

# MATRIKS

## A. PENGERTIAN

- Matriks adalah suatu deretan elemen yang membentuk empat persegi panjang, terdiri dari  $m$  baris dan  $n$  kolom.
- Elemen tersebut dapat berbentuk koefisien, bilangan atau simbol.
- Matriks yang mempunyai  $m$  baris dan  $n$  kolom disebut matriks berdimensi  $m \times n$ .

Misalkan suatu matriks A dengan elemen  $a_{ij}$  dapat ditulis sebagai berikut :

$$A = ( a_{ij} )$$

untuk  $i = 1, 2, 3, \dots, m$  : baris

$j = 1, 2, 3, \dots, n$  : kolom

catatan : dalam menulis elemen, sebutlah barisnya dulu, baru diikuti kolom.

Contoh :  $a_{11}$  maksudnya adalah elemen a baris 1 kolom 1

$A_{23}$  maksudnya adalah elemen a baris 2 kolom 3

Matriks yang mempunyai jumlah baris sama dengan jumlah kolomnya disebut matriks bujur sangkar (*square matrix*).

contoh :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

## B. DETERMINAN MATRIKS

Misalkan suatu matriks A maka determinan matriks tersebut diberi simbol dengan  $\nabla (A)$ . Demikian juga simbol untuk determinan matriks B adalah  $\nabla (B)$ .

Ekspansi determinan tersebut adalah :

$$\nabla (A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

$$\nabla (B) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = b_{11} \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} - b_{12} \begin{bmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{31} & b_{33} \end{bmatrix} + b_{13} \begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

$$= b_{11} (b_{22} \cdot b_{33} - b_{32} \cdot b_{23}) - b_{12} (b_{21} \cdot b_{33} - b_{31} \cdot b_{23}) + b_{13} (b_{21} \cdot b_{32} - b_{31} \cdot b_{22})$$

Operasi ini disebut **ekspansi diterminan** matriks A dan matriks B. **Determinan matriks hanya ada pada matriks bujur sangkar saja**. Pedoman untuk menentukan tanda + atau – adalah sebagai berikut :

+	-	+	-	+	.	.	.
-	+	-	+	-	.	.	.
+	-	+	-	+	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.

### C. JENIS-JENIS MATRIKS

#### 1. Matriks Transpose

Matriks  $A^T$  disebut *transpose* matriks A jika **kolom-kolom matriks A merupakan baris-baris matriks  $A^T$** . Simbul untuk menyatakan traspose dari matrik A adalah  $A^T$ ,  $A^*$  atau  $\tilde{A}$ . Kita akan menggunakan  $A^T$  sebagai simbul traspose matrik A.

$$\text{Jika : } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ maka } A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Jika :  $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$  maka  $B^T = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{bmatrix}$

## 2. Matriks Simetri

Matriks bujur sangkar A disebut *matriks simetri* jika elemen  $a_{ij} = a_{ji}$  untuk semua i dan j. Contoh matriks simetri terhadap diagonal utamanya adalah sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 7 & 4 & 3 \\ 9 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

## 3. Matriks Diagonal

Matriks bujur sangkar A disebut *matriks diagonal* jika semua elemen diluar elemen diagonalnya sama dengan 0. Matriks identitas adalah matriks diagonal yang semua elemennya sama dengan 1. Matriks diagonal dan matriks identitas adalah sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks diagonal                      Matriks identitas

## 4. Matriks Segitiga Atas dan Segitiga Bawah

Matriks bujur sangkar A disebut *matriks segitiga atas* jika semua elemen di bawah elemen diagonal utamanya sama dengan 0. Sedangkan matriks bujur sangkar A disebut *matriks segitiga bawah* jika semua elemen di atas elemen diagonal utamanya sama dengan 0. Matriks segitiga atas dan bawah adalah sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Matriks segitiga atas

(  $a_{ij} = 0$  untuk  $i > j$  )

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Matriks segitiga bawah

(  $a_{ij} = 0$  untuk  $i < j$  )

## 5. Matriks Kolom dan Matriks Baris

Matriks A disebut matriks kolom jika elemennya hanya terdiri dari kolom tunggal. Matriks A disebut matriks baris jika elemennya hanya terdiri dari baris tunggal.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$$

Matriks kolom A berdimensi 3 x 1

$$A = [a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}]$$

Matriks baris A berdimensi 1 x 3

## 6. Matriks Nol

Matriks nol (ordo berapapun) yang semua elemennya adalah nol.

