SISTEM DINAMIK LINEAR KOEFISIEN KONSTAN

Caturiyati
Jurusan Pendidikan Matematika
FMIPA **U**niversitas **N**egeri **Y**ogyakarta (**UNY**)

Abstrak

Dalam artikel ini, konsep *sistem dinamik linear* disajikan dengan sistem persamaan diferensi untuk waktu diskret, dan sistem persamaan diferensial untuk waktu kontinu. Selanjutnya, sistem dinamik linear dapat dinyatakan dengan persamaan matriks. Jika masing-masing matriks konstan, maka sistem disebut *sistem dinamik linear koefisien konstan*. Untuk mempelajarinya digunakan pendekatan aljabar, khususnya teori matriks dan sistem persamaan linear. Dalam artikel ini dibahas solusi umum *sistem linear waktu diskrit dan kontinu dengan masukan (input)* homogen dan tak homogen. Untuk *sistem dinamik linear koefisien konstan* dibahas diagonalisasi sistem, titik kesetimbangan dan stabilitas.

Abstract

In this article, the concept of linear dynamical system is represented with a system of difference equations, for the case of discrete time, and a system of differential equations, for the case of continuous time. The linear dynamical systems can be expressed in the form of matrices equations. If its matrices are constant, then it is called linear dynamical systems with constant coefficients. The linear dynamical systems can be studied algebraically by using the theory of matrices and linear equations systems. This article will discuss the general solution of discrete and continuous linear dynamical systems with inputs including homogenous and non-homogenous. The linear dynamical systems with constant coefficients will be studied diagonalization of a system, equilibrium points and stability.

Kata-kata kunci*: Sistem dinamik, sistem homogen, sistem waktu invarian.*

1. Pendahuluan

Dalam kehidupan sehari-hari hampir semua kejadian yang dapat diamati merupakan peristiwa yang terjadi secara bertahap atau dinamik. Misalnya peristiwa *prey-predator* pada bidang biologi, model migrasi sederhana, berbagai model untuk bidang ekonomi, teori kelangsungan hidup, kapasitas tetap dalam kebudayaan, model populasi *cohort* dan sebagainya. Sistem dinamik secara matematis dinyatakan sebagai sistem persamaan diferensi dan sistem persamaan diferensial. Dalam artikel ini dibicarakan sistem dinamik yang merupakan model peristiwa-peristiwa yang terjadi secara bertahap. Tahapan-tahapan yang digunakan ini adalah tahapan waktu, baik dipandang sebagai variabel diskret maupun sebagai variabel kontinu.

2. Pengertian Dasar

Pada bagian ini disajikan pengertian dasar yang nantinya digunakan untuk menjelaskan konsep-konsep yang dibahas dalam artikel.

Definisi 2.1 (Luenberger, 1979, 101)
Himpunan dari barisan m vektor $\boldsymbol{x}_1(k)$, $\boldsymbol{x}_2(k)$, ... , $\boldsymbol{x}_m(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ dikatakan bebas linear jika tidak ada kombinasi linear nontrivial dari mereka yang sama dengan nol sehingga, jika relasi $a_1\boldsymbol{x}_1(k) + a_2\boldsymbol{x}_2(k) + \dots + a_m\boldsymbol{x}_m(k) = 0$, untuk semua k, maka semua a_i sama dengan nol. ☉

Definisi 2.2 (Luenberger, 1979, 77). Suatu bilangan λ merupakan nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{A}_{n\text{x}n}$ jika terdapat vektor tak nol $\boldsymbol{x}_{n\text{x}1}$ sehingga $\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{x} = \lambda\ \boldsymbol{x}$**.** Vektor $\boldsymbol{x}$ yang bersesuaian dikatakan vektor eigen dari matriks $\boldsymbol{A}$. ☉

Lemma 2.1 (Luenberger, 1979, 68). Jika $\boldsymbol{X}$ matriks n x n, maka persamaan homogen $\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ mempunyai penyelesaian tak nol (suatu vektor $\boldsymbol{x}$ yang tidak semua komponennya nol) jika dan hanya jika matrik $\boldsymbol{A}$ singular. ☉

3. Persamaan Keadaan Linear (*Linear State Equation*)

Dalam bagian ini, konsep dinamik disajikan dengan persamaan diferensi dan persamaan diferensial, dikombinasikan dengan perlengkapan aljabar linear, untuk mempelajari pendekatan modern sistem dinamik. Dasar untuk pendekatan ini adalah sistem persamaan linear, baik dalam waktu diskret maupun waktu kontinu. Kelakuan dinamik yang dipandang dalam waktu diskret disajikan dengan persamaan diferensi, dan untuk waktu kontinu disajikan dengan persamaan diferensial.

