

Analisa Mode Getar Membran Melingkar *The Analysis Of Circular Membrane Vibration Modes*

Herfien Rediansyah, Agus Purwanto dan Sumarna
Pusat Studi Getaran dan Bunyi, Jurdik Fisika, FMIPA, UNY

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk menganalisa mode getar yang muncul pada membran melingkar jika bergetar pada frekuensi tertentu. Mode-mode getar yang muncul merupakan penyelesaian persamaan gelombang 2D pada koordinat polar. Mode getar mempunyai orde m dan n .

Metode penelitian yang digunakan adalah metode resonansi. Getaran suara dari *loudspeaker* digunakan untuk menggetarkan membran. Mode getar membran muncul ketika frekuensi getar membran beresonansi dengan frekuensi *loudspeaker*.

Hasil penelitian menunjukkan bahwa frekuensi resonansi dapat memunculkan mode-mode getar. Perbandingan frekuensi getar tiap mode mengikuti perbandingan akar-akar fungsi Bessel. Untuk mode simetri muncul lingkaran *nodal*, sedangkan untuk mode asimetri muncul *nodal* diametrikal dan lingkaran *nodal* secara bersamaan. Jari-jari lingkaran *nodal* dapat dihitung dari perbandingan akar-akar fungsi Bessel dikalikan dengan jari-jari membran.

Kata kunci: membran melingkar, mode getar, frekuensi resonansi, fungsi Bessel

ABSTRACT

The aim of this research was to analyze the vibration modes which appeared on circular membrane which vibrated on certain frequencies. The vibration modes were the solution of 2D wave equation in polar coordinates. The vibration modes had order m and n .

The research was using resonance method. Sound vibration from loudspeaker was used to vibrate the membrane. The vibration modes were excited when the vibration frequency of the membrane was in resonance with loudspeaker frequency.

The results showed that resonance frequencies could excite vibration modes. The ratio of vibration frequencies of each mode followed the Bessel root's ratio. For symmetrical modes there were nodal circles, on the other hand for the asymmetrical modes there were diametrical nodal lines and nodal circles. The nodal circle's radius could be calculated by using the ratio of Bessel function's roots multiplied by membrane radius.

Key words: circular membrane, vibration modes, resonance frequency, Bessel function

PENDAHULUAN

Salah satu jenis getaran dalam instrumen musik adalah getaran pada membran melingkar. Beberapa contoh yang dapat ditemukan adalah getaran drum, gendang dan tamborin. Jika membran tersebut bergetar pada frekuensi tertentu maka akan muncul mode-mode getaran. Mode-mode getaran yang

muncul bergantung pada posisi titik pukul pada membran. Frekuensi getaran membran melingkar berkaitan dengan akar-akar fungsi Bessel yang merupakan salah satu penyelesaian persamaan diferensial getaran membran melingkar selain penyelesaian azimuth. Penelitian ini dilakukan untuk menganalisa mode-mode getaran yang muncul pada membran melingkar berdasarkan frekuensi getar membran tersebut.

TEORI

Untuk membran melingkar persamaan gelombang pada koordinat Kartesius harus diubah dalam koordinat polar menjadi :

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} = \frac{1}{c_m^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \quad (1)$$

Persamaan (1) dapat diselesaikan dengan metode separasi variabel. Diasumsikan persamaan (1) mempunyai solusi berbentuk :

$$\zeta(r, \theta, t) = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot T(t) \quad (2)$$

dengan $\zeta(r, \theta, t)$ menyatakan simpangan membran. Substitusi $\zeta(r, \theta, t)$ ke persamaan (1) menghasilkan

$$\frac{c_m^2}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) + \frac{c_m^2}{r^2} \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{dt^2} = \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} \quad (3)$$

Dalam hal ini diperkenalkan konstanta $-\omega^2 = \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2}$ karena ruas kiri dan ruas kanan merupakan dua fungsi dari variabel yang berbeda. Ruas kanan pada persamaan (3) menjadi

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \quad (4)$$

yang mempunyai solusi rill

$$T(t) \sim \begin{cases} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{cases} \quad (5)$$

Persamaan (3) menjadi

$$\frac{c_m^2}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) + \frac{c_m^2}{r^2} \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{dt^2} = -\omega^2 \quad (6)$$

Dikalikan dengan $\frac{r^2}{c_m^2}$ menjadi

$$\frac{r^2}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) + \left(\frac{\omega}{c_m} \right)^2 r^2 = -\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} \quad (7)$$

Sekali lagi diperkenalkan konstanta $m^2 = -\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2}$. Persamaan (7) terpisah

menjadi dua persamaan differensial biasa

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + m^2 \Theta = 0 \quad (8)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left[\left(\frac{\omega}{c_m} \right)^2 - \frac{m^2}{r^2} \right] R = 0 \quad (9)$$

