Syarat Fritz John pada Masalah Optimasi Berkendala Ketaksamaan

Caturiyati[1]
Himmawati Puji Lestari[2]
[1,2]Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY
[1]wcaturiyati@yahoo.com
[2]himmawatipl@yahoo.com

Abstrak

Syarat-syarat optimasi masalah optimasi berkendala merupakan perluasan syarat-syarat optimasi masalah optimasi tak berkendala. Pada paper ini diuraikan syarat Fritz John yang merupakan perluasan syarat optimasi masalah optimasi tak berkendala untuk menyelesaikan masalah optimasi berkendala.

Kata kunci: syarat Fritz John, masalah optimasi berkendala, masalah optimasi tak berkendala

Pendahuluan

Suatu masalah tak berkendala adalah suatu masalah berbentuk: meminimalkan $f(\boldsymbol{x})$ tanpa vektor $\boldsymbol{x}$ sebagai suatu kendalanya. Masalah tak berkendala jarang muncul dalam penggunaan. Masalah yang lebih sering muncul adalah masalah optimasi berkendala. Masalah optimasi berkendala terbagi berdasarkan kendalanya, yaitu masalah optimasi berkendala ketaksamaan dan masalah optimasi berkendala campuran (kendala persamaan dan ketaksamaan). Syarat optimasi masalah optimasi berkendala merupakan perluasan syarat optimasi masalah optimasi tak berkendala. Fritz John mengemukakan syarat optimasi masalah optimasi berkendala ketaksamaan. Pembahasan pada paper ini terbagi menjadi beberapa bagian, yaitu mengenai syarat perlu dan cukup optimasi tak berkendala dan syarat Fritz John untuk masalah optimasi berkendala ketaksamaan.

Syarat Perlu dan Cukup Optimasi Tak Berkendala

Masalah optimasi tak berkendala adalah suatu masalah dengan model matematika berbentuk meminimumkan $f(\boldsymbol{x})$, tanpa suatu kendala pada vektor $\boldsymbol{x}$. Untuk masalah optimasi dengan model matematika tersebut, nilai optimum masalah ada pada peminimal atau pemaksimal.

Berikut diberikan definisi peminimal, untuk pemaksimal didefinisikan secara analog dengan tanda pertidaksamaannya adalah $\geq$.

Definisi 1. (Mital, 1979: 42)

Pandang masalah meminimalkan $f(\boldsymbol{x})$ atas E_n, dan diberikan $\overline{\boldsymbol{x}} \in E_n$. Jika $f(\overline{\boldsymbol{x}}) \leq f(\boldsymbol{x})$ untuk setiap $\boldsymbol{x} \in E_n$, maka $\overline{\boldsymbol{x}}$ disebut peminimal global. Jika terdapat suatu persekitaran ε, $N_\varepsilon(\overline{\boldsymbol{x}})$, disekitar $\overline{\boldsymbol{x}}$ sehingga $f(\overline{\boldsymbol{x}}) \leq f(\boldsymbol{x})$ untuk setiap $\boldsymbol{x} \in N_\varepsilon(\overline{\boldsymbol{x}})$, maka $\overline{\boldsymbol{x}}$ disebut peminimal lokal. Jelaslah suatu peminimal global juga suatu peminimal lokal.

Syarat Perlu Keoptimalan

Suatu titik $\boldsymbol{x}$ di E_n, dapat menjadi peminimal lokal atau peminimal global suatu fungsi f jika memenuhi karakteristik peminimal sebagai berikut.

Teorema 1. (Bazaraa and Shetty, 1990: 124)

Misalkan $f: E_n \to E_1$ terdiferensial pada $\overline{\boldsymbol{x}}$. Jika terdapat suatu vektor $\boldsymbol{d}$ sehingga $\boldsymbol{\nabla} f(\overline{\boldsymbol{x}})^T \boldsymbol{d} < 0$, maka terdapat suatu $\delta > 0$ sehingga $f(\overline{\boldsymbol{x}} + \lambda \boldsymbol{d}) < f(\overline{\boldsymbol{x}})$ untuk setiap $\lambda \in (0, \delta)$, dan $\boldsymbol{d}$ adalah arah descent f pada $\overline{\boldsymbol{x}}$.

Bukti:

Karena f terdiferensial pada $\overline{\boldsymbol{x}}$, diperoleh

$$f(\overline{\boldsymbol{x}} + \lambda \boldsymbol{d}) = f(\overline{\boldsymbol{x}}) + \lambda \boldsymbol{\nabla} f(\overline{\boldsymbol{x}})^T \boldsymbol{d} + \lambda \|\boldsymbol{d}\| \alpha(\overline{\boldsymbol{x}} + \lambda \boldsymbol{d})$$

untuk $\alpha(\overline{\boldsymbol{x}} + \lambda \boldsymbol{d}) \to 0$ pada $\lambda \to 0$. Persamaan di atas dapat dinyatakan menjadi

$$f(\overline{\boldsymbol{x}} + \lambda \boldsymbol{d}) - f(\overline{\boldsymbol{x}}) = \lambda\left(\boldsymbol{\nabla} f(\overline{\boldsymbol{x}})^T \boldsymbol{d} + \|\boldsymbol{d}\| \alpha(\overline{\boldsymbol{x}} + \lambda \boldsymbol{d})\right).$$

