



PROSIDING SEMINAR NASIONAL

Penelitian, Pendidikan, dan Penerapan MIPA

Tanggal 14 Mei 2011, FMIPA UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA

ISBN: 978-979-99314-5-0

Bidang:

- ✓ Matematika dan Pendidikan Matematika
- Fisika dan Pendidikan Fisika
- Kimia dan Pendidikan Kimia
- Biologi dan Pendidikan Biologi
- Ilmu Pengetahuan Alam



Tema:

**Pemantapan Keprofesionalan Peneliti, Pendidik, dan Praktisi
MIPA Untuk Mendukung Pembangunan Karakter Bangsa**

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
Tahun 2011



PROSIDING SEMINAR NASIONAL

Penelitian, Pendidikan, dan Penerapan MIPA

Tanggal 14 Mei 2011, FMIPA UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA

ISBN: 978-979-99314-5-0

Tim Editor:

1. Kismiantini, M.Si
2. Denny Darmawan, M.Sc
3. Erfan Priyambodo, M.Si
4. Agung Wijaya, M.Pd
5. Sabar Nurohman, M.Pd

Tim Reviewer:

1. Dr. Agus Maman Abadi
2. Wipsar Sunu Brams Dwandaru, M.Sc, Ph.D
3. Dr. Endang Wijayanti
4. Dr. Heru Nurcahyo



Tema:

**Pemantapan Keprofesionalan Peneliti, Pendidik, dan Praktisi
MIPA Untuk Mendukung Pembangunan Karakter Bangsa**

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
Tahun 2011

Kata Pengantar

Puji syukur kami panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa atas limpahan rahmat dan hidayah-Nya sehingga Prosiding Seminar Nasional MIPA Universitas Negeri Yogyakarta (UNY) 2011 ini dapat selesai disusun sesuai dengan tenggat waktu yang telah ditentukan oleh panitia. Seluruh makalah yang ada dalam prosiding ini merupakan kumpulan makalah yang telah lolos proses seleksi yang dilakukan tim reviewer dan telah disampaikan dalam kegiatan seminar nasional yang diselenggarakan pada tanggal 14 Mei 2011 di Fakultas MIPA UNY.

Seminar Nasional MIPA UNY 2011 diselenggarakan bersamaan dengan peringatan Dies Natalis UNY ke-47 dengan tema “*Pemantapan Keprofesionalan Peneliti, Pendidik dan Praktisi MIPA Untuk Mendukung Pembangunan Karakter Bangsa*”. Dalam rangka mengangkat tema tersebut, Seminar Nasional MIPA UNY 2011 menampilkan makalah utama “*Pendidikan Sains Dan Pengembangan Karakter Bangsa Untuk Merintis Jalan Menuju Hidup Bahagia*” yang disampaikan oleh Drs. Amin Genda Padussa dari Jurusan Pendidikan Fisika Universitas Negeri Yogyakarta. Selain makalah utama yang mengangkat tema pengembangan karakter, dalam seminar ini juga disampaikan hasil kajian dan penelitian dalam bidang MIPA dan Pendidikan MIPA yang dilakukan oleh para peneliti di universitas dan lembaga penelitian yang ada di Indonesia. Makalah-makalah yang disampaikan terbagi atas empat bidang utama, yaitu: bidang matematika dan pendidikan matematika, bidang fisika dan pendidikan fisika, bidang kimia dan pendidikan kimia, serta bidang biologi dan pendidikan biologi.

Semoga prosiding ini dapat ikut berperan dalam penyebaran hasil kajian dan penelitian di bidang MIPA dan pendidikan MIPA sehingga dapat diakses oleh khalayak yang lebih luas dan bermanfaat bagi pembangunan bangsa.

Yogyakarta, Juni 2011

Tim Editor

Sambutan Ketua Panitia

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillah robbil 'alamin. Segala puji syukur kita panjatkan kehadirat Allah s.w.t., Tuhan yang Maha Esa, atas segala limpahan karunia-Nya kepada kita semua yang berupa kesehatan dan kesempatan untuk saling bertemu, bertukar ilmu, dan berdiskusi dalam kegiatan Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan, dan Penelitian MIPA Tahun 2011 di FMIPA UNY.

