BAB VII
KONSEP KESTABILAN DAN KRITERIANYA

1. Konsep Kestabilan

Berangkat dari sistem linear di mana awal kondisi mantapnya memiliki kesalahan nol dan akan tidak sama dengan nol bila sistem mendapat sejumlah gangguan dengan keluaran co(t). jika sistem tersebut terkena gangguan pada saat $t = -t_1$ ($t_1 > 0$), yang dapat beraksi sampai waktu tak terhingga dan selanjutnya berhenti pada t = 0, maka muncul pertanyaan: "Apakah sistem dapat kembali ke respon aslinya (sebelum terjadi gangguan), yaitu co(t)?" Sebagai jawaban atas hal tersebut kembali pada masalah kestabilan.

Kini akan kita buktikan seberapa besar perbedaan respon setelah dan sebelum ada gangguan: [c(t) – co(t)] hingga t tak terhingga. Respon untuk sistem linear (superposisi):

$$c(t) = co(t) + cd(t) \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \text{(VII-1)}$$

Disini cd(t) adalah respon dari sistem yang terkena gangguan, dengan demikian persamaan (VII-1) dapat dinyatakan sebagai:

$$\lim_{t\to\infty} [c(t) - co(t)] = \lim_{t\to\infty} cd(t) = \dots\dots\dots ?$$

Untuk menjawab pertanyaan mengenai kestabilan sistem tersebut perlu melakukan pengujian atau pembuktian, yaitu dengan membandingkan respon keluaran setelah terjadi gangguan terhadap respon keluaran aslinya. Dalam hal ini ada 3(tiga) jawaban pokok, yaitu:

(i) $\lim_{t\to\infty} cd(t) = 0$

(ii) $\lim_{t\to\infty} cd(t) = \pm\infty$ (fungsi osilasi amplitudo tinggi)

(iii) $\lim_{t\to\infty} cd(t) = Ko$; (suatu konstanta)

$= 0(t)$; (osilasi dengan amplitude takterhingga)

$= Ko + 0(t)$

Jawaban tersebut memudahkan kita untuk mencapai stabilitas sistem yaitu:

- **Stabil :** Jika respon sistem terhadap pengganggunya berlangsung cepat, dan akhirnya hilang.

- **Tidak stabil :** Jika respon sistem terhadap pengganggunya hilang menjadi amplitude tak terhingga atau osilasi menerus maupun kombinasinya ($t \rightarrow \sim$).
- **Stabil terbatas :** Jika respon sistem terhadap pengganggunya berlangsung sesaat cepat, dan akhirnya kembali konstan.

Bagian lain dari konsep kestabilan adalah berupa sistem linear yang dikarakteristikan sebagai berikut:

- **Stabil absolute :** Apabila harga dari semua parameter sistem stabil.
- **Stabil kondisional :** Apabila harga dari semua parameter sistem konstan/stabil pada daerah kurva/lengkung tertentu.

Seandainya sinyal impulsa dikenakan pada sistem tersebut (saat aktif), maka respon yang terjadi dari sistem tersebut adalah:

$$cd(t) = \zeta^{1} \; T(s) \; ; \text{ dimana } T(s) = \text{fungsi alih sistem.}$$

Sistem dimaksud selengkapnya dapat ditulis sebagai berikut:

$$T(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + bm}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + an} \; ; \text{ dimana } m > n \; \ldots\ldots \quad \text{(VII-2)}$$

Dengan demikian cd(t) yang terjadi akibat sinyal gangguan berupa impulsa alami ini bergantung pada fungsi alih dari sistem, yang dalam hal ini berupa akar kuadrat dari persamaan karakteristik sistem $q(s) = 0$. Akar-akar ini bisa berharga riil maupun conjugate kompleks dan bisa juga mempunyai banyak variasi orde. Respon alami dari sistem akan dibantu melalui sejumlah tipe dari akar-akar sebagaimana dimuat pada tabel berikut ini.

Tabel VII-1. Respon yang dapat diberikan oleh beberapa tipe akar.

