BAB 4:
PELUANG DAN DISTRIBUSI NORMAL.

PELUANG

Peluang atau yang biasa juga disebut dengan istilah kemungkinan, probablilitas, atau kans menunjukkan suatu tingkat kemungkinan terjadinya suatu kejadian yang dinyatakan dalam bentuk angka. Penerapan teori peluang menjadi suatu yang sangat penting pada hubungannya dengan masalah ketidakpastian.

TEORI PELUANG (KLASIK):

Dalam konteks ini berlaku anggapan bahwa semua kemungkinan kejadian dalam suatu percobaan mempunyai kesempatan yang sama untuk terjadi. Rumus peluang klasik adalah:

$$P(E) = \frac{m}{n}$$

Dimana: P(E) = peluang terjadinya kejadian E
m = banyaknya kejadian E
n = banyaknya semua kemungkinan

CONTOH 1:

Dari percobaan pelemparan sebuah koin uang logam satu kali, berapa peluang munculnya sisi "gambar"?
Jawab:
Apabila: E = munculnya sisi "gambar"
m = banyaknya sisi gambar dari sebuah koin uang = 1
n = Banyaknya sisi dari sebuah koin uang = 2

Maka :

$$P(E) = \frac{m}{n}$$

= ½
= 0.5

Jadi, peluang munculnya sisi "gambar" dari pelemparan sebuah koin uang satu kali adalah 0.5

CONTOH 2:

Dari percobaan pelemparan sebuah dadu satu kali, berapa peluang munculnya sisi angka 6?
Jawab:

Apabila: E = munculnya sisi angka 6
m = banyaknya sisi angka 6 dari sebuah dadu = 1
n = Banyaknya sisi dari sebuah dadu = 6

Maka :

$$P(E) = \frac{m}{n}$$

= 1/6
= 0.167

Jadi, peluang munculnya sisi angka dari pelemparan sebuah dadu satu kali adalah 0.167

CONTOH 3:

Dari percobaan pengambilan sebuah kartu dari set kartu remi (bridge), berapa peluang didapatkaannya kartu "diamond"?

Jawab:

Apabila: E = terambilnya kartu "diamond".
m = banyaknya kartu "diamond"dari satu set kartu remi = 13
n = banyaknya kartu dari satu set kartu remi = 54

Maka :

$$P(E) = \frac{m}{n}$$

= 13/54
= 0.25

Jadi, peluang terambilnya kartu "diamond" dari pengambilan sebuah kartu dari satu set kartu remi adalah 0.25

CONTOH 4:

Dari percobaan pelemparan **dua buah** koin uang satu kali, berapa peluang bahwa kedua koin menunjukkan sisi "gambar"?

Jawab:

Apabila: E = munculnya sisi Gambar-Gambar (GG)
m = banyaknya sisi GG dari dua koin uang = 1
n = Banyaknya kombinasi sisi yang ada dari dua koin uang = 4
(GG; GA; AG; AA)

Maka :

$$P(E) = \frac{m}{n}$$

= 1/4
= 0.25

Jadi, peluang munculnya sisi GG dari pelemparan dua koin uang adalah 0.25

CONTOH 5:

Dari percobaan pelemparan **dua buah dadu** satu kali, berapa peluang bahwa kedua dadu menunjukkan sisi angka 6?

Jawab:

Apabila: E = munculnya sisi angka 6 pada kedua dadu (6-6)
m = banyaknya sisi 6-6- dari dua buah dadu = 1
n = Banyaknya kombinasi mata dadu yang ada dari dua dadu = 36
(1-1; 1-2; 1-3; ... ; 6-6)

Maka :

$$P(E) = \frac{m}{n}$$

$= 1/36$

$= 0.03$

Jadi, peluang munculnya sisi angka 6-6 dari pelemparan dua buah dadu adalah 0.03

Dari beberapa contoh di atas, salah satu langkah yang harus dicermati adalah menghitung besarnya nilai n (jumlah segala kemungkinan dari sebuah kejadian/percobaan). Dalam teori peluang, nilai n kita sebut dengan jumlah ruang sampel. Tersedia beberapa cara untuk menghitung ruang sampel, yaitu: metode perkalian, permutasi, dan kombinasi.