Kegiatan seminar tahunan ini merupakan salah satu dari agenda kegiatan Dies Natalis UNY yang ke-47. Panitia seminar mengundang dua pembicara utama, yakni Prof. Kamsul Abraha, Phd dari FMIPA UGM dan Drs. Amin Genda Padusa dari FMIPA UNY. Atas nama panitia, kami menghaturkan terima kasih kepada beliau berdua atas kesediannya menjadi pembicara utama.

Seminar nasional kali ini diikuti oleh kalangan dosen, guru, peneliti, praktisi, dan pemerhati MIPA maupun pendidikan MIPA yang berasal dari berbagai provinsi di Indonesia. Di samping makalah utama, terdapat juga makalah-makalah yang disajikan pada sesi paralel yang terbagi menjadi sembilan bidang keahlian, yakni: Kimia, Pendidikan Kimia, Matematika, Pendidikan Matematika, Fisika, Pendidikan Fisika, Biologi, Pendidikan Biologi, dan Pendidikan IPA.

Pada kesempatan ini, panitia menyampaikan rasa terima kasih yang tak terkira kepada Rektor Universitas Negeri Yogyakarta, Prof. Dr. Rochmat Wahab atas dukungannya serta Dekan FMIPA UNY, Dr. Ariswan, atas dorongan, dukungan, dan fasilitas yang disediakan. Selain itu, rasa terima kasih kami sampaikan pula kepada segenap sponsor yang ikut menyukseskan dan meramaikan kegiatan ilmiah ini. Tak lupa, sebagai ketua, saya memberikan penghargaan yang tinggi kepada seluruh anggota panitia serta para mahasiswa yang telah bekerja keras secara ikhlas demi kelancaraan pelaksanaan seminiar ini.

Atas nama panitia, kami mohon maaf yang sebesar-besarnya bilamana dalam kami melayani masih terdapat hal-hal yang kurang berkenan, baik pada waktu pendaftaran, pelaksanaan, maupun pelayanan pasca seminar. Akhir kata, kami berharap semoga seminar ini memberikan sumbangan yang signifikan bagi kemajuan bangsa Indonesia, terutama dalam memajukan bidang MIPA beserta pendidikan MIPA. Selamat berseminar!

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Ketua,
Sugiman

**SAMBUTAN DEKAN PADA
SEMINAR NASIONAL FMIPA UNY**

Pertama- tama marilah kita panjatkan puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan berbagai kenikmatan kepada kita sekalian. Salah satu nikmat yang sekarang kita rasakan adalah nikmat kesehatan sehingga kita dapat menyelenggarakan seminar nasional ini.

Selanjutnya perkenankan saya menyampaikan penghargaan dan ucapan terima kasih kepada Ketua Panitia beserta seluruh jajaran kepanitiaian seminar nasional penelitian dan pendidikan MIPA yang telah mempersiapkan terselenggaranya seminar nasional ini. Hal ini sangat penting untuk saya sampaikan mengingat FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta (UNY) sedang bekerja keras untuk menggapai pengakuan publik sebagai fakultas yang berkualitas dalam melaksanakan sistem manajemen mutu menuju *world class university* (WCU). Kualitas di atas adalah kualitas yang berimbang dalam seluruh bidang Tri Darma Perguruan Tinggi, dengan tetap mengedepankan karakter mulia dalam melaksanakannya. Secara khusus perkenankan pula saya sampaikan terima kasih kepada senior kami Bapak. Drs. H. Amin Genda Padusa Dosen Jurdik. Fisika FMIPA UNY dan Prof. Kamsul Abraha, Ph.D dari Jurusan Fisika FMIPA UGM yang telah berkenan menjadi pembicara kunci pada seminar nasional ini.