3.1. Sistem Persamaan Order Satu

Definisi 3.1.1: Sistem order n didefinisikan sebagai n variabel $x_1(k)$, $x_2(k)$, ... , $x_n(k)$, yang masing-masing merupakan fungsi indeks k. Sistem n persamaan diferensi order satu menghubungkan n variabel ini. ☉

Bentuk umum sistem order n waktu diskret adalah :

$$x_1(k + 1) = f_1\ (x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k), k)$$

$$x_2(k + 1) = f_2\ (x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k), k)$$

(3.1.1) $$x_3(k + 1) = f_3\ (x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k), k)$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$x_n(k + 1) = f_n\,(x_1(k), x_2(k), \ldots., x_n(k), k).$$

Fungsi-fungsi f_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, mendefinisikan sistem. Variabel-variabel $x_i(k)$, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$ dipandang sebagai sesuatu yang tidak diketahui dan nilai-nilainya ditentukan melalui sistem persamaan, disebut *variabel keadaan* (Luenberger, 1979, 90).

Definisi 3.1.2 : Variabel keadaan adalah keadaan dalam sistem dinamik, yang jika dikhususkan pada suatu waktu awal k_o (atau t_o dalam waktu kontinu) dapat digunakan untuk menduga kelakuan sistem untuk semua $k \geq k_o$ (atau $t \geq t_o$ dalam waktu kontinu), dengan menetapkan bahwa masukan sistem diketahui untuk semua $k \geq k_o$ (atau $t \geq t_o$ dalam waktu kontinu). ☉

Penyelesaian sistem (3.1.1) diperoleh dengan proses pengulangan dimulai dari keadaan awal yang diberikan. Misalnya sistem didefinisikan untuk $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, maka nilai $x_1(0)$, $x_2(0)$, … , $x_n(0)$ merupakan keadaan awal sistem yang disubstitusikan ke dalam ruas kanan, yang selanjutnya digunakan untuk menghasilkan nilai-nilai $x_1(1)$, $x_2(1)$, … , $x_n(1)$. Pada tahap berikutnya diperoleh $x_1(2)$, $x_2(2)$, ... , $x_n(2)$ dengan menggunakan $x_1(1)$, $x_2(1)$, ... , $x_n(1)$ sebagai keadaan awal. Proses dilanjutkan, pada setiap tahap pengulangan, himpunan variabel keadaan $x_1(k)$, $x_2(k)$, ... , $x_n(k)$ yang bersesuaian digunakan sebagai keadaan awal untuk tahap berikutnya.

Definisi 3.1.3: Sistem order n didefinisikan sebagai n variabel $x_1(t)$, $x_2(t)$, ... , $x_n(t)$ yang masing-masing merupakan fungsi t yang kontinu, n variabel ini dihubungkan dengan sistem n persamaan diferensial order satu. ☉

Bentuk umum sistem order n waktu kontinu adalah :

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= f_1\,(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), t)\\
\dot{x}_2(t) &= f_2\,(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), t)\\
\dot{x}_3(t) &= f_3\,(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), t) \qquad (3.1.2)\\
&. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .\\
\dot{x}_n(t) &= f_n\,(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), t),
\end{aligned}
$$

dengan $\dot{x}(t)$ = dan $x_1(t)$, $x_2(t)$, …., $x_n(t)$, adalah variabel-variabel keadaan (Luenberger, 1979, 91).

Sistem Linear

Sistem waktu diskret disebut linear jika mempunyai bentuk matriks

(3.1.3) $$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}(k)\,\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{w}(k),$$

dengan $\boldsymbol{x}(k) = [x_i(k)]_{nx1}$ vektor keadaan berukuran nx1

$\boldsymbol{w}(k) = [w_i(k)]_{nx1}$ *forcing vector* berukuran nx1

$\boldsymbol{A}(k) = [a_{ij}(k)]_{nxn}$ matriks sistem berukuran nxn

Secara analog, sistem dinamik linear waktu kontinu order n, dinyatakan dalam bentuk matriks

(3.1.4) $$\dot{x}(t) = \boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{w}(t),$$

dengan $\dot{x}(t)$ = .