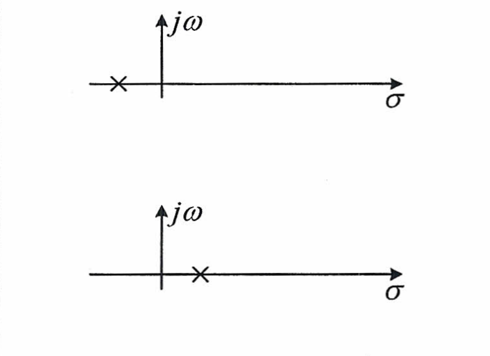
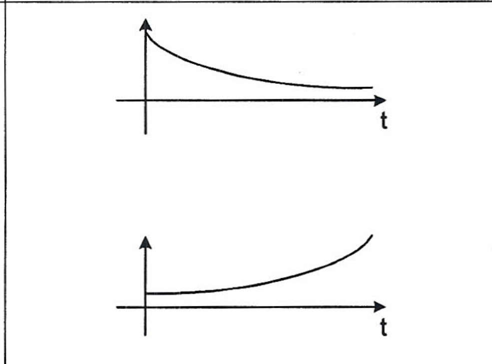
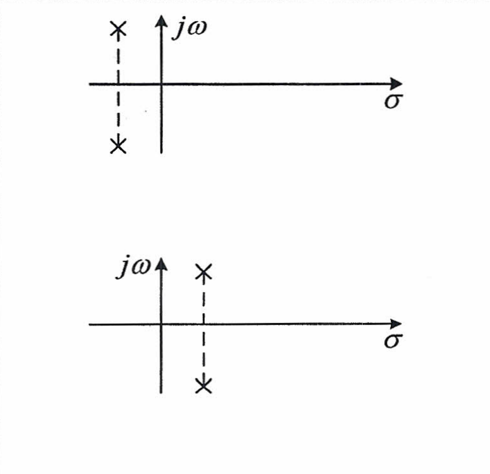
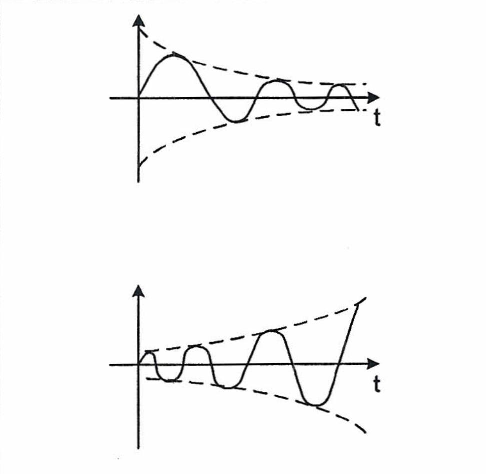
Tipe Akar	Respon alami yang diberikan
1. Akar tunggal pada bidang $s = \sigma$	$Ae^{\sigma t}$ . . . . (VII-1a)
2. Akar-akar kelipatan k pada bidang $s = \sigma$	$(A_1+A_2t+ \ldots +A_kt^{k-1})\, e^{\sigma t}$ . . . . (VII-1b)
3. Akar conjugate kompleks pada bidang $s = \sigma \pm j\omega$	$Ae^{\sigma t} \sin(\omega t+\beta)$ . . . . (VII-1c)
4. Akar conjugate kompleks kelipatan k pada $s = \sigma \pm j\omega$	$[A_1 \sin(\omega t+\beta_1)+A_2t \sin(\omega t+\beta_2)+ \ldots\ldots$ $\ldots +A_kt^{k-1}\sin(\omega t-\beta_k)\, e^{\sigma t}$ . . . . (VII-1d)

(bersambung)

(sambungan)

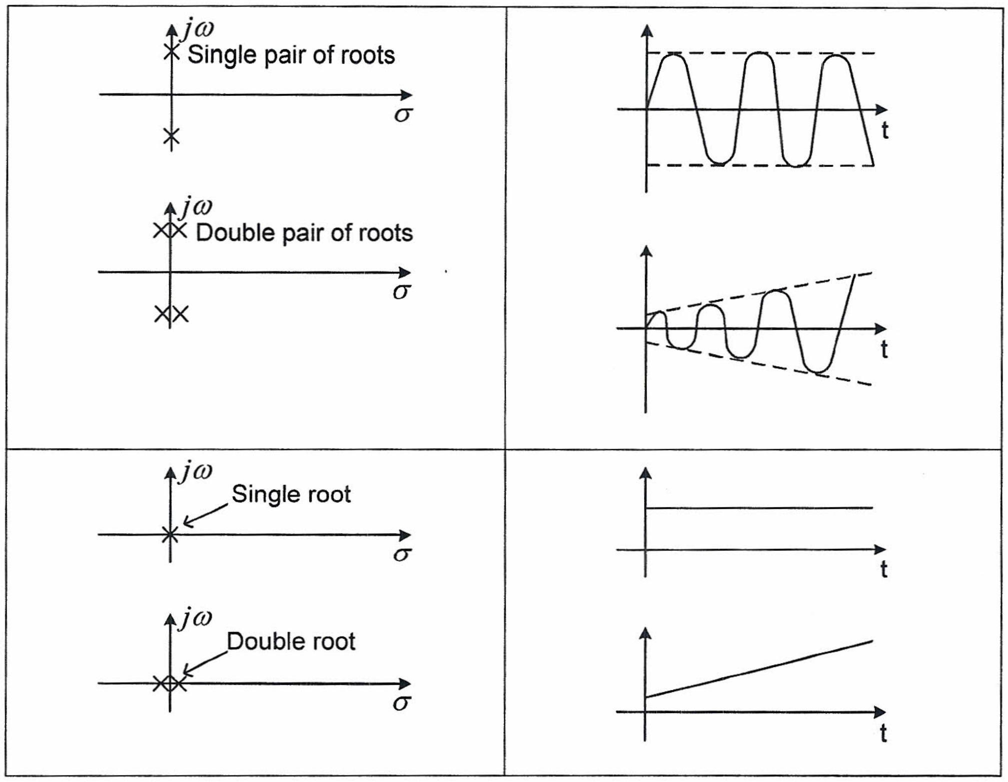
5. Akar conjugate kompleks tunggal pada sumbu jω (pada s = σ ± jω)	Asin(ωt+β) . . . . (VII-1e)
6. Akar conjugate kompleks dari kelipatan k pada sumbu jω	[A_1 sin(ωt+β_1)+A_2 sin(ωt+β_2)+ . . . . +$A_k t^{k-1}$sin(ωt+β_k) . . . . . . (VII-1f)
7. Akar tunggal pada titik awal (s = 0)	A . . . . (VII-1g)
8. Akar-akar kelipatan k pada titik awal (s = 0)	(A_1+A_2t+ . . . +$A_k t^{k-1}$) . . . .(VII-1h)

