

PERSAMAAN KUADRAT

A. Persamaan Kuadrat

Persamaan kuadrat adalah **suatu persamaan yang variabelnya mempunyai pangkat tertinggi sama dengan 2.**

Bentuk baku persamaan kuadrat adalah dalam x adalah :

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0} \quad \dots \text{ rumus 1}$$

Dengan :

$a \neq 0$ dan a, b, c adalah anggota himpunan bilangan nyata.

Ada beberapa bentuk khusus persamaan kuadrat yaitu :

$$a = 1 \rightarrow x^2 + bx + c = 0 \quad : \text{ persamaan kuadrat biasa}$$

$$b = 0 \rightarrow x^2 + c = 0 \quad : \text{ persamaan kuadrat murni}$$

$$c = 0 \rightarrow x^2 + bx = 0 \quad : \text{ persamaan kuadrat tak lengkap}$$

Contoh :

$$(a) \quad -x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$(b) \quad x^2 + 2x = 0$$

$$(c) \quad x^2 + 9 = 0$$

B. Akar – akar Persamaan Kuadrat

Nilai yang memenuhi persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ disebut **akar persamaan kuadrat** dan dinotasikan dengan x_1 dan x_2 .

Akar – akar persamaan kuadrat dapat dicari dengan beberapa cara, yaitu :

1. Faktorisasi

Bentuk $x^2 + bx + c = 0$ diuraikan kebentuk

$$\boxed{(x - x_1)(x - x_2) = 0} \quad \dots\dots\dots \text{rumus 2}$$

Contoh :

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$\rightarrow (x + 3)(x + 2) = 0$$

$$x + 3 = 0 \rightarrow x_1 = -3$$

$$x + 2 = 0 \rightarrow x_2 = -2$$

2. Melengkapkan Kuadrat Sempurna

Bentuk $x^2 + bx + c = 0$, dijabarkan kebentuk

$$(x + p)^2 = q$$

.....rumus 3

Contoh :

a. $x^2 + 4x - 1 = 0$

$x^2 + 4x = 1 \rightarrow$ kemudian masing – masing suku ditambah dengan 4

$$x^2 + 4x + 4 = 1 + 4$$

$$(x + 2)^2 = 5$$

$$x + 2 = \pm\sqrt{5}$$

Maka $x_1 = \sqrt{5} - 2$ dan $x_2 = -\sqrt{5} - 2$

b. $x^2 - 6x - 2 = 0$

$x^2 - 6x - 2 \rightarrow$ kemudian masing–masing suku ditambahkan dengan 9

$$x^2 - 6x + 9 = 2 + 9$$

$$(x - 3)^2 = 11$$

$$x - 3 = \pm\sqrt{11} \rightarrow x_1 = \sqrt{11} + 3 \text{ dan } x_2 = -\sqrt{11} + 3$$

3. Menggunakan Rumus abc

Persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, mempunyai akar – akar persamaan :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

.....rumus 4

Cara mencari rumus tersebut adalah sebagai berikut :

$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow$ kemudian masing – masing suku dikalikan $4a$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + (b^2 - b^2) = 0$$

$$(4a^2x^2 + 4abx + b^2) - (b^2 - 4ac) = 0$$

$(2ax + b)^2 - \sqrt{(b^2 - 4ac)^2} = 0 \rightarrow$ kemudian masing-masing suku diakar

$(2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}) = 0 \rightarrow$ harga dari akar bisa (+) dan (-)

Sehingga diperoleh rumus :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \dots\dots\dots \text{rumus 4}$$

Nilai $b^2 - 4ac$ disebut **diskriminan** dari persamaan $ax^2 + bx + c = 0$ dan diyulis dengan huruf **D**. maka rumus diatas menjadi :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \dots\dots\dots \text{rumus 5}$$

Contoh :

Carilah akar – akar dari persamaan kuadrat : $4x^2 + 5x + 1 = 0$

Jawab

$4x^2 + 5x + 1 = 0 \rightarrow a = 4, b = 5 \text{ dan } c = 1$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4.4.1}}{2.4} \qquad x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{8}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 3}{8}$$

$$x_1 = \frac{-5 - 3}{8} = -1 \qquad x_2 = \frac{-5 + 3}{8} = -\frac{1}{4}$$

C. Jumlah dan hasil kali akar – akar persamaan kuadrat

Misal akar – akar dari persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ adalah x_1 dan x_2 . Rumus penyelesaian dari persamaan kuadrat tersebut :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \quad \text{dan} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