## D. OPERASI MATRIKS

Operasi matriks adalah operasi aritmatika terhadap elemen-elemennya. Pada suatu matriks dapat dilakukan operasi penambahan, pengurangan dan perkalian. Operasi penambahan, pengurangan dan perkalian tersebut melalui elemen-elemennya.

## 1. Kesamaan Dua Matriks

Dua matriks A dan B adalah sama jika elemen yang bersesuaian sama. Oleh sebab itu  $A = B$  jika  $a_{ij} = b_{ij}$  untuk semua  $i$  dan  $j$ . Contoh dua matriks A dan B yang sama misalnya :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Matriks A sama dengan matriks B karena  $a_{11} = b_{11} = 2$  ;  $a_{12} = b_{12} = 3$  ;  $a_{21} = b_{21} = 7$  dan  $a_{22} = b_{22} = 9$ .

## 2. Penjumlahan Matriks

Jumlah dua matriks A dan B adalah matriks C yang elemennya merupakan penambahan elemen matriks A dan matriks B yang bersesuaian.

Misalkan dua matriks A dan matriks B sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$$

Jika matriks C merupakan penjumlahan matriks A dan B maka elemen matriks C adalah :

$$C_{11} = a_{11} + b_{11} = 2 + 1 = 3 \quad C_{12} = a_{12} + b_{12} = 3 + 4 = 7$$

$$C_{21} = a_{21} + b_{21} = 5 + 9 = 14 \quad C_{22} = a_{22} + b_{22} = 0 + 7 = 7$$

Sehingga diperoleh matriks C sebagai berikut :

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 14 & 7 \end{bmatrix}$$

### 3. Pengurangan Matriks

Pengurangan dua matriks A dan B adalah matriks C matriks yang elemennya merupakan pengurangan elemen matriks A dan matriks B yang bersesuaian.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$$

Misalkan matriks A dan B seperti di atas maka jika  $C=A-B$  maka elemen matriks C :

$$C_{11} = a_{11} - b_{11} = 2 - 1 = 1 \quad C_{12} = a_{12} - b_{12} = 3 - 4 = -1$$

$$C_{21} = a_{21} - b_{21} = 5 - 9 = -4 \quad C_{22} = a_{22} - b_{22} = 0 - 7 = -6$$

Sehingga matriks C adalah :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$$

### 4. Perkalian Dua Matriks

Perkalian matriks A berdimensi  $m \times n$  dengan matriks B berdimensi  $n \times p$  adalah matriks C berdimensi  $m \times p$  yang elemennya merupakan perkalian dari elemen **baris** pada matriks A dengan elemen **kolom** pada matriks B.

Misal matriks C = matriks A x matriks B, maka elemen matriks C adalah :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{kali} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{sama dengan} \quad C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 9 = 2 + 27 = 29 \quad (\text{baris 1 x kolom 1})$$

$$C_{12} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 = 8 + 21 = 29 \quad (\text{baris 1 x kolom 2})$$

$$C_{21} = 5 \cdot 1 + 0 \cdot 9 = 5 + 0 = 5 \quad (\text{baris 2 x kolom 1})$$

$$C_{22} = 5 \cdot 4 + 0 \cdot 7 = 20 + 0 = 20 \quad (\text{baris 2 x kolom 2})$$

Sehingga matriks C adalah :

$$C = \begin{bmatrix} 29 & 29 \\ 5 & 20 \end{bmatrix}$$

#### 4. Perkalian Matriks dengan Skalar

Perkalian matriks A berdimensi  $m \times n$  dengan skalar ( suatu bilangan ) adalah matriks D berdimensi  $m \times n$  yang setiap elemennya merupakan perkalian setiap elemen matriks A dengan skalar itu.

$$\text{Jika } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{maka } 3A = 3 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

sehingga matriks D adalah :

$$D = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 15 & 0 \end{bmatrix}$$

#### 5. Perkalian Matriks Ordo Tiga

Perkalian dua matriks  $A \cdot B$  dan  $B \cdot A$  berdimensi  $3 \times 3$  bawah ini menunjukkan bahwa tidak setiap perkalian dua matriks berlaku komulatif. Misalkan matriks A dan B sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Misalkan matriks  $C = A \cdot B$  maka elemen-elemen matriks C adalah :

$$C_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 = 6+1+0 = 7$$

$$C_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} = 3 \cdot -1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 = 3+2+0 = -1$$

$$C_{13} = a_{11} \cdot b_{13} + a_{12} \cdot b_{23} + a_{13} \cdot b_{33} = 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot -1 = 0+1+1 = 1$$

$$C_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} = 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 3 = 4 + 5 + 18 = 27$$

$$C_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} = 2 \cdot -1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 2 = 2 + 10 + 12 = 20$$

$$C_{23} = a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} + a_{23} \cdot b_{33} = 2 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot -1 = 0 + 5 - 6 = -1$$

$$C_{31} = a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} + a_{33} \cdot b_{31} = 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 2 + 4 + 9 = 15$$

$$C_{32} = a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} + a_{33} \cdot b_{32} = 1 \cdot -1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = -1 + 8 + 6 = 13$$

$$C_{33} = a_{31} \cdot b_{13} + a_{32} \cdot b_{23} + a_{33} \cdot b_{33} = 1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot -1 = 0 + 4 + 3 = 7$$

