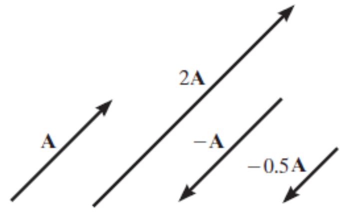
VEKTOR GAYA

- Perkalian dan Pembagian vektor dengan scalar

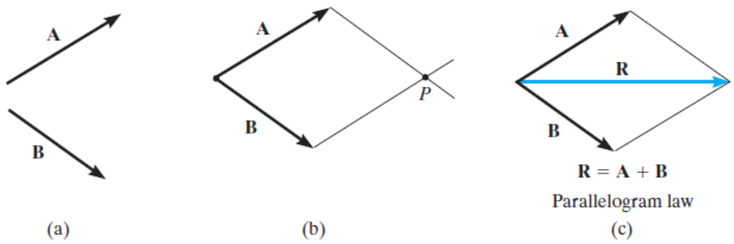
  Jika vektor dikalikan dengan nilai positif maka besarnya meningkat sesuai jumlah pengalinya. Perkalian dengan bilangan negatif akan mengubah besar dan arah vektor



Gambar 1. Perkalian dan pembagian vektor

- Operasi Penambahan Vektor Gaya

  Operasi penambahan vektor dapat dilakukan dengan metode parallelogram law of addition. Sebagai contoh, terdapat dua buah vektor A dan B yang akan dijumlahkan sehingga mendapatkan sebuah vektor resultan R. Pada operasi ini berlaku rumus R = A + B. Berikut ilustrasinya :

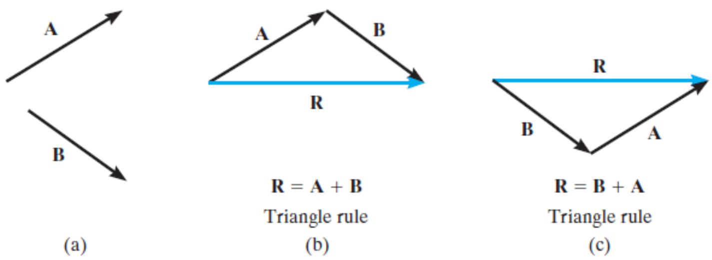


Gambar 2. Parallelogram law of addition

Langkahnya sebagai berikut :

- Hubungkan bagian ekor kedua vektor
- Buatlah garis yang sejajar dengan vektor B dimulai dibagian ujung kepala vektor A, sebaliknya buatlah garis yang sejajar dengan vektor A dimulai dari ujung kepala vektor B sehingga kedua buah garis tersebut memotong satu sama lain melalui satu titik P.
- Buatlah garis dimulai dari ujung pertemuan ekor vektor A dan B ke titik P. Garis tersebut merepresentasikan vektor resultan R.

Operasi penambahan vektor juga dapat dilakukan dengan metode triangle rule. Berikut ilustrasinya :

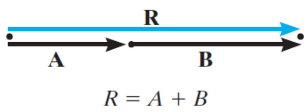


Gambar 3. Triangle rule

Langkahnya sebagai berikut :

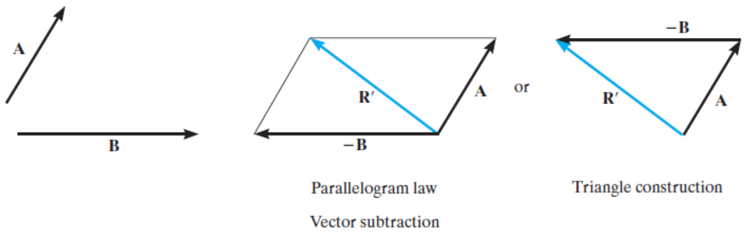
- Hubungkan bagian ujung kepala vektor A dengan ekor vektor B.
- Vektor resultan R didapatkan dengan membuat garis dari ujung ekor vektor A ke kepala vektor B.
- Bila dilakukan sebaliknya, yaitu ujung kepala vektor B dihubungkan dengan ekor vektor A, juga akan mendapatkan panjang garis yang sama dari ujung ekor vektor B ke kepala vektor A yaitu vektor resultan R. Sehingga operasi penambahan vektor juga bersifat kumulatif yaitu R = A + B = B + A

Dalam kasus khusus, apabila vektor A dan B sejajar, maka operasi penambahan vektor berubah ke operasi secara scalar.