Persamaan (8) mempunyai solusi riil :

$$\Theta(\theta) \sim \begin{cases} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{cases}, m \text{ adalah bilangan bulat} \quad (10)$$

Dengan substitusi $u = kr = \frac{\omega}{c_m} r$, persamaan (9) menjadi

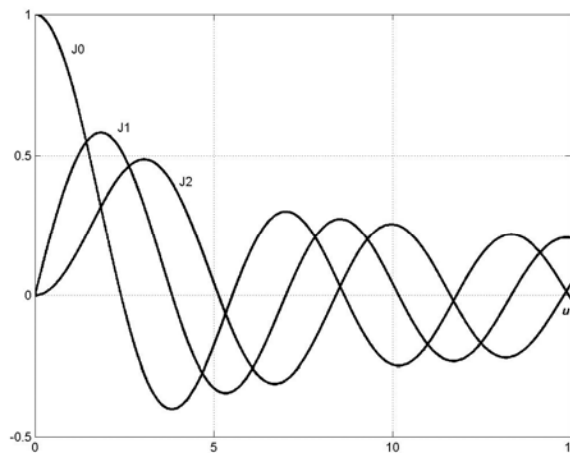
$$\frac{d^2 R}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{dR}{du} + \left[1 - \frac{m^2}{u^2} \right] R = 0 \quad (11)$$

Persamaan (11) merupakan persamaan Bessel yang mempunyai solusi fungsi

$J_m(u)$ berupa deret pangkat tak berhingga :

$$J_m(u) = \frac{u^m}{2^m m!} \left[1 - \frac{u^2}{1!2^2(m+1)} + \frac{u^4}{2!2^4(m+1)(m+2)} - \dots \right] \quad (12)$$

Fungsi $J_m(u)$ mempunyai akar-akar pada sumbu u untuk $J_m(u) = 0$. Berikut ini adalah grafik dari $J_0(u)$, $J_1(u)$ dan $J_2(u)$ untuk $u = 0 \dots 15$.



Gambar 1. Fungsi Bessel jenis pertama orde nol, satu, dan dua (Elmore and Heald,1969:61)

$m \backslash n$	0	1	2	3
1	2.405	3.832	5.136	6.380
2	5.520	7.016	8.417	9.761
3	8.654	10.173	11.620	13.015
4	11.792	13.324	14.796	16.223

Tabel 1. Akar-akar ke- n $J_m(u) = 0$ (Elmore and Heald,1969:62)

Mode-mode normal dari getaran membran melingkar bergantung dari nilai m dan n dari penyelesaian persamaan gelombang. Ketika $m = 0$, Θ tidak tergantung θ , sehingga $\zeta(r, \theta, t) \rightarrow \zeta(r, t)$

$$\zeta(r, t) = AJ_0(kr) \cos \omega t \quad (13)$$

yang merupakan penyelesaian persamaan gelombang. Untuk memenuhi syarat batas yaitu $\zeta(r,t) = 0$ pada $r = a$ dengan a adalah jari-jari membran, nilai dari

$k = \frac{\omega}{c_m}$ harus ditentukan agar

$$k_{0n}a = u_{0n}, \quad n = 1,2,3,\dots \quad (14)$$

dengan u_{0n} adalah salah satu akar dari $J_0(u) = 0$, terdapat pada kolom pertama pada Tabel 1. Frekuensi-frekuensi dari mode-mode simetri radial (0,n) adalah

$$f_{0n} = \frac{1}{2\pi} \frac{c_m u_{0n}}{a} \quad (15)$$

Ketika $m = 0$ dan $n = 2$, terdapat satu lingkaran *nodal* pada radius

$$r = \frac{u_{01}}{k_{02}} = \frac{u_{01}}{u_{02}} a. \quad (16)$$

Untuk seterusnya terdapat $n - 1$ lingkaran *nodal* ketika akar-akar ke-n dari $J_0(u) = 0$. Lingkaran-lingkaran tersebut muncul pada radius

$$r = \frac{u_{0p}}{k_{0n}} \quad p = 1,2,\dots, n-1. \quad (17)$$

Ketika $m = 1$, penyelesaian persamaan gelombang melibatkan $\cos\theta$ untuk fungsi

$$\Theta \quad \zeta(r, \theta, t) = AJ_1(kr) \cos\theta \cos\omega t. \quad (18)$$