Masukan (*Input*)

Pada banyak aplikasi, *forcing term* atau *driving term* dalam sistem didapatkan dari satu atau beberapa masukan pada sistem tertentu, yang dapat mengendalikan kelakuan sistem.

Sistem linear waktu diskret dengan masukan mempunyai bentuk matriks

(3.1.5) $$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}(k)\boldsymbol{u}(k).$$

dengan $\boldsymbol{B}(k) = [b_{ij}(k)]_{nxm}$ matriks distribusi masukan dalam sistem $\boldsymbol{u}(k) = [u_i(k)]_{mx1}$ sehingga $\boldsymbol{w}(k) = \boldsymbol{B}(k)\boldsymbol{u}(k)$.

Dalam waktu kontinu, sistem linear dengan masukan mempunyai bentuk

(3.1.6) $$\dot{x}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t).$$

3.2. Konversi ke Bentuk Keadaan dan Diagram Dinamik

Persamaan diferensi dan persamaan diferensial yang telah didefinisikan dalam bagian 3.1, dapat dikonversikan ke sistem persamaan order satu yang ekuivalen. Mengingat persamaan diferensi linear

(3.2.1) $y(k+n) = a_{n-1}(k)y(k+n-1) + \ldots + a_0(k)y(k) + u(k),\ k = 0,1,2,\ldots$;

untuk menyusun suatu sistem yang mewakili, didefinisikan n variabel keadaan sebagai n nilai dari $y(k)$, yaitu

(3.2.2) $x_1(k) = y(k),\ x_2(k) = y(k+1),\ \ldots,\ x_n(k) = y(k+n-1)$.

Dengan definisi (3.2.2), diperoleh

(3.2.3) $x_1(k+1) = x_2(k),\ x_2(k+1) = x_3(k),\ \ldots,\ x_{n-1}(k+1) = x_n(k)$.

Karena $x_n(k) = y(k+n-1)$, maka $x_n(k+1) = y(k+n)$. Sehingga (3.2.1) menjadi,

$$x_n(k+1) = -a_0(k)x_1(k) - a_1(k)x_2(k) - \ldots - a_{n-1}(k)x_n(k) + u(k)$$

dan $y(k) = x_1(k)$, $k = 0,1,2,\ldots$. Pendefinisian vektor keadaan $\mathbf{x}(k) = (x_1(k), x_2(k), \ldots, x_n(k))$, menghasilkan sistem linear $x_1(k+1) = x_2(k)$, $x_2(k+1) = x_3(k)$, ..., $x_{n-1}(k+1) = x_n(k)$. Selanjutnya diperoleh matriks *companion*[1] berikut

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0(k) & -a_1(k) & -a_2(k) & \cdots & -a_{n-1}(k) \end{bmatrix}.$$

Dengan cara yang sama persamaan diferensial dapat dikonversikan ke bentuk keadaan. Dalam hal ini variabel keadaan merupakan variabel tak bebas $y(t)$ dan $(n-1)$ derivatif pertamanya. Struktur yang dihasilkan identik dengan persamaan diferensi.

Diagram Dinamik

Suatu sistem order tinggi secara struktural merupakan kumpulan dari sisteam order satu yang saling berhubungan. hal ini ditunjukkan dalam suatu pola hubungan berbentuk diagram, yang terdiri dari *summer* sebagai penjumlah, *transmission* sebagai pengali, *splitting* sebagai pembagi dengan nilai sama dengan nilai semula, *delay* sebagai komponen dinamik dasar untuk sistem waktu diskret dan *integrator* sebagai komponen dinamik dasar untuk sistem waktu kontinu.

---

[1] Matriks *companion* adalah matriks di mana 1 (satu) terletak pada *off-diagonal*, dan lainnya nol kecuali pada baris terakhir.

3.3. Sistem Homogen Waktu Diskrit dan Kontinu

Suatu sistem dinamik linear dikatakan homogen jika $\boldsymbol{w}(k) = 0$. Dengan kata lain, untuk kasus waktu diskret, sistem dinamik linear homogen dapat disajikan sebagai

(3.3.1) $$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{x}(k).$$

Penyelesaian Sistem Homogen

Sistem homogen $\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{x}(k)$ dapat diselesaikan secara rekursif jika nilai keadaan awal diketahui, misalnya $\boldsymbol{x}(0)$. Dengan substitusi yang berulang ke persamaan (3.3.1), untuk $k = 0, 1, 2, \ldots$, diperoleh

$$\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{A}(k–1)\boldsymbol{A}(k–2)\ldots\boldsymbol{A}(1)\boldsymbol{A}(0)\boldsymbol{x}(0).$$

Matriks ini disebut *matriks transisi keadaan*.