Respon-respon (1) sampai dengan (8) sebagaimana dimuat pada Tabel VII-1 dapat pula diilustrasikan melalui kurva respon sebagaimana ditunjukan pada gambar berikut ini:

Roots in the s-plane	Corresponding impulse response
	
	

(bersambung)

(sambungan)



Gambar. VII. 1. Respon sistem yang diberikan oleh beberapa tipe akar.

Dari Tabel VII-1 tadi dapat diberikan catatan khusus, dalam hal ini tipe akar (1) sampai dengan (8) yang memberikan respon dengan faktor kelipatan $e^{\sigma t}$ adalah sebagi berikut:

- ❖ Bila $\sigma < 0$, akar-akarnya mempunyai harga riil negatif (kurva respon linear).
- ❖ Bila $\sigma > 0$, akar-akarnya mempunyai harga riil positif (kurva respon linear).
- ❖ Bila akar-akar dari sumbu $j\omega$ dengan kelipatan dua atau lebih, akan menghasilkan respon dengan amplitudo konstan atau amplitudo berosilasi konstan.
- ❖ Bila akar tunggal pada titik awal atau tanpa kelipatan k pada sumbu $j\omega$, akan memberikan respon dengan amplitudo konstan atau amplitudo berosilasi konstan.

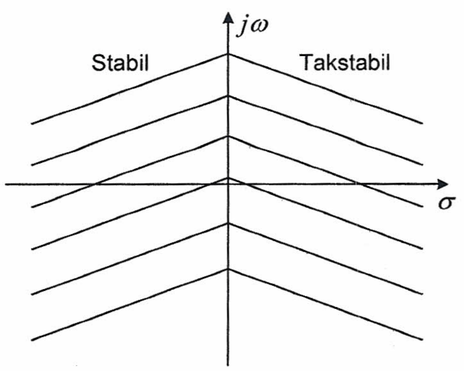
Dari catatan khusus di atas tadi dapat ditarik kesimpulan umum unuk kestabilan suatu sistem sebagai berikut:

(1) Bila semua akar dari persamaan karakteristik sistem mempunyai harga riil negatif, maka sistem tersebut stabil.

(2) Bila terdapat akar dari persamaan karakteristik sistem mempunyai harga riil positif dan terjadi pengulangan akar pada sumbu $j\omega$, maka sistem tersebut tidak stabil.

(3) Bila kondisi (1) di atas mantap dari satu akar atau lebih yang tidak terulang pada sumbu $j\omega$, maka sistem disebut stabil terbatas.

Daerah atau lokasi kedudukan akar-akar dari ketiga kondisi (stabil, tidak stabil, dan stabil terbatas) tersebut dapat dilukiskan seperti gambar berikut ini.



Dari uraian di atas, bahwa stabilitas suatu sistem dapat dikembangkan dengan cara menentukan akar-akar dari persamaan karakteristiknya. Kondisi stabil dari sistem linear, semua koefisien persamaan karakteristiknya dinyatakan dengan $q(s) = 0$ (riil dan bertanda sama).

Gambar VII.2. Daerah lokasi akar dari suatu sistem.