1. Metode Perkalian

Untuk seuatu percobaan dengan sejumlah k kegiatan, dan masing-masing kegiatan mempunyai sejumlah n kemungkinan kejadian, maka ukuran ruang sampelnya adalah

$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k$

Contoh:

Pak Joni ingin membeli tiga barang elektronik, masing-masing Televisi, Radio, dan VCD Player. Tersedia 4 merk televisi, 3 merk Radio, dan 2 merk VCD maka ada berapa cara kemunginan merk-merk elektronik yang dibeli Pak Joni.

Penyelesaian: Dalam kasus ini k =3; $n_1 = 4$; $n_2 = 3$; $n_3 = 2$

Maka keseluruhan cara yang mungkin adalah = 4 x 3 x 2 = 24 cara

2. Metode "Permutasi"

Adalah metode perhitungan jumlah segala kemungkinan dari kejadian gabungan, dimana dalam permutasi letak susunan obyek akan memberikan arti yang berbeda. Dalam hal ini susunan AB tidak sama dengan BA.

Rumus permutasi:

nPr = n! / (n-r)!

Contoh:

Apabila dari sebuah kelompok belajar yang terdiri dari 5 orang, akan dipilih dua orang, sebagai ketua dan wakil ketua kelompok. Dalam berapa carakah ketua dan wakil ketyua bisa disusun?

Penyelesaian:

Karena dalam kasus ini AB ≠ BA, maka susunan dua orang yang bisa dibentuk dari lima orang mengikuti rumus permutasi:

nPr = n! / (n-r)!

${}_5P_2$ = 5! / (5-2) !

= (5x4x3x2x1) / 3x2x1

= 5 x 4

= 20

3. Metode "Kombinasi"

Adalah jumlah semua kemungkinan yang terjadi pada percobaan dengan pengambian r obyek dari n obyek dimana antar elemen tidak dibedakan. Dalam hal ini AB = BA

Rumus untuk kombinasi:

nCr = n! / (r!(n-r)!)

Contoh:

Apabila dari 5 orang tersebut akan dipilih dua orang sebagai utusan kelompok, maka dalam berapa carakah wakil tersebut dapat disusun? (NB: dalam hal ini AB = BA)

Penyelesaian:

Karena dalam kasus ini AB = BA, maka susunan dua orang utusan yang bisa dibentuk dari lima orang mengikuti rumus kombinasi:

nCr = n! / (r!(n-r)!)

5C2 = 5! / (2! x (5-2)!)

= 5! / (2! x 3!)

= (5x4x3x2x1) / 2x1 x 3x2x1

= 5x4 / 2x1

= 10

BEBERAPA SIFAT PELUANG

Apabila A adalah peluang untuk kejadian A, maka:

1. Peluang Terjadinya A adalah sebesar antara 0 sampai dengan 1. $0 \leq P(A) \leq 1$. Apabila Peluang terjadinya A mendekati NOL, pada kejadian tersebut kecil kemungkinan untuk terjadi. Sedangkan apabila peluangya mendekati 1, berarti bahwa kejadian tersebut hampir pasti untuk terjadi.

2. Nilai Peluang komplemen dari suatu kejadian adalah satu dikurangi peluang kejadian tersebut. $P(Á) = 1 – P(A)$. Misal peluang munculnya mata dadu satu pada pelemparan sebuah dadu adalah 1/6, maka .....peluang munculnya mata dadu **bukan satu** adalah 1 – 1/6 = 5/6.

3. Jumlah dari semua peluang yang mungkin terjadi dari suatu peritiwa adalah 1.

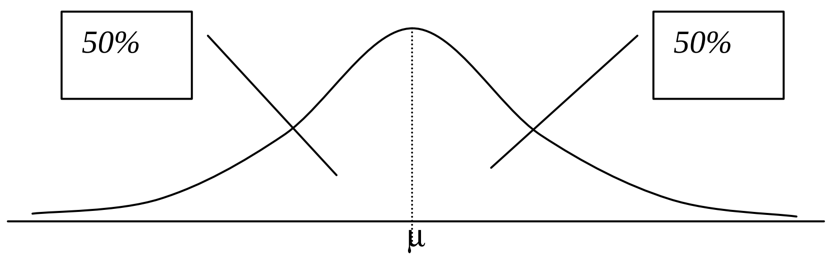
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) – P(A \cap B)$