Definisi 3.3.1 (Luenberger, 1979, 100)

Suatu matriks transisi keadaan dari sistem homogen adalah

(3.3.2) $\boldsymbol{\Phi}(k,\ell) = \boldsymbol{A}(k–1)\boldsymbol{A}(k–2)\ldots\boldsymbol{A}(\ell)$ dengan $k > \ell$, atau secara ekuivalen

(3.3.3) $\boldsymbol{\Phi}(k+1,\ell) = \boldsymbol{A}(k–1)\,\boldsymbol{A}(k–2)\,\ldots\,\boldsymbol{A}(\ell) = \boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{\Phi}(k+1,\ell)$ dengan $k > \ell$

(3.3.4) $\boldsymbol{\Phi}(\ell,\ell) = \boldsymbol{I}$. ☉

Dari definisi ini dapat ditentukan nilai $\boldsymbol{x}(k)$, jika $\boldsymbol{x}(\boxed{})$ diketahui sebagai nilai keadaan awal untuk $k \geq \ell$, dengan menggunakan metode rekursi,

(3.3.5) $$\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{\Phi}(k,\boxed{})\boldsymbol{x}(\boxed{}).$$

Selanjutnya, pandang $\boldsymbol{x}^1(k), \boldsymbol{x}^2(k), \ldots, \boldsymbol{x}^n(k)$ sebagai kumpulan n penyelesaian persamaan homogen (3.3.1). Setiap $\boldsymbol{x}^i(k)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, yang memenuhi persamaan $\boldsymbol{x}^i(k+1) = \boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{x}^i(k)$. Dianggap n penyelesaian ini bebas linear. Himpunan $\boldsymbol{x}^1(k), \boldsymbol{x}^2(k), \ldots, \boldsymbol{x}^n(k)$ ini disebut himpunan dasar penyelesaian. Matriks $\boldsymbol{X}(k) = [\boldsymbol{x}^1(k), \boldsymbol{x}^2(k), \ldots, \boldsymbol{x}^n(k)]$ disebut matriks dasar penyelesaian dan merupakan matriks non singular.

Lemma 3.3.1 : Matriks dasar penyelesaian $\boldsymbol{X}(k)$ adalah matriks non singular untuk setiap nilai k. ☉

Proposisi 3.3.1 : Misalkan $\boldsymbol{X}(k)$ matriks dasar penyelesaian sistem $\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{x}(k)$. Matriks transisi keadaan diberikan oleh $\boldsymbol{\Phi}(k, \quad) = \boldsymbol{X}(k)\boldsymbol{X}(\quad)^{-1}$ untuk $k \geq \quad$. ☉

Analog dengan sistem waktu diskret, sistem dinamik linear homogen waktu kontinu dapat disajikan sebagai

(3.3.6) $$\dot{\mathrm{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t).$$

Elemen-elemen matriks $\boldsymbol{A}(t)$ ini merupakan fungsi kontinu terhadap t, sehingga mempunyai penyelesaian tunggal yang berkorespondensi dengan setiap vektor keadaan awal. Dengan demikian untuk setiap keadaan awal yang berbeda, diperoleh penyelesaian yang berbeda pula.

Definisi 3.3.2 : Matriks transisi keadaan $\boldsymbol{\Phi}(t, \tau)$ yang berhubungan dengan sistem dinamik linear homogen waktu kontinu adalah matriks fungsi berukuran n x n yang memenuhi

(i) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \boldsymbol{\Phi}(t,\tau) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)$,

(ii) $\boldsymbol{\Phi}(\tau,\tau) = \boldsymbol{I}$.