Untuk memenuhi syarat batas pada $r = a$, nilai k harus tertentu

$$k_{1n}a = u_{1n}, \quad n = 1,2,3,\dots \quad (19)$$

dengan u_{1n} adalah salah satu akar dari $J_1(u) = 0$, terdapat pada kolom kedua pada Tabel 1. Frekuensi dari mode-mode ini adalah

$$f_{1n} = \frac{1}{2\pi} \frac{c_m u_{1n}}{a} \quad (20)$$

Nodal-nodal diametrikal muncul pada sudut $\theta = \pi/2, 3\pi/2, \dots$, dan juga lingkaran *nodal* pada radius tertentu

$$r = \frac{u_{1p}}{k_{1n}} \quad p = 1,2,\dots, n-1, \quad (21)$$

yang dalam bentuk umum menjadi

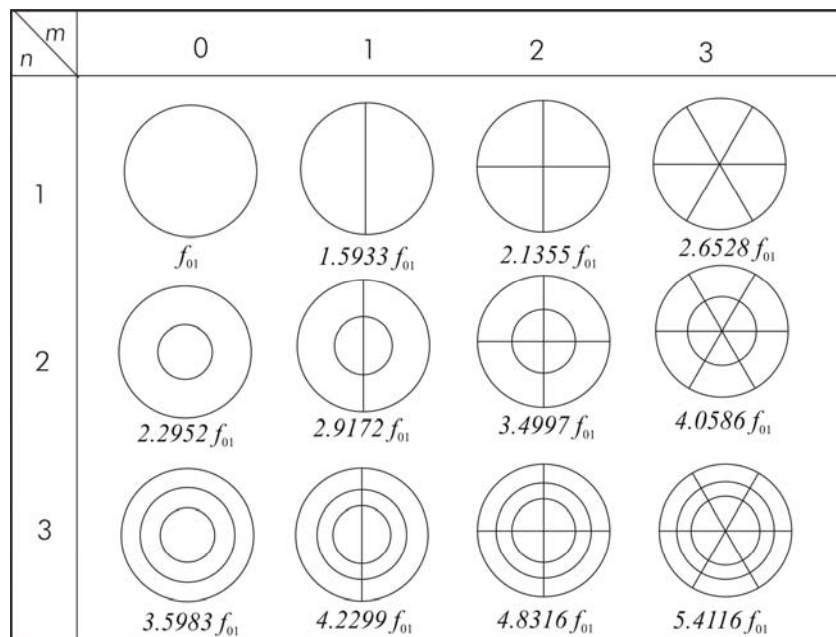
$$r = \frac{u_{mp}}{k_{mn}} \quad p = 1, 2, \dots, n-1. \quad m \text{ bilangan bulat} \quad (22)$$

Penyelesaian untuk $\Theta(\theta)$ dapat berupa $\sin \theta$ atau $\cos \theta$, ataupun kombinasi linear dari keduanya. Mode-mode asimetri bergantung pada mode terdegenerasi karena ada dua fungsi karakteristik pada frekuensi yang sama (Morse, 1948:190). Jika kombinasi linear keduanya dipakai maka harus memenuhi hubungan

$$A \cos \theta + B \sin \theta = C \cos(\theta - \alpha) \quad (23)$$

dengan α sebagai sudut fase.

Gambar 2 menunjukkan beberapa kemungkinan mode-mode getaran membran melingkar untuk nilai m dan n yang kecil dan perbandingan frekuensi tiap mode.



Gambar 2. Mode-mode normal membran melingkar dan perbandingan frekuensi tiap mode (Kinsler.et.all, 1982:84).

METODE PENELITIAN

Penelitian dilakukan di laboratorium Gelombang dan Bunyi, Jurdik Fisika, FMIPA, UNY. Membran yang digunakan terbuat dari mika dengan diameter 23,4 cm. Metode yang digunakan adalah metode resonansi. Membran bergetar dengan bantuan loudspeaker berdiameter 4 inchi yang diletakkan tepat di bawah

membran. Untuk mode simetri posisi loudspeaker tepat di tengah-tengah membran.

Untuk mode asimetri loudspeker ditutup dengan pandu gelombang berbentuk kerucut terbuat dari karton dengan tinggi 30 cm dan pada ujung kerucut tersebut dibuat lubang berdiameter 1 cm. Ujung kerucut diletakkan di bawah dan hampir menyentuh membran. Loudspeaker dikendalikan oleh Audio Frequency Generator (AFG). Untuk memunculkan mode-mode getar frekuensi loudspeaker diatur dari AFG sampai mencapai frekuensi resonansi. Frekuensi resonansi tersebut direkam menggunakan *microphone* yang dihubungkan dengan software penganalisis gelombang.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Dengan mempertimbangkan ketebalan dan diameter membran yang tidak terlalu besar, maka mode getar yang dimunculkan dibatasi sebatas kemampuan membran.