Membagi persamaan dengan λ, diperoleh

$$\frac{f(\overline{\boldsymbol{x}} + \lambda \boldsymbol{d}) - f(\overline{\boldsymbol{x}})}{\lambda} = \boldsymbol{\nabla} f(\overline{\boldsymbol{x}})^T \boldsymbol{d} + \|\boldsymbol{d}\| \alpha(\overline{\boldsymbol{x}} + \lambda \boldsymbol{d}).$$

Karena $\boldsymbol{\nabla} f(\overline{\boldsymbol{x}})^T \boldsymbol{d} < 0$ dan $\alpha(\overline{\boldsymbol{x}} + \lambda \boldsymbol{d}) \to 0$ pada $\lambda \to 0$, terdapat suatu $\delta > 0$ sehingga $\boldsymbol{\nabla} f(\overline{\boldsymbol{x}})^T \boldsymbol{d} + \|\boldsymbol{d}\| \alpha(\overline{\boldsymbol{x}} + \lambda \boldsymbol{d}) < 0$ untuk semua $\lambda \in (0, \delta)$. Dengan kata lain terdapat suatu

$\delta > 0$ sehingga $f(\bar{\boldsymbol{x}} + \lambda \boldsymbol{d}) < f(\bar{\boldsymbol{x}})$ untuk setiap $\lambda \in (0, \delta)$. qed.

Sebagai akibat dari Teorema 1 setiap $\bar{\boldsymbol{x}}$ peminimal lokal mengakibatkan derivatif pertama fungsi terhadap $\bar{\boldsymbol{x}}$ adalah vektor nol, sebagai berikut:

Corollary 1. (Bazaraa and Shetty, 1990: 125)

Misalkan $f: E_n \to E_1$ terdiferensial pada $\bar{\boldsymbol{x}}$. Jika $\bar{\boldsymbol{x}}$ peminimal lokal maka $\boldsymbol{\nabla} f(\bar{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0}$.

Bukti:

Misalkan $\boldsymbol{\nabla} f(\bar{\boldsymbol{x}}) \neq \boldsymbol{0}$ dan diberikan $\boldsymbol{d} = -\boldsymbol{\nabla} f(\bar{\boldsymbol{x}})$. Berlaku $\boldsymbol{\nabla} f(\bar{\boldsymbol{x}})^T \boldsymbol{d} = \boldsymbol{\nabla} f(\bar{\boldsymbol{x}})^T (-\boldsymbol{\nabla} f(\bar{\boldsymbol{x}})) = -\|\boldsymbol{\nabla} f(\bar{\boldsymbol{x}})\|^2 < 0$, dan dengan Teorema 1, terdapat suatu $\delta > 0$ sehingga $f(\bar{\boldsymbol{x}} + \lambda \boldsymbol{d}) < f(\bar{\boldsymbol{x}})$ untuk $\lambda \in (0, \delta)$, yaitu $\bar{\boldsymbol{x}}$ pemaksimal, kontradiksi dengan asumsi bahwa $\bar{\boldsymbol{x}}$ peminimal lokal. Sehingga $\boldsymbol{\nabla} f(\bar{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0}$. qed.

Syarat optimasi pada Teorema 1 dan corollary Teorema 1 menggunakan vektor gradien yang komponennya adalah derivatif parsial pertama dari f, disebut dengan syarat order pertama. Syarat perlu dapat juga dinyatakan dalam bentuk matriks Hessian $\boldsymbol{H}$ dengan elemennya adalah derivatif parsial kedua dari f, disebut dengan syarat order kedua sebagai berikut:

Teorema 2. (Bazaraa and Shetty, 1990: 125)

Misalkan $f: E_n \to E_1$ terdiferensial dua kali pada $\bar{\boldsymbol{x}}$. Jika $\bar{\boldsymbol{x}}$ peminimal lokal maka $\boldsymbol{\nabla} f(\bar{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0}$, dan $\boldsymbol{H}(\bar{\boldsymbol{x}})$ matriks semidefinit positif.