Kolom ke-1 sampai dengan ke-n matriks $\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)$ ini merupakan penyelesaian dari sistem homogen waktu kontinu (3.3.6). ☉

Selanjutnya, dari definisi ini dapat ditentukan nilai $\boldsymbol{x}(t)$ jika $\boldsymbol{x}(\tau)$ diketahui sebagai nilai awal, yaitu

(3.3.7) $$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\, \boldsymbol{x}(\tau),$$

untuk semua nilai t. Dengan kata lain, $\boldsymbol{x}(t)$ merupakan sebuah penyelesaian, karena $\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)x(\tau)$ merupakan kombinasi linear dari kolom-kolom matriks transisi keadaan yang masing-masing merupakan penyelesaian.

Misalkan $\boldsymbol{x}^1(t)$, $\boldsymbol{x}^2(t)$, …, $\boldsymbol{x}^n(t)$ merupakan penyelesaian-penyelesaian yang bebas linear dari persamaan homogen (3.3.7). Penyelesaian-penyelesaian tersebut dikatakan himpunan dasar penyelesaian. Matriks $\boldsymbol{X}(t)$, yang didefinisikan sebagai

(3.3.8) $$\boldsymbol{X}(t) = [\boldsymbol{x}^1(t), \boldsymbol{x}^2(t), \ldots, \boldsymbol{x}^n(t)]$$

disebut matriks dasar penyelesaian. Matriks ini memenuhi persamaan diferensi matriks

(3.3.9) $$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t).$$

Lemma 3.3.2 : Suatu matriks dasar penyelesaian $\boldsymbol{X}(t)$ adalah non singular untuk semua nilai t. ☉

Proposisi 3.3.2: Jika $\boldsymbol{X}(t)$ merupakan matriks dasar penyelesaian yang berkorespondensi dengan sistem homogen $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)$, maka matriks transisi keadaannya adalah $\boldsymbol{\Phi}(t,\tau) = \boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}(\tau)^{-1}$. ☉

Sistem Waktu Invarian (*Time-Invariant System*)

Misalkan $\dot{x}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$ merupakan sistem waktu invarian atau sistem koefisien konstan. Matriks dasar penyelesaian dari sistem tersebut harus memenuhi (i) $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X}(t)$, dan (ii) $\boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{I}$. Matriks ini dapat dinyatakan sebagai ekspansi deret pangkat,

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \quad + \ldots + \quad + \ldots$$

Untuk sebarang t dan $\boldsymbol{A}$ matriks nxn, didefinisikan matriks eksponensial

$$e^{\boldsymbol{A}t} = 1 + \boldsymbol{A}t + \quad + \quad + \ldots + \quad ,$$

yaitu matriks bujur sangkar yang sama ukurannya dengan $\boldsymbol{A}_{nxn}$ (**Olsder, 1994, 35**).

Selanjutnya dapat ditemukan matriks transisi keadaan dari sistem waktu invarian, yaitu $\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)$ = $\boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{X}(\tau)^{-1}$ = $e^{At}\ e^{-A\tau}$ = $e^{A(t-\tau)}$. Matriks $\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)$ bergantung pada diferensi $(t - \tau)$, namun untuk lebih memudahkan ditulis sebagai $\boldsymbol{\Phi}(t) = e^{At}$.

3.4. Penyelesaian Umum Sistem Waktu Diskret dan Kontinu

Perhatikan sistem persamaan berikut

(3.4.1) $\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}(k)\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}(k)\boldsymbol{u}(k)$,

dengan $\boldsymbol{x}(k)$ vektor keadaan berdimensi n, $\boldsymbol{A}(k)$ matriks sistem nxn, $\boldsymbol{B}(k)$ matriks distribusi nxm dan $\boldsymbol{u}(k)$ vektor masukan berdimensi m.

Proposisi 3.4.1 (Luenberger, 1979, 109).

Penyelesaian sistem (3.4.1) dalam bentuk masukan dan keadaan awal $\boldsymbol{X}(0)$ adalah

(3.4.2) $\boldsymbol{X}(k) = \Phi(k,0)\boldsymbol{X}(0) + \sum_{\ell=0}^{k-1} \Phi(k,\quad +1)\boldsymbol{B}(\quad)\boldsymbol{u}(\quad)$. ⊙

Superposisi

Kelinearan sistem (3.4.1) menyatakan bahwa penyelesaian sistem dapat dihitung dengan prinsip superposisi. Tanggapan total yang disebabkan oleh beberapa masukan adalah jumlah dari tanggapan masing-masing, ditambah keadaan awalnya.

