

M -

**SECOND ORDER CONE (SOC) DAN SIFAT-SIFAT KENDALA
SECOND ORDER CONE PROGRAMMING DENGAN NORMA ∞**

Caturiyati¹, Ch. Rini Indrati², Lina Aryati²

¹Mahasiswa Program Studi S3 Matematika FMIPA UGM dan
dosen Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

²Dosen Jurusan Matematika FMIPA UGM
waturiyati@yahoo.com, rinii@ugm.ac.id, lina@ugm.ac.id

Abstrak

Pada makalah ini dikembangkan pengertian *Second Order Cone* (SOC) dengan Norma ∞ dan sifat sifat kendala *Second Order Cone Programming* dengan Norma ∞ .

Kata kunci: *Second Order Cone* (SOC), *Second Order Cone Programming*

PENDAHULUAN

Cone order dua (*second order cone*/SOC) dalam Ben Tal and Nemirovski (2001) didefinisikan sebagai

$$L^m = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_m \geq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{m-1}^2} \right\}, m \geq 2,$$

dan program *cone* order dua (*Second-order cone programming*/SOCP) adalah masalah *conic*: meminimumkan $\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} - \mathbf{b} \geq_K \mathbf{0}\}$,

dengan *cone* K merupakan hasil kali langsung (*direct product*) dari beberapa *cone* order dua:

$$K = L^{m_1} \times L^{m_2} \times \dots \times L^{m_k}$$

dan \geq_K menyatakan urutan *conic*, yaitu $\mathbf{a} \geq_K \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} - \mathbf{b} \geq_K \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a} - \mathbf{b} \in K$.

Pada masalah program *cone* order dua, suatu fungsi linear diminimumkan atas irisan himpunan *afine* dan hasil kali langsung beberapa *cone* order dua. SOCP merupakan masalah konveks nonlinear dengan program linear dan program kuadratik (konveks) sebagai kasus khusus (Andersen et. Al., 2002, Cao et.al., 2010, Lobo et. Al., 1998). Dalam beberapa tahun terakhir, masalah SOCP mendapat perhatian para peneliti karena jangkauan aplikasinya yang luas (Alizadeh and Goldfarb, 2003, Andersen et. Al., 2002). Masalah optimisasi *cone* order dua secara teori dapat diselesaikan secara efisien menggunakan metode titik interior.

Dalam perkembangan penelitian di bidang optimisasi terdapat pergeseran-pergeseran struktur. Kwak (2008) mengajukan metode *principal component analysis* (PCA) berdasarkan teknik optimisasi yang dikerjakan dengan norma L_1 . Metode tersebut merupakan pengembangan dari PCA konvensional berdasarkan norma L_2 . Metode PCA yang dikerjakan Kahl lebih sederhana dan mudah diimplementasikan. Perkembangan penelitian optimisasi akhir-akhir ini mempunyai kecenderungan menggantikan norma L_2 dengan norma L_1 (Schmidt, 2005).

Sementara itu Kahl and Hartley (2008) menyajikan kerangka kerja baru untuk menyelesaikan struktur geometri dan masalah gerakan berdasar pada norma L_∞ daripada menggunakan fungsi *cost* norma L_2 . Kerangka kerja ini menghasilkan komputasi estimasi global yang efisien, dalam arti solusinya invarian terhadap transformasi proyektif pada sistem koordinat

dunia dan similaritas transformasi dalam bidang *image*, karena metrik jarak image dari *error reprojektif* juga invarian terhadap transformasi yang dimaksud. Dengan kata lain tidak memerlukan normalisasi koordinat image. Selain itu berbagai masalah struktur dan gerakan, seperti triangulasi, *resection* kamera dan estimasi homografi dapat dinyatakan ulang sebagai masalah optimisasi quasi konveks yang dapat diselesaikan menggunakan program *cone* order dua (SOCP).