Maka jumlah akar-akar tersebut adalah : $x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{D} - b - \sqrt{D}}{2a}$

Atau $x_1, x_2 = \frac{-b}{a}$ rumus 6

Sedangkan hasil kali akar – akar tersebut adalah :

$$x_1, x_2 = \frac{\{ (-b)^2 - (\sqrt{D}) \}^2}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2}$$

Atau $x_1, x_2 = \frac{c}{a}$ rumus 7

Selisih akar – akar tersebut adalah :

$x_1 - x_2 = \frac{2\sqrt{D}}{2a}$ sehingga $x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{D}}{a}$ rumus 8

Atau $D = a^2(x_1 - x_2)^2$ rumus 9

Contoh :

$$2x^2 + 4x + 6 = 0$$

Tentukan nilai $x_1^2 + x_2^2$ tanpa mencari x_1 dan x_2

Jawab

$$2x^2 + 4x + 6 = 0 \qquad \rightarrow a = 2, \quad b = 4 \quad \text{dan} \quad c = 6$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{4}{2} = -2$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{6}{2} = 3$$

$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \\ &= (-2)^2 - 2 \cdot 3 = -2 \end{aligned}$
--

D. Jenis akar – akar persamaan kuadrat

Akar – akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ adalah x_1 dan x_2 dimana

$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \\ x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \end{aligned}$rumus 5
--	--------------

$D = b^2 - 4ac$ adalah disriminan.

Jenis akar – akar persamaan berdasarkan diskriminan adalah :

1. Jika $D > 0$, Maka terdapat dua akar real yang tidak sama ($x_1 \neq x_2$)
2. Jika $D = 0$, Maka akar – akarnya kembar atau sama dan real ($x_1 = x_2$).
3. Jika $D < 0$, Maka kedua akar tidak real atau tidak mempunyai akar – akar yang real.

Contoh :

- 1). Tentukan q supaya persamaan $x^2 + qx + a = 0$ mempunyai dua akar nyata dan berlainan.

Jawab

$$x^2 + qx + q = 0$$

mempunyai dua kar berlainan, maka $D > 0$

$$D = b^2 - 4ac = q^2 - 4 \cdot 1 \cdot q = q^2 - 4q > 0$$

$$\text{Atau } q(qa - 4) > 0$$

$$q_1 = 0 ; (q - 4) = 0 \rightarrow q_2 = 4$$

$$\text{Maka : } q < 0 \text{ atau } q > 4.$$

- 2). Tentukan nilai p agar persamaan kuadrat $x^2 - (2 + p)x + 4 = 0$ mempunyai akar – akar kembar.

Jawab :

$$x^2 - (2 + p)x + 4 = 0$$

akar – akarnya kembar, maka $D = 0$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$= - (2 + p)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4$$

$$= 4 + 4p + p^2 - 16$$

$$p^2 + 4p - 12 = 0$$

$$(p + 6)(p - 2) = 0$$

$$p_1 = -6 \text{ dan } p_2 = 2$$

E. Contoh Soal dan Penyelesaian

- 1). Apabila m menjalani bilangan – bilangan nyata, selidikilah banyaknya akar – akar persamaan : $x^2 - 2(1 + 3m)x + 7(3 + 2m) = 0$

Jawab

Banyaknya akar – akar persamaan kuadrat ditentukan adanya diskriminan itu. Kita hitung dahulu besarnya diskriminan itu yaitu :

$$D = 4(1 + 3m)^2 - 28(3 + 2m)$$

$$= 4 + 24m + 36m^2 - 84 - 56m$$

$$= 36m^2 - 32m - 80$$

Ada 3 kemungkinan :

- a). Kalau $D > 0$ atau $36m^2 - 32m - 80 > 0$ maka

$$36m^2 - 32m - 80 > 0 \text{ disederhanakan menjadi}$$

$$4(9m^2 - 8m - 20) > 0$$

$$4(9m + 10)(m - 2) > 0$$

Kalau $D > 0$, maka $m > 2$ atau $m < -\frac{10}{9}$

Yang berarti persamaan di atas mempunyai dua akar yang nyata dan berlainan

b). Kalau $D = 0$ atau $36m^2 - 32m - 80 = 0$ akan memberikan $m_1 = 2$ atau $m_2 = -\frac{10}{9}$

untuk m_1 dan m_2 sebesar tersebut diatas, maka persamaan tersebut diatas mempunyai dua akar yang nyata dan kembar.

