# MODUL PEMBELAJARAN I

| V E K T O R | **Kompetensi Dasar :**<br>**1. Mahasiswa mampu memahami perbedaan besaran vektor dan skalar serta memberikan contoh-contohnya dalam kehidupan sehari-hari,**<br>**2. Mahasiswa mampu melakukan operasi penjumlahan dan perkalian vektor serta memahami aplikasinya dalam menyelesaikan berbagai persoalan fisika.** |
|---|---|

## 1. SKALAR dan VEKTOR

Beberapa besaran fisika seperti massa, waktu dan suhu sudah cukup jika dinyatakan dengan suatu bilangan dan sebuah satuan untuk menyatakan besarnya nilai besaran tersebut. Tetapi banyak besaran lain yang harus menyertakan persoalan ***arah*** untuk mendeskripsikan secara lengkap makna besaran tersebut. Sebagai misal kecepatan sebuah kereta api, untuk mendeskripsikan gerak tersebut, kita belum cukup hanya mengatakan seberapa cepat kereta api berjalan, namun pada saat bersamaan kita harus mengatakan ke arah mana kereta bergerak. Tanpa menyebutkan arah gerak kereta, kita belum memperoleh informasi yang bermakna tentang gerak tersebut.

Berdasarkan informasi di atas, besaran-besaran fisika jika ditinjau dari pengaruh arah terhadap besaran tersebut dapat dikelompokkan menjadi :

a. Besaran Skalar : besaran yang cukup dinyatakan besarnya saja (tidak tergantung pada arah). Misalnya : massa, waktu, suhu dsb.
b. Besaran Vektor : besaran yang tergantung pada arah. Misalnya : kecepatan, gaya, momentum dsb.

**Tugas 1**

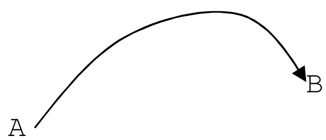
Sebutkan setidaknya sepuluh besaran fisika, kemudian kelompokan besaran-besaran tersebut dalam kategori besaran skalar atau besaran vektor !

| No | Besaran | Kategori | |
|---|---|---|---|
| | | Skalar | Vektor |
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |
| 5 | | | |
| 6 | | | |
| 7 | | | |
| 8 | | | |
| 9 | | | |
| 10 | | | |
| 11 | | | |

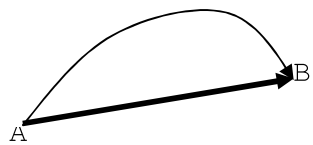
## 2. NOTASI VEKTOR

Kita akan mulai mendalami vektor dari sebuah besaran vektor yang paling sederhana, yaitu perpindahan (*dicplacment*). Perpindahan didefinisikan sebagai perubahan posisi dari suatu titik. Deskripsi berikut ini akan lebih memperjelas pemahaman kita tentang vektor.

Sebuah benda bergerak dari titik A ke titik B melewati sebuah lintasan lengkung (gambar 1.2a). Vektor perpindahan gerak tersebut ditunjukan oleh garis terpendek (lurus) dari A ke B (gambar 1.2b) yang berikutnya kita beri nama sebagai vektor perpindahan **R** (gambar 1.2c).




**Gambar 1.2a**




**Gambar 1.2b**


**Gambar 1.2c**

### 2.1. Notasi Geometris

Notasi geometris adalah sebuah metode untuk menganalisis vektor dengan cara menampilkannya dalam bentuk gambar.

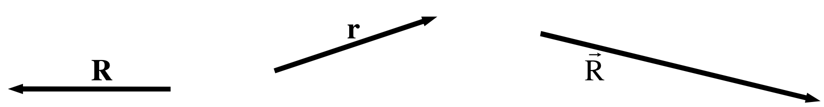
#### 2.1.1. Penamaan sebuah vektor

Cara penulisan vektor dapat dilakukan dengan beberapa cara sebagai berikut :

- dengan huruf tebal **R** atau **r**
- dengan tanda $\vec{R}$ atau $\vec{r}$

#### 2.1.2. Penggambaran vektor :

Vektor digambarkan dengan suatu anak panah (gambar 1.2d).



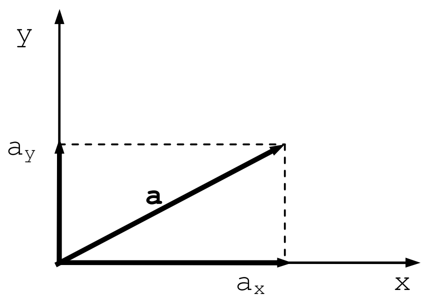

**Gamabar 1.2d**

Panjang anak panah menunjukan besar vektor, sedangkan arah anak panah menunjukan arah vektor. Kita bisa menggambarkan negatif dari masing-masing vektor sebagaimana ditunjukan pada Gambar 1.2e.