Gambar 4. Operasi penambahan pada vektor yang sejajar

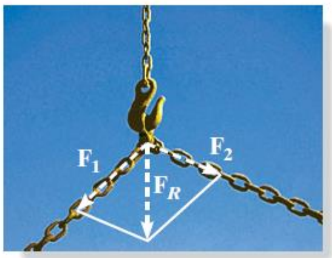
- Operasi Pengurangan Vektor
  Operasi pengurangan pada dua buah vektor dapat diilistrasikan sebagai berikut :



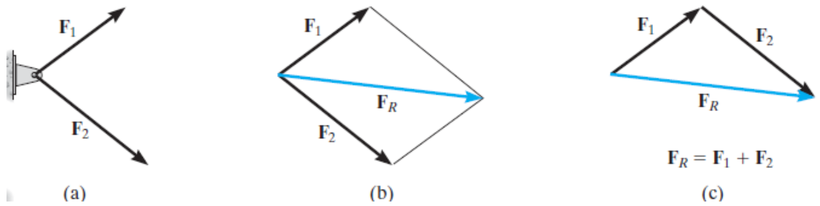
Gambar 5. Operasi pengurangan pada vektor

Penjelasan dari gambar diatas, apabila terdapat suatu operasi pengurangan dengan rumus R = A – B yang dapat dinotasikan pula sebagai R = A + (-B). Dari rumus tersebut –B berarti arah berkebalikan dengan arah B, sehingga ekor vektor B menjadi kepala vektor B dan sebaliknya. Teknik parallelogram dan triangle dapat digunakan untuk mendapatkan resultan vektor R.

- Operasi penambahan vektor gaya
  Perhatikan gambar di bawah ini :



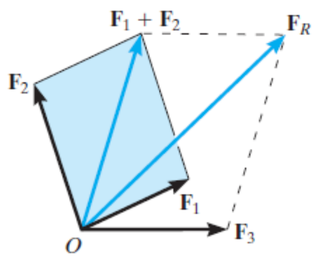
Parallelogram law harus digunakan dalam mencari resultan gaya seperti gambar diatas.



Dua buah komponen vektor gaya F_1 dan F_2 yang menarik Pin pada gambar diatas dapat dijumlahkan untuk mendapatkan nilai resultan gayanya. $F_R = F_1 + F_2$. Dari bentuk tersebut kita dapat menggunakan parallelogram law maupun triangle rule untuk mencari besarnya vektor gaya F_R. Kita dapat menggunakan hukum cosinus maupun sinus pada segitiga dalam menghitung besar dan arah vektor F_R.

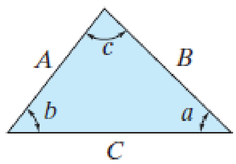
- Operasi penambahan pada lebih dari dua gaya

  Operasi penambahan lebih dari dua gaya dapat dilakukan dengan ilustrasi sebagai berikut :

  Dengan menggunakan hukum parallelogram, kita dapat menjumlahkan kegiga buah gaya tersebut dengan pertama kali kita jumlahkan dua buah gaya terlebih dahulu. Misal kita jumlahkan gaya F_1 dan F_2 dan kita beri notasi $F_1 + F_2$, kemudian resultan gaya $F_1 + F_2$ dijumlahkan dengan F_3 untuk mendapatkan resultan gaya F_R, sehingga kita dapatkan rumusan $F_R = (F_1 + F_2) + F_3$.