Becker et.al. (2011) membangun suatu kerangka kerja untuk menyelesaikan berbagai masalah *cone* konveks dengan pendekatan sebagai berikut: pertama, menentukan formulasi conic dari masalah; kedua, menentukan dualnya; ketiga, aplikasi *smoothing*; keempat, menyelesaikan menggunakan suatu metode optimal order satu. Kegunaan pendekatan ini adalah fleksibilitasnya. Suatu estimator yang dipandang efektif secara teori dan praktek adalah *selector* Dantzig (Candes and Tao, 2005), yang ide prosedur sederhananya: mendapatkan estimasi yang konsisten dari data observasi dan mempunyai norma l_1 yang minimum. *Selector* Dantzig adalah solusi program konveks

meminimumkan $\|\mathbf{x}\|_1$, dengan kendala $\|\mathbf{A}^*(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x})\|_\infty \leq \delta$,

dengan δ skalar dan diasumsikan kolom matriks \mathbf{A} dinormalisasikan.

Berdasarkan referensi yang diuraikan tersebut dan terutama berdasarkan paper Lobo, et. al. (1998) yang menguraikan masalah program *cone* order dua maka pada paper ini akan dibahas masalah SOCP dengan mengubah fungsi kendala menjadi fungsi norma 1 dengan domain \mathbb{R}_+^n .

PEMBAHASAN

1. Second Order Cone

Sebelum membicarakan *second order conic programming* (SOCP), akan dibicarakan terlebih dahulu mengenai SOC sebagai berikut. Untuk itu akan dibicarakan dulu beberapa hal terkait SOC. Ben Tal dan Nemirovski mengatakan suatu *cone* $K = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{a} \succeq \mathbf{0}\}$, dengan $\mathbf{a} \succeq \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} - \mathbf{b} \succeq \mathbf{0}$ dan \succeq suatu urutan parsial, adalah suatu *pointed convex cone* yang memenuhi syarat-syarat berikut:

1. K tak kosong dan tertutup terhadap penjumlahan, $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in K \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{a}' \in K$
2. K himpunan *conic*, $\mathbf{a} \in K, \lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda \mathbf{a} \in K$
3. K *pointed*, $\mathbf{a} \in K$ dan $-\mathbf{a} \in K \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Dengan urutan parsial pada himpunan K di \mathbb{R}^m terdapat tiga macam *cone* berikut:

1. Ortan nonnegatif, $\mathbb{R}_+^m = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)^T \mid x_i \geq 0, i = 1, \dots, m\}$
2. *Cone* order dua

$$C_m = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{m-1}, x_m)^T \in \mathbb{R}^m \mid x_m \geq \sqrt{\sum_{i=1}^{m-1} x_i^2} \right\}.$$

3. *Cone* semidefinit positif, S_+^m , cone dalam ruang S^m yaitu ruang matriks berukuran $m \times m$ dan memuat semua matriks semidefinit positif \mathbf{A} berukuran $m \times m$.

2. Second Order Cone Programming

Diberikan definisi program *conic* berikut dari Ben Tal dan Nemirovski. Misalkan K suatu *cone* di \mathbb{R}^m (*convex, pointed, closed*, dan dengan interior tak kosong). Diberikan $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$, matriks kendala \mathbf{A} berukuran $m \times n$, dan vektor ruas kanan $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, masalah optimisasi berikut disebut dengan program *conic*,

meminimumkan $\mathbf{f}^T \mathbf{x}$, dengan kendala $\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} \succeq_K \mathbf{0}$

dengan \succeq_K urutan parsial pada himpunan *cone* K . Jika K adalah *direct product* beberapa SOC, maka masalah program *conic* di atas disebut dengan masalah *second order cone programming* (SOCP). Secara umum SOCP dimodelkan sebagai berikut (Lobo et al),

meminimumkan $\mathbf{f}^T \mathbf{x}$,

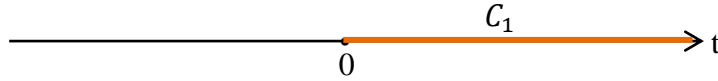
dengan kendala $\|\mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{b}_i\|_2 \leq \mathbf{c}_i^T \mathbf{x} + d_i \quad (i = 1, \dots, N)$ (1)

dengan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ variabel keputusan, dan parameter $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{(n_i-1) \times n}, \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^{n_i-1}, \mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^n$

dan $d_i \in \mathbb{R}$. Kendala $\|A_i x + b_i\| \leq c_i^T x + d_i$ disebut kendala SOC berdimensi n_i . Berdasarkan definisi, SOC standar berdimensi m didefinisikan sebagai,

$$C_m = \{(u, t) | u \in \mathbb{R}^{m-1}, t \in \mathbb{R}, \|u\|_2 \leq t\}.$$

Untuk $m = 1$, $C_1 = \{t | t \in \mathbb{R}, 0 \leq t\}$, dan secara geometris dapat digambarkan seperti Gambar 1 berikut.



