

Fungsi Partisi Kanonik Lengkap (*GCPF*, *Grand Canonical Partition Function*) Untuk Sistem Parafermi Orde Dua

R. Yosi Aprian Sari, M.Si
Jurdik Fisika FMIPA UNY

ABSTRAK

Persamaan rekursi fungsi partisi kanonik lengkap, Z (*GCPF*, *Grand Canonical Partition Function*) untuk sistem parafermi orde dua yang telah diketahui, maka dapat dihitung nilainya dengan menggunakan komputasi.

Dari persamaan rekursi ini secara matematis dapat dihitung juga fungsi-fungsi termodinamika model sistem partikel identik dengan tingkat energi terbatas yang mirip osilator harmonik. Fungsi-fungsi termodinamika tersebut antara lain rerata jumlah partikel N , entropi S , energi internal U , dan panas jenis C_V . Secara teoretis, semua fungsi-fungsi termodinamika dari sistem parafermi orde dua memiliki kemiripan bentuk dengan sistem fermi (sistem parafermi orde satu).

Kata-kata kunci: parafermi, fungsi-fungsi termodinamika

GRAND CANONICAL PARTITION FUNCTION (GCPF) OF A PARAFERMION SYSTEM OF ORDER TWO

R. Yosi Aprian Sari, M.Si
Dept. of Physics Education, Faculty of Mathematics and Natural Science
Yogyakarta State University

Abstract

Starting from a known recursion relation for the grand canonical partition function (GCPF) equation of parafermion system of order two, this partition function can be computed using a computer program.

These recursion relations of the partition function are then being used to calculate the thermodynamics functions for a system of identical particles with harmonic oscillator-like energy levels, i.e. number of particle N , entropy S , internal energy U , specific heat C_V . Theoretically, all the obtained thermodynamics functions of the parafermion system of order two have similar pattern with fermion system (parafermion system of order one).

Keywords: parafermion, thermodynamics functions

Pendahuluan

A. Latar Belakang

Di tinjau dari kaidah-kaidah mekanika kuantum, tidak ada keharusan bahwa statistik partikel-partikel yang ada harus memenuhi kaidah statistika Bose-Einstein maupun Fermi-Dirac. Tetapi kedua jenis statistik tersebut sudah dibuktikan kebenarannya melalui berbagai eksperimen. Partikel-partikel yang memenuhi statistik Bose-Einstein disebut partikel-partikel boson yang memiliki fungsi gelombang yang simetri terhadap pertukaran sebarang dua partikelnya. Contohnya antara lain foton, partikel alfa dan atom Helium. Sedangkan partikel-partikel fermion adalah partikel-partikel yang memenuhi statistik Fermi-Dirac dan prinsip larangan Pauli, yaitu partikel-partikel yang fungsi gelombangnya antisimetri terhadap pertukaran sebarang dua partikel. Contohnya antara lain proton, neutron dan elektron.

Banyak fisikawan berusaha membuat formulasi statistik yang lebih umum dari jenis statistik yang telah ada, baik dengan membuat jenis statistik partikel yang baru, maupun dengan menggeneralisasi statistik Bose dan Fermi. Beberapa jenis statistik partikel selain Bose dan Fermi yang telah diperkenalkan antara lain *null statistics*, “*doubly-infinite*” *statistics*, *orthofermi statistics*, *hubbard statistics* dan lain-lain. Jenis statistik yang merupakan hasil generalisasi dari statistik yang telah ada antara lain *intermediate statistics*, *parastatistics*, *infinite statistics*, *paronic statistics*, *anyon statistics* dan lain-lain [Greenberg, 1993].

B. Rumusan Masalah

Perumusan masalah dalam kajian ini adalah mengetahui bentuk fungsi partisi Z dari sistem parafermi orde dua.

C. Tujuan Penelitian

Tujuan penulisan dalam kajian ini adalah mengetahui bentuk fungsi partisi Z sistem parafermi orde dua.