  Untuk menyelesaikan operasi tersebut, kita membutuhkan hukum cosinus maupun sinus sebagai berikut :

  Cosine law:

  $$C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos c}$$

  Sine law:

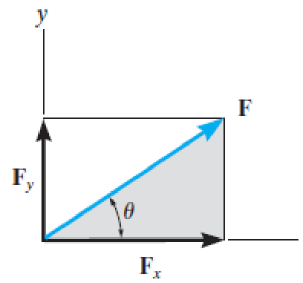
  $$\frac{A}{\sin a} = \frac{B}{\sin b} = \frac{C}{\sin c}$$

  (c)

- Operasi penambahan gaya pada sistem coplanar

  Apabila terdapat dua buah gaya yang sejajar dengan sumbu x dan y pada sistem Cartesian.

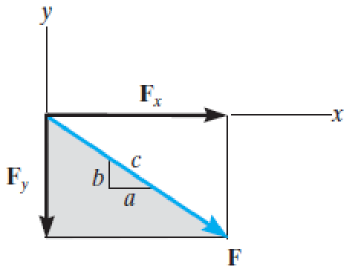
  - Notasi scalar



Dari gambar diatas dapat kita ketahui bahwa suatu gaya yang sejajar dengan sumbu x dan y akan memiliki komponen gaya berupa F_x yang searah dengan sumbu x dan F_y yang searah dengan sumbu y pada sistem koordinat Cartesian. Untuk mendapatkan nilai F_x dan F_y dengan mengimplementasikan hukum sinus dan cosinus didapatkan :

$F_x = F \cos \Theta$ dan $F_y = F \sin \Theta$

Terkadang, notasi sudut Θ digantikan dengan sebuah perbandingan segitiga kecil sebagai berikut :



Penyelesaian untuk gambar diatas diberlakukan rumusan sebagai berikut :

$$\frac{F_x}{F} = \frac{a}{c}$$

atau

$$F_x = F\left(\frac{a}{c}\right)$$

dan

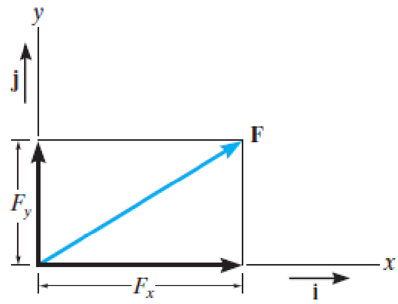
$$\frac{F_y}{F} = \frac{b}{c}$$

atau

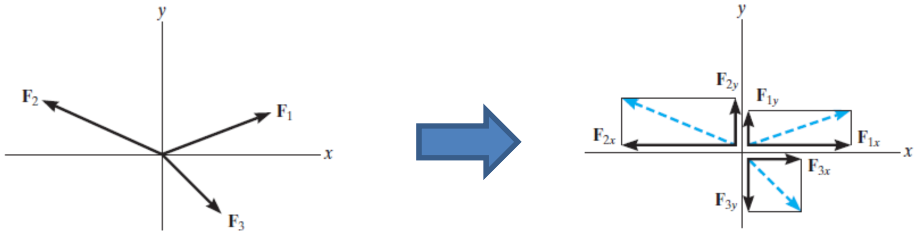
$$F_y = -F\left(\frac{b}{c}\right)$$

Untuk memberikan notasi pada nilai F_x dan F_y diberikan dalam bentuk unit vektor I untuk nilai F_x dan j untuk nilai F_y. Rumusan untuk nilai vektor gaya F adalah,

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j}$$



Penjumlahan beberapa buah vektor gaya pada sistem coplanar dapat dijelaskan sebagai berikut :



Dari gambar diatas didapat suatu persamaan :

$$\mathbf{F}_1 = F_{1x}\mathbf{i} + F_{1y}\mathbf{j}$$
$$\mathbf{F}_2 = -F_{2x}\mathbf{i} + F_{2y}\mathbf{j}$$
$$\mathbf{F}_3 = F_{3x}\mathbf{i} - F_{3y}\mathbf{j}$$