PELUANG DALAM DISTRIBUSI NORMAL

Adalah bentuk distribusi (persebaran) nilai-nilai suatu variabel yang berbentuk normal. Suatu sebaran data dianggap normal apabila memenuhi beberapa kriteria:

1. Distribusi data berbentuk lonceng.
2. Rata-rata (*mean*) ada pada tengah dan membagi distribusi nilai menjadi dua bagian sama besar.
3. Terdapat 50% data di sebelah kanan mean dan 50% di sebelah kiri mean

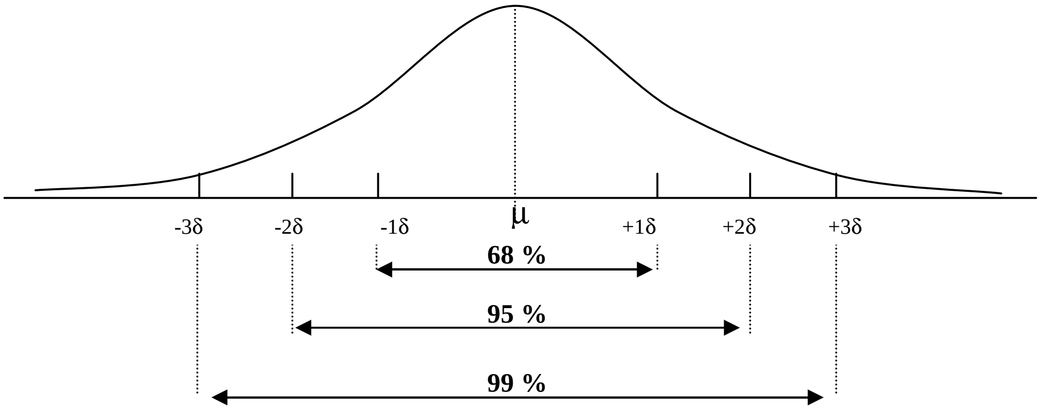
Bentuk umum dari distribusi normal adalah sebagai berikut:



KAIDAH EMPIRIS

Para ahli statistik telah menyelidiki bentuk distribusi normal dengan mempelajari fungsi tersebut, dan didapatkan sifat-sifat sebagai berikut:

1. Mean distribusi terletak di tengah dengan luas bagian sebelah kiri sama dengan luas bagian sebelah kanan, sehingga <u>total luas daerah di sebelah kanan kurva = total luas daerah di bawah kurva sebelah kanan = 50%</u>
2. 68 % dari nilai variabel terletak dalam jarak $\mu \pm 1\sigma$
3. 95 % dari nilai variabel terletak dalam jarak $\mu \pm 2\sigma$
4. 99 % dari nilai variabel terletak dalam jarak $\mu \pm 3\sigma$



Selain menggunakan kaidah empiris di atas, menghitung probabilitas distribusi normal juga bisa dilakukan dengan menggunakan tabel distribusi normal, terlebih untuk menghitung nilai-nilai X yang tidak tepat sebesar $\pm 1\sigma$, $\pm 2\sigma$, atau $\pm 3\sigma$.

Tabel distribusi normal:

Berikut beberapa hal tentang distribusi normal:

- ✓ Tabel distribusi normal disusun untuk menghitung probabilitas nilai-nilai variabel normal standar, yaitu distribusi normal dengan mean nol (μ=0) dan standar deviasi satu (σ = 1).
- ✓ Karena distribusi normal standar bersifat simetris, mak tabel distribusi normal standar dibuat hanya untuk menghitung bagiansebelah kanan mean dari distribusi tersebut. Untuk menghitung nilai di sebelah kiri mean, nilai z yang negatif dianggap sama dengan z positif.
- ✓ Nilai-nilai probabilitas adalah nilai **<u>antara μ = 0 dan sebuah nilai z tertentu</u>**. (BUKAN ANTARA SEMBARANG DUA NILAI Z)

Contoh 1:

Suatu variabel berdistribusi normal dengan $\mu = 0$ dan $\sigma = 1$. Hitunglah probabilitas nilai z antara:

a. 0 sampai dengan 1
b. 0 sampai dengan –1
c. 1 sampai dengan 2
d. –1 sampai dengan 2

Jawab:

a. Probabilitas nilai z antara $\mu = 0$ sampai dengan X =1:

Pertama, kita cari nilai Z dengan rumus:

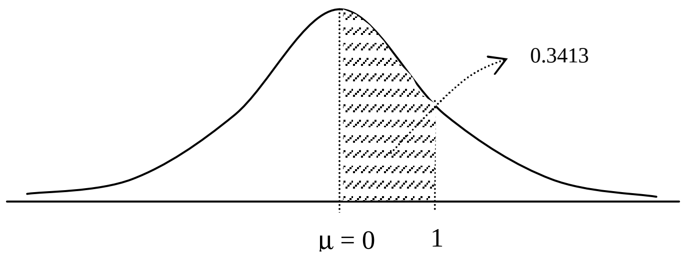
$$Z = \frac{x-\mu}{\delta}$$

$$Z = \frac{1-0}{1}$$

$$Z = 1$$

Luas daerah di bawah kurva normal yang dibatas nilai mean oleh z = 1 adalah 0.3413 (*lihat di tabel kurva normal*.)

Jadi, probabiliotas nilai z antara 0 sampai dengan 1 adalah 0.3413

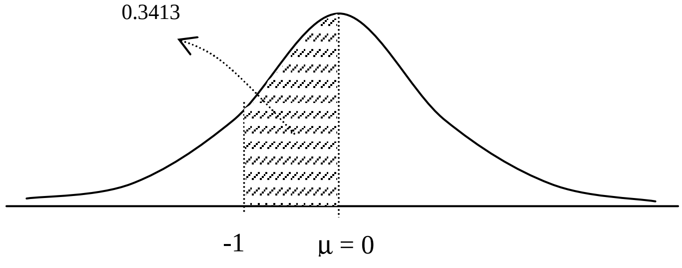


b. Probabilitas nilai z antara $\mu = 0$ sampai dengan X = -1:

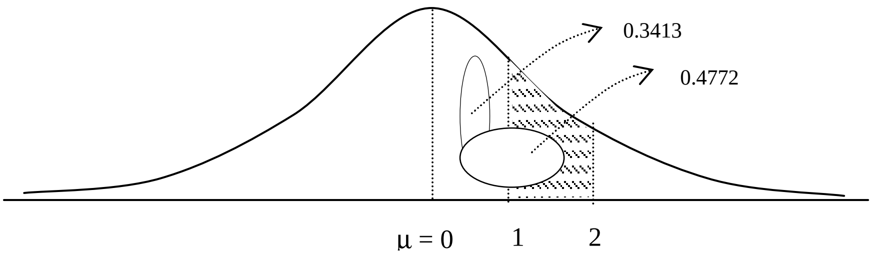
Nilai z antara mean sampai dengan –1 adalah –1.

Dalam membaca tabel distribusi normal, nilai z = -1 kita baca sebagai z = 1 , sehingga probablitasnya adalah 0.3413

Jadi, probabilitas nilai z antara 0 sampai dengan -1 adalah 0.3413



c. Probabilitas nilai z antara X = 1 sampai dengan X = 2:
Karena nilai 1 dan 2 bukan nilai mean, maka untuk mencari probabilitas ini kita harus melakukannya melalui dua tahap.
Pertama, kita mencari probabilitas antara mean = 0 sampai dengan 1, dan kedua kita cari probabilitas antara mean = 0 sampai dengan 2. Kemudian hasilnya dikurangkan
Dari tabel, nilai distribusi normal antara 0 sampai dengan 1 adalah 0.3413
sedangkan nilai distribusi normal antara 0 sampai dengan 2 adalah 0.4772
Maka, probabilitas antara 1 dan 2 adalah 0.4772 – 0.3413 = 0.1359.



d. Probabilitas nilai z antara X = -1 sampai dengan X = 2: *coba saudara cari sendiri*.