Bukti:

Pandang suatu arah sebarang $\boldsymbol{d}$. Karena $\boldsymbol{f}$ terdiferensial dua kali pada $\bar{\boldsymbol{x}}$, diperoleh

$$f(\bar{\boldsymbol{x}} + \lambda \boldsymbol{d}) = f(\bar{\boldsymbol{x}}) + \lambda \boldsymbol{\nabla} f(\bar{\boldsymbol{x}})^T \boldsymbol{d} + \tfrac{1}{2}\lambda^2 \boldsymbol{d}^T \boldsymbol{H}(\bar{\boldsymbol{x}}) \boldsymbol{d} + \lambda^2 \|\boldsymbol{d}\|^2 \alpha(\bar{\boldsymbol{x}}; \lambda \boldsymbol{d}) \qquad (1)$$

dengan $\alpha(\bar{\boldsymbol{x}}; \lambda \boldsymbol{d}) \to 0$ untuk $\lambda \to 0$. Karena $\bar{\boldsymbol{x}}$ peminimal lokal, dari corollary Teorema 1, diperoleh $\boldsymbol{\nabla} f(\bar{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0}$, sehingga persamaan (1) menjadi

$$f(\overline{\boldsymbol{x}}+\lambda\boldsymbol{d})-f(\overline{\boldsymbol{x}})=\lambda^2(\tfrac{1}{2}\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{H}(\overline{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{d}+\|\boldsymbol{d}\|^2\alpha(\overline{\boldsymbol{x}};\lambda\boldsymbol{d})) \qquad (1a)$$

Persamaan (1a) dibagi dengan λ^2, diperoleh

$$\frac{f(\overline{\boldsymbol{x}}+\lambda\boldsymbol{d})-f(\overline{\boldsymbol{x}})}{\lambda^2}=\frac{1}{2}\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{H}(\overline{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{d}+\|\boldsymbol{d}\|^2\alpha(\overline{\boldsymbol{x}};\lambda\boldsymbol{d}). \qquad (2)$$

Karena $\overline{\boldsymbol{x}}$ peminimal lokal berlaku $f(\overline{\boldsymbol{x}}+\lambda\boldsymbol{d})\geq f(\overline{\boldsymbol{x}})$ untuk λ cukup kecil, atau $\frac{f(\overline{\boldsymbol{x}}+\lambda\boldsymbol{d})-f(\overline{\boldsymbol{x}})}{\lambda^2}\geq 0$. Sehingga berlaku $\frac{1}{2}\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{H}(\overline{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{d}+\|\boldsymbol{d}\|^2\alpha(\overline{\boldsymbol{x}};\lambda\boldsymbol{d})\geq 0$ untuk λ cukup kecil. Dengan mengambil limitnya untuk $\lambda\to 0$, $\lim_{\lambda\to 0}(\frac{1}{2}\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{H}(\overline{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{d}+\|\boldsymbol{d}\|^2\alpha(\overline{\boldsymbol{x}};\lambda\boldsymbol{d}))=\frac{1}{2}\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{H}(\overline{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{d}$ maka $\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{H}(\overline{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{d}\geq 0$, dan akibatnya $\boldsymbol{H}(\overline{\boldsymbol{x}})$ matriks semidefinit positif. qed.

Syarat Cukup Keoptimalan

Berikut adalah syarat cukup optimasi suatu masalah optimasi tak berkendala, yang memberikan syarat cukup untuk peminimal lokal.

Teorema 3. (Bazaraa and Shetty, 1990: 126)

Misalkan $f: E_n\to E_1$ terdiferensial dua kali pada $\overline{\boldsymbol{x}}$. Jika $\nabla f(\overline{\boldsymbol{x}})=\boldsymbol{0}$ dan $\boldsymbol{H}(\overline{\boldsymbol{x}})$ matriks definit positif, maka $\overline{\boldsymbol{x}}$ peminimal lokal.

Bukti:

Karena f terdiferensial dua kali pada $\overline{\boldsymbol{x}}$, dapat diperoleh untuk setiap $\boldsymbol{x}\in E_n$:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= f(\overline{\boldsymbol{x}})+\nabla f(\overline{\boldsymbol{x}})^T(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})+\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})^T\boldsymbol{H}(\overline{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}}) \\ &\qquad +\|\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}}\|^2\alpha(\overline{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}}) \end{aligned} \qquad (3)$$

dengan $\alpha(\overline{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})\to 0$ pada $\boldsymbol{x}\to\overline{\boldsymbol{x}}$. Misalkan $\overline{\boldsymbol{x}}$ bukan peminimal lokal, yaitu misalkan terdapat barisan $\{\boldsymbol{x}_k\}$ konvergen ke $\overline{\boldsymbol{x}}$ sehingga $f(\boldsymbol{x}_k)<f(\overline{\boldsymbol{x}})$ untuk setiap k. Sehingga berlaku $\nabla f(\overline{\boldsymbol{x}})=0$

$$\frac{f(\boldsymbol{x})-f(\overline{\boldsymbol{x}})}{\|\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}}\|^2}=\frac{1}{2}\frac{(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})^T}{\|\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}}\|^2}\boldsymbol{H}(\overline{\boldsymbol{x}})\frac{(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})}{\|\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}}\|^2}+\alpha(\overline{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}}) \qquad (3a)$$

notasikan $\boldsymbol{d}_k=(\boldsymbol{x}_k-\overline{\boldsymbol{x}})/\|\boldsymbol{x}_k-\overline{\boldsymbol{x}}\|$, persamaan (3a) menjadi