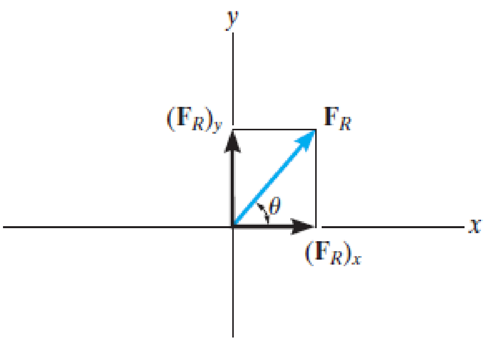
Sehingga untuk menghitung besarnya resultan gayanya,

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_R &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 \\ &= F_{1x}\mathbf{i} + F_{1y}\mathbf{j} - F_{2x}\mathbf{i} + F_{2y}\mathbf{j} + F_{3x}\mathbf{i} - F_{3y}\mathbf{j} \\ &= (F_{1x} - F_{2x} + F_{3x})\mathbf{i} + (F_{1y} + F_{2y} - F_{3y})\mathbf{j} \\ &= (F_{Rx})\mathbf{i} + (F_{Ry})\mathbf{j}\end{aligned}$$

Dalam notasi scalar digunakan,

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad (F_R)_x = F_{1x} - F_{2x} + F_{3x}$$
$$(+\uparrow) \qquad (F_R)_y = F_{1y} + F_{2y} - F_{3y}$$

$$\boxed{\begin{aligned}(F_R)_x &= \Sigma F_x \\ (F_R)_y &= \Sigma F_y\end{aligned}}$$



Nilai resultan gayanya dirumuskan,

$$F_R = \sqrt{(F_R)_x^2 + (F_R)_y^2}$$

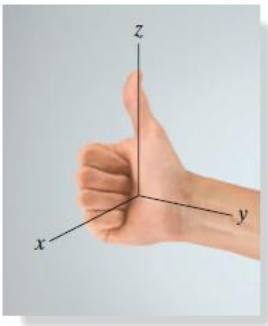
Untuk mendapatkan nilai sudut Θ yang merepresentasikan arah resultan gayanya dapat diselesaikan dengan rumus trigonometri,

$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{(F_R)_y}{(F_R)_x}\right|$$

- Vektor cartesian

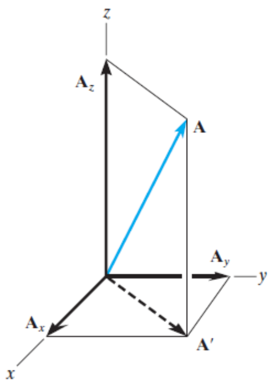
  Dalam operasi vektor secara aljabar, saat menyelesaikan persamaan dalam tiga dimensi, kita gunakan berbagai hukum sebagai berikut :

  - Koordinat berdasar pada hukum tangan kanan, dimana arah sumbu x tegak lurus dengan telapak tangan, sumbu y sejajar dengan lengan, dan sumbu z searah dengan ibu jari tangan kanan. Ilustrasinya sebagai berikut :

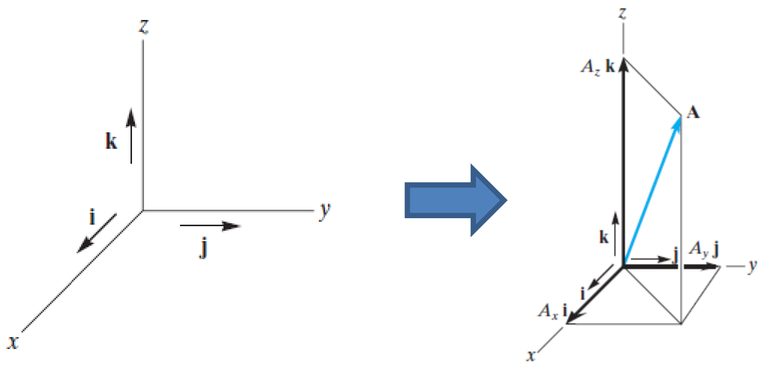


  - Komponen segi empat pada vektor

    Sebuah vektor A mungkin memiliki dua atau tiga kotak sehi empat yang menyusun vektor tersebut sejajar sumbu x, y atau z.