II. Metode Penelitian

Parastatistik pertama kali diperkenalkan oleh Green (1953), merupakan generalisasi pertama yang konsisten dari bentuk kuantum statistik Bose-Einstein (yang disebut

paraboson), dan statistik Fermi-Dirac (yang disebut parafermi). Parastatistik memenuhi relasi komutasi trilinear untuk operator kreasi dan anihilasi partikel, serta memenuhi kaidah dekomposisi gugus (*cluster decomposition*) [Hartle, dkk, 1970]. Karena hal ini, walaupun tidak ada indikasi bahwa partikel-partikel fundamental yang ada di alam saat ini memenuhi aturan parastatistik, tetapi teori ini tetap menarik untuk diselidiki lebih lanjut. Banyak fisikawan yang telah mencoba untuk mendapatkan besaran-besaran fisis yang terkait untuk sistem parastatistik, khususnya fungsi partisi kanonik lengkapnya (*Grand Canonical Partition Function*, GCPF). Dengan mengetahui GCPF akan dapat diketahui sifat-sifat termodinamika sistem parastatistik, sehingga dapat dijadikan dasar untuk mengklarifikasi apakah suatu sistem fisis memenuhi statistik ini atau tidak.

Tinjau suatu sistem partikel-partikel yang tidak saling berinteraksi, dengan Hamiltoniannya diberikan oleh

$$\hat{H} = \sum_{\alpha}^m E_{\alpha} \hat{N}_{\alpha}, \quad (1)$$

dengan E_{α} merupakan energi keadaan kuantum partikel tunggal $|i_{\alpha}\rangle$ dan \hat{N}_{α} merupakan operator yang mencacah banyaknya partikel yang berada pada $|i_{\alpha}\rangle$, sedangkan m menunjukkan jumlah aras energi yang berbeda (bisa merosot), dinotasikan sebagai $i_{\alpha} = 1, \dots, m$, dengan m dapat tak berhingga.

Secara umum, GCPF dapat ditulis sebagai [lihat misalnya: Greiner, dkk, (1997)]

$$Z(x_1, \dots, x_m) = \text{Tr} e^{\beta(\mu \hat{N} - \hat{H})} \quad (2)$$

dengan $x_i = e^{\beta(\mu - E_i)}$, $\beta = 1/kT$, T adalah temperatur mutlak, k adalah konstanta Boltzmann ($k = 1,38 \times 10^{-23}$ J/K) dan μ adalah potensial kimia. Sedangkan tracenya meliputi semua keadaan yang ada pada sistem yang ditinjau. GCPF untuk sistem partikel identik yang invarian terhadap permutasi partikel telah diformulasikan secara terpisah oleh Chaturvedi, dkk (1995), dalam bentuk jumlahan polinomial-polinomial Schur

$$Z(x_1, \dots, x_m) = \sum_{\lambda \in \Lambda} s_{\lambda}(x_1, \dots, x_m) \quad (3)$$

dengan Λ bergantung pada jenis statistik partikel yang ditinjau. Sedangkan polinomial

Schur, $s_\lambda(x_1, \dots, x_m)$ merupakan polinomial simetris.

GCPF untuk sistem parafermi berorde q , $Z_{(q)}^{pF}$, telah diperoleh berupa rasio dua determinan. Fermion berkorespondensi dengan $q = 1$ [Chaturvedi dan Srinivasan, 1997; Chaturvedi, dkk, 1995; Nelson 2004].

$$Z_{(p)}^{pF}(x_1, \dots, x_m) = \frac{|x_j^{m-i} - x_j^{m+p+i-1}|}{|x_j^{m-i} - x_j^{m+i-1}|} \quad (4)$$

$$Z_{(p,q)}(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m Z_{(p,q)}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m) \prod_{j \neq i} \frac{x_j}{(x_j - x_i)^+} x_1 \dots x_m Z_{(p,q-1)}(x_1, \dots, x_m) \quad (6)$$

Dalam penelitian ini fungsi partisi kanonik lengkap, Z , untuk sistem banyak partikel identik yang memenuhi aturan statistik parafermi orde dua dengan jumlah aras energi terbatas dan jarak antar energi yang sama. Sistem ini seperti sistem berpotensi osilator harmonik tetapi aras-aras energi tingginya diabaikan. Kaitan rekursi untuk $GCPF$ ini secara teoretis dapat digunakan sebagai dasar untuk menghitung besaran-besaran termodinamika lainnya, seperti jumlah total partikel N , entropi S , energi internal U dan panas jenis C_V .

III. PEMBAHASAN

Begitu juga GCPF untuk sistem paraboson orde p , $Z_{(p)}^{pB}$, yang juga berupa rasio dua determinan [Satriawan, 2002].

