

PERSAMAAN LINIER

1). Persamaan Linier Satu Variabel

Bentuk umum : $ax + b = 0$, dimana $a \neq 0$ dan $b =$ konstanta

Penyelesaian : $x = -\frac{b}{a}$

Contoh : 1). $5x + 10 = 0 \rightarrow x = -\frac{10}{5} \rightarrow x = -2$

2). $x + 8 = 0 \rightarrow x = -\frac{8}{1} \rightarrow x = -8$

2). Persamaan Linier 2 Variabel

Bentuk umum : $ax + by = c$ dimana : a, b, c adalah konstanta

3). Persamaan Linier Tiga Variabel

Bentuk umum : $ax + by + cz = d$ dimana : a, b, c, d adalah konstanta. Penyelesaian persamaan linier dua Variabel dan tiga variable (**persamaan linier simultan**) dilakukan dengan : (1) Eliminasi, (2) Substitusi, (3) Interaksi dan (4) Determinan.

1. Cara Eliminasi

Eliminasi berarti meniadakan atau menghilangkan harga – harga *unknown*.

Contoh :

Tentukan harga – harga x, y dan z dalam persamaan linier simultan :

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 2 \\ x + 2y - 3z &= 1 \\ -3x - 5y + z &= 0 \end{aligned}$$

Jawab :

Misal

$$\begin{aligned} (p1) &\rightarrow 2x + 3y + z = 2 \\ (p2) &\rightarrow x - 2y - 3z = 1 \\ (p3) &\rightarrow -3x - 5y + z = 0 \end{aligned}$$

Eliminasi x

$$(p1).1 \rightarrow 2x + 3y + z = 2 \quad ; \text{ Tanda } \cdot \text{ adalah operasi kali}$$

$$(p2). \rightarrow \begin{array}{r} 2x - 4y - 6z = 2 \\ \hline + 7y + 7z = 0 \end{array} \quad \dots\dots(P4)$$

$$(p2).3 \rightarrow 3x - 6y - 9z = 3$$

$$(p3).1 \rightarrow \begin{array}{r} -3x - 5y + z = 0 \\ \hline -11y - 8z = 3 \end{array} \quad \dots\dots(P5)$$

Eliminasi y :

$$(p4). \frac{11}{7} \rightarrow 11y + 11z = 0$$

$$(p5).1 \rightarrow \begin{array}{r} -11y - 8z = 3 \\ \hline 3z = 3 \\ z = 1 \end{array}$$

Menentukan harga *unknown* Y :

Untuk harga $z = 1$ maka persamaan (P4) adalah :

$$7y + 7.1 = 0$$

$$7y = -7 \text{ atau } y = -1$$

Jika digunakan $p5$ untuk $z = 1$ persamaannya adalah :

$$-11y - 8.1 = 3$$

$$-11y = 11 \text{ atau } y = -1$$

Menentukan harga *unknown* x :

Harga x dapat ditentukan dari persamaan ($p1$), atau ($p2$), atau ($p3$), untuk harga $z = 1$ dan $y = -1$ dengan persamaan ($p1$) menghasilkan :

$$(p1) \rightarrow 2x + 3.(-1) + 1 = 2$$

$$2x - 3 + 1 = 2$$

$$2x - 2 = 2$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

2. Cara Substitusi

Substitusi berarti mengganti salah satu *unknown* yang mewakili *unknown – unknown* lain. Pada suatu persamaan linier tiga variabel terdapat 3 buah *unknown* x, y, z maka substitusi dapat dilakukan dengan 6 macam yaitu :

$x, y; x, z; y, x; y, z; z, x;$ dan $z, y.$

contoh:

Selesaikan persamaan linier simultan dengan cara substitusi :

$$\begin{aligned}2x + 3y + z &= 2 \\x - 2y - 3z &= 1 \\-3x - 5y + z &= 0\end{aligned}$$

Jawab

$$\text{Misalkan : (p1)} \rightarrow 2x + 3y + z = 2$$

$$\text{(p2)} \rightarrow x - 2y - 3z = 1$$

$$\text{(p3)} \rightarrow -3x - 5y + z = 0$$

Substitusi x

Dari persamaan linier (p1) diperoleh harga x dalam bentuk term y dan z sebagai berikut :

$$\begin{aligned}2x + 3y + z &= 2 \\2x &= 2 - 3y - z \\x &= 1 - 1,5y - 0,5z \quad \dots\dots (p4)\end{aligned}$$

Substitusi harga x tersebut kedalam persamaan (p2) dan (p3) diperoleh :

$$\begin{aligned}\text{P4} \rightarrow \text{P2} \quad (1 - 1,5y - 0,5z) - 2y - 3z &= 1 \\ \Leftrightarrow 1 - 1,5y - 0,5z - 2y - 3z &= 1 \\ \Leftrightarrow \quad \quad \quad - 3,5y - 3,5z &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad \quad \quad - 3,5y &= 3,5z \\ \Leftrightarrow \quad \quad \quad y &= -z \quad \dots\dots (p5)\end{aligned}$$

$$\text{P4} \rightarrow \text{P3} \quad -3.(1 - 1,5y - 0,5z) - 5y + z = 1$$

$$\Leftrightarrow -3 + 4,5y + 1,5z - 5y + z = 0$$

$$\Leftrightarrow -0,5y + 2,5z = 3 \quad \dots\dots(p6)$$

Substitusi y:

Dari persamaan p5 dapat diketahui harga y dalam term z. substitusi harga y dalam persamaan p6 diperoleh :

$$P5 \rightarrow p6 \quad -0,5(-z) + 2,5z = 3$$

$$\Leftrightarrow 0,5z + 2,5z = 3$$

$$\Leftrightarrow 3z = 3$$

$$\Leftrightarrow z = 1 \quad \dots\dots(p7)$$

Jadi harga z = 1

Substitusi kembali :

Substitusi kembali z dalam p7 pada p5 diperoleh :

$$P7 \rightarrow P5 \quad y = -z$$

$$\Leftrightarrow y = -1 \quad \dots\dots(p8)$$

Substitusi kembali y pada p8 dan z pada p7 ke dalam p4 diperoleh :

$$P8 \rightarrow P7 \rightarrow P4 \quad x = 1 - 1,5y - 0,5z$$

$$\Leftrightarrow x = 1 - 1,5(-1) - 0,5.1$$

$$\Leftrightarrow x = 1 + 1,5 - 0,5$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \quad \dots\dots(p9)$$

Dari hasil substitusi di atas dapat ditentukan harga – harga penyelesaian persamaan linier simultan adalah :

$$x = 2$$

$$y = -1$$

$$z = 1$$

3. Cara Interasi

Cara interasi adalah cara coba – coba memasukkan harga tertentu ke dalam *unknown – unknown* sampai ditemukan harga x, y dan z

4. Penyelesaian dengan cara determinan

Sebelumnya disusun koefisien – koefisien dan konstanta – konstanta pada persamaan linier simultan yang membentuk formasi baris dan kolom. Setiap bilangan yang menempati suatu baris dan kolom disebut elemen.

Contoh :

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad \dots(i)$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \quad \dots(ii)$$

Maka persamaan linier simultan tersebut disusun dalam bentuk kolom dan baris sebagai berikut :

$$a_1 \quad b_1 \quad c_1 \quad \rightarrow \text{baris 1}$$

$$a_2 \quad b_2 \quad c_2 \quad \rightarrow \text{baris 2}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \rightarrow \text{elemen}$$

Kolom a kolom b kolom c

Dengan cara determinan, harga – harga (*unknown*) dicari dengan menentukan determinannya terlebih dahulu. Cara menyusun determinan x misalkan cukup mengganti bilangan – bilangan pada kolom x dengan kolom konstanta.

a. cara Cramer

rumus untuk mencari harga – harga dalam determinan linier simultan adalah membagi determinannya dengan determinan. Misalkan mencari harga x adalah dengan membagi determinan x dengan determinan. Demikian juga untuk mencari harga y maka determinan y dibagi dengan determinan.

1). Untuk persamaan linier simultan dengan dua cara persamaan linier

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

Kolom x	kolom y	kolom c
(Kx)	(Ky)	(Kc)
a1	b1	c1
a2	b2	c2

- Determinan ∇ dibentuk dari elemen-elemen pada kolom x dan y :

$$\text{Determinan } \nabla = \begin{vmatrix} Kx & Ky \\ a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{vmatrix} = a1.b2 - a2.b1$$

- Determinan x yaitu ∇_x dibentuk dengan mengganti kolom x dengan kolom c sebagai berikut :

$$\nabla_x = \begin{vmatrix} Kc & Ky \\ c1 & b1 \\ c2 & b2 \end{vmatrix} = c1.b2 - c2.b1$$

$$\text{Harga } x = \frac{\nabla_x}{\nabla} = \frac{\begin{vmatrix} c1 & b1 \\ c2 & b2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{vmatrix}} = \frac{c1.b2 - c2.b1}{a1.b2 - a2.b1}$$

- Determinan y yaitu ∇_y dibentuk dengan mengganti kolom y dengan kolom c sebagai berikut :

$$\nabla_y = \begin{vmatrix} Kx & Kc \\ a1 & c1 \\ a2 & c2 \end{vmatrix} = a1.c2 - a2.c1$$

$$\text{Harga } y = \frac{\nabla_y}{\nabla} = \frac{\begin{vmatrix} a1 & c1 \\ a2 & c2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{vmatrix}} = \frac{a1.c2 - a2.c1}{a1.b2 - a2.b1}$$

2). Untuk persamaan linier simultan dengan tiga persamaan linier.