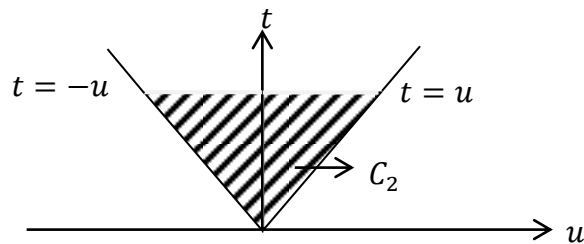
Gambar 1. SOC C_1

Untuk $m = 2$,

$$C_2 = \{(u, t) | u \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, \|u\|_2 \leq t\}$$

$$= \{(u, t) | u \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, |u| \leq t\} = \{(u, t) | u \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, -t \leq u \leq t\},$$

dan secara geometris digambarkan seperti Gambar 2 berikut.

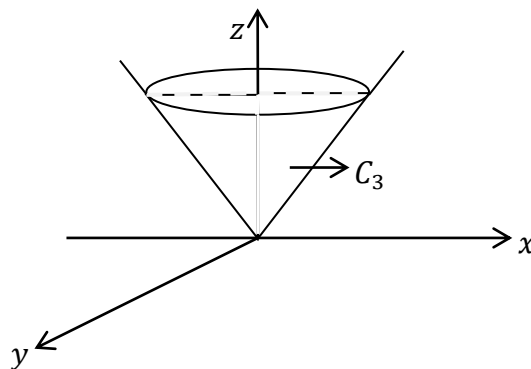


Gambar 2. SOC C_2

Untuk $m = 3$, $C_3 = \{(x, y, t) | (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}, \|(x, y)\|_2 \leq t\}$

$$= \{(x, y, t) | (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 + y^2} \leq t\}, \text{ dan}$$

secara geometris digambarkan seperti Gambar 3 berikut.



Gambar 3. SOC C_3

Lemma 1. Himpunan titik-titik yang memenuhi kendala cone order dua adalah image invers dari cone order dua satuan terhadap pemetaan affine:

$$\|A_i x + b_i\|_2 \leq c_i^T x + d_i \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_i \\ c_i^T \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_i \\ d_i \end{bmatrix} \in C_3$$

dan konveks, $i=1,2,\dots,N$.

Bukti: Tanpa mengurangi keumuman, diasumsikan $N = 1, n_i = 2 = n$, $b_i = b$, $d_i = d \in \mathbb{R}$, maka parameter masalah SOCP berdimensi 2 adalah

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}, \mathbf{c} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}, \mathbf{x}^T = (x_1, x_2)^T.$$

Kendala masalah SOCP berdimensi 2: $\|\mathbf{Ax} + \mathbf{b}\|_2 \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x} + d$

$$\Leftrightarrow \left\| \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \right\|_2 \leq [h_1 \ h_2]^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + d$$

$$\Leftrightarrow \left\| \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2 \end{bmatrix} \right\|_2 \leq h_1x_1 + h_2x_2 + d$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1)^2 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2)^2} \leq h_1x_1 + h_2x_2 + d$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2 \\ h_1x_1 + h_2x_2 + d \end{bmatrix} \in C_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{c}^T \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ d \end{bmatrix} \in C_3. \blacksquare$$