Secara utuh persamaan karakteristik sistem tadi dapat ditulis:

$$q(s) = a_0s^n + a_1s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n = 0; \text{ dimana } a_0 > 0 \ldots\ldots \quad \text{(VII-3)}$$

Catatan : $a_0 > 0$, pasti positif

$a_0 < 0$, akan positif bila dikalikan (-1)

Koefisien positif dari persamaan karakteristik orde satu, orde dua, dan orde tiga misalnya, dapat dinyatakan:

- Orde satu: $a_0s + a_1 = 0$; di sini hanya ada satu akar, yaitu $s_1 = -\dfrac{a_1}{a_0}$ (VII-4)
- Orde dua: $a_0s^2 + a_1s + a_2 = 0$; akar-akarnya adalah:

$$s_1, s_2 = \left[\frac{-a_1 \pm \sqrt{\left(a_1^2 - 4a_0a_2\right)}}{2a_0}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(VII-5)}$$

❖ Orde tiga: $s^3 + s^2 + 2s + 8 = 0$; dapat dipecah atas faktor-faktor, yaitu:

$$(s+2)\left[s - 0{,}5 + j\frac{\sqrt{15}}{2}\right]\left[s - 0{,}5 - j\frac{\sqrt{15}}{2}\right] = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(VII-6)}$$

Di atas tampak bahwa harga riil dari akar-akar kompleks adalah positif, tapi sistem tersebut menyatakan kondisi yang tidak stabil. Untuk sistem berorde tiga atau lebih ini disebut orde tinggi dan pemecahan atau analisisnya akan cocok dan cepat bila memakai software, "Matlab" atau pengembangannya seperti "Simuling". Langkah awal kearah itu dikembangkan melalui metode "investigasi" kondisi stabilitas sistem oleh "Hurwitz" dan "Routh". Kriteria Hurwitz penekanannya pada aspek determinan, sedang Routh pada aspek formulasi runtun (array).

2. Kriteria Stabilitas Hurwitz

Persamaan karakteristik sistem orde ke-n (tinggi), dinyatakan memakai formulasi umum :

$$q(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(VII-7)}$$

Susunan determinan dari Hurwitz tersebut adalah:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{-------} & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \text{-------} & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \text{-------} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{-------} & a_{n+1} & a_n \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots \quad \text{(VII-8)}$$

Catatan: koefisien-koefisien yang mempunyai harga lebih besar dari n atau bertanda negatif harus diganti dengan nol.

Dengan kata lain, kondisi penting untuk stabilitas ini dinyatakan:

$$\Delta 1 = a_1 > 0;$$

$$\Delta 2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0;$$

$$\Delta 3 = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & a_0 & 0 & a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_3 & a_2 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_5 & a_4 \end{array}\right| > 0$$

$\Delta n =$ disusun seluruhnya seperti persamaan (VII-8)>0

Apabila $\Delta_{n-1} = 0$, maka sistem tersebut adalah stabil terbatas.

Contoh: Misal orde-4 dengan persamaan karakteristik sistem sebagai berikut:

$$s^4 + 8s^3 + 18s^2 + 16s + 5 = 0$$

Susunan determinan menurut metode kriteria Hurwitz adalah:

$$\begin{array}{c} a_1 \\ a_3 \\ a_5 \\ a_7 \end{array} \left|\begin{array}{cccc} 8 & 1 & 0 & 0 \\ 16 & 18 & 8 & 1 \\ 0 & 5 & 16 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right|$$

Oleh karena itu,

$$\Delta 1 = 8 > 0;$$

$$\Delta 2 = \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 16 & 18 \end{vmatrix} = 128 > 0;$$

$$\Delta 3 = \left|\begin{array}{ccc|cc} 8 & 1 & 0 & 8 & 1 \\ 16 & 18 & 8 & 16 & 18 \\ 0 & 5 & 16 & 0 & 5 \end{array}\right| = 1728 > 0$$

$$\Delta 4 = \left|\begin{array}{cccc|cc} 8 & 1 & 0 & 0 & 8 & 1 \\ 16 & 18 & 8 & 1 & 16 & 18 \\ 0 & 5 & 16 & 18 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right| = 5\Delta 3 > 0$$

Catatan : Dari hasil di atas dapat disimpulkan sistem adalah stabil.

3. Kriteria Kestabilan Routh

Kriteria tersebut berdasarkan pada koefisien-koefisien persamaan karakteristik sistem orde yang dituangkan ke dalam bentuk runtun (array), yang lazim disebut "Runtun-Routh" (Routh Array) dengan formulasi umum:

$$q(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_{n-1} s + a_n = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(VII-9)}$$

Persamaan umum (VII-9) di atas selanjutnya disusun sesuai metode Runtun-Routh sebagai begikut:

$$\begin{array}{c|ccccc}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & - \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & - & - \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & - & - \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & - & - \\
s^{n-4} & d_1 & d_2 & - & - & - \\
\vdots & \vdots & & & & \\
s^2 & e_1 & a_n & - & - & - \\
s^1 & f_1 & - & - & - & - \\
s^0 & a_n & - & - & - & -
\end{array}$$