Untuk $m = -\frac{10}{9}$, akar kembar itu adalah :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \rightarrow \text{karena } D = 0 \text{ maka}$$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-b}{2a} = \frac{2(1+3m)}{2 \cdot 1} = \frac{2 + 6 \cdot (-10/9)}{2} \\ &= 1 + 3 \cdot (-10/9) = 1 - 10/3 \\ &= -7/3 \end{aligned}$$

c). kalau $D < 0$ atau $36m^2 - 32m - 80 < 0$, maka persamaan diatas tidak mempunyai akar yang nyata.

2). Tentukan akar – akar persamaan

$$\frac{x^2 - 7x}{x^2 - 9} + 1 = \frac{x^2 - 21}{x^2 - 9}$$

Jawab:

Jika 1 diganti dengan $\frac{x^2 - 9}{x^2 - 9}$ maka

$$\frac{x^2 - 7x}{x^2 - 9} + 1 = \frac{x^2 - 21}{x^2 - 9}$$

$$x^2 - 7x + x^2 - 9 = x^2 - 21$$

$$x^2 - 7x + x^2 - 9 = -21$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$(x-4)(x-3) = 0$$

$$x - 4 = 0 \rightarrow x_1 = 4$$

$$x - 3 = 0 \rightarrow x_2 = 3$$

$x_2 = 3$ apabila dimasukkan ke soal, persamaannya tidak terdefiniskan.

Maka akarnya adalah $x = 4$

3). Akar – akar persamaan kuadrat $2x^2 - 6x - p = 0$ ialah x_1 dan x_2 jika $x_1^2 - x_2^2 = 15$.

Tentukan harga p !

Jawab :

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \text{ maka } x_1 + x_2 = -\frac{(-6)}{2} = 3 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \text{ maka } x_1 \cdot x_2 = -\frac{P}{2} \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$x_1^2 - x_2^2 = 15 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 15 \quad (*)$$

$$3(x_1 - x_2) = 15 \rightarrow (x_1 - x_2) = 5 \quad \dots\dots\dots (4)$$

Dengan mengeliminasi persamaan (1) dan (4) :

$$x_1 + x_2 = 3$$

$$\underline{x_1 - x_2 = 5} \quad \rightarrow x_1 = 4 \rightarrow -1$$

$$2x_1 = 8$$

$$\text{Dari persamaan (2)} \rightarrow x_1 \cdot x_2 = -\frac{P}{2}$$

$$4 \cdot (-1) = -\frac{P}{2} \rightarrow p = 8$$

Catatan :

(*) ingat rumus $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$
 $= 3(x_1 - x_2)$

4). Tentukan harga x dari persamaan $\frac{4}{x^2} - \frac{6}{x} - 3 = 0$

Jawab :

Bentuk lain dari persamaan tersebut adalah $4.x^{-2} - 6.x^{-1} - 3 = 0$

Selanjutnya direduksi dengan memisalkan $t = x^{-1}$,

Sehingga $t^2 = x^{-2}$

Dengan demikian persamaan di atas menjadi $4.t^2 - 6.t - 3 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4.4(-3)}}{2.4} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 48}}{8}$$

$$t_1 = \frac{6 + \sqrt{84}}{8} \text{ dan } t_2 = \frac{6 - \sqrt{84}}{8}$$

karena $t = x^{-1}$ maka $x = \frac{1}{t}$ sehingga :

$$x_1 = \frac{1}{t_1} = \frac{1}{\frac{6 + \sqrt{84}}{8}} = \frac{8}{6 + \sqrt{84}} = 0,5275$$

$$x_2 = \frac{1}{t_2} = \frac{1}{\frac{6 - \sqrt{84}}{8}} = \frac{8}{6 - \sqrt{84}} = -2,5275$$