

SECOND ORDER CONE (SOC) DAN SIFAT-SIFAT KENDALA SECOND ORDER CONE PROGRAMMING DENGAN NORMA 1

Caturiyati¹, Ch. Rini Indrati², Lina Aryati²

¹Mahasiswa Program Studi S3 Matematika FMIPA UGM dan
dosen Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

²Dosen Jurusan Matematika FMIPA UGM

waturiyati@yahoo.com, rini@ugm.ac.id, lina@ugm.ac.id

Abstrak

Pada makalah ini dikembangkan pengertian *Second Order Cone* (SOC) dan sifat sifat kendala *Second Order Cone Programming* dengan Norma 1.

Kata kunci: *Second Order Cone* (SOC), *Second Order Cone Programming*

PENDAHULUAN

Cone order dua (*second order cone*/SOC) [9] didefinisikan sebagai

$$L^m = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_m \geq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{m-1}^2} \right\}, m \geq 2,$$

dan program *cone* order dua (*Second-order cone programming*/SOCP) adalah masalah *conic*:

meminimumkan $\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} \geq_K \mathbf{0}\}$,

dengan *cone* K merupakan hasil kali langsung (*direct product*) dari beberapa *cone* order dua:

$$K = L^{m_1} \times L^{m_2} \times \dots \times L^{m_k}$$

dan \geq_K menyatakan urutan *conic*, yaitu $\mathbf{a} \geq_K \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} - \mathbf{b} \geq_K \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a} - \mathbf{b} \in K$.

Pada masalah program *cone* order dua, suatu fungsi linear diminimumkan atas irisan himpunan *afine* dan hasil kali langsung beberapa *cone* order dua. SOCP merupakan masalah konveks nonlinear dengan program linear dan program kuadrat (konveks) sebagai kasus khusus [2,5,8]. Dalam beberapa tahun terakhir, masalah SOCP mendapat perhatian para peneliti karena jangkauan aplikasinya yang luas [1,2]. Masalah optimisasi *cone* order dua secara teori dapat diselesaikan secara efisien menggunakan metode titik interior.

Dalam perkembangan penelitian di bidang optimisasi terdapat pergeseran-pergeseran struktur. Kwak [7] mengajukan metode *principal component analysis* (PCA) berdasarkan teknik optimisasi yang dikerjakan dengan norma L_1 . Metode tersebut merupakan pengembangan dari PCA konvensional berdasarkan norma L_2 . Metode PCA yang dikerjakan Kahl lebih sederhana dan mudah diimplementasikan. Perkembangan penelitian optimisasi akhir-akhir ini mempunyai kecenderungan menggantikan norma L_2 dengan norma L_1 [10].

Sementara itu Kahl [6] menyajikan kerangka kerja baru untuk menyelesaikan struktur geometri dan masalah gerakan berdasar pada norma L_∞ daripada menggunakan fungsi *cost* norma L_2 . Kerangka kerja ini menghasilkan komputasi estimasi global yang efisien, dalam arti solusinya invarian terhadap transformasi proyektif pada sistem koordinat dunia dan similaritas transformasi dalam bidang *image*, karena metrik jarak *image* dari *error reproyektif* juga invarian terhadap transformasi yang dimaksud. Dengan kata lain tidak memerlukan normalisasi koordinat *image*. Selain itu berbagai masalah struktur dan gerakan, seperti triangulasi, *resection* kamera dan estimasi homografi dapat dinyatakan ulang sebagai masalah optimisasi quasi konveks yang dapat diselesaikan menggunakan program *cone* order dua (SOCP).

Becker [3] membangun suatu kerangka kerja untuk menyelesaikan berbagai masalah *cone* konveks dengan pendekatan sebagai berikut: pertama, menentukan formulasi conic dari masalah; kedua, menentukan dualnya; ketiga, aplikasi *smoothing*; keempat, menyelesaikan menggunakan suatu metode optimal order satu. Kegunaan pendekatan ini adalah fleksibilitasnya. Suatu estimator yang dipandang efektif secara teori dan praktek adalah *selector* Dantzig [4], yang ide prosedur sederhananya: mendapatkan estimasi yang konsisten dari data observasi dan mempunyai norma l_1 yang minimum. *Selector* Dantzig adalah solusi program konveks

meminimumkan $\|\mathbf{x}\|_1$, dengan kendala $\|A^*(\mathbf{y} - A\mathbf{x})\|_\infty \leq \delta$, dengan δ skalar dan diasumsikan kolom matriks A dinormalisasikan.