Koefisien $b_1, b_2, \ldots$, dan seterusnya dapat dievaluasi sebagai berikut:

$b_1 = (a_1a_2 - a_0a_3)/a_1;$

$b_2 = (a_1a_4 - a_0a_5)/a_1;$

$b_4 = 0;$

$c_1 = (b_1a_3 - a_1b_2)/b_1;$

$c_2 = (b_1a_5 - a_1b_3)/b_1;$

$d_1 = (c_1b_2 - b_1c_2)/c_1;$

$d_2 = (c_1b_3 - b_1c_3)/c_1;$

Kriteria kestabilan Routh identik dengan kriteria dari Hurwitz di atas, yaitu:

$$b_1 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{\Delta 2}{\Delta 1}$$

Demikian pula untuk

$c_1 = {}^{\Delta 3}\!/\!_{\Delta 2};$

$d_1 = {}^{\Delta 4}\!/\!_{\Delta 3};$

Jadi untuk contoh soal di atas $q(s) = (s^4 + 8s^3 + 18s^2 + 16s + 5 = 0)$, dapat diselesaikan sebagai berikut:

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 18 & 5 \\ s^3 & 8 & 16 & 0 \\ s^2 & \dfrac{(8\times18)-(1\times16)}{8} = 16 & \dfrac{(8\times5)-(1\times0)}{8} = 5 & - \\ s^1 & \dfrac{(16\times16)-(8\times5)}{16} = 13{,}5 & 0 & - \\ s^0 & 5 & - & - \end{array}$$

Catatan: Pada kolom pertama semua elemennya positif, maka sistem tersebut adalah stabil.

Contoh: Persamaan karakteristik sistem:

$3s^4 + 10s^3 + 5s^2 + 5s + 2 = 0$

Selesaikan soal tersebut dengan cara seperti di atas!

Dengan metode runtun Routh didapat:

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 3 & 5 & 2 \\ s^3 & 10 & 5 & - \\ s^3 & 2 & 1 & - \\ s^2 & \dfrac{2\times5-3\times1}{2} = 3{,}5 & \dfrac{2\times2-0\times3}{2} = 2 & - \\ s^1 & \dfrac{3{,}5\times1-2\times2}{3{,}5} = \dfrac{0{,}5}{3{,}5} & - & - \\ s^0 & 2 & - & - \end{array}$$

Untuk menyederhanakan pengerjaan baris ketiga (s^3) dari runtun Routh telah dimodifikasi dengan membagi 5 secara langsung. Modifikasi (s^3) ini digunakan untuk melengkapi proses dari formasi runtun.

Pengujian pada kolom pertama dijumpai 2 buah perubahan tanda, yaitu (dari 3,5 ke -0,5/3,5 dan dari -0,5/3,5 ke 2). Dengan demikian sistem tersebut tidak stabil (ada 2 pole separuh kuadran kanan bidang –s). Dapat dicatat bahwa kriteria kestabilan Routh hanya memberikan sejumlah akar pada separuh bagian kanan bidang –s. Dengan kata lain tak ada informasi nilai dari akar-akar secara jelas yang membedakan antara akar-akar yang riil dan kompleks.

4. Kasus Khusus.

Pada pemakaian kriteria kestabilan Routh, kadang-kadang muncul kesukaran-kesukaran yang mengkibatkan diperlukannya test/uji khusus. Kesukaran-kesukaran yang dijumpai umumnya seperti dijelaskan berikut ini.

a. Apabila batas awal pada setiap runtun Routh = nol, padahal batas akhirnya walau kecil mempunyai batas yang tidak sama dengan nol. Hal inilah yang akan perlunya pemecahan "uji Routh" yang tak terhingga. Kesukaran tersebut dapat ditempuh dengan menggunakan metode berikut:

(1) Gantilah bilangan positif e (kecil) dengan nol, dilanjutkan dengan mengevaluasi baris akhir dari runtun Routh.

(2) Ubahlah persamaan karakteristik sistem yang asli (semula)dengan mengganti s dengan $1/z$. Gunakan uji-Routh dalam penggantin baris-baris dari z. Banyaknya akar-akar dari z yang positif dan riil adalah sama dengan banyaknya akar-akar dari s yang positif dan riil pula. Metode penyesuaian ini adalah yang paling banyak digunakan, namun tidak berarti berlaku untuk semua kasus.

Contoh: Persamaan karakteristik sistem dinyatakan sebagai berikut:

$$s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 3s + 5 = 0$$

Sesuai metode runtun Routh dapat diselesaikan sebagai berikut:

s^5	1	2	3
s^4	1	2	5
s^3	e	-2	—
s^2	$\dfrac{2e+2}{e} = 3{,}5$	5	–
s^1	$\dfrac{-4-4e-5e^2}{2e+2} = -2$	–	–
s^0	5	–	–

- Dari runtun Routhdi atas, tampak bahwa elemen pertama pada baris ketiga = 0. Penggantian bilangan e merupakan bilangan kecil bertanda positif.