Seminar nasional dengan tema "Pemantapan Keprofesionalan Peneliti, Pendidik dan Praktisi MIPA untuk Mendukung Pembangunan Karakter Bangsa" tentu saja akan bermanfaat bagi pengembangan ilmu matematika dan IPA pada masa yang akan datang. Pengembangan tersebut tentu saja baik ditinjau dari sisi materi, penelitian maupun teknologi pembelajarannya dan pembentukan karakter yang mencerminkan sifat- sifat pada ilmu ke-mipa-an itu sendiri. Kita telah paham bahwa pemahaman terhadap ilmu pengetahuan dan teknologi akan dicapai manakala pemahaman terhadap ilmu dasarnya sangat memadai. Dimulai dari persoalan mipa sederhana sampai pada aplikasi bidang Fisika, Kimia, matematika, dan Biologi dalam teknologi yang sesuai dan bahkan pada bidang Ekonomi sekalipun. Oleh karena itu penelitian Bidang MIPA dan teknik pembelajarannya perlu dilakukan terus menerus agar aplikasi pada bidang- bidang di atas dapat dipahami oleh pembelajarnya. Seminar nasional ini harus mampu mendorong para peneliti dan praktisi pendidikan bidang Matematika dan IPA dapat meramu bidang ini, sehingga mudah dipahami oleh siswa di dalam kelas, mampu melakukan penelitian, dan mengimplementasikan terapannya pada teknologi yang sesuai.

Akhirnya saya mengucapkan terima kasih atas partisipasinya dalam seminar yang diselenggarakan oleh FMIPA UNY ini dengan harapan semoga memberikan pencerahan bagi kita khususnya yang selalu terlibat dalam penelitian, pembelajaran dan aplikasi bidang MIPA dalam kehidupan kita masing- masing.

Dekan

Dr. Ariswan
NIP 19590914 1988031 003

DAFTAR ISI

| | |
|-----------------------------------|-----|
| Halaman Sampul | i |
| Halaman Editor dan Reviewer | ii |
| Kata Pengantar | iii |
| Sambutan Ketua Panitia | iv |
| Sambutan Dekan FMIPA UNY | v |
| Daftar Isi | vi |

Makalah Utama

1. Pendidikan dan Penelitian Sains untuk Mendukung Karakter Bangsa
Prof. Kamsu Abraha, Ph.D. (UGM)
2. Pendidikan Sains dan Pengembangan Karakter Bangsa untuk Merintis Jalan Menuju
Hidup Bahagia
Drs. H. M. Amin Genda Paddusa (UNY) U-1

| Makalah Bidang Pendidikan Matematika | | |
|---|---|----------------|
| Kode | Judul | Hal PM- |
| PM-1 | Efektifitas Model Pembelajaran <i>Team Accelerated Instruction</i> Pada Siswa Kelas X SMK Tunas Harapan Tahun Pelajaran 2008-2009 <i>(Sri Adi Widodo)</i> | 1 |
| PM-2 | Eksperimentasi Pembelajaran Matematika Melalui Metode <i>Team Quiz</i> dan <i>Learning Cell</i> Ditinjau dari Aktivitas Belajar Siswa <i>(Rita P.Khotimah, Mukhafifah)</i> | 7 |
| PM-3 | Pembelajaran Kontekstual Berlatar Pondok Pesantren Pada Materi Garis dan Sudut di Kelas VII MTS <i>(Eva Yusnita)</i> | 11 |
| PM-4 | Proses Berpikir Siswa SDBerkemampuan Matematika Tinggi dalam Melakukan Estimasi Masalah Berhitung <i>(Muh. Rizal)</i> | 19 |
| PM-5 | Pengembangan Perangkat Pembelajaran Estimasi Berhitung di Sekolah Dasar <i>(Muh Rizal)</i> | 29 |
| PM-6 | Teknik-Teknik Inovasi yang Digunakan Guru SMP dalam Membuat Soal Matematika Kontekstual <i>(Suryo Widodo)</i> | 35 |
| PM-7 | Analisis Data Ujian Nasional Matematika Berdasarkan Penskoran Model <i>Rasch</i> dan Model <i>Partial Credit</i> <i>(Awal Isgiyanto)</i> | 43 |
| PM-8 | Mengestimasi Kemampuan Peserta Tes Uraian Matematika dengan Pendekatan Teori Respons Butir dengan Penskoran Politomus dengan <i>Generalized Partial Credit Model</i> <i>(Heri Retnawati)</i> | 53 |