Berikut ini adalah hasil pemunculan mode getar:



(a) Mode (0,1)



(b) Mode (0,2)



(c) Mode (0,3)



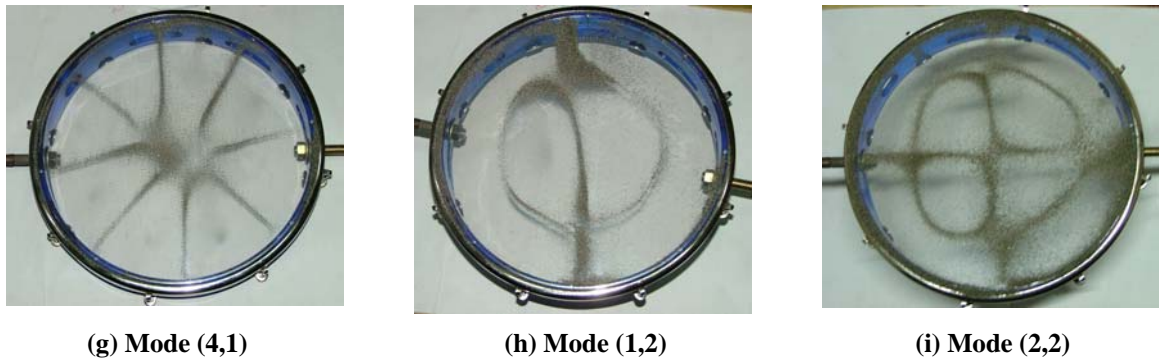
(d) Mode (1,1)



(e) Mode (2,1)



(f) Mode (3,1)



Gambar 3. Mode-mode getar yang berhasil dimunculkan

Berikut perbandingan data frekuensi dan jari-jari lingkaran *nodal* hasil percobaan dengan teori.

Mode	Frekuensi (Hz)			Radius (cm)	
	Faktor Pengali	Teori	Percobaan	Teori	Percobaan
(0,1)	1	205	205	$r_1 = 11.7$	$r_1 = 11.7$
(0,2)	2.2952	470.51	577	$r_1 = 5.09$	$r_1 = 5.25$
				$r_2 = 11.7$	$r_2 = 11.7$
(0,3)	3.5983	737.65	966	$r_1 = 3.25$	$r_1 = 3.25$
				$r_2 = 7.46$	$r_2 = 8$
				$r_3 = 11.7$	$r_3 = 11.7$
(1,1)	1.5933	326.62	377		
(2,1)	2.1355	437.77	545		
(3,1)	2.6528	543.82	697		
(4,1)	3.1550	649.79	837		
(1,2)	2.9172	598.02	762	$r_1 = 6.40$	$r_1 = 6.50$
				$r_2 = 11.7$	$r_2 = 11.7$
(2,2)	3.4997	717.43	950	$r_1 = 7.14$	$r_1 = 7.50$
				$r_2 = 11.7$	$r_2 = 11.7$

Tabel 2. Perbandingan data hasil percobaan dengan teori

Berdasarkan gambar mode getar dan pengukuran frekuensi dapat disimpulkan bahwa frekuensi resonansi antara loudspeaker dan membran dapat memunculkan mode getar. Ketidaksempurnaan beberapa mode seperti pada gambar (c), (g), dan (h) disebabkan oleh jari-jari membran yang tidak terlalu besar dan membran yang cukup tipis, serta kemungkinan karena ketidakseragaman

bahan membran. Ketiga hal diatas kemungkinan juga menyebabkan frekuensi untuk mode-mode orde tinggi mempunyai perbedaan yang cukup besar dengan perhitungan teori. Sedangkan jari-jari lingkaran *nodal* yang terbentuk mendekati perhitungan teori.

KESIMPULAN

Dengan mengatur frekuensi *loudspeaker* sebagai sumber getar, bunyi *loudspeaker* dapat memunculkan mode getar membran melingkar. Untuk mode simetri muncul lingkaran *nodal* sedangkan mode asimetri muncul nodal *diametrikal* dan lingkaran *nodal* ataupun keduanya. Perbandingan frekuensi tiap mode mengikuti akar-akar fungsi Bessel. Jari-jari lingkaran *nodal* dapat ditentukan dengan mengalikan jari-jari membran dengan akar-akar fungsi Bessel.

DAFTAR PUSTAKA

- Elmore, William.C and Heald, Mark.A. (1969). *Physics of Waves*. Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha, Ltd.
- Kinsler, Lawrence E., Frey, Austin R., Coppens, Alan B., Sanders, James V. (1982). *Fundamentals of Acoustics*, 3rd ed. New York: John Willey & Sons.
- Morse, Phillip M. (1948). *Vibration and Sound*, 2nd ed. New York: McGraw-Hill.