- Elemen pertama pada baris ke empat menjadi (2e + e)/e, yang bertanda positif, yakni e mendekati nol.
- Elemen pertama pada baris ke lima adalah ($-4e - 4 - 5e^2$)/(2e + 2), yang mempunyai harga akhir -2, yakni e mendekati nol.
- Pengujian pertama dari runtun-Routh ini diperoleh dua buah perubahan tanda, oleh sebab itu sistem tersebut tidak stabil, dalam hal ini mempunyai dua buah pole pada separuh bagian kanan bidang –s.

Sekarang marilah kita perhatikan pemakaian metode kedua untuk mengatasi kesukaran yang disebabkan oleh adanya harga nol pada kolom pertama dari runtun-Routh. Dengan cara mengganti s dengan $1/z$ pada persamaan karakteristik sistem yang disusun ulang sebagai berikut:

$$5z^5 + 3z^4 + 2z^3 + 2z^2 + z + 1 = 0$$

Runtun-Routh untuk persamaan karakteristik tersebut adalah:

$$\begin{array}{c|ccc} z^5 & 5 & 2 & 1 \\ z^4 & 3 & 2 & 1 \\ z^3 & -4/3 & -2/3 & - \\ z^5 & 1/2 & 1 & - \\ z^1 & 2 & - & - \\ z^0 & 1 & - & - \end{array}$$

Ada dua buah perubahan tanda pada kolom pertama dari runtun-Routh yang mengisyaratkan kita bahwa ada dua buah akar pada separuh bagian kanan dari bidang -z. oleh karena itu jumlah dari akar-akar -s pada separuh bagian kanan bidang –s yang jumlahnya juga dua.

b. Apabila semua elemen runtun-Routh pada setiap barisnya bernilai nol, kondisi ini mengindikasikan bahwa terdapat akar-akar yang kedudukannya simetris pada bidang –s (akar nyata dengan tanda berlawanan dan atau akar-akar conjugate pada sumbu imajiner dan atau akar-akar conjugate kompleks berbentuk kuadrat/persegi pada bidang –s). polinomial yang koefisien-koefisiennya berupa elemen-elemen baris seperti ditunjukan di muka yang setiap kondisinya terdapat niali nol, disebut "polinomial Bantu". Polinomial ini akan menentukan jumlajah akar maupun lokasi akar suatu persamaan karakteristik sistem yang sama-sama berkedudukan simetris pada bidang –s. Susunan dari polinomial bantu ini selalu genap.

Dikarenakan dalam runtun-Routh terdapat baris yang bernilai nol maka iji Routh dapat dilakukan. Cara mengatasi situasi ini yaitu dengan mengganti baris-baris yang bernilai nol dengan koefisien-koefisien baris dari polinomial yang dihasilkan melalui derivatif pertama polinomial gantinya. Berikut ini adlah contoh prosedur pemecahan mode kesukaran kedua.

Contoh: Persamaan karaktersistik sistem (orde enam) adalah sebagai berikut:

$$s^6 + 2s^5 + 8s^4 + 12s^3 + 20s^2 + 16s + 16 = 0$$

Runtun-Routh dari persamaan di atas adalah

s^6	1	8	20	16
s^5	2	12	16	–
s^5	1	6	8	–
s^4	2	12	16	–
s^4	1	6	8	–
s^3	0	0	–	–

Mengingat nilai-nilai pada baris s^3 semuanya = nol, maka perlu pemecahan lanjut dngan uji Routh. Polinomial bantunya dibentuk dari koefisien-koefisien baris s^4 yang diberikan oleh:

$$A(s) = s^4 + 6s^2 + 8$$

Derivative polinomialnya (dengan memperhatikan s) adalah:

$$\frac{d}{ds}A(s) = 4s^3 + 12s$$

Kini nilai-nilai nol pada baris s^3 digantikan oleh koefisien-koefisien 4 dan 12, sehingga runtun-Routh selanjutnya dapat disusun sebagai berikut:

s^6	1	8	20	16
s^5	1	6	8	–
s^4	1	6	8	–
s^3	4	12	–	–
s^3	1	3	–	–
s^2	3	8	–	–
s^1	$1/3$	–	–	–
s^0	8	–	–	–

Dari runtun-Routh pengganti disamping tampak bahwa tidak ada perubahan tanda pada kolom pertama. Akar-akar polinomial Bantu yang akan diselesaikan adalah:

$$s^4 + 6s^2 + 8 = 0$$

Didapat akar-akarnya yaitu:

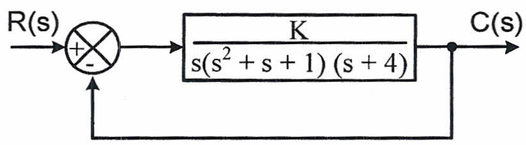
$$s = \pm j\sqrt{2} \text{ dan } s = \pm j2$$

Kedua akar tersebut juga merupakan akar dari persamaan karakteristik sistem yang asli (semula).