$$\frac{f(\boldsymbol{x})-f(\overline{\boldsymbol{x}})}{\|\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}}\|^2}=\frac{1}{2}\boldsymbol{d}_k^T\boldsymbol{H}(\overline{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{d}_k+\alpha(\overline{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}}) \qquad (3b)$$

dan juga berlaku $f(\boldsymbol{x}_k)<f(\overline{\boldsymbol{x}})$, yaitu $f(\boldsymbol{x})-f(\overline{\boldsymbol{x}})<0$ akibatnya $\frac{f(x)-f(\overline{x})}{\|x-\overline{x}\|^2}<0$, sehingga (3b) menjadi

$$\tfrac{1}{2}\boldsymbol{d}_k^T\boldsymbol{H}(\overline{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{d}_k+\ \alpha(\overline{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{x}_k-\overline{\boldsymbol{x}})<0 \quad \text{untuk setiap } k. \qquad (4)$$

Namun

$$\|\boldsymbol{d}_k\|=\left\|\frac{(\boldsymbol{x}_k-\overline{\boldsymbol{x}})}{\|\boldsymbol{x}_k-\overline{\boldsymbol{x}}\|}\right\|=\frac{\|\boldsymbol{x}_k-\overline{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}_k-\overline{\boldsymbol{x}}\|}=1$$

untuk setiap k, dan akibatnya terdapat suatu himpunan indeks K sehingga $\{\boldsymbol{d}_k\}_K$ konvergen ke $\boldsymbol{d}$, dengan $\|\boldsymbol{d}\|=1$. Dari subbarisan ini dan fakta bahwa $\alpha(\overline{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})\to 0$ pada $k\to\infty\in K$, maka (4) berakibat $\boldsymbol{d}^T\ \boldsymbol{H}(\overline{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{d}\le 0$. Kontradiksi dengan asumsi bahwa $\boldsymbol{H}(\overline{\boldsymbol{x}})$ definit positif dan fakta bahwa $\|\boldsymbol{d}\|=1$. Sehingga, terbukti $\bar{x}$ peminimal lokal.

Pada teorema berikut ditunjukkan jika fungsi f adalah fungsi pseudokonveks.

Teorema 4. (Bazaraa and Shetty, 1990: 126)

Diberikan $f: E_n\to E_1$ adalah pseudokonveks pada $\overline{\boldsymbol{x}}$. $\overline{\boldsymbol{x}}$ peminimal global jika dan hanya jika $\boldsymbol{\nabla} f(\overline{\boldsymbol{x}})=\boldsymbol{0}$.

Bukti:

(⇒) Dari corollary Teorema 1, jika $\overline{\boldsymbol{x}}$ peminimal global, maka $\boldsymbol{\nabla} f(\overline{\boldsymbol{x}})=\boldsymbol{0}$.

(⇐) Misalkan $\boldsymbol{\nabla} f(\overline{\boldsymbol{x}})=0$, maka $\boldsymbol{\nabla} f(\overline{\boldsymbol{x}})^T(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})=0$ untuk setiap $\boldsymbol{x}\in E_n$. Karena f pseudokonveks pada $\overline{\boldsymbol{x}}$, berakibat $f(\boldsymbol{x})\ge f(\overline{\boldsymbol{x}})$ untuk setiap $\boldsymbol{x}\in E_n$. qed.

Syarat Fritz John Pada Masalah Optimasi dengan Kendala Ketaksamaan

Masalah optimasi berkendala mempunyai model matematika sebagai berikut:

Meminimumkan $f(\boldsymbol{x})$ dengan kendala $\boldsymbol{x}\in S$.

Lebih lanjut S merupakan daerah layak masalah pemrograman linear berbentuk: meminimumkan $f(\boldsymbol{x})$ dengan kendala $g(\boldsymbol{x}) \leq 0$ dan $\boldsymbol{x} \in X$.

Syarat Geometrik Keoptimalan

Pada bagian ini akan dibangun syarat perlu keoptimalan untuk masalah meminimumkan $f(\boldsymbol{x})$ dengan kendala $\boldsymbol{x} \in S$, menggunakan kerucut arah layak yang didefinisikan berikut ini.

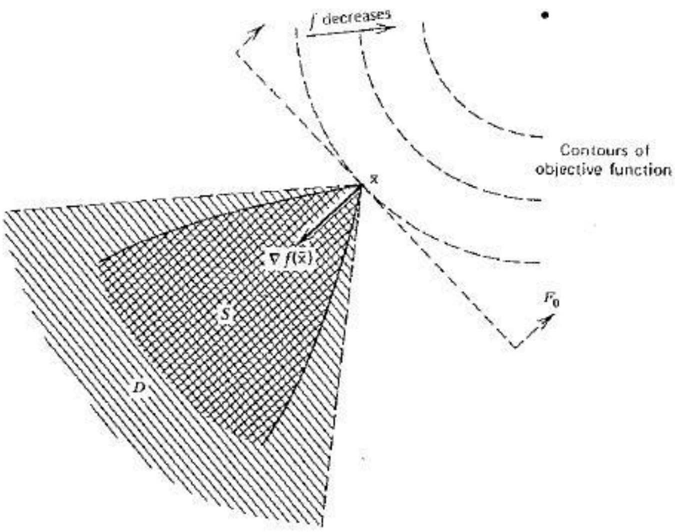
Definisi 2. (Bazaraa and Shetty, 1990: 127)