| | | |
|-------|--|-----|
| PM-9 | E-Learning Adaptif Berbasis Karakteristik Peserta Didik (<i>Kuswari Hernawati</i>) | 63 |
| PM-10 | Mengembangkan Karakter Siswa Melalui Pembelajaran Matematika (<i>Ali Mahmudi</i>) | 75 |
| PM-11 | Meningkatkan <i>Soft Skills</i> Mahasiswa Melalui Pemahaman Proses Berpikir dalam Memecahkan Masalah Matematika Berdasar Tipe Kepribadian (<i>M.J. Dewiyani S</i>) | 81 |
| PM-12 | Model Assesmen Pembelajaran Berdasarkan Hasil Ujian Akhir Sekolah Berstandar Nasional Matematika SD (<i>Sumardi</i>) | 89 |
| PM-13 | Pemanfaatan <i>Microsoft Access</i> Sebagai Perekam Kinerja Akademik Mahasiswa dalam Proses Pembelajaran (<i>Sri Andayani</i>) | 98 |
| PM-14 | Pembelajaran Pembagian Menggunakan Peraga Manipulatif dengan Pendekatan Algoritma Tunggal (<i>Qodri Ali Hasan</i>) | 107 |
| PM-15 | Pengembangan Materi Pembelajaran Operasi Pembagian dengan Menggunakan Alat Peraga Manipulatif (<i>Qodri Ali Hasan</i>) | 113 |
| PM-16 | Pembelajaran Matematika dengan Pemecahan Masalah untuk Menumbuhkembangkan Kemampuan Berpikir Kritis Siswa (<i>Desti Haryani</i>) | 121 |
| PM-17 | Pembiasaan Berpikir Kritis dalam Belajar Matematika Sebagai Upaya Pembentukan Individu yang Kritis (<i>Desti Haryani</i>) | 127 |
| PM-18 | Pengembangan <i>Softskill</i> Mahasiswa Calon Guru Melalui Perkuliahan di Jurusan Pendidikan Matematika (<i>Endang Listyani</i>) | 133 |
| PM-19 | Berpikir Lateral dalam Pembelajaran Matematika (<i>R. Rosnawati</i>) | 139 |
| PM-20 | Model Tes dan Analisis Kompetensi Siswa di Sekolah Dasar (<i>Zamsir</i>) | 145 |
| PM-21 | Mengembangkan Kecakapan Matematis Mahasiswa Calon Guru Matematika Melalui Strategi Perkuliahan Kolaboratif Berbasis Masalah (<i>Djamilah Bondan Widjajanti</i>) | 151 |
| PM-22 | Pembelajaran Matematika dengan Media Berbasis Komputer Ditinjau dari Aktivitas Belajar Siswa (<i>Masduki, Arif Ganda Nugroho</i>) | 159 |
| PM-23 | Prosep-Prosep dalam Matematika Sekolah (<i>Sugiman</i>) | 165 |
| PM-24 | Pengaruh Pembelajaran Berbasis Masalah dengan <i>Setting</i> Kooperatif Jigsaw Terhadap Kemampuan Pemecahan Masalah dan Komunikasi Matematis Serta Kemandirian Belajar Siswa SMA (<i>Asep Ikin Sugandi</i>) | 171 |
| PM-25 | Penerapan Metode Pembelajaran Problem Solving Model Polya untuk Meningkatkan Kemampuan Memecahkan Masalah Bagi Siswa Kelas IX J di SMPN 3 Cimahi (<i>Kokom Komariah</i>) | 181 |
| PM-26 | Pemahaman Pemecahan Masalah Pembuktian Sebagai Sarana Berpikir Kreatif (<i>Herry Agus Susanto</i>) | 189 |

| | | |
|-------|---|-----|
| PM-27 | Pendidikan Karakter Pada Pembelajaran Matematika (<i>Jailani</i>) | 197 |
| PM-28 | Pemahaman Mahasiswa <i>Field Dependent</i> dalam Pemecahan Masalah Pembuktian (<i>Herry Agus Susanto</i>) | 205 |
| PM-29 | Peningkatan Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis Melalui Pendekatan Matematika Realistik (<i>Syaiful, Yaya S. Kusumah, Yozua Sabandar, dan Darhim</i>) | 215 |