MENGHITUNG PROBABILITAS NILAI-NILAI DALAM DISTRIBUSI NORMAL NON-STANDAR

Distribusi normal non-standar adalah distribusi normal dengan $\mu \neq 0$ dan $\sigma \neq 1$. Untuk mencari probabilitas dalam distribusi normal non-standar, nilai X harus kita konversi ke nilai Z dengan rumus:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Dimana: x = variabel yang hendak kita cari probabilitasnya; μ dan σ masing-masing adalah rata-rata dan standar deviasi dari varaibel x.

Contoh 2:

Diketahui suatu distribusi normal dengan $\mu = 10$ dan $\sigma = 3$. Hitunglah nilai-nilai:

a. antara 10 sampai dengan 13
b. Antara 8 sampai dengan 15
c. Antara 6 sampai dengan 9

Jawab:

a. Antara 10 dan 13. Karena 10 adalah nilai mean, maka kita cukup mencari nilai z untuk x = 13.

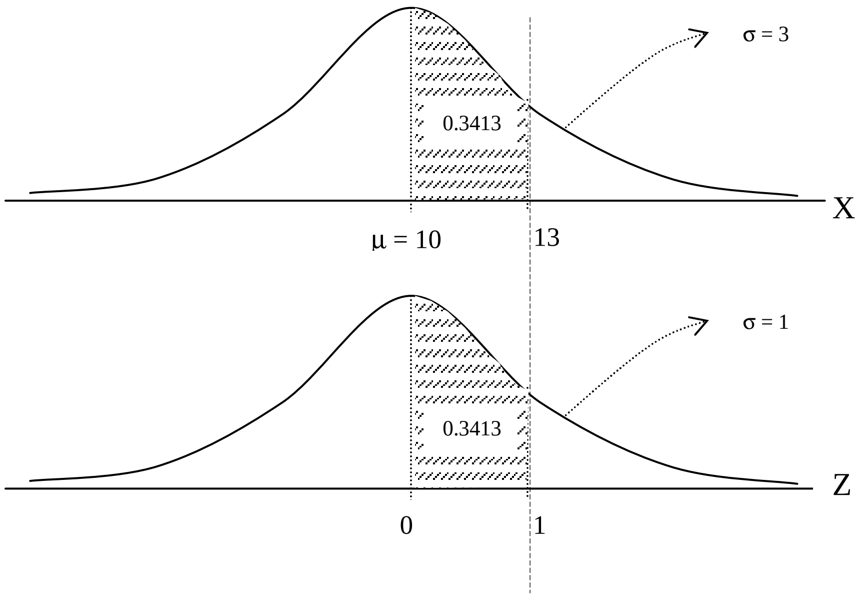
$z = (x-\mu)/\sigma$

$= (13 – 10) / 3$

$= 1$

Nilai z = 1, probabilitasnya adalah 0.3413. Maka, probabilitas nilai-nilai antara 10 sampai dengan 13 adalah 0.3413.

Perbandingan antara distribusi normal standar dengan distribusi normal non-standar.



Dari gambar di atas, kita lihat bahwa:

Jarak antara μ = 10 sampai dengan x = 13, adalah sama dengan 1 kali standar deviasi. Angka 1 kali standar deviasi ini ditunjukkan dengan z = 1.

NB: untuk visual selanjutnya, kurva distribusi normal standar diatas akan kita gambarkan sumbu Z-nya saja dan kita letakkan di bawah sumbu X dari distribusi normal yang kita cari.

b. Antara 8 sampai dengan 15

Karena 8 dan 15 bukan nilai mean, maka harus kita selesaikan dengan tiga tahap: Pertama, kita cari probabilitas antara μ = 10 sampai dengan x =8; kedua, kita cari probabilitas antara μ = 10 sampai dengan 15; ketiga probabilitas antara X = 8 sampai dengan x = 15 adalah penjumlahan dari kedua probabilitas tersebut.

1) antara μ = 10 sampai dengan x = 8.