Bentuk pertama persamaan (3.4.2), yaitu $\Phi(k,0)\boldsymbol{X}(0)$, merupakan tanggapan dari sistem jika sistem itu homogen. Bentuk kedua, yaitu $\sum_{\ell=0}^{k-1} \Phi(k,\quad +1)\boldsymbol{B}(\quad)\boldsymbol{u}(\quad)$, merupakan penyelesaian umum yang berhubungan dengan masing-masing masukan.

Tanggapan total terhadap sistem adalah superposisi dari tanggapan masing-masing. Oleh karena itu dapat diinterpretasikan bahwa penyelesaian total (3.4.2) untuk sistem dapat dipandang sebagai jumlah dari tanggapan homogen yang dimulai dari waktu yang berbeda.

Penyelesaian Sistem Waktu Invarian

Jika sistem (3.4.1) merupakan sistem waktu invarian, maka penyelesaian umum dan interpretasinya dapat disederhanakan. Ini menunjukkan konsep formal dari tanggapan rangsangan dari suatu sistem linear waktu invarian. Bentuk persamaan untuk sistem linear waktu invarian adalah

(3.4.3) $$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{Ax}(k) + \boldsymbol{Bu}(k).$$

Dari definisi 3.3.1, maka matriks transisi keadaan untuk sistem (3.4.3) adalah

(3.4.4) $$\Phi(k,0) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{A}.\ldots\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^k \text{ dan } \Phi(k,\quad +1) = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{A}\ldots\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{k-(\quad +1)} = \boldsymbol{A}^{k-\quad -1}.$$

Oleh karena itu penyelesaian umum yang berhubungan dengan sistem (3.4.3) adalah

(3.4.5) $$\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}(0) + \sum_{\ell=0}^{k-1} \boldsymbol{A}^{k-(\quad +1)}\boldsymbol{Bu}(\quad).$$

Penyelesaian sistem waktu invarian ini merupakan kasus khusus dari penyelesaian umum waktu diskret dan waktu kontinu.

Seperti pada kasus waktu diskret, untuk waktu kontinu dapat disajikan matriks transisi keadaan yang bersesuaian dengan sistem homogen.

Proposisi 3.4.2. (**Olsder, 1994, 34**)

Penyelesaian sistem untuk waktu kontinu yang dinyatakan dalam keadaan awal $x(0)$ dengan masukan, adalah

(3.4.6) $$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t,0)\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t \Phi(t,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)d\tau. \odot$$

Selanjutnya, rumus penyelesaian (3.4.6) akan ditafsirkan dengan menggunakan prinsip superposisi.

(i) Suku pertama dari (3.4.6) adalah $\Phi(t,0)\boldsymbol{x}(0)$ merupakan tanggapan sistem terhadap keadaan awal,

(ii) Suku keduanya adalah $\int_0^t \Phi(t,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$ merupakan penyelesaian umum yang berhubungan dengan masing-masing masukan.

3.5. Embedded Statics

Dalam merumuskan sistem persamaan untuk melukiskan situasi dinamik, pada awalnya sistem persamaan tersebut mungkin tidak ditulis dalam bentuk variabel keadaan standar (dalam pembicaraan ini dibatasi untuk waktu diskret), yaitu $\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{Ax}(k) + \boldsymbol{B}u(k)$, tetapi dalam bentuk $\boldsymbol{Ex}(k+1) = \boldsymbol{Ax}(k) + \boldsymbol{Bu}(k)$ dengan $\boldsymbol{E}$ dan $\boldsymbol{A}$ berturut-turut adalah matriks-matriks berukuran nxn dan nxm. Matriks-matriks tersebut tidak harus konstan. Untuk transformasi ke bentuk standar perlu diselidiki dua kasus :

(i) Jika $\boldsymbol{E}$ non singular, maka $\boldsymbol{E}$ punya invers. Kalikan kedua ruas dengan $\boldsymbol{E}^{-1}$ untuk menghasilkan vektor keadaan standar berbentuk $\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{E}^{-1}\boldsymbol{Ax}(k) + \boldsymbol{E}^{-1}\boldsymbol{Bu}(k)$.

(ii) Jika $\boldsymbol{E}$ singular, sehingga $\boldsymbol{E}$ tidak mempunyai invers, maka sistem memuat persamaan dinamik dan persamaan statik (melekat/*embedded* dalam kerangka dinamik) sekaligus karena $\boldsymbol{E}$ memuat baris nol.