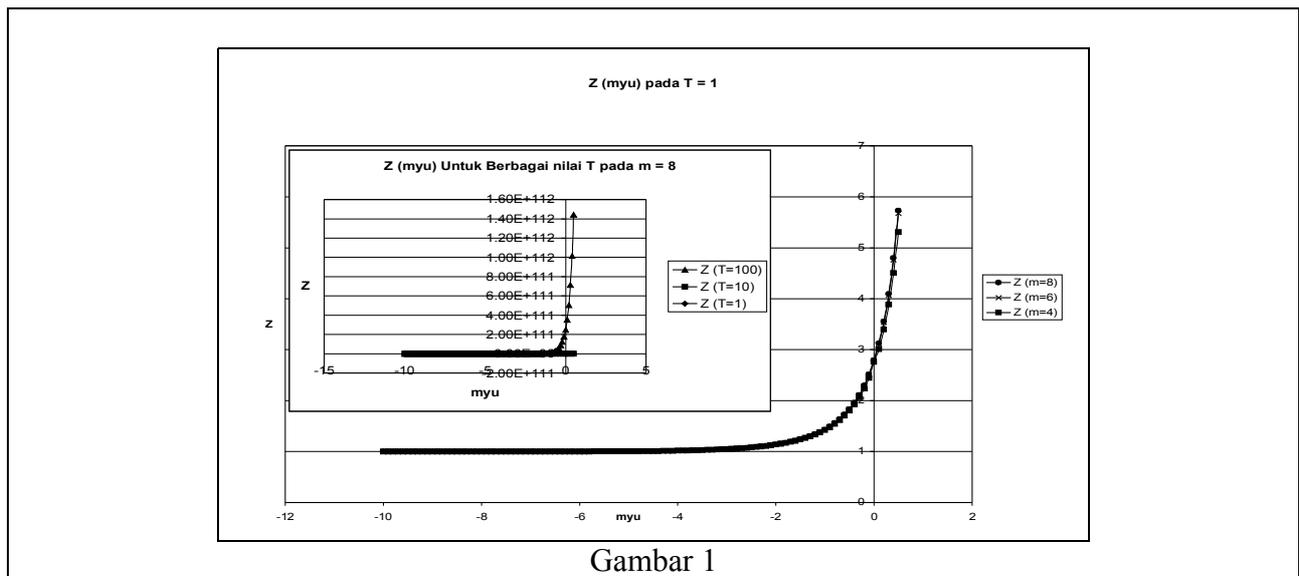
$$Z_{(p)}^{pB}(x_1, \dots, x_m) = \frac{|P_{(p)}(x_1, \dots, x_m)|}{|P_{(0)}(x_1, \dots, x_m)|} \quad (5)$$

dengan $|P_{(p)}(x_1, \dots, x_m)|$ adalah determinan suatu matriks. Boson berkorespondensi dengan $p = 1$.

Terdapat perumusan GCPF untuk model sistem paraboson orde p dan parafermi orde q dalam bentuk relasi rekursi. [Satriawan, 2004]:

Dari perhitungan komputasi, hasil grafik yang diperoleh untuk sistem parafermi orde dua adalah sebagai berikut:

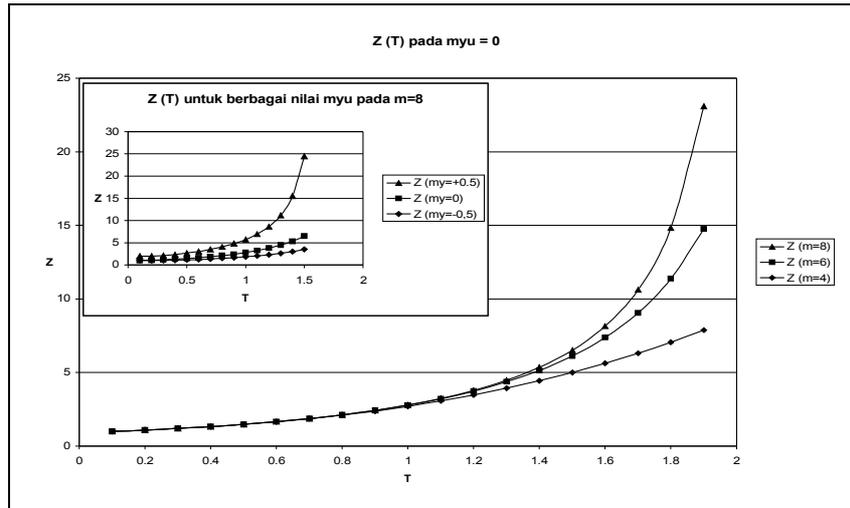
- (i) Nilai Z akan semakin tinggi bila T semakin besar untuk jumlah aras energi yang semakin banyak. Dari grafik ini terlihat adanya kecenderungan fungsi Z yang bersesuaian dengan perumusan terhadap perubahan nilai T yang dapat dipahami dari kaitan $Z(\mu, T) \propto \exp\{\beta(\mu - \varepsilon_i)\}$ dengan $\beta \propto 1/T$. Dari kaitan ini terlihat bahwa T semakin tinggi berakibat Z semakin tinggi tidak terbatas (lihat gambar 1).