Berdasarkan perhitungan tersebut matriks  $A \cdot B = C$  adalah :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{A} & \cdot & \mathbf{B} & = & \mathbf{C} \\
 \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 27 & 20 & -1 \\ 15 & 13 & 7 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Misalkan  $B \cdot A = D$  maka elemen-elemen matriks  $D$  adalah :

$$d_{11} = b_{11} \cdot a_{11} + b_{12} \cdot a_{21} + b_{13} \cdot a_{31} = 2 \cdot 3 + -1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 6 - 2 + 0 = 4$$

$$d_{12} = b_{11} \cdot a_{12} + b_{12} \cdot a_{22} + b_{13} \cdot a_{32} = 2 \cdot 1 + -1 \cdot 5 + 0 \cdot 6 = 2 - 5 + 0 = -3$$

$$d_{13} = b_{11} \cdot a_{13} + b_{12} \cdot a_{23} + b_{13} \cdot a_{33} = 2 \cdot 0 + -1 \cdot 6 + 0 \cdot 3 = 0 - 6 + 0 = -6$$

$$d_{21} = b_{21} \cdot a_{11} + b_{22} \cdot a_{21} + b_{23} \cdot a_{31} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 3 + 4 + 1 = 8$$

$$d_{22} = b_{21} \cdot a_{12} + b_{22} \cdot a_{22} + b_{23} \cdot a_{32} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 4 = 1 + 10 + 4 = 15$$

$$d_{23} = b_{21} \cdot a_{13} + b_{22} \cdot a_{23} + b_{23} \cdot a_{33} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 3 = 0 + 12 + 3 = 15$$

$$d_{31} = b_{31} \cdot a_{11} + b_{32} \cdot a_{21} + b_{33} \cdot a_{31} = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + -1 \cdot 1 = 9 + 4 - 1 = 12$$

$$d_{32} = b_{31} \cdot a_{12} + b_{32} \cdot a_{22} + b_{33} \cdot a_{32} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + -1 \cdot 4 = 3 + 10 - 4 = 9$$

$$d_{33} = b_{31} \cdot a_{13} + b_{32} \cdot a_{23} + b_{33} \cdot a_{33} = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 6 + -1 \cdot 3 = 0 + 12 - 3 = 9$$

Berdasarkan perhitungan tersebut maka matriks  $B \cdot A = D$  adalah :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{B} & \cdot & \mathbf{A} & = & \mathbf{D} \\
 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 4 & -3 & -6 \\ 8 & 15 & 15 \\ 12 & 9 & 9 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Dari hasil  $A \cdot B = C$  dan  $B \cdot A = D$  ternyata elemen  $c_{ij}$  tidak sama dengan elemen  $d_{ij}$ .

Dengan demikian tidak selalu  $A \cdot B = B \cdot A$ .

## 6. Matriks yang Dikuadratkan

Misalkan  $A^2 = E$  maka matriks  $E = A \cdot A$  sehingga elemen  $e_{ij}$  adalah :

$$e_{11} = a_{11} \cdot a_{11} + a_{12} \cdot a_{21} + a_{13} \cdot a_{31} = 3 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 9 + 2 + 0 = 11$$

$$e_{12} = a_{11} \cdot a_{12} + a_{12} \cdot a_{22} + a_{13} \cdot a_{32} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 0 \cdot 4 = 3 + 5 + 0 = 8$$

$$e_{13} = a_{11} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} + a_{13} \cdot a_{33} = 3 \cdot 0 + 1 \cdot 6 + 0 \cdot 3 = 0 + 6 + 0 = 6$$

$$e_{21} = a_{21} \cdot a_{11} + a_{22} \cdot a_{21} + a_{23} \cdot a_{31} = 2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 6 + 10 + 6 = 22$$

$$e_{22} = a_{21} \cdot a_{12} + a_{22} \cdot a_{22} + a_{23} \cdot a_{32} = 2 \cdot 1 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 4 = 2 + 25 + 24 = 51$$

