Identitas Trigonometri

Antara fungsi-fungsi trigonometri tersebut berlaku identitas yang dapat diturunkan dari perbandingan antara x , y dan r tersebut, serta Dalil Pythagoras. Identitas trigonometri yang diturunkan dari perbandingan antara x , y dan r adalah sebagai berikut :

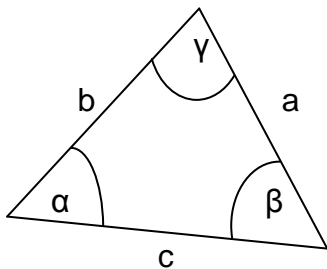
$$\begin{array}{ll} \operatorname{cosec} \alpha = 1/\sin \alpha & \text{atau} \quad \sin \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha = 1 \\ \sec \alpha = 1/\cos \alpha & \text{atau} \quad \cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1 \\ \cot \alpha = 1/\tan \alpha & \text{atau} \quad \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \\ \tan \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha & \text{atau} \quad \cot \alpha = \cos \alpha / \sin \alpha \end{array}$$

Identitas trigonometri yang diturunkan dari Dalil Pythagoras adalah sebagai berikut :

$$\begin{array}{l} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \\ \tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha \\ \cot^2 \alpha + 1 = \operatorname{cosec}^2 \alpha \end{array}$$

C. Rumus Sinus dan Rumus Cosinus

Dalam segitiga lancip berlaku Rumus Sinus dan Rumus cosinus sebagai berikut :



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

(Rumus Sinus)

$$\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2 b c \cos \alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2 a c \cos \beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2 a b \cos \gamma \end{array}$$

(Rumus Cosinus)

D. Luas Segitiga

Apabila diketahui dua sisi segitiga dan sudut yang diapit, maka luas segitiga dapat dihitung dengan rumus sebagai berikut :

$$\text{Luas segitiga} = \frac{1}{2} a b \sin \alpha, \text{ atau}$$

$$\text{Luas segitiga} = \frac{1}{2} a b \sin \beta, \text{ atau}$$

$$\text{Luas segitiga} = \frac{1}{2} a b \sin \gamma$$

Apabila yang diketahui hanya ketiga sisinya, maka luas segitiga dihitung dengan rumus :

$$\text{Luas segitiga} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\text{dengan } s = \frac{1}{2} (a+b+c)$$

E. Rumus Dua Sudut

Untuk dua sudut dalam pada segitiga berlaku persamaan atau rumus dua sudut sebagai berikut :

Jumlah Dua Sudut

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan (\alpha + \beta) = (\tan \alpha + \tan \beta) / (1 - \tan \alpha \tan \beta)$$

Selisih Dua Sudut

$$\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan (\alpha - \beta) = (\tan \alpha - \tan \beta) / (1 + \tan \alpha \tan \beta)$$

Apabila $\alpha = \beta$, maka $\alpha + \beta = 2\alpha$, sehingga :

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\tan 2\alpha = 2 \tan \alpha / (1 - \tan^2 \alpha)$$

F. Invers Fungsi Trigonometri

Invers fungsi trigonometri digunakan untuk mencari besar sudut apabila harga fungsi trigonometrinya diketahui.

Invers fungsi-fungsi trigonometri adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}y &= \text{arc sin } x && \text{atau } y = \sin^{-1}x \\y &= \text{arc cos } x && \text{atau } y = \cos^{-1}x \\y &= \text{arc tan } x && \text{atau } y = \tan^{-1}x \\y &= \text{arc cosec } x && \text{atau } y = \text{cosec}^{-1}x \\y &= \text{arc sec } x && \text{atau } y = \text{sec}^{-1}x \\y &= \text{arc cot } x && \text{atau } y = \text{cot}^{-1}x\end{aligned}$$

G. Contoh Soal dan Penyelesaiannya

1. Buktikan identitas trigonometri berikut

$$\frac{1}{\tan^2 x} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) = 1$$

Jawab :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tan^2 x} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) &= \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \\&= \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \left(\frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \right) \\&= \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \times \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\&= 1\end{aligned}$$

2. Berapakah besar sudut dalam segitiga dengan panjang sisi-sisinya 11 m, 13 m dan 15 m ?

Jawab :

Misal : a = 15 m, b = 13 m dan c = 11 m

Rumus Cosinus :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 b c \cos \alpha$$