4. Sistem Linear Koefisien Konstan

Suatu sistem linear dengan koefisien konstan untuk waktu diskret adalah $\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{Ax}(k) + \boldsymbol{Bu}(k)$ dan untuk waktu kontinu adalah $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{Ax}(t) + \boldsymbol{Bu}(t)$. Di sini $\boldsymbol{x}(k)$ dan $\boldsymbol{x}(t)$ adalah vektor keadaan berukuran nx1, $\boldsymbol{A}$ adalah matriks berukuran nxn, yang berisi koefisien konstan a_{ij}, $\boldsymbol{u}(k)$ dan $\boldsymbol{u}(t)$ adalah vektor input mx1, dan $\boldsymbol{B}$ adalah matriks distribusi nxm. Konsep penting dalam pembicaraan ini adalah nilai eigen dan vektor eigen yang didefinisikan dengan matriks $\boldsymbol{A}$.

4.1. Diagonalisasi Sistem Vektor Eigen

Dalam bagian ini akan dibicarakan diagonalisasi suatu sistem yang didasarkan pada vektor eigen yang ada pada matriks sistem $\boldsymbol{A}$.

Untuk waktu diskret, elemen dinamik dasar adalah *unit delay*. Jika barisan $u(k)$ digunakan sebagai masukan maka keluarannya $x(k)$, dibangun oleh $x(k+1) = u(k)$. Jika $u(k)$ adalah barisan geometri, misalkan $u(k) = a^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, maka $u(k)$ = , $k = 1, 2, \dots$, dengan kata lain akibat dari *delay* ini adalah mengalikan barisan geometri dengan suatu konstanta. Secara umum untuk sebarang sistem linear koefisien konstan order ke-n yang terdiri dari n *unit delay* dan sejumlah perkalian skalar, jika suatu barisan digunakan sebagai masukan, maka barisan ini akan melalui beberapa *delay*, dengan perkalian skalar yang tidak akan merubah bentuknya. Secara analog dapat ditentukan untuk waktu kontinu dengan fungsi eksponensial e^{-at}, artinya jika e^{-at} berfungsi sebagai masukan maka keluarannya akan menjadi masukan untuk sistem selanjutnya.

Dari pembicaraan di atas dapat diambil kesimpulan bahwa barisan geometri dan fungsi eksponensial adalah komponen dasar penyelesaian sistem waktu diskret maupun waktu kontinu. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa vektor eigen adalah subsistem order satu yang bebas. Jika terdapat himpunan lengkap yang terdiri dari n vektor eigen bebas linear, maka sistem itu dapat dipecah menjadi n sistem order satu yang terpisah.

Teorema 4.1. : Jika vektor keadaan dari sistem linear homogen koefisien konstan mulanya bersekutu dengan vektor eigen, maka vektor tersebut bersekutu dalam periode waktu berikutnya. Suatu koefisien, $z_i(k)$, yang menentukan perkalian dari vektor eigen pada waktu k, memenuhi persamaan order satu $z_i(k+1) = \lambda_i z_i(k)$. ⊙

Untuk membuktikan teorema tersebut diberikan sistem homogen $\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k)$. Dianggap matriks sistem $\boldsymbol{A}$ mempunyai suatu himpunan lengkap dari vektor eigen $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ bebas linear yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Ambil $z_i(k)$, $i = 1, 2, \dots, n$, merupakan skalar-skalar dari keadaan $\boldsymbol{x}(k)$. Jika terdapat n vektor eigen, maka $\boldsymbol{x}(k) = z_1(k)\boldsymbol{e}_1 + z_2(k)\boldsymbol{e}_2 + \dots + z_n(k)\boldsymbol{e}_n$. Jika $\boldsymbol{x}(k)$ dikalikan dengan $\boldsymbol{A}$, karena $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i = \lambda_i\boldsymbol{e}_i$ dan $z_i(k+1) = \lambda_i z_i(k)$, maka diperoleh $\boldsymbol{x}(k+1) = z_1(k+1)\boldsymbol{e}_1 + z_2(k+1)\boldsymbol{e}_2 + \dots + z_n(k+1)\boldsymbol{e}_n$. Dari sini dapat dilihat bahwa koefisien skalar z_i memenuhi persamaan diferensi order pertama. Dengan kata lain, sistem homogen

$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{Ax}(k)$ dapat dipandang sebagai n sistem order pertama terpisah yang masing-masing sistem diatur oleh satu vektor eigen. ⊙