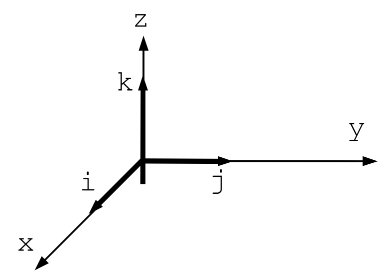

**Gambar 1.2e**

### 2.2. Notasi Analitis

Notasi analitis digunakan untuk menganalisa vektor dengan cara menguraikan vektor tersebut dalam komponen-komponen penyusunnya. Sebuah vektor **a** dalam koordinat kartesian (dua sumbu : x dan y) dapat dinyatakan dalam komponen-komponennya, yaitu komponan pada arah sumbu x dan komponen pada arah sumbu y. Secara lebih jelas dapat dilihat pada gambar 1.2f.




**Gambar 1.2f**




**Gambar 1.2g**

$\mathbf{a_y}$ : besar komponen vektor a dalam arah sumbu y
$\mathbf{a_x}$ : besar komponen vektor a dalam arah sumbu x
Vektor arah /vektor satuan: adalah vektor yang besarnya 1 dan arahnya sesuai dengan yang didefinisikan. Misalnya dalam koordinat kartesian : i, j, k yang masing masing menyatakan vektor dengan arah sejajar sumbu x, sumbu y dan sumbu z (gambar 1.2g). Sehingga secara analitik vektor **a** dapat ditulis :

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} \qquad \text{...... 1.1}$$

dan besar vektor **a** adalah :

$$|a| = \sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2}} \qquad \text{...... 1.2}$$

**Tugas 2**

Sebuah benda bergerak dari posisi awal (0,0) berhenti pada koordinat (4,5). a) Gambarkan keadaan tersebut dalam koordinat kartesian, b) tentukan vektor perpindahan gerak tersebut, dan c) tentukan besar perpindahaan gerak tersebut.

## 3. OPERASI VEKTOR

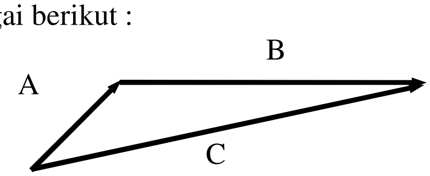
Besaran vektor, sebagaimana besaran skalar dapat dioperasikan secara matematis, baik operasi penjumlahan maupun perkalian. Namun demikian operasi vektor memiliki beberapa perbedaan dengan operasi skalar karena dalam operasi vektor kita tidak hanya memperhitungkan besar namun juga sekaligus arahnya. Simaklah uraian di bawah ini untuk melihat perbedaan-perbedaannya!

### 3.1. Operasi penjumlahan

Disediakan dua buah vektor **A** dan **B** sebagaimana ditunjukan pada gambar 1.3 di bawah ini :


**Gambar 1.3**

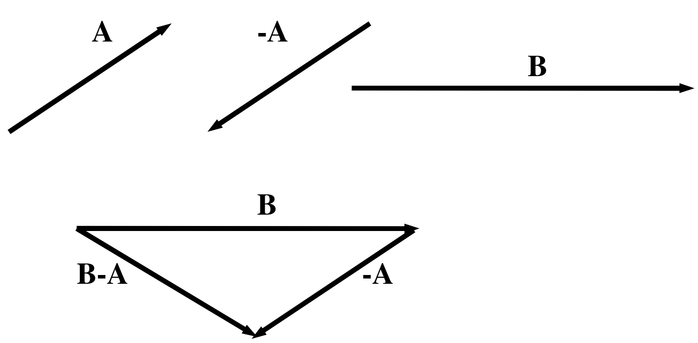
Kita akan menjumlahkan kedua vektor (**A+B**) sehingga akan menghasilkan sebuah vektor baru (**C**) yang merupakan resultan vektor **A** dan **B**. Tanda positif (+) dalam penjumlahan vektor mempunyai arti *dilanjutkan*. Jadi **A + B** mempunyai arti vektor **A** dilanjutkan oleh vektor **B**. Secara geometris dapat digambarkan sebagai berikut :




