

2. Integral di sekeliling setengah lingkaran atau cakram.

Akan dihitung integral tak wajar berbentuk

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

Teorema 1 :

Jika fungsi f memenuhi syarat :

- Meromorfik pada setengah bidang atas $I_m(z) \geq 0$
- Tidak punya kutub pada sumbu real
- $Zf(z) \rightarrow 0$, untuk $z \rightarrow \infty$ dengan $0 \leq \text{Arg}(z) \leq \pi$
- Integral tak wajar

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx \text{ dan } \int_0^{\infty} f(x) dx \text{ konvergen}$$

maka

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum \text{Res}^+.$$

Res^+ = jumlah semua residu f di semua kutubnya yang terletak di setengah bidang atas sumbu real.

Meromorfik : singularitas fungsi pada domain fungsi itu hanya kutub.

Contoh:

$$1. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+4)^2} dx = \frac{\pi}{16}.$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi.$$

$$3. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2} dx = 0. \text{ Kutub: } z=i \text{ dan } -i?, \text{ Tingkat}=2??, \\ \text{Res}=0??$$

$$4. \int_0^{\infty} \frac{1}{x^4+1} dx = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$

KUIS:

Buktikan

$$1. \int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi}{4}.$$

$$2. \int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)(x^2+4)} dx = \frac{\pi}{6}.$$

3. Integral tak wajar berbentuk

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{i\alpha x} dx.$$

dengan

- a. $\alpha > 0$.
- b. $g(x)$ fungsi rasional yang pembilang dan penyebut nya tidak punya faktor persekutuan
- c. derajat penyebut melebihi derajat pembilang.
- d. Tidak punya kutub pada sumbu real

maka

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{i\alpha x} dx = 2\pi i(\text{Res}[f, z_1] + \dots + \text{Res}[f, z_n]).$$

Contoh:

$$1. \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+4)} dx = \frac{\pi}{2e^2}.$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{(x^2+4)} dx = 0.$$

$$3. \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{(1+x^2)} dx = \frac{\pi}{2e}.$$

$$4. \int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{(1+x^2)(x^2+4)} dx = \frac{\pi(e-1)}{6e^2}.$$

KUIS

Hitunglah:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+4)(x^2+1)} dx.$$

4. Integral berkaitan dengan fungsi bernilai banyak

$$f(z) = z^a, \quad a \text{ real dan tidak bulat.}$$

Fungsi f merupakan fungsi bernilai banyak.

Contoh:

$$1. \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \pi.$$

$$2. \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}(x+1)} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Bentuk Umum:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{1-\alpha}(x+1)} = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}, \quad 0 < \alpha < 1$$

Bukti: untuk Latihan mandiri.

Dwi Lestari, M.Sc: Integral di sekeliling lingkaran
Email: dwilestari@uny.ac.id

Sumber Pustaka:

Brown, J. W., and R. C. Churchill. "*Complex Variables and Applications*," 7th ed. 2003.
New York: McGraw-HillCompanies, Inc.

Paliouras, J. D. "*Peubah Kompleks untuk Ilmuwan dan Insinyur*". 1975. Jakarta: Erlangga