Sifat-sifat Super Matriks dan Super Ruang Vektor

Caturiyati
Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY
wcaturiyati@yahoo.com

Abstrak

Suatu matriks yang elemen-elemennya merupakan bilangan disebut dengan matriks sederhana atau lebih dikenal dengan matriks. Sedangkan supermatriks adalah suatu matriks yang elemen-elemennya bisa berupa skalar atau matriks. Pada aljabar linear, supermatriks disebut juga dengan matriks blok. Beberapa sifat yang ada pada matriks, muncul sebagai sifat pada supermatriks, seperti super matriks simetris dan super matriks transpos. Suatu abelian super grup atas suatu lapangan F yang memenuhi syarat-syarat super ruang vektor disebut super ruang vektor atas lapangan F. Elemen pada super ruang vektor disebut supervektor.
Kata kunci : super matriks, super ruang vektor, super vektor

I. Pendahuluan

Sebuah matriks adalah suatu kumpulan bilangan dalam susunan array persegi. Contoh-contoh matriks:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ -5 & 0 & 7 & -8 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 11 \end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix},$$

Matriks-matriks tersebut disebut dengan matriks sederhana. Dari definisi tersebut, maka matriks sederhana dapat didefinisikan sebagai suatu matriks yang setiap elemen-elemennya adalah bilangan atau huruf yang bertindak sebagai bilangan. Dengan kata lain, elemen-elemen dari suatu matriks sederhana adalah skalar-skalar atau besaran skalar.

Suatu matriks dengan banyaknya kolom adalah 1, sering disebut dengan vektor. Secara geometri di R^2 dan R^3, vektor adalah besaran yang mempunyai besar dan arah. Dalam aljabar, elemen dari suatu himpunan tak kosong yang memenuhi syarat-syarat struktur ruang vektor disebut vektor.

II. Pembahasan

Supermatriks didefinisikan sebagai suatu matriks dengan elemen-elemennya berupa skalar-skalar atau matriks-matriks. (Kandasamy and Smarandache, 2008)

Sebagai ilustrasi supermatriks, diandaikan ada 4 matriks

$$a_{11}=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ a_{12}=\begin{bmatrix}0 & 40\\ 21 & -12\end{bmatrix},\ a_{21}=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 5 & 7\\ -2 & 9\end{bmatrix}, \text{ dan } a_{22}=\begin{bmatrix}4 & 12\\ -17 & 6\\ 3 & 11\end{bmatrix}.$$

dengan asumsi a_{ij}, $1 \le i, j \le 2$, menotasikan matriks, bukan skalar elemen suatu matriks.

Jika ke-empat matriks disusun dalam matriks berikut:

$$a=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix};$$

Secara lengkap ditulis sebagai

$$a=\left[\begin{array}{cc|cc}2 & -4 & 0 & 40\\ 0 & 1 & 21 & -12\\ \hline 3 & -1 & 4 & 12\\ 5 & 7 & -17 & 6\\ -2 & 9 & 3 & 11\end{array}\right].$$

Maka a disebut supermatriks berukuran 2×2. Pada aljabar linear, supermatriks disebut dengan matriks blok.

Cara membentuk supermatriks: (Yost, 1991)

a. Partisi simetri

Partisi simetri merupakan suatu cara mempartisi suatu matriks sederhana baris dan kolomnya dengan cara yang sama.

Aturan partisi simetri suatu matriks sederhana simetri adalah:

(1) Submatriks-submatriks penyusun elemen diagonal super matriks adalah matriks-matriks simetri.

(2) Elemen-elemen di bawah dan di atas elemen diagonal saling transpos.