**Gambar 1.3a**

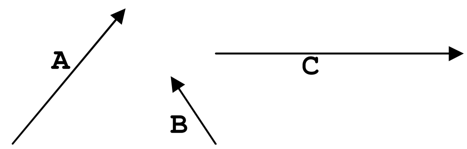
Opersai pengurangan dapat dijabarkan dari operasi penjumlahan dengan menyatakan negatif dari suatu vektor :

**B - A = B + (-A)**.......................................................................................... 1.3




**Gambar 1.3b**

**Tugas 3**
Disediakan 3 buah vektor A, B dan C berikut:

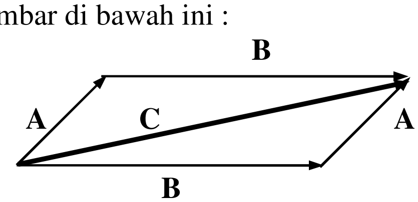



Gambarkan penjumlahan dan pengurangan vektor : **a) A + B, b) A + C, c) A – B, d) A + B - C**

Berikut akan disajikan beberapa hukum dalam operasi penjumlahan vektor :

a. Hukum komutatif

   Sebuah partikel mengalmi perpindahan **A,** dilanjutkan dengan perpindahan **B.** Hasil akhirnya adalah perpindahan **C.** Seandainya partikel tersebut terlebih dahulu mengalami perpindahan **B,** dilanjutkan dengan melakukan perpindahan **A**, maka hasil akhirnyapun perpindahan **C.** Amati kenyataan tersebut pada gambar di bawah ini :




**Gambar 1.3c**

   Hukum komutatif dalam operasi penjumlahan vektor menyatakan bahwa:

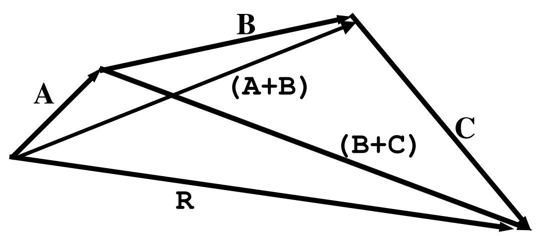
   **A + B = B + A**........................................................................... 1.4

   Kenyataan ini menunjukan bahwa urutan suku dalam penjumlahan vektor tidaklah berpengaruh.

b. Hukum Asosiatif

Hukum Asosiatif dalam operasi penjumlahan dapat dinyatakan sebagai berikut :

**(A + B) + C = A + (B + C) = R** ........................................................ 1.5




**Gambar 1.3d**

Vektor **A** dan **B** sebagaimana yang sudah dicontohkan di atas, jika dinyatakan secara analitis dapat ditunjukan dalam bentuk:

$$A = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$
$$B = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$
................................................................................ 1.6

Maka opersasi penjumlahan/pengurangan vektor yang dinyatakan secara analitik dapat dilakukan dengan cara menjumlah/mengurangi komponen-komponen yang searah sebagai berikut :

$$A + B = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k}$$
$$A - B = (A_x - B_x)\hat{i} + (A_y - B_y)\hat{j} + (A_z - B_z)\hat{k}$$
.................................... 1.7

**Tugas 4**

Dua buah vektor :

$$\vec{A} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$$
$$\vec{B} = -\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$$

Tentukan a) **A + B;** b) **A – B**; c) Vektor **C** agar **A – B + C = 0**

### 3.2. Opersai Perkalian

Besaran vektor karena karakteristiknya yang khas yaitu memiliki arah disamping juga memiliki besar membawa konsekuensi pada operasi perkaliannya. Operasi perkalian biasa tidak dapat langsung diterapkan pada vektor. Kita akan mendefinisikan dua macam perkalian vektor, yaitu perkalian vektor dengan skalar dan perkalian vektor dengan vektor.

#### 3.2.1. Perkalian vektor dengan skalar

Jika sebuah vektor dikalikan dengan suatu skalar maka akan diperoleh sebuah vektor baru. Jika **A** dan **B** adalah vektor dan *k* adalah sebuah skalar maka,

**B** = *k* **A**

Besar vektor **B** adalah *k* kali besar vektor **A,** sedangkan arah vektor **B** sama dengan arah vektor **A** bila *k* positip dan berlawanan bila *k* negatif. Dalam fisika kita menjumpai operasi semacam ini misalnya:

***F* = *qE* ;**

*q* adalah muatan listrik, dapat bermuatan positip atau negatif sehingga arah ***F*** tergantung tanda muatan tersebut, sedangkan besar ***F*** adalah *q* kali besar ***E.***

Contoh lain perkalian besaran vektor dengan skalar dalam fisika adalah : ***F* = *ma*, *p* = *mv***, dsb dimana m : skalar dan ***a,v*** : vektor.