$$e_{23} = a_{21} \cdot a_{13} + a_{22} \cdot a_{23} + a_{23} \cdot a_{33} = 2 \cdot 0 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 3 = 0 + 30 + 18 = 48$$

$$e_{31} = a_{31} \cdot a_{11} + a_{32} \cdot a_{21} + a_{33} \cdot a_{31} = 1 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 3 + 8 + 3 = 14$$

$$e_{32} = a_{31} \cdot a_{12} + a_{32} \cdot a_{22} + a_{33} \cdot a_{32} = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 1 + 20 + 12 = 33$$

$$e_{33} = a_{31} \cdot a_{13} + a_{32} \cdot a_{23} + a_{33} \cdot a_{33} = 1 \cdot 0 + 4 \cdot 6 + 3 \cdot 3 = 0 + 24 + 9 = 33$$

Berdasarkan perhitungan tersebut matriks  $A^2 = A \cdot A = E$  adalah :

$$\begin{matrix} A & \cdot & A & = & E \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 11 & 8 & 6 \\ 22 & 51 & 48 \\ 14 & 33 & 33 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

## 7. Kofaktor Matriks Bujursangkar

Jika matriks  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

Maka Minor-minor dari matriks A adalah :  $\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = 5 \cdot 3 - 4 \cdot 6 = 15 - 24 = -9$$

$$M_{12} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 6 = 6 - 6 = 0$$

$$M_{13} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 5 = 8 - 5 = 3$$

$$M_{21} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot 3 - 4 \cdot 0 = 3 - 0 = 3$$

$$M_{22} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot 3 - 1 \cdot 0 = 9 - 0 = 9$$

$$M_{23} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 1 = 12 - 1 = 11$$

$$M_{31} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = 1 \cdot 6 - 5 \cdot 0 = 6 - 0 = 6$$

$$M_{32} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = 3 \cdot 6 - 2 \cdot 0 = 18 - 0 = 18$$

$$M_{33} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 1 = 15 - 2 = 13$$

Misalkan  $A_{ij}$  adalah kofaktor-kofaktor elemen matriks A maka besarnya setiap elemen matriks A adalah nilai (tanda) setiap elemennya dikalikan minornya.

Pedoman untuk menentukan tanda adalah sebagai berikut :

+	-	+	-	+	.	.	.
-	+	-	+	-	.	.	.
+	-	+	-	+	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.

Selain itu kofaktor juga dapat dihitung dengan cara mengalikan minornya dengan angka (-1) pangkat jumlah dari nomor elemennya. Contoh:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^2 \cdot -9 = 1 \cdot -9 = -9$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1)^3 \cdot 0 = -1 \cdot 0 = 0$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = (-1)^4 \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1)^3 \cdot 3 = -1 \cdot 3 = -3$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = (-1)^4 \cdot 9 = 1 \cdot 9 = 9$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1)^5 \cdot 11 = -1 \cdot 11 = -11$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = (-1)^4 \cdot 6 = 1 \cdot 6 = 6$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = (-1)^5 \cdot 18 = -1 \cdot 18 = -18$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = (-1)^6 \cdot 13 = 1 \cdot 13 = 13$$

Susunan elemen  $A_{ij}$  pada matriks kofaktor A adalah :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 0 & 3 \\ -3 & 9 & -11 \\ 6 & -18 & 13 \end{bmatrix}$$

## 8. Adjoint Matriks Bujursangkar

Adjoint (adj) matriks A adalah transpose dari matrik kofaktornya.

Misalnya dari matriks  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$  telah dihitung kofaktornya yaitu

$$C = \begin{bmatrix} -9 & 0 & 3 \\ -3 & 9 & -11 \\ 6 & -18 & 13 \end{bmatrix} \text{ maka adjoint matriks } A = C^T$$

$$C^T = \begin{bmatrix} -9 & -3 & 6 \\ 0 & 9 & -18 \\ 3 & -11 & 13 \end{bmatrix}$$

## 9. Invers Matriks Bujursangkar

Untuk memperoleh invers matriks bujursangkar adalah dengan membagi adjoint matriks tersebut dengan determinan matriksnya dengan catatan determinannya  $\neq 0$ .