Contoh:

$$a_s=\left[\begin{array}{c|cc|c}2 & 3 & 4 & 1\\ \hline 5 & 6 & 9 & 2\\ 0 & 6 & 1 & 9\\ \hline 5 & 1 & 1 & 5\end{array}\right]$$. Matriks a_s dipartisi antara kolom 1 dan 2 serta kolom 3 dan 4, baris 1 dan 2 sera baris 3 dan 4.

$$a = \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 3 & 2 & 7 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \\ \hline 2 & 1 & 5 & 2 \\ 7 & 4 & 2 & 7 \end{array}\right]$$, matriks partisi simetris tersebut merupakan suatu super matriks

dengan $a_{11} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, $a_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $a_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$, dan $a_{22} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$, sehingga supermatriks $a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. a_{11} dan a_{22} adalah matriks-matriks simetri dan merupakan elemen-elemen diagonal supermatriks a. a_{12} adalah matriks transpos dari a_{21}, dan a_{12} dan a_{21} merupakan elemen-elemen non diagonal supermatriks a.

b. Supermatriks orde empat yang diperoleh melalui partisi simetri matriks sederhana simetri didefinisikan sebagai berikut:

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12}^T & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13}^T & a_{23}^T & a_{33} & a_{34} \\ a_{14}^T & a_{24}^T & a_{34}^T & a_{44} \end{bmatrix}$$

dengan

(i) $a_{11} = a_{11}^T$.

(ii) a_{ij}^T $(i \neq j)$; $a_{ij}^T = a_{ji}$ dan $a_{ji}^T = a_{ij}$, $i, j = 1,2,3,4$. (Varadarajan, 2004)

c. Secara umum, supermatriks hasil dari partisi simetri matriks sederhana simetri didefinisikan sebagai berikut:

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12}^T & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}^T & a_{2n}^T & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

d. Partisi simetri matriks diagonal sederhana dinotasikan sebagai berikut:

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0^T & D_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0^T & 0^T & \cdots & D_n \end{bmatrix}$$. Selanjutnya D disebut super diagonal matriks.

Contoh:

Diberikan matriks D sebagai berikut:

$$D_1 = \left[\begin{array}{ccc|cc} 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 10 \end{array}\right],$$ atau dalam notasi super diagonal matriks

$$D_1 = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}.$$

Matriks identitas super dinyatakan sebagai

$$I = \begin{bmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & I_t & 0 \\ 0 & 0 & I_r \end{bmatrix}$$

dengan s, t dan r menotasikan banyaknya baris dan kolom matriks identitas pertama, kedua dan ketiga, nol menotasikan matriks nol.

e. Transpos super matriks

Diberikan suatu supermatriks berorde n x m, $a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$. Transpos dari supermatriks a dinotasikan dengan a^T adalah supermatriks berorde m x n dengan definisi sebagai berikut:

$$a^T = \begin{bmatrix} a_{11}^T & a_{21}^T & \cdots & a_{n1}^T \\ a_{12}^T & a_{22}^T & \cdots & a_{n2}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m}^T & a_{2m}^T & \cdots & a_{nm}^T \end{bmatrix}.$$

Contoh:

Diberikan supermatriks sebagai berikut:

$$a = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}, \text{ dengan } a_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \; a_{12} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$a_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}, \; a_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \; a_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{dan } a_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

L matriks segitiga atas parsial dipartisi menjadi supermatriks, dengan $L = \begin{bmatrix} T \\ \hline a' \end{bmatrix}$ dengan T submatriks segitiga bawah.

Supervektor

Suatu vektor sederhana adalah suatu vektor dengan setiap elemennya adalah skalar disebut supervektor kolom tipe I yaitu

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

dengan setiap v_i adalah subvektor kolom dari vektor kolom v.

Definisi 1. (Kandasamy and Smarandache, 2008) Misalkan

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

dengan

$$a_1^1 = [a_{11} \quad \cdots \quad a_{1m}]$$
$$a_2^1 = [a_{21} \quad \cdots \quad a_{2m}]$$

$$\cdots$$

$$a_n^1 = [a_{n1} \quad \cdots \quad a_{nm}]$$

yaitu $a = \begin{bmatrix} a_1^1 \\ a_2^1 \\ \vdots \\ a_n^1 \end{bmatrix}_m$ didefinisikan sebagai supervektor kolom tipe II. Secara sama jika

$$a^1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, a^2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, a^m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Sehingga $a = \begin{bmatrix} a^1 & a^2 & \dots & a^m \end{bmatrix}_n$ didefinisikan sebagai supervektor baris tipe II. Jelaslah

$$a = \begin{bmatrix} a_1^1 \\ a_2^1 \\ \vdots \\ a_n^1 \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} a^1 & a^2 & \dots & a^m \end{bmatrix}_n$$

merupakan kesamaan supermatriks.