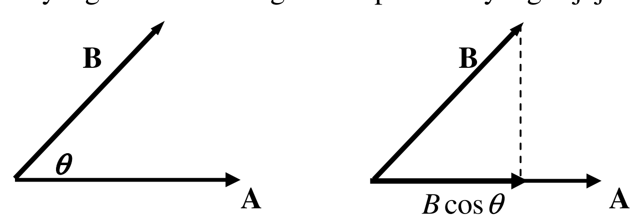
#### 3.2.2. Perkalian vektor dengan vektor

Perkalian vektor dengan vektor dapat diklasifikasi menjadi dua macam, yaitu perkalian vektor yang akan menghasilkan skalar dan perkalian vektor yang akan menghasilkan vektor lain.

3.2.2.1. Perkalian titik (*dot product*)

Perkalian dot atau titik disebut juga perkalian skalar (*scalar product*). Hal itu dikarenakan perkalian tersebut akan menghasilkan skalar meskipun kedua pengalinya merupakan vektor. Perkalian skalar dari dua vektor **A** dan **B** dinyatakan dengan $A \bullet B$, karena notasi ini maka perkalian tersebut dinamakan juga sebagai perkalian titik (*dot product*).

Kita akan mendefinisikan $A \bullet B$ dengan cara menggambarkan kedua vektor dengan ekor-ekornya terletak pada titik yang sama. Setelah itu kita cari komponen vektor yang sejajar di antara keduanya. $A \bullet B$ didefinisikan sebagai besar vektor **A** yang dikalikan dengan komponen **B** yang sejajar dengan **A**.




**Gambar 1.3e**

Bila **C** adalah hasil perkalian skalar antara **A** dan **B** maka :

$C = A \bullet B = AB\cos\theta$ ........................................................................ 1.8

Jika kita mengoperasikan perkalian tersebut dalam notasi vektor, maka kita akan mendefinisikan beberapa keadaan sebagai berikut :

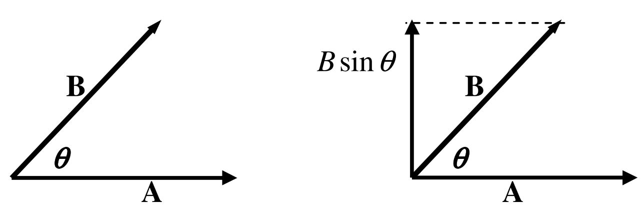
$$\begin{aligned} \hat{i} \bullet \hat{i} = \hat{j} \bullet \hat{j} = \hat{k} \bullet \hat{k} &= (1)(1)\cos 0 \quad = 1 \\ \hat{i} \bullet \hat{j} = \hat{i} \bullet \hat{k} = \hat{j} \bullet \hat{k} &= (1)(1)\cos 90^0 = 0 \end{aligned} \qquad \text{.................................................. 1.9}$$

Sehingga jika vektor **A** dan **B** dinyatakan dalam komponen-komponennya, maka perkalian skalar antara keduanya dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$A \bullet B = AxBx + AyBy + AzBz \text{ ............................................................ 1.10}$$

Penerapan operasi perkalian titik dalam Fisika misalnya adalah $W$ **= *F* . *s*,** ***Φ* = *B* . *A***
Hasil dari perkalian ini, baik $W$ maupun Φ berupa skalar.

3.2.2.2. Perkalian silang (*cross product*)
Perkalian silang (cross product) disebut juga sebagai perkalian vektor (vektor product), karena perkalian ini akan menghasilkan vektor lain. Perkalian vektor antara A dan B dinyatakan dengan A x B.
Kita akan mendefinisikan A x B dengan cara menggambarkan kedua vektor dengan ekor-ekornya terletak pada titik yang sama. Setelah itu kita cari komponen vektor yang tegak lurus di antara keduanya. A x B didefinisikan sebagai besar vektor **A** yang dikalikan dengan komponen **B** yang tegak lurus dengan **A**.