Gambar 1

- (ii) Dari gambar 2, semakin banyak aras, nilai Z akan semakin tinggi. Hal ini sesuai dengan sifat umum dari fungsi Z , yaitu Z terkait

dengan $trace$ -nya (pers. 2), nilai Z akan semakin besar dengan semakin banyaknya jumlah aras.



Gambar 2

IV. SIMPULAN

Bentuk fungsi partisi kanonik lengkap, Z untuk sistem parafermi orde dua yang terkait dengan potensial kimia, μ , dan temperatur, T , bentuk diperoleh, yaitu nilai Z mengalami kenaikan seiring dengan kenaikan nilai potensial kimia, μ , dan temperatur, T (lihat gambar 1 dan 2). Fungsi Z untuk sistem parafermi orde dua ini lebih tinggi dari sistem parafermi orde satu (fermion).

V. SARAN

Program yang dibuat ini membutuhkan waktu yang lama untuk nilai aras energi m yang lebih banyak, sehingga diperlukan kajian yang lebih mendalam untuk mempercepat waktu komputasi.

REFERENSI

- Chaturvedi, S and V. Srinivasan.** (1997). *Grand Canonical Partition Functions for Multi Level Parafermi Systems of Any Order*, Phys. Lett. A-224, 249-252
- Chaturvedi, S., R. H. McKenzie, P. K. Panigrahi and V. Srinivasan.** (1995). *Equivalence of The Grand Canonical Partition Functions of Particles with Different Statistics*, Mod. Phys. Lett. A-12, 1095-1099
- Green, H. S.** (1953). *A Generalized Method of Quantization*, Phys. Rev. **90**, 270

- Greenberg, O. W.** (1993). *Quons, an Interpolation Between Bose and Fermi Oscillators*, arXiv:cond-mat/9301002v1
- Greiner, W., L. Neise, and H. Stöcker.** (1997). *Thermodynamics and Statistical Mechanics*. Heidelberg: Springer-Verlag
- Hartle, J. B., R. H. Stolt and J. R. Taylor.** (1970). *Paraparticles of Infinite Order*, Phys. Rev. D-2, 1759-1761
- Landau, D. P., and K. Binder.** (2005). *A Guide to Monte Carlo in Statistical Physics*. Cambridge: Cambridge University Press
- Nelson, C. A.** (2004). *Pairing Of Parafermions Of Order 2: Seniority Model*. J.Phys. A37 2497-2508
- Reichl, L. E.** (1998). *A Modern Course in Statistical Physics*. New York: John Wiley & Sons
- R. Yosi Aprian Sari** (2008). Artikel Kajian: *Fungsi-Fungsi Termodinamika Sistem Parafermi Orde Dua*. Semnas MIPA UNY
- R. Yosi Aprian Sari, Mirza Satriawan dan Pekik Nurwantoro.** (2005). *Fungsi-Fungsi Termodinamika Sederhana Sistem Paraboson Orde Dua*. Jurnal FORUM MIPA. Vol. 4 No. 1
- Satriawan, M.** (2004). *Grand Canonical Partition Function for Parastatistical Systems*. Physics Journal IPS Proceeding Supplement C8 0515
- Satriawan, M.** (2002). *Generalized Parastatistics Systems*; Dissertation, University of Illinois at Chicago