3. Second Order Cone (SOC) pada SOCP dengan Norma ∞

Diberikan masalah SOCP (1). Apabila norma pada fungsi kendala masalah SOCP (1) diubah menjadi fungsi kendala bernorma ∞ , maka diperoleh masalah SOCP:

meminimumkan $\mathbf{f}^T \mathbf{x}$,

$$\text{dengan kendala } \|\mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{b}_i\|_\infty \leq \mathbf{c}_i^T \mathbf{x} + d_i \quad (i = 1, \dots, N) \quad (2)$$

dengan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ adalah variabel keputusan, dan parameter $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{(n_i-1) \times n}$, $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^{n_i-1}$, $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^n$ dan $d_i \in \mathbb{R}$. Sebelum membahas masalah SOCP (2), perlu didefinisikan pengertian SOC norma ∞ sebagai berikut:

$$C_m^* = \{(\mathbf{u}, t) | \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{m-1}, t \in \mathbb{R}, \|\mathbf{u}\|_\infty \leq t\}.$$

Namun dengan pengubahan tersebut terdapat perbedaan antara SOC standar (norma 2) dengan SOC norma ∞ sebagai berikut:

Untuk $m = 1$, $C_1^* = \{t | t \in \mathbb{R}, \|0\|_\infty \leq t\} = \{t | t \in \mathbb{R}, 0 \leq t\} = C_1$.

Untuk $m = 2$, $C_2^* = \{(u, t) | u \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, \|u\|_\infty \leq t\}$
 $= \{(u, t) | u \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, |u| \leq t\} = C_2$.

Untuk $m = 3$, $C_3^* = \{(x, y, t) | (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}, \|(x, y)\|_\infty \leq t\}$
 $= \{(x, y, t) | (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}, |x| + |y| \leq t\} \neq C_3$.

Contoh 1. Merupakan suatu *counter example*.

Ambil $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{4}$, $t = 1$, $x, y, t \in \mathbb{R}$. Akan ditunjukkan $C_3^* \neq C_3$.

Untuk $(x, y, t) \in C_3$, berlaku

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq t \Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{9}{16}\right)} = \sqrt{\frac{13}{16}} < 1. \quad (3)$$

Sementara itu untuk $(x, y, t) \in C_3^*$ berlaku $\left|\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{3}{4}\right| = \frac{5}{4} > 1$. (4)

Dari (3) dan (4) terbukti $C_3^* \neq C_3$. \blacksquare

Lemma 2. Jika C_1, C_2, C_3 adalah SOC norma $\|\cdot\|_2$ dan C_1^*, C_2^*, C_3^* adalah SOC norma $\|\cdot\|_\infty$, maka berlaku $C_1^* = C_1, C_2^* = C_2$, tetapi $C_3^* \neq C_3$.

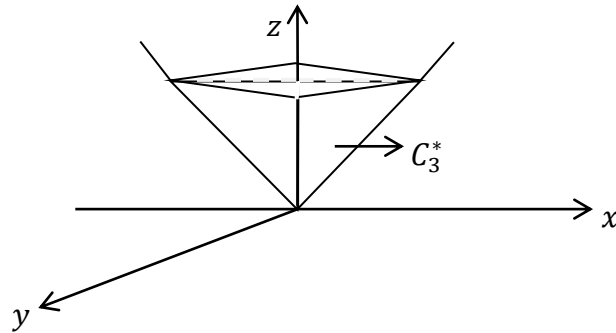
Bukti: Jelas $C_1^* = C_1$ dan $C_2^* = C_2$, sedangkan untuk C_3^* menurut definisinya

$$C_3^* = \{(x, y, t) | (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}, \|(x, y)\|_\infty \leq t\}$$

$$= \{(x, y, t) | (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}, |x| + |y| \leq t\} \neq C_3.$$

Terbukti $C_1^* = C_1, C_2^* = C_2$, tetapi $C_3^* \neq C_3$. \blacksquare

Secara geometris perbedaan antara C_3^* dan C_3 terlihat seperti Gambar 4 berikut:



Gambar 4. SOC C_3^*

Lemma 3. Diberikan $x, y, t \in \mathbb{R}$ berlaku $\sqrt{x^2 + y^2} \leq t \Leftrightarrow |x| + |y| \leq t$.

Bukti: (dengan *counter example*) pada Contoh 1.

Berikut ini akan ditunjukkan hubungan kendala SOCP standar dengan kendala SOCP norma ∞ dan hubungannya dengan pemetaan *affine*.