Selanjutnya diagonalisasi dilakukan dengan memisalkan $\boldsymbol{M}$ matriks modal dari $\boldsymbol{A}$ yakni $\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n]_{nxn}$, dengan $\boldsymbol{e}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, adalah vektor-vektor eigen dari $\boldsymbol{A}$. Diperoleh $\boldsymbol{z}(k+1) = \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{AM}\ \boldsymbol{z}(k)$ suatu persamaan yang merupakan definisi suatu sistem baru yang dihubungkan dengan sistem asli dengan suatu perubahan variabel, dengan $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{AM} = diag(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n) = \boldsymbol{\Lambda}$.

Cara yang sama dapat dikerjakan untuk waktu kontinu $\dot{x}(t) = \boldsymbol{Ax}(t)$, dengan $\boldsymbol{A}$ matriks nxn, n vektor eigen bebas linear, dan $(t) = \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{AMz}(t)$.

Pada kenyataannya diagonalisasi seperti di atas dapat dilakukan dengan menggunakan vektor eigen kanan dan vektor eigen kiri secara bersamaan. Yang dimaksud dengan vektor eigen kanan adalah vektor eigen yang memenuhi persamaan $\boldsymbol{Ae}_i = \lambda_i\boldsymbol{e}_i$, sedangkan yang dimaksud dengan vektor eigen kiri adalah vektor eigen yang memenuhi persamaan $\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \lambda_i\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{T}}$.

4.2. Titik Kesetimbangan dan Stabilitas

Suatu vektor disebut titik kesetimbangan dari sistem dinamik jika sekali vektor keadaan sistem sama dengan , maka untuk waktu yang akan datang tetap sama dengan .

Misalkan sistem homogen $\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k)$ selalu mempunyai titik pangkal yaitu = $\boldsymbol{0}$. Titik kesetimbangan yang lain harus memenuhi = $\boldsymbol{A}$. Untuk sistem non homogen waktu diskret $\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + b$, adalah titik kesetimbangan sistem jika ini memenuhi persamaan = $\boldsymbol{A}$ + $\boldsymbol{b}$. Untuk sistem homogen waktu kontinu = $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$, juga mempunyai titik pangkal = $\boldsymbol{0}$ sebagai titik kesetimbangan.

Pandang sistem waktu invarian linear berbentuk $\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{b}$ atau $\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}$. Misalkan , titik kesetimbangan suatu sistem dinamik. Titik dikatakan **stabil**, jika vektor keadaan diubah sedikit dari titik kesetimbangan tersebut, maka ia akan menuju ke , atau paling sedikit tidak mempertahankan perubahan lebih lanjut. Titik dikatakan **stabil secara asimtotik**, jika untuk sebarang kondisi awal, vaktor keadaan menuju ke untuk waktu yang bertambah besar. Titik dikatakan **tidak stabil**, jika untuk suatu kondisi awal yang bersesuaian, vektor keadaan menuju tak hingga. (**Olsder, 1994, 51**)

5. Penutup

Sistem *n* persamaan diferensi atau diferensial, sesuai waktu diskrit atau kontinu, order satu yang menghubungkan *n* variabel keadaan merupakan model yang baik untuk sistem dinamik. Selanjutnya, sifat persamaan linear mengakibatkan tanggapan sistem terhadap masukan dapat dihitung dengan prinsip superposisi.

Sistem dinamik yang disajikan dalam sistem *n* persamaan order satu, akan lebih menguntungkan jika ditulis dalam sistem persamaan dalam bentuk variabel standar, antara lain karena mudah ditafsirkan. Oleh karena itu, akan lebih baik jika sistem dinamik yang disajikan dalam sistem dengan embed statik ditransformasikan ke sistem dalam bentuk variabel keadaan.

Sistem persamaan diferensi (diferensial) yang menggambarkan konsep dinamik dalam bentuk matriks menghasilkan konsep-konsep dasar tentang sifat sistem dinamik tersebut, seperti stabilitas sistem yang dapat ditentukan dengan melihat nilai eigen matriks sistem.

DAFTAR PUSTAKA

Luenberger, D.G. (1979). *Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models, and Applications.* New York: John Wiley and Sons.

Olsder, G.J. (1994). *Mathematical System Theory*. Netherlands: Delftse Uitgevers Maatschappij.