Mengingat tidak adanya perubahan tanda pada runtun-Routh yang baru (pengganti) yang dibentuk melalui polinomial bantu maka dapat disimpulkan bahwa tidak terdapat akar persamaan karakteristik yang bertempat kedudukan pada bagian positif dan nyata (riil). Dengan demikian sistem tersebut berkondisi stabil terbatas.

5. Aplikasi Kriteria Kestabilan Routh Pada Sistem Linear Berumpan-Balik.

Kriteria ketsabilan Routh sering digunakan untuk determinasi sistem kendali linear berumpan-balik. Untuk sebuah sistem loop tertutup berumpan-balik (lihat gambar), dapat ditentukan rentang konstanta K, dimana sistem tersebut berkondisi stabil.



Gambar VII. 3. Diagram blok sistem kendali loop tertutup.

Fungsi alih sistem loop tertutup ini dapat ditulis:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s^2 + s+1)(s+4) + K}$$

Adapun persamaan karakteristik sistemnya adalah:

$$S(s^2 + s + 1)\ (s + 4+ + K = 0$$

Atau

$$S^4 + 5s^3 + 5s^2 + 4s + K = 0$$

Runtun-Routh dari persamaan tersebut dapat disusun:

$$\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 5 & K \\
s^3 & 5 & 4 & - \\
s^2 & 21/5 & K & - \\
s^1 & \left(\frac{84}{5} - 5K\right)\Big/\frac{21}{5} & - & - \\
s^0 & K & - & -
\end{array}$$

Untuk sebuah sistem yang stabil, tanda dari setiap elemen pada kolom pertama runtun-Routh diharapkan semuanya positif. Kondisi sistem yang stabil harus memenuhi syarat, yaitu: $K > 0$ dan $\left(\frac{84}{5} - 5K\right) \rangle 0$ dengan demikian untuk kondisi yang stabil ini K diharapkan berada pada rentang: $84/5 \rangle K \rangle 0$

Apabila K = $^{84}\!/_{5}$, akan berharga nol pada baris ke-4 dari runtun-Routh atau dengan kata lain K = $^{84}\!/_{5}$ ini akan menyebabkan dipertahankanya osilasi diri menerus dalam sistem loop tertutup. Untuk K = $^{84}\!/_{5}$ khusus polinomial bantu diberikan oleh koefisien-koefisien baris ke-3, yaitu:

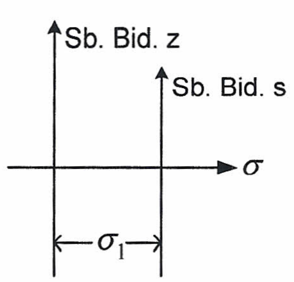
$$\left(\frac{21}{5}\right)s^2 + {}^{84}\!/_{5} = 0\text{; yang memberikan akar-akar sebagai:}$$

$$s = \pm j\sqrt{\left({}^{4}\!/_{5}\right)} = \pm j\omega_0$$

Oleh sebab itu frekuensi osilasi diri (osilasi menerus) berada pada sekitar $K = \frac{84}{25}$ adalah $\sqrt{\left({}^{4}\!/_{5}\right)}$ rad/sec.

6. Analisis Kestabilan Relatif

Suatu sistem dinyatakan berkondisi stabil, apabila kita dapat menentukan kestabilan relatif secara kuantitatif setelah menentukan tempat kedudukan akar-akar persamaan karakteristik sistemnya yang cenderung tetap. Waktu penetapan (setting time) akan berbanding terbalik terhadap harga riil dari akar-akar yang dominant tetap tadi. Kestabilan relatif dapat ditentukan oleh semua akar-akar yang diperlukan dari persamaan karakteristik yang lebih negatif dari pada harga yang telah ditentukan. Misalnya, kedudukan akar harus berada pada bidang s = $-\sigma(\sigma\rangle 0)$. Persamaan karakteristik sistem yang ditinjau ini selanjutnya dimodifikasi dengan cara menukar bidang –s yang asli (awal) menjadi s = $-\sigma_1$, diganti s = z - σ_1 (lihat gambar).



Jika persamaan karakteristik sistem yang baru pada sb. z benar-benar cocok (memenuhi kriteria) dari Routh, hal ini berarti bahwa akar-akar dari persamaan karakteristik yang asli (awal) adalah lebih negative dari $-\sigma_1$.