Berikut ini diberikan contoh supervektor tipe III,

$$a = \left[\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 1 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 2 \end{array}\right] = \left[T^T \mid a^T\right]$$

dan

$$b = \left[\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 9 & 4 & 0 \\ 8 & 3 & 6 \\ \hline 5 & 2 & 9 \\ 4 & 7 & 3 \end{array}\right] = \left[\frac{T}{b^T}\right]$$

adalah supervektor tipe III.

Diberikan supermatriks $n \times m$

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Transpos Supermatriks

Transpos supermatriks a adalah

$$a^T = \begin{bmatrix} a_{11}^T & a_{21}^T & \cdots & a_{n1}^T \\ a_{12}^T & a_{22}^T & \cdots & a_{n2}^T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m}^T & a_{2m}^T & \cdots & a_{nm}^T \end{bmatrix}.$$

a^T adalah supermatriks $m \times n$ diperoleh dengan mengambil transpos dari setiap elemen yaitu submatriks dari a.

Selanjutnya diberikan matriks sederhana simetri dipartisi secara simetri, akan ditentukan transposnya.

Diberikan a matriks supermatriks simetri $m \times m$

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{m1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

transpos dari supermatriks a adalah

$$a^T = \begin{bmatrix} a_{11}^T & \left(a_{12}^T\right)^T & \cdots & \left(a_{1m}^T\right)^T \\ a_{12}^T & a_{22}^T & \cdots & \left(a_{2m}^T\right)^T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m}^T & a_{2m}^T & \cdots & a_{mm}^T \end{bmatrix}.$$

Matriks diagonal a_{11} adalah matriks simetri sehingga tidak berubah karena transposisi. Sehingga diperoleh

$$a_{11}^T = a_{11}, a_{22}^T = a_{22}, \dots, a_{mm}^T = a_{mm}.$$

Karena transpos dari transpos matriks orisinal,yaitu

$$(a_{12}^T)^T = a_{12}, (a_{13}^T)^T = a_{13}, \dots, \left(a_{ij}^T\right)^T = a_{ij}.$$

Sehingga diperoleh transpos supermatriks dibangun oleh matriks sederhana dipartisi secara simetri a dari a^T adalah

$$a^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21}^T & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m}^T & a_{2m}^T & \dots & a_{mm}^T \end{bmatrix}.$$

dan $a = a^T$.

Secara sama transpos dari matriks diagonal dipartisi secara simetri adalah supermatriks diagonal orisinal itu sendiri, yaitu jika

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}$$

dan

$$D^T = \begin{bmatrix} d_1^T & & & \\ & d_2^T & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n^T \end{bmatrix}$$

$d_1^T = d_1, d_2^T = d_2$ dan seterusnya. Sehingga $D = D^T$.

Super Ruang Vektor dan Sifat-sifatnya

Diberikan F field secara umum. R field bilangan real, Q field rasional dan Z_p field bilangan bulat modulo p, p prima. Field-field tersebut real, kecuali C field bilangan kompleks. (Deligne and Morgan, 1999)

Sebagai ilustrasi diberikan $X = (x_1 \quad x_2 \mid x_3 \quad x_4 \quad x_5 \mid x_6)$ supervektor baris dengan $x_i \in F, F$ field, dan $1 \leq i \leq 6$. Misalkan $Y = (y_1 \quad y_2 \mid y_3 \quad y_4 \quad y_5 \mid y_6)$ dengan $y_i \in F$, $1 \leq i \leq 6$. X dan Y supervektor bertipe sama. Selanjutnya, jika $Z = (z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_4 \mid z_5 \quad z_6)$, $z_i \in F$, dan $1 \leq i \leq 6$. Z supervektor, namun tidak mempunyai tipe yang sama dengan X dan Y. Lebih lanjut, supervektor bertipe sama X dan Y atas field yang sama dikatakan sama jika dan hanya jika $x_i = y_i$ untuk $i = 1,2, \dots ,6$. Supervektor bertipe sama dapat dijumlahkan yang hasilnya supervektor bertipe sama. Hasil tentang supervektor yang penting diuraikan pada teorema berikut:

Teorema 1. (Kandasamy and Smarandache, 2008) Koleksi semua supervektor

$S = \left\{X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_r \mid x_{r+1} & \dots & x_i \mid x_{i+1} & \dots & x_{t+1} \mid x_{t+2} & \dots & x_n \end{pmatrix} \middle| x_i \in F\right\}$, F field, $1 \le i \le n$. $\{1 < 2 < \cdots < r < r+1 < \cdots < i < i+1 < \cdots < t+1 < \cdots < n\}$ pada tipe ini suatu grup abelian terhadap penjumlahan per komponennya.

Bukti:

Diberikan

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_r \mid x_{r+1} & \dots & x_i \mid x_{i+1} & \dots & x_{t+1} \mid x_{t+2} & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

dan

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_r \mid y_{r+1} & \dots & y_i \mid y_{i+1} & \dots & y_{t+1} \mid y_{t+2} & \dots & y_n \end{pmatrix} \in S.$$

$$X + Y = \big(x_1 + y_1 \quad x_2 + y_2 \quad \dots \quad x_r + y_r \mid x_{r+1} + y_{r+1} \quad \dots \quad x_i + y_i \mid x_{i+1} + y_{i+1} \quad \dots$$

$$x_{t+1} + y_{t+1} \mid x_{t+2} + y_{t+2} \quad \dots \quad x_n + y_n\big)$$

$X + Y$ merupakan super vektor bertipe sama dengan X dan Y dan berada di S sebagai $x_i + y_i \in F, 1 \le i \le n$.

Jelaslah $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \mid 0 & \dots & 0 \mid 0 & \dots & 0 \mid 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in S$ untuk $0 \in F$.

Selanjutnya jika

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_r \mid x_{r+1} & \dots & x_i \mid x_{i+1} & \dots & x_{t+1} \mid x_{t+2} & \dots & x_n \end{pmatrix} \in S$$

maka

$$-X = \begin{pmatrix} -x_1 & -x_2 & \dots & -x_r \mid -x_{r+1} & \dots & -x_i \mid -x_{i+1} & \dots & -x_{t+1} \mid -x_{t+2} & \dots & -x_n \end{pmatrix} \in S$$

dengan

$$X + (-X) = (-X) + X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \mid 0 & \dots & 0 \mid 0 & \dots & 0 \mid 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

juga $X + Y = Y + X$.

Sehingga S grup abelian atas penjumlahan.

Contoh:

Diberikan Q field bilangan rasional. Diberikan $S = \{(x_1 \quad x_2 \quad x_3 | x_4 \quad x_5) | x_1, \dots, x_5 \in Q\}$. Jelaslah S grup abelian atas penjumlahan per komponen super vektor S. Ambil sebarang dua supervektor, katakan $X = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \mid -5 & 3 \end{pmatrix}$ dan $Y = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \mid 1 & -2 \end{pmatrix}$ di S.

$X + Y = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \mid -4 & 1 \end{pmatrix}$ dan $X + Y \in S$. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \mid 0 & 0 \end{pmatrix}$ merupakan suatu supervektor baris nol yang juga disebut sebagai super identitas atau supervektor baris nol. Selanjutnya jika $X = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -3 \mid 0 & -1 \end{pmatrix}$ maka $-X = \begin{pmatrix} -5 & -7 & 3 \mid 0 & 1 \end{pmatrix}$ invers dari X dan $X +$

$(-X) = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 \mid 0 & 0\end{pmatrix}$. Sehingga S grup abelian atas penjumlahan per komponen dari super vektor.

Jika $X' = \begin{pmatrix}3 & 1 & 1 & 4 \mid 5 & 6 & 2\end{pmatrix}$ suatu supervektor. Jelaslah $X' \notin S$, karena X' mempunyai tipe berbeda dengan X.

Definisi 2. (Kandasamy and Smarandache, 2008)

Diberikan V super grup abelian yaitu suatu grup terpartisi abelian atas penjumlahan, F field. V disebut super ruang vektor atas F jika dipenuhi syarat-syarat berikut ini:

(i) Untuk semua $v \in V$ dan $c \in F, vc$ dan cv di V. Selanjutnya $vc = cv$.