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

Disusun sebagai berikut :

Kx	Ky	Kz	Kd
a_1	b_1	c_1	d_1
a_2	b_2	c_2	d_2
a_3	b_3	c_3	d_3

Determinan ∇ dibentuk dari elemen – elemen pada kolom x, y dan z dengan menempatkan elemen – elemen dari baris yang atas dan masing – masing dikalikan dengan minornya

Contoh

Minor dari a_1 adalah $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ yang didapat dari

gambar berikut :

a_1	b_1	c_1
a_2	b_2	c_2
a_3	b_3	c_3

Determinan ∇ adalah sebagaio berikut :

Kd	Ky	Kz
•	•	•

$$\nabla = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

Menentukan harga determinan dengan cara ini disebut *ekspansi determinan*. Selanjutnya harga – harga x, y

dan z dirumuskan dengan cara determinan sebagai berikut :

$$x = \frac{\nabla_x}{\nabla} = \frac{\begin{vmatrix} K_d & K_y & K_z \\ d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\nabla}$$

$$y = \frac{\nabla_y}{\nabla} = \frac{\begin{vmatrix} K_x & K_d & K_z \\ a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\nabla} \quad z = \frac{\nabla_z}{\nabla} = \frac{\begin{vmatrix} K_x & K_y & K_d \\ a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\nabla}$$

b. Cara Sarrus

Cara Sarrus ini terlebih dahulu disusun elemen-elemen determinan, kemudian ditulis kembali dua kolom yang pertama. Cara Sarrus ini disusun **hanya untuk susunan bilangan yang mempunyai tiga baris dan tiga kolom saja**. Harga determinan dengan cara ini dihasilkan melalui operasi perkalian diantara elemen-elemen diagonal. Perkalian elemen diagonal dari atas ke bawah tandanya positif (+). Sedangkan perkalian elemen diagonal dari bawah ke atas tandanya negatif (-).

Contoh

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} K_x & K_y & K_z & K_x & K_y \\ \nabla = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \end{matrix} \\ & = + (a_1.b_2.c_3 + b_1.c_2.a_3 + c_1.a_2.b_3) - (a_3.b_2.c_1 + b_3.c_2.a_1 + c_3.a_2.b_1) \end{aligned}$$

Untuk mencari harga x maka determinan ∇_x dibagi dengan determinan ∇ . Demikian juga harga y dan harga z . Hanya operasinya menggunakan cara Sarrus.

Contoh soal-Penyelesaian

1. Tentukan harga x dan y dalam persamaan linier simultan sebagai berikut dengan cara determinan yang menggunakan aturan Cramer.

$$6x - 9y = -15$$

$$6x + 4y = 24$$

Jawab:

Susunan kolom x , kolom y dan kolom c adalah :

Kx	Ky	Kc
6	-9	-15
6	4	24

$$x = \frac{\nabla_x}{\nabla} = \frac{\begin{vmatrix} -15 & -9 \\ 24 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -9 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{(-15)(4) - (24)(-9)}{(6)(4) - (6)(-9)} = \frac{-60 + 216}{24 + 54} = \frac{156}{78} = 2$$

$$y = \frac{\nabla_y}{\nabla} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -15 \\ 6 & 24 \end{vmatrix}}{78} = \frac{(6)(24) - (6)(-15)}{78} = \frac{144 + 90}{78} = \frac{234}{78} = 3$$

Jadi harga yang memenuhi persamaan linier simultan tersebut adalah $x = 2$ dan $y = 3$.

2. selsesaikan persamaan linier simultan seperti dibawah ini dengan cara determinan yang menggunakan aturan cramer.

$$2x + 3y + z = 2$$

$$x - 2y - 3z = 1$$

$$-3x - 5y + z = 0$$

Jawab

Determinan $\nabla =$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}$$
$$= 2 \cdot \{(-2 \cdot 1) - (-5)(-3)\} - 3 \cdot \{(1)(1) - (-3)(-3)\} + 1 \cdot \{(1)(-5) - (-3)(-2)\}$$
$$= 2 \cdot (-2 - 15) - 3 \cdot (1 - 9) + 1 \cdot (-5 - 6)$$
$$= 2 \cdot -17 - 3 \cdot -8 + 1 \cdot -11$$
$$= -34 + 24 - 11$$
$$= -21$$

$$\text{Determinan } \nabla_x = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}$$
$$= 2 \cdot \{(-2)(1) - (-5)(-3)\} - 3 \cdot \{(1)(1) - (0)(-3)\} + 1 \cdot \{(1)(-5) - (0)(-2)\}$$
$$= 2 \cdot (-2 - 15) - 3(1 - 0) + 1(-5 - 0)$$
$$= 2 \cdot -17 - 3 \cdot 1 + 1 \cdot -5 = -34 - 3 - 5$$
$$= -42$$

$$\text{Determinan } \nabla_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 2 \cdot \{(1)(1) - (0)(-3)\} - 2 \cdot \{(1)(1) - (-3)(-3)\} + 1 \cdot \{(1)(0) - (-3)(1)\}$$
$$= 2 \cdot (1 - 0) - 2 \cdot (1 - 9) + 1(0 + 3)$$
$$= 2 \cdot 1 + 2 \cdot 8 + 1 \cdot 3 = 2 + 16 + 3$$
$$= 21$$

$$\text{Determinan } \nabla_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= 2 \cdot \{(9-2)(0) - (-5)(1)\} - 3 \{(1)(0) - (-3)(1)\} + 2 \{(1)(-5) - (-3)(-2)\} \\ &= 2(0+5) - 3(0+3) + 2(-5-6) \\ &= 10 - 9 - 22 = -21 \end{aligned}$$