   $z = (x - \mu) / \sigma = (8 – 10) / 3 = -0.67$

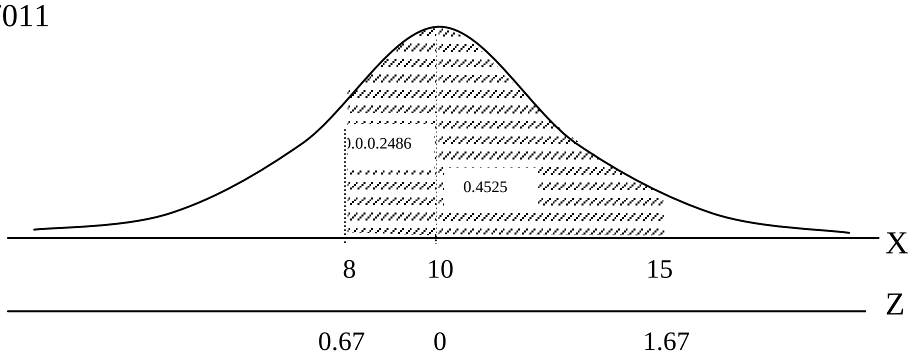
   Untuk z = 0.67, probabilitasnya adalah: 0.2486

2) antara μ = 10 sampai dengan x = 15.

z = (x - μ) / σ = (15 – 10) / 3 = -1.67

Untuk z = 1.67, probabilitasnya adalah: 0.4525

3) Maka nilai probabilitas antara x = 8 sampai dengan x = 15 adalah 0.2486 + 0.4525 = 0.7011



c. Antara 6 sampai dengan 9

Karena 6 dan 9 bukan nilai mean, maka untuk mencri nilai ini juga harus dengan tiga tahap

1) antara μ = 10 sampai dengan x = 6.

z = (x - μ) / σ = (6 – 10) / 3 = -1.33

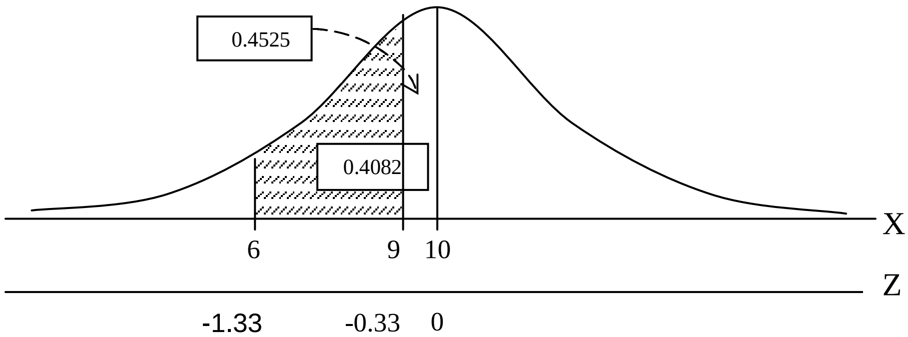
Untuk z = 1.33, probabilitasnya adalah: 0.4082

2) antara μ = 10 sampai dengan x = 9.

z = (x - μ) / σ = (9 – 10) / 3 = -0.33

Untuk z = 0.33, probabilitasnya adalah: 0.1293

3) Maka nilai probabilitas antara x = 6 sampai dengan x = 9 adalah 0.0.4082 - 0.1293 = 0.2789



SOAL-SOAL UNTUK LATIHAN:

1. PT Valentino Rossi memproduksi sepeda motor yang mempunyai umur ekonomis selama 10 tahun dengan standar deviasi 1.5 tahun, dan diasumsikan bahwa umur ekonomi sepeda motor tersebut berdistribusi normal.   Apabila saudara memutuskan

untuk membeli sepeda motor buatan PT Valentino Rossi tersebut, maka berapa peluang saudara mendapatkan sepeda motor yang:

a. umur ekonomisnya lebih dari 8 tahun
b. umur ekonomisnya kurang dari 8 tahun.

2. Biro pusat statistik mengadakan survey untuk mengetahui tingkat belanja penduduknya. Menurut survey tersebut, belanja penduduk berdistribusi normal dengan mean sebesar Rp 975.000,- dan standar deviasi Rp 135.000,-
    a. berapa probabilitas bahwa sebuah keluarga yang diambil secara acak akan mempunyai pendapatan lebih dari Rp 1.000.000,-
    b. Berapakah persen keluarga yang tingkat belanjanya kurang dari Rp 750.000,-