Diberikan S himpunan tak kosong pada E_n dan $\overline{\boldsymbol{x}} \in cl\ S$. Kerucut arah layak S pada $\overline{\boldsymbol{x}}$, adalah

$$D = \{\boldsymbol{d} | \boldsymbol{d} \neq \boldsymbol{0}, \text{ dan } \overline{\boldsymbol{x}} + \lambda\boldsymbol{d} \in S \text{ untuk setiap } \lambda \in (0, \delta) \text{ untuk suatu } \delta > 0\}.$$

Setiap vektor taknol $\boldsymbol{d} \in D$ disebut arah layak.

Jelas bahwa sedikit pergerakan pada $\overline{\boldsymbol{x}}$ sepanjang vektor $\boldsymbol{d} \in D$ akan berakibat titik layak cepat dicapai. Lebih lanjut, dari Teorema 1, jika $\boldsymbol{\nabla} f(\overline{\boldsymbol{x}})^T\boldsymbol{d} < 0$, maka $\boldsymbol{d}$ adalah suatu arah *improving*, yaitu mulai dari $\overline{\boldsymbol{x}}$, terjadi pergerakan kecil sepanjang $\boldsymbol{d}$ yang akan mereduksi nilai f. Seperti ditunjukkan dalam Teorema 5, jika $\overline{\boldsymbol{x}}$ peminimal lokal dan jika $\boldsymbol{\nabla} f(\overline{\boldsymbol{x}})^T\boldsymbol{d} < 0$, maka $\boldsymbol{d} \notin D$, yaitu syarat perlu keoptimalan lokal adalah setiap arah *improving* bukan arah layak. Ilustrasinya pada Gambar 1, dengan sudut kerucut F_0 dan D ditranslasi dari titik origin ke $\overline{\boldsymbol{x}}$.



Gambar 1

Teorema 5. (Bazaraa and Shetty, 1990: 128)

Pandang masalah meminimumkan $f(\boldsymbol{x})$ dengan kendala $\boldsymbol{x} \in S$, dengan $f: E_n \to E_1$, dan S himpunan tak kosong pada E_n. Misalkan f terdiferensial pada titik $\overline{\boldsymbol{x}} \in S$. Jika $\overline{\boldsymbol{x}}$ adalah solusi optimal lokal, maka $F_0 \cap D = \emptyset$, dengan $F_0 = \{\boldsymbol{d} | \boldsymbol{\nabla} f(\overline{\boldsymbol{x}})^T \boldsymbol{d} < 0\}$ dan D adalah kerucut arah layak S pada $\overline{\boldsymbol{x}}$.

Bukti:

Misalkan terdapat vektor $\boldsymbol{d} \in F_0 \cap D$. Dengan Teorema 1, terdapat suatu $\delta_1 > 0$ sehingga

$$(\overline{\boldsymbol{x}} + \lambda \boldsymbol{d}) < f(\overline{\boldsymbol{x}}) \text{ untuk setiap } \lambda \in (0, \delta_1). \tag{5}$$

Lebih lanjut, dari Definisi 2, terdapat suatu $\delta_2 > 0$ sehingga,

$$\overline{\boldsymbol{x}} + \lambda \boldsymbol{d} \in S \text{ untuk setiap } \lambda \in (0, \delta_2) \tag{6}$$

(5) dan (6) kontradiksi dengan hipotesis bahwa $\overline{\boldsymbol{x}}$ solusi optimal lokal (minimum). Akibatnya $F_0 \cap D = \emptyset$. qed.

Dikhususkan daerah layak S adalah:

$$S = \{\boldsymbol{x} \in X | g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, \text{ untuk } i = 1, \dots, m\}$$

dengan $g_i: E_n \to E_1$ untuk $i = 1, \dots, m$, dan X adalah himpunan terbuka tak kosong dalam E_n. Diperoleh masalah pemrograman nonlinear dengan kendala ketaksamaan berikut:

Masalah P:

Meminimumkan $f(\boldsymbol{x})$, dengan kendala $g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0$, untuk $i = 1, \dots, m$, $\boldsymbol{x} \in X$.

Syarat perlu keoptimalan lokal pada $\overline{\boldsymbol{x}}$ adalah $F_0 \cap D = \emptyset$, dengan F_0 adalah setengah ruang terbuka didefinisikan dalam bentuk vektor gradien $\boldsymbol{\nabla} f(\overline{\boldsymbol{x}})$, dan D adalah kerucut arah layak, yang tidak perlu didefinisikan dalam bentuk gradien fungsi terkait.