Berdasarkan referensi yang diuraikan tersebut dan terutama berdasarkan paper Lobo, et. al. [8] yang menguraikan masalah program *cone* order dua maka pada paper ini akan dibahas masalah SOCP dengan mengubah fungsi kendala menjadi fungsi norma 1 dengan domain \mathbb{R}_+^n .

PEMBAHASAN

1. *Second Order Cone*

Sebelum membicarakan *second order conic programming* (SOCP), akan dibicarakan terlebih dahulu mengenai SOC sebagai berikut. Untuk itu akan dibicarakan dulu beberapa hal terkait SOC.

Ben Tal dan Nemirovski mengatakan suatu *cone* $K = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{a} \succeq \mathbf{0}\}$, dengan $\mathbf{a} \succeq \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} - \mathbf{b} \succeq \mathbf{0}$ dan \succeq suatu urutan parsial, adalah suatu *pointed convex cone* yang memenuhi syarat-syarat berikut:

1. K tak kosong dan tertutup terhadap penjumlahan, $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in K \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{a}' \in K$
2. K himpunan *conic*, $\mathbf{a} \in K, \lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda \mathbf{a} \in K$
3. K *pointed*, $\mathbf{a} \in K$ dan $-\mathbf{a} \in K \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Dengan urutan parsial pada himpunan K di \mathbb{R}^m terdapat tiga macam *cone* berikut:

1. Ortan nonnegatif, $\mathbb{R}_+^m = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)^T \mid x_i \geq 0, i = 1, \dots, m\}$
2. *Cone* order dua

$$C_m = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{m-1}, x_m)^T \in \mathbb{R}^m \mid x_m \geq \sqrt{\sum_{i=1}^{m-1} x_i^2} \right\}.$$

3. *Cone* semidefinit positif, S_+^m , *cone* dalam ruang S^m yaitu ruang matriks berukuran $m \times m$ dan memuat semua matriks semidefinit positif A berukuran $m \times m$.

2. Second Order Cone Programming

Diberikan definisi program *conic* berikut dari Ben Tal dan Nemirovski. Misalkan K suatu *cone* di \mathbb{R}^m (*convex, pointed, closed*, dan dengan interior tak kosong). Diberikan $f \in \mathbb{R}^n$, matriks kendala A berukuran $m \times n$, dan vektor ruas kanan $b \in \mathbb{R}^m$, masalah optimisasi berikut disebut dengan program *conic*,

$$\text{meminimumkan } f^T x, \text{ dengan kendala } Ax - b \geq_K 0$$

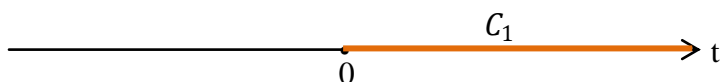
dengan \geq_K urutan parsial pada himpunan *cone* K . Jika K adalah *direct product* beberapa SOC, maka masalah program *conic* di atas disebut dengan masalah *second order cone programming* (SOCP). Secara umum SOCP dimodelkan sebagai berikut (Lobo et al),

$$\begin{aligned} &\text{meminimumkan } f^T x, \\ &\text{dengan kendala } \|A_i x + b_i\|_2 \leq c_i^T x + d_i \quad (i = 1, \dots, N) \end{aligned} \tag{1}$$

dengan $x \in \mathbb{R}^n$ variabel keputusan, dan parameter $f \in \mathbb{R}^n, A_i \in \mathbb{R}^{(n_i-1) \times n}, b_i \in \mathbb{R}^{n_i-1}, c_i \in \mathbb{R}^n$ dan $d_i \in \mathbb{R}$. Kendala $\|A_i x + b_i\|_2 \leq c_i^T x + d_i$ disebut kendala SOC berdimensi n_i . Berdasarkan definisi, SOC standar berdimensi m didefinisikan sebagai,

$$C_m = \{(u, t) | u \in \mathbb{R}^{m-1}, t \in \mathbb{R}, \|u\|_2 \leq t\}.$$

Untuk $m = 1, C_1 = \{t | t \in \mathbb{R}, 0 \leq t\}$, dan secara geometris dapat digambarkan seperti Gambar 1 berikut.