(ii) Untuk semua $v_1, v_2 \in V$ dan untuk semua $c \in F$ maka $c(v_1 + v_2) = cv_1 + cv_2$.

(iii) $(v_1 + v_2)c = v_1c + v_2c$.

(iv) Untuk $a, b \in F$ dan $v_1 \in V$ maka $(a + b)v_1 = av_1 + bv_1$ dan $v_1(a + b) = v_1a + v_1b$.

(v) Untuk setiap $v \in V$ dan $1 \in F$, $1.v = v.1 = v$.

(vi) $(c_1c_2)v = c_1(c_2v)$ untuk $v \in V$ dan $c_1, c_2 \in F$.

Elemen V disebut super vektor dan elemen F disebut skalar.

Contoh:

Diberikan $V = \left\{\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3 \mid x_4\end{pmatrix} \middle| x_i \in R; 1 \le i \le 4\right\}$. V super grup abelian atas penjumlahan. Q field rasional, V super vektor atas Q. Untuk jika $10 \in Q$ dan $v = \begin{pmatrix}\sqrt{2} & 5 & 1 \mid 3\end{pmatrix} \in V; 10v = \begin{pmatrix}10\sqrt{2} & 50 & 10 \mid 30\end{pmatrix} \in V$.

Definisi 3. (Kandasamy and Smarandache, 2008)

Diberikan V super ruang vektor atas field F. Suatu super vektor β di V dikatakan kombinasi linear supervektor-supervektor $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ di V dengan skalar $c_1, \dots, c_n$ di F sehingga $\beta = c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n = \sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i$.

Contoh:

Diberikan $V = \left\{\begin{pmatrix}a_1 & a_2 \mid a_3 & a_4 & a_5 \mid a_6\end{pmatrix} \middle| a_i \in Q; 1 \le i \le 6\right\}$. V super ruang vektor atas Q. Misalkan $\beta = \begin{pmatrix}7 & 5 \mid 0 & 2 & 8 \mid 9\end{pmatrix}$ super vektor di V. Diberikan

$\alpha_1 = (1 \;\; 1 \mid 2 \;\; 0 \;\; 1 \mid -1), \alpha_2 = (5 \;\; -3 \mid 1 \;\; 2 \;\; 5 \mid 5)$ dan $\alpha_3 = (0 \;\; 7 \mid 3 \;\; 1 \;\; 2 \mid 8)$ 3 supervektor di V. Dapat ditemukan a, b, c di Q sehingga $a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 = \beta$.

Kesimpulan

1. Suatu supermatriks merupakan suatu matriks yang elemen-elemennya merupakan matriks-matriks sederhana.
2. Suatu supervektor dapat didefinisikan sebagai supermatriks dengan kolomnya 1. Namun dapat juga didefinisikan sebagai elemen suatu super ruang vektor. Dengan definisi super ruang vektor merupakan himpunan tak kosong yang memenuhi syarat-syarat ruang vektor atas penjumlahan perkomponen dan perkalian dengan skalar.
3. Transpos dari transpos supermatriks simetri adalah supermatriks orisinalnya.
4. Suatu supervektor dikatakan merupakan kombinasi linear supervektor-supervektor dari super ruang vektor jika dapat ditemukan skalar di fieldnya sehingga memenuhi persamaan $\beta = c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n = \sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i$.

Daftar Pustaka

Deligne, P. and Morgan, J.W.1999. Notes on supersymmetry following Bernstein. Quantum fields and strings; a course for mathematicians, Vol. 1, Amer. Math. Soc.

Kandasamy, W.B.V. and Smarandache, F. 2008. Super Linear Algebra. InfoLearnQuest Ann Arbor.

Varadarajan, V.S. 2004. Supersymmetry for mathematicians: an introduction. Courant Lecture Notes. Courant Lecture Notes Series, New York.

Yost, S.A. 1991. Supermatrix Models. International Journal of Modern Physics A, Vol. 7, No. 24 (1992).