**Gambar 1.3f**

Besarnya vektor baru **C** sebagai hasil perkalian silang antara **A** dan **B** adalah :

$$C = AxB = AB\sin\theta \text{ ............................................................................ 1.11}$$

Jika kita mengoperasikan perkalian tersebut dalam notasi vektor, maka dengan menggunakan aturan tangan kanan kita akan mendefinisikan beberapa keadaan sebagai berikut :

$$\hat{i}x\hat{i} = \hat{j}x\hat{j} = \hat{k}x\hat{k} = (1)(1)\sin 0 \quad = 0$$

$$\hat{i}x\hat{j} = \hat{k}$$

$$\hat{j}x\hat{k} = \hat{i}$$

$$\hat{k}x\hat{i} = \hat{j}$$

Sehingga jika vektor **A** dan **B** dinyatakan dalam komponen-komponennya, maka perkalian vektor antara keduanya dapat dinyatakan dalam bentuk determinan sebagai berikut :

$$AxB = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

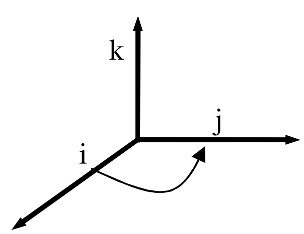
Adapun hasil dari operasi tersebut adalah :

$$AxB = (AyBz\,\hat{i} + AzBx\,\hat{j} + AxBy\,\hat{k}) - (AyBx\,\hat{k} + AzBy\,\hat{i} + AxBz\,\hat{j})$$
$$AxB = (AyBz - AzBy)\,\hat{i} + (AzBx\text{-}AxBz)\,\hat{j} + (AxBy\text{-}AyBx)\,\hat{k} \qquad \text{.... 1.12}$$

Penerapan operasi perkalian silang dalam Fisika misalnya adalah ***τ = r x F, F = q v x B***

Hasil dari perkalian ini, baik ***τ*** maupun ***F*** merupakan besaran vektor. Karena hasil yang diperoleh berupa vektor maka arah dari vektor tersebut dapat dicari dengan aturan tangan kanan, yaitu dengan cara memutar vektor pertama ke vektor kedua. Sebagai contoh : jika kecepatan partikel (***v***) bergerak pada arah sumbu x (+) dan medan magnet (***B***) memiliki arah ke sumbu y (+), maka gaya (***F***) akan bergerak ke arah sumbu z (+). Selengkapnya dituliskan sebagai berikut :

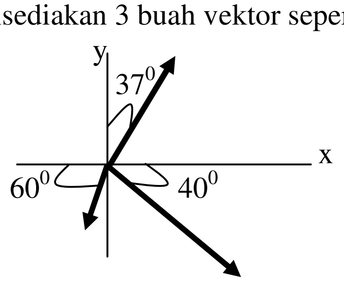
$F\,\hat{k} = qv\,\hat{i}\;x\;B\,\hat{j}$ ; hal ini dikarenakan bahwa $\hat{i}\;x\,\hat{j} = \hat{k}$




**Gambar 1.3g**

**Tugas 5**

Disediakan 3 buah vektor seperti pada gambar di bawah ini :




Tentukan perkalian skalar berikut :

a) A.B; b) B.C; c)A.C

## 4. Soal-soal Latihan

4.1. Serangga berturut-turut bergerak 8,0 cm ke arah timur, 5,0 cm ke arah selatan, 3,0 cm ke arah barat dan 4,0 cm ke arah utara. a) Berapa jauhkah dalam arah utara dan timur serangga itu telah bergerak dihitung dari titik awal geraknya. B) Tentukan vektor perpindahan serangga secara geometris maupun analitis.

4.2. Seorang anak menahan sebuah kereta yang beratnya 150 N di atas permukaan miring $20^0$. Agar kereta tidak menggelinding (turun) berapa gaya tarik anak itu? (Ia menarik dalam arah yang sejajar permukaan miring).

4.3. Ulangi soal no 4.2 diatas, hanya saja sekarang anak itu menarik kereta dalam arah $30^0$ dengan permukaan miring!

4.4. Dua buah gaya 80 N dan 100 N bekerja dengan sudut $60^0$ antara keduanya untuk menarik sebuah benda. a) Carilah satu gaya yang dapat menggantikan kedua buah gaya tersebut (besar dan arahnya), b) Tentukan sebuah gaya yang dapat menghasilkan kesetimbangan antara kedua gaya !

4.5. Diberikan vektor $\vec{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$ dan $\vec{B} = 5\hat{i} - 2\hat{j}$, tentukan a) Besar masing-masing vektor, b) besar dan arah **A-B**, c) besarnya **A . B** d) besar dan arah **A x B,** dan d) sudut antara kedua vektor!

**Selamat belajar, semoga sukses..**