Teorema 6. (Bazaraa and Shetty, 1990: 129)

Diberikan $g_i: E_n \to E_1$ untuk $i = 1, \dots, m$, dan X adalah himpunan terbuka tak kosong dalam E_n. Pandang masalah P: meminimumkan $f(\boldsymbol{x})$ dengan kendala $g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0$, untuk $i = 1, \dots, m$, dan $\boldsymbol{x} \in X$. Diberikan $\overline{\boldsymbol{x}}$ adalah titik layak, dan diberikan $I = \{i | g_i(\overline{\boldsymbol{x}}) = 0\}$. Lebih lanjut, misalkan f dan g_i untuk $i \in I$ terdiferensial pada $\overline{\boldsymbol{x}}$ dan g_i untuk $i \notin I$ kontinu pada $\overline{\boldsymbol{x}}$. Jika $\overline{\boldsymbol{x}}$ solusi optimal lokal, maka $F_0 \cap G_0 = \emptyset$, dengan

$$F_0 = \{\boldsymbol{d} | \boldsymbol{\nabla} f(\overline{\boldsymbol{x}})^T \boldsymbol{d} < 0\} \text{ dan } G_0 = \{\boldsymbol{d} | \boldsymbol{\nabla} g_i(\overline{\boldsymbol{x}})^T \boldsymbol{d} < 0 \text{ untuk setiap } i \in I\}$$

Bukti:

Diberikan $\boldsymbol{d} \in G_0$. Karena $\overline{\boldsymbol{x}} \in X$, dan X terbuka, maka terdapat suatu $\delta_1 > 0$ sehingga

$$\overline{\boldsymbol{x}} + \lambda \boldsymbol{d} \in X \text{ untuk setiap } \lambda \in (0, \delta_1). \tag{7}$$

Karena $g_i(\overline{\boldsymbol{x}}) < 0$ dan karena g_i kontinu pada $\overline{\boldsymbol{x}}$ untuk $i \notin I$, terdapat suatu $\delta_2 > 0$ sehingga,

$$g_i(\overline{\boldsymbol{x}} + \lambda \boldsymbol{d}) < 0 \text{ untuk setiap } \lambda \in (0, \delta_2) \text{ dan untuk } i \notin I. \tag{8}$$

Akhirnya karena $\boldsymbol{d} \in G_0$ maka $\boldsymbol{\nabla} g_i(\overline{\boldsymbol{x}})^T \boldsymbol{d} < 0$ untuk setiap $i \in I$, dan dengan Teorema 1, terdapat suatu $\delta_3 > 0$ sehingga,

$$g_i(\overline{\boldsymbol{x}} + \lambda \boldsymbol{d}) < g_i(\overline{\boldsymbol{x}}) = 0 \text{ untuk setiap } \lambda \in (0, \delta_3) \text{ dan untuk } i \in I \tag{9}$$

Dari (7), (8), dan (9), jelas bahwa titik-titik berbentuk $\overline{\boldsymbol{x}} + \lambda \boldsymbol{d}$ layak untuk masalah P untuk setiap $\lambda \in (0, \delta)$, dengan $\delta =$ minimum $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$. Sehingga $\boldsymbol{d} \in D$, dengan D adalah kerucut arah layak dari daerah layak pada $\overline{\boldsymbol{x}}$. Telah ditunjukkan bahwa $\boldsymbol{d} \in G_0$ berakibat $\boldsymbol{d} \in D$, sehingga $G_0 \subset D$. Dengan Teorema 5, karena $\overline{\boldsymbol{x}}$ solusi lokal masalah P, $F_0 \cap D = \emptyset$. Karena $G_0 \subset D$, akibatnya $F_0 \cap G_0 = \emptyset$. qed.

Terdapat beberapa kasus khusus dengan syarat perlu Teorema 6 dipenuhi secara trivial oleh titik non optimal yang mungkin.

Kasus-kasus yang mungkin:

1. Jika $\overline{\boldsymbol{x}}$ adalah titik layak sehingga $\boldsymbol{\nabla} f(\overline{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0}$. Jelaslah $F_0 = \{\boldsymbol{d} | \boldsymbol{\nabla} f(\overline{\boldsymbol{x}})^T \boldsymbol{d} < 0\} = \emptyset$, dan akibatnya $F_0 \cap G_0 = \emptyset$. Akibatnya suatu titik $\overline{\boldsymbol{x}}$ dengan $\boldsymbol{\nabla} f(\overline{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0}$ memenuhi syarat perlu keoptimalan.
2. Jika suatu titik $\overline{\boldsymbol{x}}$ dengan $\boldsymbol{\nabla} g_i(\overline{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0}$ untuk setiap $i \in I$. Perhatikan masalah meminimumkan dengan kendala persamaan berikut:

   Meminimumkan $f(\boldsymbol{x})$, dengan kendala $g(\boldsymbol{x}) = 0$

   Kendala persamaan $g(\boldsymbol{x}) = 0$ dapat digantikan oleh kendala ketaksamaan

   a. $g_1(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}) \leq 0$,

   b. $g_2(\boldsymbol{x}) = -g(\boldsymbol{x}) \leq 0$.