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ maka adjoint } A = C^T = \begin{bmatrix} -9 & -3 & 6 \\ 0 & 9 & -18 \\ 3 & -11 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\nabla(A) = 3 \cdot (15-24) - 1(6-6) + 0(8-5) = -27$$

Sehingga invers matriks A atau

$$A^{-1} = -1/27 \begin{bmatrix} -9 & -3 & 6 \\ 0 & 9 & -18 \\ 3 & -11 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9/-27 & -3/-27 & 6/-27 \\ 0/-27 & 9/-27 & -18/-27 \\ 3/-27 & -11/-27 & 13/-27 \end{bmatrix}$$

Maka inversi matriks A adalah  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/9 & -2/9 \\ 0 & -1/3 & 2/3 \\ -1/9 & 11/27 & -13/27 \end{bmatrix}$

Untuk memeriksa apakah inversi matriks A itu betul maka dapat dilakukan dengan mengalikan dengan matriks A dan hasilnya adalah **matriks identitas**. Oleh sebab itu  $A^{-1} \cdot A = I$ .

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 1/9 & -2/9 \\ 0 & -1/3 & 2/3 \\ -1/9 & 11/27 & -13/27 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Karena hasil kali matriks A dan inversinya adalah matriks identitas I dapat disimpulkan bahwa inversi matriks A dengan elemen-elemen tersebut sudah betul.

### **Kesimpulan :**

Langkah untuk mencari invers matriks adalah sbb:

1. Hitung determinan
2. Cari kofaktornya (matriks C)
3. Cari transpose matriks ( $C^T$ ) untuk memperoleh adjoint matriksnya.
4. Menghitung invers matriks dengan cara membagi adjointnya dengan determinan
5. Mengecek kebenaran dengan matriks identitas (bila diperlukan).

## 10. Penggunaan Invers Matriks

Penggunaan inversi suatu matriks diantaranya adalah untuk menyelesaikan persamaan linier simultan. Dalam persamaan linier simultan akan dicari harga-harga " *unkown* " yang belum diketahui. Jika dalam persamaan linier simultan mempunyai harga determinan yang tidak sama dengan nol maka penyelesaian persamaannya akan mempunyai harga yang unik ( 1 unkwon mempunyai 1 harga ).

Misalkan persamaan linier simultan mempunyai persamaan sebagai berikut :

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 = c_1$$

$$a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 = c_2$$

$$a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 = c_3$$

akan dicari harga-harga  $x_1$  ,  $x_2$  dan  $x_3$  yang memenuhi persamaan tersebut dengan invers matriks. Langkah pertama adalah membentuk persamaan linier simultan menjadi bentuk perkalian matriks sebagai berikut :

$$\begin{matrix} & \mathbf{A} & & \mathbf{x} & & \mathbf{C} \\ & & & & & \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Dengan operasi matriks maka matriks x adalah :

$$x = A^{-1} \cdot C$$

sehingga elemen pada matriks x dapat ditentukan.

Berikut ini ada penggunaan inver matriks pada penyelesaian persamaan linier simultan.

**Contoh soal:**

Tentukan harga-harga  $x_1$  .  $x_2$  dan  $x_3$  dalam persamaan linier simultan :

$$3 \cdot x_1 + x_2 = 9$$

$$2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 = 25$$

$$x_1 + 4 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 17$$

Penyelesaian : Persamaan linier simultan dalam bentuk matriks :

$$\begin{matrix} A & \cdot & x & = & C \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 9 \\ 25 \\ 17 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Telah dihitung melalui adjoint matriks dan determinan untuk memperoleh invers matriks A yaitu  $A^{-1}$ . Sehingga bentuk perkalian matriks pada persamaan linier simultan menjadi :

$$\begin{matrix} x & = & A^{-1} & \cdot & C \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1/3 & 1/9 & -2/9 \\ 0 & -1/3 & 2/3 \\ -1/9 & 11/27 & -13/27 \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} 9 \\ 25 \\ 17 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Dengan perkalian matriks dapat diperoleh harga-harga  $x_1$  .  $x_2$  dan  $x_3$  sebagai berikut :

$$x_1 = 1/3 \cdot 9 + 1/9 \cdot 25 + -2/9 \cdot 17 = 3 + 25/9 - 34/9 = 3 - 1 = 2$$

$$x_2 = 0 \cdot 9 + -1/3 \cdot 25 + 2/3 \cdot 17 = 0 - 25/3 + 34/3 = 9/3 = 3$$

$$x_3 = -1/9 \cdot 9 + 11/27 \cdot 25 + -13/27 \cdot 17 = -1 + 275/27 - 221/27 = 1$$

Untuk mengecek apakah harga-harga tersebut betul maka disubstitusikan kembali kedalam persamaan linier simultan di atas.

$$3 \cdot x_1 + x_2 = 3 \cdot 2 + 3 = 6 + 3 = 9 \quad (\text{betul})$$

$$2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 = 2 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 1 = 4 + 15 + 6 = 25 \quad (\text{betul})$$

$$x_1 + 4 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 2 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 2 + 12 + 3 = 17 \quad (\text{betul})$$