Gambar. VII. 4. Pergeseran/penggantian sumbu bidang s menjadi sumbu z

Contoh: Persamaan karakteristik sistem orde tiga adalah sebagai berikut:

$$s^3 + 7s^2 + 25s + 29 = 0$$

Dengan menggunakan metoda uji-Routh akan tampak bahwa sistem tersebut memiliki akar-akar yang bertempat kedudukan pada separoh bagian kiri bidang – s. Marilah kita uji bahwa semua kar dari persamaan karakteristik sistem mempunyai harga riil yang lebih negatif dari -1.

Gantilah s = -1 (yang asli dari persamaan karakteristik di atas dengan s = z – 1, maka persamaan karakteristik sistem yang baru (variabel-z), adalah

$$z^3 + 4z^2 + 14z + 20 = 0$$

Runtun-Routh dapat dibuat/disusun sebagai berikut:

$$\begin{array}{c|ccc} z^3 & 1 & 14 & - \\ z^5 & 4 & 20 & - \\ z^1 & 9 & - & - \\ z^0 & 20 & - & - \end{array}$$

Tanda dari semua elemen pada kolom pertama dari runtun-Routh adalah positif. Akar-akar persamaan karakteristik dalam z bertempak kedudukan pada separuh bagian kiri bidang-z, yang berarti bahwa semua kar dari persamaan karakteristik asli dalam –s bertempat kedudukan di bagian kiri dari s = -1 pada bidang-s.

Soal-Soal Latihan.

1. Carilah akar-akar dari persamaan karakteristik sitem, dimana fungsi alih loop terbukanya seperti karakteristik di bawah. Tentukan tempat kedudukan akar-akar tersebut pada bidang–s serta nyatakan kondisi kestabilan dari setiap sistemnya.

   a. $G(s)H(s) = \dfrac{1}{(s+2)(s+4)}$

   b. $G(s)H(s) = \dfrac{5(s+3)}{s(s+3)(s+84)}$

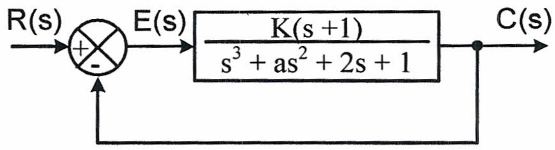
   c. $G(s)H(s) = \dfrac{9}{s^2(s+2)}$

2. Persamaan karakteristik sistem servo dinyatakan sebagai berikut:

   $$a_0s^4 + a_1s^3 + a_2s^2 + a_3s + a_4 = 0$$

   tentukan kondisi konstanta K yang mantap dari persamaan karakteristik jika dikehendaki bahwa sistem tersebut berkondisi stabil.

3. Suatu sistem berisolasi dengan frekuensi = ω, jika ia mempunyai pole pada s = $\pm j\omega$ dan tidak ada pole pada separuh bagian kanan bidang-s. tentukan harga K dan a, agar sistem dengan diagram blok seperti di bawah berosilasi pada frekuensi 2 rad/sec.



4. Tentukan satu diantara tetapan waktu yang terbesar dari persamaan karakteristik sistem di bawah ini. Apakah lebihbesar, lebih kecil, atau sama dengan 1 detik? Persamaan dimaksud adalah: $s^3 + 4s^2 + 6s + 4 = 0$

5. Tentukan rentang harga K (K>0) yang persamaan karakteristik sistemnya sebagai: $s^3 + 3(k + 1)s^2 + (7k + 5)s + (4k + 7) = 0$, mempunyai akar-akar yang lebih negative daripada s = -1

DARTAR PUSTAKA

Benjamin, E. Deroy. (1966). Automatic Control Theory. New York : John Wiley & Sons, Inc.

Dubey, G. K. at. All. (1990). Thyristorised Power Controllers. New Delhi : Willey Eastern Limited.

Foqiel, M. (1987). The Essentials of Automatic Control System/Robotics. New York : Research and Education Association (REA).

Edy Leksono, Katsuhika Ogata. (1985). Teknik Kontrol Automatik I, (Sistem Pengaturan). Jakarta : Erlangga.

Morris, Noel M. (1974). Control Engineering. London : McGraw-Hill Book Company (UK) Limited.

Nagrath, I. J., Gopal, M. (1978). Control System Engineering. New Delhi : Willey Eastern Limited.

Pericles, Emanuel. (1986). Introduction to Feedback Control System. Tokyo : McGraw-Hill Book Company.

William, David Cooper. (1976). Electronic Instrumentation and Measurement Techniques. New Delhi : Prentice Hall of India. Private Ltd.

William, L. McNamee, Charles Schuler, A. (1986). Industrial Electronic and Robotics. New York : McGraw-Hill International Editor.