   Misalkan $\overline{\boldsymbol{x}}$ adalah suatu titik layak. Berlaku $g_1(\overline{\boldsymbol{x}}) = g_2(\overline{\boldsymbol{x}}) = 0$. Untuk vektor gradien $g(\boldsymbol{x})$ adalah $\boldsymbol{\nabla} g(\boldsymbol{x})$, maka $\boldsymbol{\nabla} g_1(\overline{\boldsymbol{x}}) = -\boldsymbol{\nabla} g_2(\overline{\boldsymbol{x}})$, dan akibatnya tidak terdapat vektor $\boldsymbol{d}$ sehingga $\boldsymbol{\nabla} g_1(\overline{\boldsymbol{x}})^T \boldsymbol{d} < 0$ dan $\boldsymbol{\nabla} g_2(\overline{\boldsymbol{x}})^T \boldsymbol{d} < 0$. Sehingga, $G_0 = \emptyset$, dan berakibat $F_0 \cap G_0 = \emptyset$.

Dengan kata lain, syarat perlu dari Teorema 6 dipenuhi oleh semua solusi layak.

Teorema 7. (Syarat Fritz John) (Bazaraa and Shetty, 1990: 133)

Diberikan X suatu himpunan terbuka tak kosong dalam E_n, dan diberikan $f: E_n \to E_1$, dan $g_i: E_n \to E_1$ untuk $i = 1, \dots, m$. Pandang masalah P untuk meminimumkan $f(\boldsymbol{x})$ dengan kendala $\boldsymbol{x} \in X$ dan $g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0$ untuk $i = 1, \dots, m$. Diberikan $\bar{\boldsymbol{x}}$ adalah solusi layak, dan diberikan $I = \{i | g_i(\bar{\boldsymbol{x}}) = 0\}$. Lebih lanjut, misalkan f dan g_i untuk $i \in I$ terdiferensial pada $\bar{\boldsymbol{x}}$ dan bahwa g_i untuk $i \notin I$ kontinu pada $\bar{\boldsymbol{x}}$. Jika $\bar{\boldsymbol{x}}$ solusi lokal masalah P, maka terdapat u_0 dan u_i untuk $i \in I$, sehingga

$$u_0 \boldsymbol{\nabla} f(\bar{\boldsymbol{x}}) + \textstyle\sum_{i \in I} u_i \boldsymbol{\nabla} g_i(\bar{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0},\ u_0, u_i \geq 0 \ \text{ untuk } \ i \in I,\ (u_0, \boldsymbol{u}_I) \neq (0, \boldsymbol{0})$$

dengan $\boldsymbol{u}_I$ adalah vektor yang komponennya adalah u_i untuk $i \in I$. Lebih lanjut, jika g_i untuk $i \notin I$ juga terdiferensial pada $\bar{\boldsymbol{x}}$, maka syarat Fritz John dapat ditulis dalam bentuk yang ekuivalen berikut ini:

$$u_0 \boldsymbol{\nabla} f(\bar{\boldsymbol{x}}) + \textstyle\sum_{i=1}^{m} u_i \boldsymbol{\nabla} g_i(\bar{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0},\ u_i g_i(\bar{\boldsymbol{x}}) = 0 \text{ untuk } \ i = 1, \dots, m,$$

$$u_0, u_i \geq 0 \ \text{ untuk } \ i = 1, \dots, m,\ (u_0, \boldsymbol{u}) \neq (0, \boldsymbol{0})$$

dengan $\boldsymbol{u}$ adalah vektor yang komponennya adalah $u_i \geq 0$ untuk $i = 1, \dots, m$.

Bukti:

Karena $\bar{\boldsymbol{x}}$ solusi lokal masalah P, maka dengan Teorema 6, tidak terdapat vektor $\boldsymbol{d}$ sehingga $\boldsymbol{\nabla} f(\bar{\boldsymbol{x}})^T \boldsymbol{d} < 0$ dan $\boldsymbol{\nabla} g_i(\bar{\boldsymbol{x}})^T \boldsymbol{d} < 0$ untuk setiap $i \in I$. Sekarang, misalkan $\boldsymbol{A}$ adalah matriks yang baris-barisnya adalah $\boldsymbol{\nabla} f(\bar{\boldsymbol{x}})^T$ dan $\boldsymbol{\nabla} g_i(\bar{\boldsymbol{x}})^T$ untuk setiap $i \in I$. Syarat optimalitas dari Teorema 6 ekuivalen dengan pernyataan bahwa sistem $\boldsymbol{Ad} < \boldsymbol{0}$ tak konsisten. Akibatnya terdapat vektor tak nol $\boldsymbol{p} \geq \boldsymbol{0}$ sehingga $\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$. Notasikan komponen dari $\boldsymbol{p}$ dengan u_0 dan u_i untuk $i \in I$, sehingga bagian pertama teorema dipenuhi. Bentuk ekuivalen dari syarat perlu teorema diperoleh dengan memisalkan $u_i = 0$ untuk $i \notin I$. qed.