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ &= \frac{13^2 + 11^2 - 15^2}{2 \times 13 \times 11} = 0,227\dots\end{aligned}$$

$$\alpha = 76^\circ 51' 48''$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 a c \cos \beta$$

$$\begin{aligned}\cos \beta &= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ &= \frac{15^2 + 11^2 - 13^2}{2 \times 15 \times 11} = 0,536\dots\end{aligned}$$

$$\beta = 57^\circ 33' 49''$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 a b \cos \gamma$$

$$\begin{aligned}\cos \gamma &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= \frac{15^2 + 13^2 - 11^2}{2 \times 15 \times 13} = 0,7\end{aligned}$$

$$\gamma = 45^\circ 34' 23''$$

$$\text{Cek : } \alpha + \beta + \gamma = 76^\circ 51' 48'' + 57^\circ 33' 49'' + 45^\circ 34' 23'' = 180^\circ 00' 00''$$

3. Sebuah segitiga dengan sisi-sisi $a = 81$ m, $b = 50$ m dan $c = 60$ m. Berapakah luasnya?

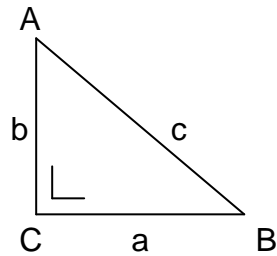
Jawab :

$$s = \frac{1}{2} (81+50+60) = 95,5 \text{ m}$$

$$\begin{aligned}\text{Luas segitiga} &= \sqrt{95,5(95,5 - 81)(95,5 - 50)(95,5 - 60)} \\ &= 1495,57 \text{ m}^2\end{aligned}$$

4. Segitiga ABC siku-siku di C, sisi $a = 3,6$ m dan $b = 4,7$ m. Berapakah panjang sisi c ?

Jawab :



$$\begin{aligned}c^2 &= a^2 + b^2 \\c &= \sqrt{a^2 + b^2} \\&= \sqrt{(3,6)^2 + (4,7)^2} \\&= 5,92 \text{ m}\end{aligned}$$

5. Hitunglah harga x ($0^\circ \leq x \leq 360^\circ$) yang memenuhi persamaan
 $3 \cos 2x + \cos x + 1 = 0$

Jawab :

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1, \text{ maka :}$$

$$3(2 \cos^2 x - 1) + \cos x + 1 = 0$$

$$6 \cos^2 x - 3 + \cos x + 1 = 0$$

$$6 \cos^2 x + \cos x - 2 = 0$$

$$\text{misal : } \cos x = p, \text{ maka : } x = \cos^{-1} p$$

$$6p^2 + p - 2 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{2 \cdot 6}$$

$$p_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{12}$$

$$p_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{12}$$

$$p_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{12}$$

$$p_1 = \frac{-1+7}{12} = \frac{6}{12} = 0,5$$

$$x = \cos^{-1} 0,5$$

$$\text{maka : } x_1 = 60^\circ$$

$$\begin{aligned}x_2 &= 360^\circ - 60^\circ \\ &= 300^\circ\end{aligned}$$

$$\rho_2 = \frac{-1-7}{12} = \frac{-8}{12} = -0,666\dots$$

$$x = \cos^{-1}0,666\dots$$

$$\text{maka : } x_3 = 131^\circ 48' 37''$$

$$\begin{aligned}x_4 &= 360^\circ - 131^\circ 48' 37'' \\ &= 228^\circ 11' 23''\end{aligned}$$

H. Soal Latihan

1. Dalam segitiga ABC, besarnya sudut A = $47^\circ 21'$ dan sudut B = $70^\circ 15'$, serta panjang sisi c = 5,30 m.

Hitunglah :

- Sisi-sisi segitiga dan sudut yang belum diketahui.
- Luas segitiga tersebut.

2. Segitiga ABC, sisi-sisi a = 11,32 m, b = 13,23 m dan c = 14,92 m.

Berapakah :

- Luas segitiga tersebut ?
- Besar sudut A, B dan C ?

3. Buktikan identitas trigonometri berikut :

$$\text{a. } \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\text{b. } \frac{1 + \cot^2 x}{\cot x \operatorname{cosec} x} = \sec x$$

4. Tentukan harga x antara ($0^\circ \leq x \leq 360^\circ$) yang memenuhi persamaan berikut :

$$\text{a. } 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\text{b. } \sin 2x = \sin x$$

$$\text{c. } \cos 4x + \cos x = 0$$