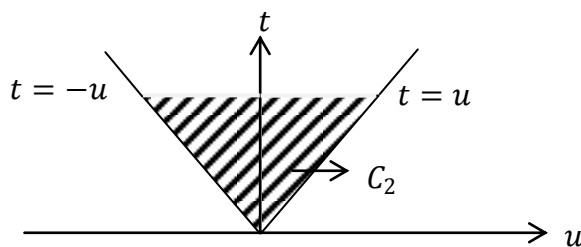


Gambar 1. SOC C_1

Untuk $m = 2,$

$$\begin{aligned} C_2 &= \{(u, t) | u \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, \|u\|_2 \leq t\} \\ &= \{(u, t) | u \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, |u| \leq t\} = \{(u, t) | u \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, -t \leq u \leq t\}, \end{aligned}$$

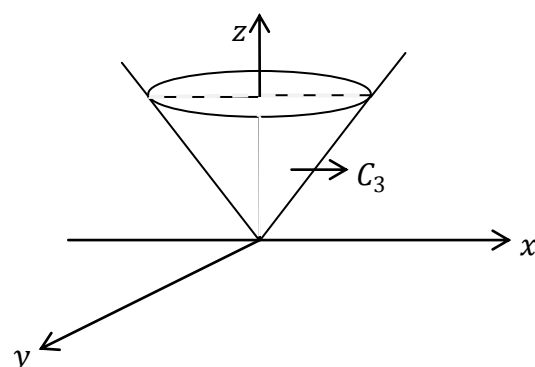
dan secara geometris digambarkan seperti Gambar 2 berikut.



Gambar 2. SOC C_2

$$\begin{aligned} \text{Untuk } m = 3, \quad C_3 &= \{(x, y, t) | (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}, \|(x, y)\|_2 \leq t\} \\ &= \{(x, y, t) | (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + y^2} \leq t\}, \end{aligned}$$

secara geometris digambarkan seperti Gambar 3 berikut.



Gambar 3. SOC C_3

Lemma 1. Himpunan titik-titik yang memenuhi kendala cone order dua adalah image invers dari cone order dua satuan terhadap pemetaan affine:

$$\|A_i \mathbf{x} + \mathbf{b}_i\|_2 \leq \mathbf{c}_i^T \mathbf{x} + d_i \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_i \\ \mathbf{c}_i^T \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_i \\ d_i \end{bmatrix} \in C_3$$

dan konveks, $i=1,2,\dots,N$.

Bukti: Tanpa mengurangi keumuman, diasumsikan $N = 1, n_i = 2 = n, \mathbf{b}_i = \mathbf{b}, d_i = d \in \mathbb{R}$, maka parameter masalah SOCP berdimensi 2 adalah

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}, \mathbf{c} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}, \mathbf{x}^T = (x_1, x_2)^T.$$

Kendala masalah SOCP berdimensi 2: $\|\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\|_2 \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x} + d$

$$\Leftrightarrow \left\| \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \right\|_2 \leq [h_1 \quad h_2]^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + d$$

$$\Leftrightarrow \left\| \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2 \end{bmatrix} \right\|_2 \leq h_1x_1 + h_2x_2 + d$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1)^2 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2)^2} \leq h_1x_1 + h_2x_2 + d$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2 \\ h_1x_1 + h_2x_2 + d \end{bmatrix} \in C_3 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{c}^T \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ d \end{bmatrix} \in C_3. \blacksquare$$