Dalam syarat Fritz John, skalar u_0 dan u_i untuk $i = 1, \dots, m$ sering disebut dengan pengali Lagrange. Syarat $u_i g_i(\bar{\boldsymbol{x}}) = 0$ untuk $i = 1, \dots, m$ disebut syarat komplemen slack. Ini menghasilkan $u_i = 0$ jika $g_i(\bar{\boldsymbol{x}}) < 0$. $u_i > 0$ hanya untuk kendala batas. Syarat Fritz John dapat juga ditulis dalam notasi vektor sebagai berikut:

$$u_0 \nabla f(\bar{\boldsymbol{x}}) + \nabla \boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{x}}) = 0,\ (u_0, \boldsymbol{u}) \geq (0, \boldsymbol{0}),\ (u_0, \boldsymbol{u}) \neq (0, \boldsymbol{0})$$

dengan $\nabla \boldsymbol{g}(\bar{\boldsymbol{x}})$ adalah matriks $n \times m$ yang kolom ke- i nya adalah $\nabla g_i(\bar{\boldsymbol{x}})$, dan $\boldsymbol{u}$ adalah m-vektor pengali Lagrange.

Seperti pada kasus Teorema 6, terdapat titik-titik yang memenuhi syarat Fritz John secara trivial. Kasus-kasus yang mungkin:

1. Jika suatu titik $\bar{\boldsymbol{x}}$ memenuhi $\nabla f(\bar{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0}$. Dimisalkan pengali Lagrange yang terkait adalah suatu bilangan positif, kemudian himpun semua pengali yang sama dengan nol, dan memenuhi syarat Teorema 7.
2. $\nabla g_i(\bar{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0}$ untuk suatu $i \in I$. Syarat Fritz John dari Teorema 7 juga dipenuhi benar secara trivial pada setiap titik layak untuk masalah dengan kendala persamaan yang digantikan oleh dua ketaksamaan. Secara khusus, jika $g(\boldsymbol{x}) = 0$ digantikan oleh $g(\boldsymbol{x}) \leq 0$ dan $-g(\boldsymbol{x}) \leq 0$, maka syarat Fritz John benar dengan $u_1 = u_2 = \alpha$ dan menghimpun semua pengali yang sama dengan nol, dengan α adalah skalar positif.

Kesimpulan

1. Untuk menentukan optimasi masalah optimasi tak berkendala, digunakan vektor gradien dengan komponennya adalah derivatif pertama fungsi atau matriks Hessian yang komponennya adalah derivatif kedua fungsi.
2. Syarat perlu keoptimalan masalah optimasi tak berkendala adalah bila dapat dicari vektor arah descent $\boldsymbol{d}$ sehingga $f(\bar{\boldsymbol{x}} + \lambda \boldsymbol{d}) < f(\bar{\boldsymbol{x}})$ untuk setiap $\lambda \in (0, \delta)$ untuk $\delta > 0$.
3. Syarat cukup keoptimalan masalah optimasi tak berkendala adalah bila dipenuhi $\nabla f(\bar{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0}$, dan $\boldsymbol{H}(\bar{\boldsymbol{x}})$ matriks semidefinit positif, maka $\bar{\boldsymbol{x}}$ peminimal lokal.

4. Untuk menentukan optimasi masalah optimasi berkendala, digunakan kerucut arah layak.

5. Syarat perlu keoptimalan masalah optimasi berkendala diperoleh jika $\bar{\boldsymbol{x}}$ solusi optimal lokal, maka $F_0 \cap G_0 = \emptyset$, dengan $F_0 = \{\boldsymbol{d} | \nabla f(\bar{\boldsymbol{x}})^T \boldsymbol{d} < 0\}$ dan $G_0 = \{\boldsymbol{d} | \nabla g_i(\bar{\boldsymbol{x}})^T \boldsymbol{d} < 0$ untuk setiap $i \in I\}$.

6. Syarat Fritz John untuk keoptimalan masalah optimasi berkendala yaitu jika $\bar{\boldsymbol{x}}$ solusi lokal masalah P, maka terdapat u_0 dan u_i untuk $i \in I$, sehingga

$$u_0 \nabla f(\bar{\boldsymbol{x}}) + \sum_{i \in I} u_i \nabla g_i(\bar{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{0},\ u_0, u_i \geq 0 \text{ untuk } i \in I,\ (u_0, \boldsymbol{u}_I) \neq (0, \boldsymbol{0})$$

dengan $\boldsymbol{u}_I$ adalah vektor yang komponennya adalah u_i untuk $i \in I$.

Daftar Pustaka

Bazaraa, Mokhtar S. and Shetty, C.M., 1990, Nonlinear Programming: Theory and Algorithms, John Wiley and Sons Inc, Toronto.

Mital, K.V., 1979, Optimization Methods: in operations Research and systems analysis, Wiley Eastern Limited, New Delhi.