Dari gambar diatas dengan menerapkan hukum parallelogram, didapatkan rumusan $A = A' + A_z$ dimana $A' = A_x + A_y$ sehingga didapatkan $A = A_x + A_y + A_z$. sedangkan unit vektornya dinotasikan dengan i, j dan k untuk menandai arah vektor ke sumbu x, y maupun z. Perhatikan gambar berikut :

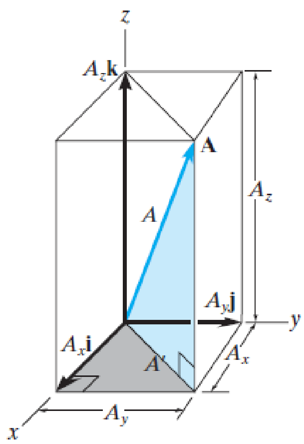


$$\boxed{\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}}$$

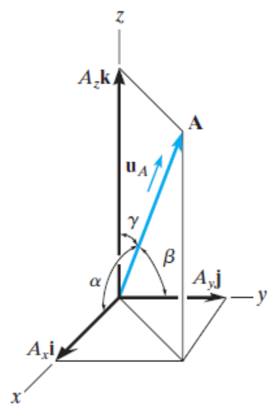
Besarnya nilai setiap komponen vektor gaya diatas dapat dihitung dengan mencari resultan A' terlebih dahulu yaitu A' = $A_x + A_y$, kemudian resultan A' dijumlahkan dengan A_z. didapatkan rumusan $A = \sqrt{A'^2 + A_z^2}$ dan $A' = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$. Kombinasi dari kedua persamaan tersebut menjadi,

$$\boxed{A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$$

Berikut ilustrasinya,



Sudut yang terbentuk dari arah vektor A terhadap sumbu x, y dan z dinotasikan dengan α, β dan γ.

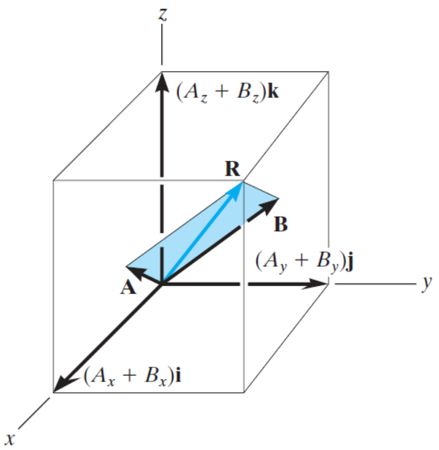


Untuk mendapatkan nilai α, β dan γ berlaku rumus,

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{A_x}{A} \quad \cos\beta = \frac{A_y}{A} \quad \cos\gamma = \frac{A_z}{A}}$$

- Operasi Penambahan Vektor Gaya

Vektor A yang memiliki komponen A_x, A_y dan A_z dan vektor B yang memiliki komponen B_x, B_y dan B_z dapat diberikan operasi penjumlahan (maupun pengurangan).



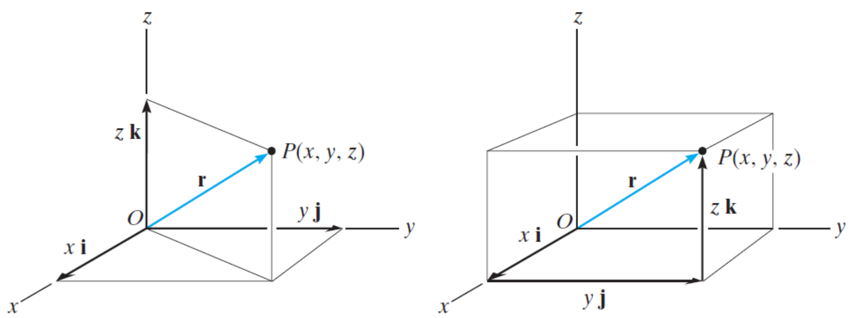
$$\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x)\mathbf{i} + (A_y + B_y)\mathbf{j} + (A_z + B_z)\mathbf{k}$$

$$\boxed{\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F} = \Sigma F_x\mathbf{i} + \Sigma F_y\mathbf{j} + \Sigma F_z\mathbf{k}}$$