3. Second Order Cone (SOC) pada SOCP dengan Norma 1

Diberikan masalah SOCP (1). Apabila norma pada fungsi kendala masalah SOCP (1) diubah menjadi fungsi kendala bernorma 1, maka diperoleh masalah SOCP:

meminimumkan $\mathbf{f}^T \mathbf{x}$,

$$\text{dengan kendala } \|A_i \mathbf{x} + \mathbf{b}_i\|_1 \leq \mathbf{c}_i^T \mathbf{x} + d_i \quad (i = 1, \dots, N) \tag{2}$$

dengan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ adalah variabel keputusan, dan parameter $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n, A_i \in \mathbb{R}^{(n_i-1) \times n}, \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^{n_i-1}, \mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^n$ dan $d_i \in \mathbb{R}$. Sebelum membahas masalah SOCP (2), perlu didefinisikan pengertian SOC norma 1 sebagai berikut:

$$C_m^* = \{(\mathbf{u}, t) | \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{m-1}, t \in \mathbb{R}, \|\mathbf{u}\|_1 \leq t\}.$$

Namun dengan pengubahan tersebut terdapat perbedaan antara SOC standar (norma 2) dengan SOC norma 1 sebagai berikut:

Untuk $m = 1, C_1^* = \{t | t \in \mathbb{R}, \|0\|_1 \leq t\} = \{t | t \in \mathbb{R}, 0 \leq t\} = C_1.$

Untuk $m = 2, C_2^* = \{(u, t) | u \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, \|u\|_1 \leq t\}$
 $= \{(u, t) | u \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, |u| \leq t\} = C_2.$

Untuk $m = 3, C_3^* = \{(x, y, t) | (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}, \|(x, y)\|_1 \leq t\}$
 $= \{(x, y, t) | (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}, |x| + |y| \leq t\} \neq C_3.$

Contoh 1. Merupakan suatu *counter example*.

Ambil $x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{4}, t = 1, x, y, t \in \mathbb{R}$. Akan ditunjukkan $C_3^* \neq C_3$.

Untuk $(x, y, t) \in C_3$, berlaku

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq t \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{9}{16}\right)} = \sqrt{\frac{13}{16}} < 1. \tag{3}$$

Sementara itu untuk $(x, y, t) \in C_3^*$ berlaku $\left|\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{3}{4}\right| = \frac{5}{4} > 1$. (4)

Dari (3) dan (4) terbukti $C_3^* \neq C_3$. ■

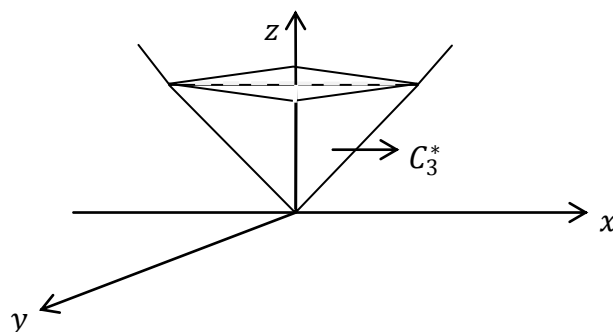
Lemma 2. Jika C_1, C_2, C_3 adalah SOC norma $\|\cdot\|_2$ dan C_1^*, C_2^*, C_3^* adalah SOC norma $\|\cdot\|_1$, maka berlaku $C_1^* = C_1, C_2^* = C_2$, tetapi $C_3^* \neq C_3$.

Bukti: Jelas $C_1^* = C_1$ dan $C_2^* = C_2$, sedangkan untuk C_3^* menurut definisinya

$$\begin{aligned} C_3^* &= \{(x, y, t) | (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}, \|(x, y)\|_1 \leq t\} \\ &= \{(x, y, t) | (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}, |x| + |y| \leq t\} \neq C_3. \end{aligned}$$

Terbukti $C_1^* = C_1, C_2^* = C_2$, tetapi $C_3^* \neq C_3$. ■

Secara geometris perbedaan antara C_3^* dan C_3 terlihat seperti Gambar 4 berikut:



Gambar 4. SOC C_3^*

Lemma 3. Diberikan $x, y, t \in \mathbb{R}$ berlaku $\sqrt{x^2 + y^2} \leq t \Leftrightarrow |x| + |y| \leq t$.

Bukti: (dengan *counter example*) pada Contoh 1.

Berikut ini akan ditunjukkan hubungan kendala SOCP standar dengan kendala SOCP norma 1 dan hubungannya dengan pemetaan *affine*.