Lemma 4. Untuk kendala SOCP (1) dan kendala SOCP (2) terhadap pemetaan *affine* berlaku hubungan sebagai berikut:

$$(i) \quad \|A_i x + b_i\|_{\infty} \leq c_i^T x + d_i \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_i \\ c_i^T \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_i \\ d_i \end{bmatrix} \in C_3^*$$

$$(ii) \quad \|A_i x + b_i\|_2 \leq c_i^T x + d_i \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_i \\ c_i^T \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_i \\ d_i \end{bmatrix} \in C_3^*.$$

Bukti: Tanpa mengurangi keumuman diasumsikan $N = 1, n_i = 2 = n, b_i = b, d_i = d \in \mathbb{R}$, maka parameter masalah SOCP berdimensi 2 adalah

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}, x^T = (x_1, x_2)^T.$$

(i) Diperoleh

$$\begin{aligned} \|Ax + b\|_{\infty} \leq c^T x + d &\Leftrightarrow |a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1| + |a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2| \leq h_1x_1 + h_2x_2 + d \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2 \\ h_1x_1 + h_2x_2 + d \end{bmatrix} \in C_3^* \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} A \\ c^T \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \in C_3^*. \end{aligned}$$

(ii) Didapatkan

$$\begin{aligned} \|Ax + b\|_2 \leq c^T x + d &\Leftrightarrow \sqrt{(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1)^2 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2)^2} \leq h_1x_1 + h_2x_2 + d \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2 \\ h_1x_1 + h_2x_2 + d \end{bmatrix} \in C_3 \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} A \\ c^T \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \in C_3. \end{aligned}$$

Sementara telah diketahui $C_3 \neq C_3^*$, sehingga kendala SOCP (1) tidak ekuivalen dengan pemetaan *affine* di C_3^* . ■

KESIMPULAN

- a. $C_1^* = C_1, C_2^* = C_2$, tetapi $C_3^* \neq C_3$.
- b. Kendala SOCP (1) tidak ekuivalen dengan pemetaan *affine* di C_3^* .
- c. Masalah SOCP (2) memerlukan sejumlah teori tambahan agar teori-teori pada SOCP (1) berlaku pada SOCP (2).

DAFTAR PUSTAKA

- Alizadeh, F. and Goldfarb, D. 2003. Second-order *Cone* programming. *Math. Program*, 95, 3-51.
- Andersen, E.D., Roos, C., and Terlaky, T. 2002. Notes on duality in second order and p -order *Cone* optimization. *A Journal of Mathematical Programming and Operation Research*, Volume 51, Issue 4, pages 627-643.
- Becker, S., Candes, E.J. and Grant, M. 2011. Templates for convex *Cone* problems with applications to sparse signal recovery. *Mathematical Programming Computation*, Vol 3, Number 3, 165-218.
- Ben Tal, A. and Nemirovski, A. 2001. *Lectures on Modern Convex Optimization : Analysis, Algorithms, and Engineering applications*. MPS SIAM series on Application. Philadelphia.
- Candes, E.J. and Tao, T. 2005. The Dantzig selector: statistical estimation when p is much larger than n . *Annals of Statistics*, pages 2313-2351.
- Cao, Q., Yu, Z., and Wang, A. 2010. A Boxed Optimization Reformulation for the Convex Second Order *Cone* Programming. *AMO-Advanced Modeling and Optimization*, Volume 12, Number 1.
- Kahl, F. And Hartley, R. 2008. Multiple View Geometry Under the L_∞ -norm. *IEEE Transactions Analysis Machine Intelligence*, Volume: 30, Issue: 9, pages 1603-1617.
- Kwak, N. 2008. Principal Component Analysis based on L_1 -norm Maximization. *IEEE Transactions Analysis Machine Intelligence*, Volume: 30, Issue: 9, pages 1672-1680.
- Lobo, M.S., Vandenberghe, L., Boyd, S., and Lebret, H. 1998. Applications of second-order *Cone* programming. *Linear Algebra and its Applications* 284, 193-228.
- Schmidt, M. 2005. Least squares optimization with L_1 -norm regularization. Diunduh dari <http://www.di.ens.fr/~mschmidt/Software/lasso.pdf> tanggal 20 Mei 2012.