- Vektor posisi

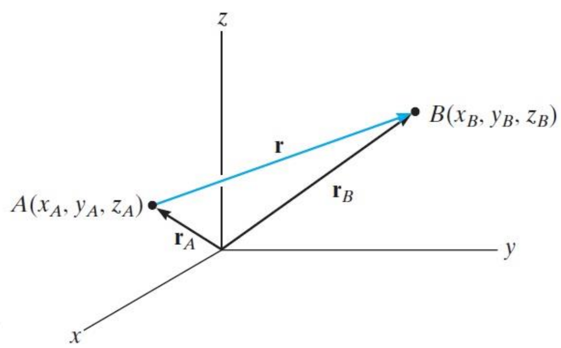
Menurut R.C Hibbeler, "A *position vector* **r** is defined as a fixed vector which locates a point in space relative to another point". Jadi vektor posisi **r** adalah jarak tetap yang ditempatkan pada suatu titik yang relatif antara satu dengan yang lain. Sebagai contoh, apabila jarak r diambil dari pusat koordinat 0, ke titik P(x,y,z), sehingga r bisa dirumuskan sebagai :

$$r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$



(a) (b)

Pada banyak kasus, vektor posisi merupakan jarak antara suatu titik A dengan titik B, sehingga vektor posisi tersebut disbut sebagai r_{AB}. r_A dan r_B adalah jarak antara titik A dan titik B terhadap pusat koordinat O.



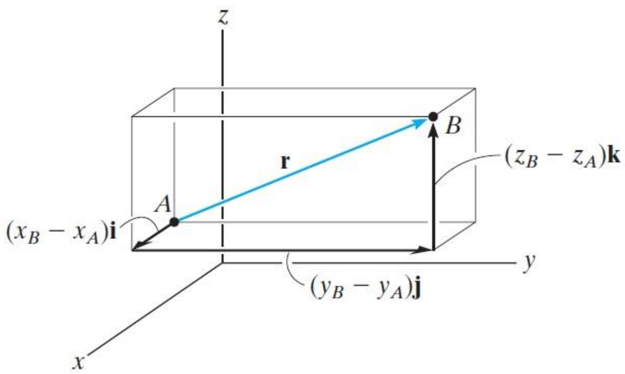
Dari ekor vektor di titik A ke kepala vektor di titik B, menggunakan rumus se gitiga, dapat kita ketahui,

$$r_A + r = r_B$$

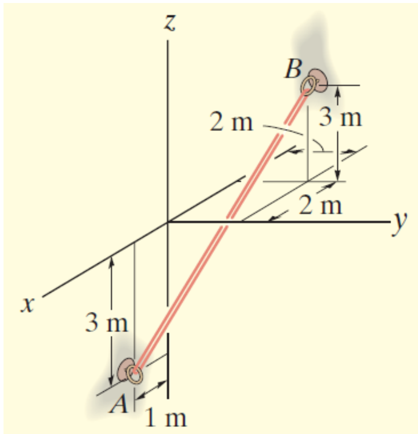
sehingga untuk mencari nilai r, rumus diatas berubah menjadi,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = (x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j} + z_B\mathbf{k}) - (x_A\mathbf{i} + y_A\mathbf{j} + z_A\mathbf{k})$$

$$\boxed{\mathbf{r} = (x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j} + (z_B - z_A)\mathbf{k}}$$



Sebagai contoh,



untuk mencari besarnya vektor posisi antara titik A dan B pada gambar diatas, dimana koordinat titik A (1 m, 0, -3 m) akan dikurangkan dengan koordinat titik B (-2 m, 2 m, 3 m) sehingga didapatkan persamaan :

$\mathbf{r}$ = (-2 m - 1 m)$\mathbf{i}$ + (2 m – 0) $\mathbf{j}$ + (3 m - (-3 m))$\mathbf{k}$