Lemma 4. Untuk kendala SOCP (1) dan kendala SOCP (2) terhadap pemetaan *affine* berlaku hubungan sebagai berikut:

$$(i) \quad \|A_i x + b_i\|_1 \leq c_i^T x + d_i \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_i \\ c_i^T \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_i \\ d_i \end{bmatrix} \in C_3^*$$

$$(ii) \quad \|A_i x + b_i\|_2 \leq c_i^T x + d_i \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_i \\ c_i^T \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_i \\ d_i \end{bmatrix} \in C_3^*.$$

Bukti: Tanpa mengurangi keumuman diasumsikan $N = 1, n_i = 2 = n, b_i = b, d_i = d \in \mathbb{R}$, maka parameter masalah SOCP berdimensi 2 adalah

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}, x^T = (x_1, x_2)^T.$$

(i) Diperoleh

$$\|Ax + b\|_1 \leq c^T x + d \Leftrightarrow |a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1| + |a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2| \leq h_1x_1 + h_2x_2 + d \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2 \\ h_1x_1 + h_2x_2 + d \end{bmatrix} \in C_3^* \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A \\ c^T \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \in C_3^*.$$

(ii) Didapatkan

$$\|Ax + b\|_2 \leq c^T x + d \Leftrightarrow \sqrt{(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1)^2 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2)^2} \leq h_1x_1 + h_2x_2 + d \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2 \\ h_1x_1 + h_2x_2 + d \end{bmatrix} \in C_3 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A \\ c^T \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \in C_3.$$

Sementara telah diketahui $C_3 \neq C_3^*$, sehingga kendala SOCP (1) tidak ekuivalen dengan pemetaan *affine* di C_3^* . ■

KESIMPULAN

- $C_1^* = C_1, C_2^* = C_2$, tetapi $C_3^* \neq C_3$.
- Kendala SOCP (1) tidak ekuivalen dengan pemetaan *affine* di C_3^* .
- Masalah SOCP (2) memerlukan sejumlah teori tambahan agar teori-teori pada SOCP (1) berlaku pada SOCP (2).

DAFTAR PUSTAKA

- Alizadeh, F. and Goldfarb, D., Second-order *Cone* programming, *Math. Program*, 95, 3-51, 2003.
- Andersen, E.D., Roos, C., and Terlaky, T., Notes on duality in second order and p -order *Cone* optimization, *A Journal of Mathematical Programming and Operation Research*, Volume 51, Issue 4, pages 627-643, 2002.
- Becker, S., Candes, E.J. and Grant, M., Templates for convex *Cone* problems with applications to sparse signal recovery, *Mathematical Programming Computation*, Vol 3, Number 3, 165-218, 2011.
- Ben Tal, A. and Nemirovski, A., *Lectures on Modern Convex Optimization : Analysis, Algorithms, and Engineering applications*, MPS SIAM series on Application, Philadelphia, 2001. Candes, E.J. and Tao, T., The Dantzig selector: statistical estimation when p is much larger than n , *Annals of Statistics*, pages 2313-2351, 2005.
- Cao, Q., Yu, Z., and Wang, A., A Boxed Optimization Reformulation for the Convex Second Order *Cone* Programming, *AMO-Advanced Modeling and Optimization*, Volume 12, Number 1, 2010.
- Kahl, F. And Hartley, R., Multiple View Geometry Under the L_∞ -norm, *IEEE Transactions Analysis Machine Intelligence*, Volume: 30, Issue: 9, pages 1603-1617, 2008.
- Kwak, N., Principal Component Analysis based on L_1 -norm Maximization, *IEEE Transactions Analysis Machine Intelligence*, Volume: 30, Issue: 9, pages 1672-1680, 2008.
- Lobo, M.S., Vandenberghe, L., Boyd, S., and Lebret, H., Applications of second-order *Cone* programming, *Linear Algebra and its Applications* 284, 193-228, 1998.

Schmidt, M., Least squares optimization with L_1 -norm regularization, 2005. Diunduh dari <http://www.di.ens.fr/~mschmidt/Software/lasso.pdf> tanggal 20 Mei 2012