= {-3$\mathbf{i}$ + 2$\mathbf{j}$ + 6$\mathbf{k}$} m

Panjang tali dari titik A ke titik B dapat dihitung sebagai berikut,

$$r = \sqrt{(-3\text{ m})^2 + (2\text{ m})^2 + (6\text{ m})^2} = 7\text{ m}$$

Vektor posisi tersebut dapat di rumuskan dalam bentuk unit vektor,

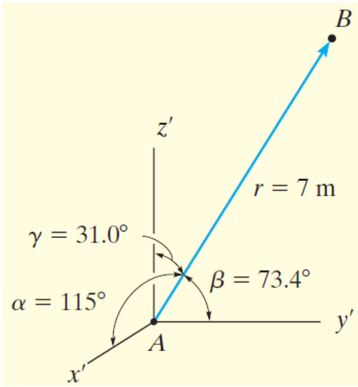
$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{3}{7}\mathbf{i} + \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{6}{7}\mathbf{k}$$

Setiap komponen pada unit vektor tersebut dapat memberikan koordinat dalam bentuk sudut,

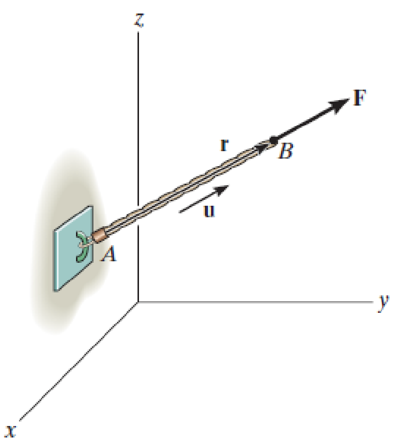
$$\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{3}{7}\right) = 115^\circ$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{7}\right) = 73.4^\circ$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{6}{7}\right) = 31.0^\circ$$



Pada kasus sesungguhnya, dimisalkan ada sebuah gaya yang terdapat pada sebuah tali AB sebagai berikut,

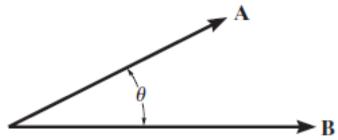


Dari gambar diatas dapat dirumuskan besarnya gaya F dengan pemahaman bahwa gaya F memiliki besar dan arah yang sama dengan vektor posisi antara titik A dan B. Arah secara umum ditentukan sebagai unit vektor **u** = **r**/*r*, sehingga,

$$\mathbf{F} = F\,\mathbf{u} = F\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = F\left(\frac{(x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j} + (z_B - z_A)\mathbf{k}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}}\right)$$

- Dot Product
  Dot product didefinisikan sebagai metode untuk mengkalikan dua buah vektor. Dot product pada vektor A dan B, ditulis sebagai **A · B** atau dibaca sebagai " **A** dot **B** "

merupakan hasil dari besaran vektor A dan B dan cosinus dari sudut antara dua garis vektor A dan B.



$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB\cos\theta}$$

Dimana $0^0 \leq \Theta \leq 180^0$

Pada dot product berlaku hukum:

- Kumulatif : $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$
- Perkalian dengan scalar : $a(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (a\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (a\mathbf{B})$
- Distributif : $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})$

Dalam rumusan vektor Cartesian, sebagai contoh $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = (1)(1)\ \cos 0^0 = 1$ and $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = (1)(1)\ \cos 90^0 = 0$, sehinga apabila diinginkan untuk mencari nilai dot product antara vektor A dan B dapat dijabarkan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}) \cdot (B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}) \\ &= A_xB_x(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}) + A_xB_y(\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}) + A_xB_z(\mathbf{i} \cdot \mathbf{k}) \\ &\quad + A_yB_x(\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}) + (A_yB_y(\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}) + A_yB_z(\mathbf{j} \cdot \mathbf{k}) \\ &\quad + A_zB_x(\mathbf{k} \cdot \mathbf{i}) + A_zB_y(\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}) + A_zB_z(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})\end{aligned}$$

Hasil akhirnya mendapatkan nilai,

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}$$

Sudut antara vektor A dan B adalah u = $\cos^{-1}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}/AB)$.