| Makalah Bidang Matematika | | |
|----------------------------------|--|---------------|
| Kode | Judul | Hal M- |
| M-1 | Penyelesaian Invers Problem Pada Reaksi Difusi dengan Menggunakan Metode Optimasi (<i>Elly Musta'adah, Erna Apriliani</i>) | 1 |
| M-2 | Skema Akar Kuadrat dalam Unscented Kalman Filter Untuk Mendeteksi Kerak Pada Alat Penukar Panas (<i>M. Tholib, Erna Apriliani</i>) | 9 |
| M-3 | Peran Dimensi Fraktal dalam Riset Geomagsa (<i>John Maspupu</i>) | 19 |
| M-4 | Prediksi Bintik Matahari untuk Siklus 24 Secara Numerik (<i>John Maspupu</i>) | 25 |
| M-5 | Komparasi Hasil Klasifikasi Penyakit Diabetes Mellitus Menggunakan Jaringan Syaraf Tiruan <i>Backpropagation</i> dan <i>Learning Vector Quantization</i> (<i>Agus Nurkhozin, Mohammad Isa Irawan, Imam Mukhlas</i>) | 33 |
| M-6 | Pengendalian Optimal Tuberkulosis dengan Exogenous Reinfection (<i>Hasnan Nasrun, Subchan, M. Yunus</i>) | 41 |
| M-7 | Optimasi Penentuan Dosis Obat Pada Terapi Leukemia Myeloid Kronik (<i>Ibnu Hajar Salim, Subchan</i>) | 53 |
| M-8 | Pemilihan Guru Berprestasi Menggunakan Metode AHP dan Topsis (<i>Juliyanti, Mohammad Isa Irawan, dan Imam Mukhlash</i>) | 63 |
| M-9 | Kendali Optimal Pada Penurunan Emisi CO ₂ dan Efek Rumah Kaca di Indonesia Menggunakan Metode Langsung dan Tidak Langsung (<i>Aprilia Dwi Handayani, Subchan</i>) | 69 |
| M-10 | Penyelesaian Model Matematika Penelusuran Banjir Gelombang Difusi (<i>Diffusion Wave Flood Routing</i>) (<i>M.Siing, Basuki Widodo</i>) | 77 |
| M-11 | Pengenalan Pola Tanda Tangan Menggunakan Metode Moment Invariant dan Jaringan Syaraf Radial Basis Function (RBF) (<i>Ainun Jariah, Mohammad Isa Irawan, dan Imam Mukhlash</i>) | 85 |
| M-12 | Enumerasi Digraf Tidak Isomorfik (<i>Mulyono</i>) | 93 |
| M-13 | Model Numerik Distribusi Temperatur Pada Ruang Ber-AC dengan Mempertimbangkan Interior Drag (<i>Hirman Rachman, Basuki Widodo</i>) | 101 |
| M-14 | Desain Pengendalian Ketinggian Air Dan Temperatur Uap Pada Sistem <i>Steam Drum Boiler</i> dengan Metode <i>Sliding Mode Control (SMC)</i> (<i>Teguh Herlambang, Erna Apriliani, Hendra Cordova dan Mardlijah</i>) | 109 |

| | | |
|------|--|-----|
| M-15 | Strategi Pengendalian Penyebaran Hiv Tipe Ganas dan Mutan dengan Terapi Inhibitor (<i>M. Zainul Afandi, Subchan</i>) | 117 |
| M-16 | Pelabelan Graceful, Skolem Graceful dan Pelabelan \hat{p} Pada Graf $(S_n, 3)$ (<i>Amri Zulfi, Muzayyin Ahmad, Nurul Huda, Supriadi, Kiki A. Sugeng</i>) | 131 |
| M-17 | Menentukan Model Ekonomi Berstruktur Melalui Analisis <i>Vector Auto Regression</i> (VAR) dalam Pertumbuhan Ekonomi Indonesia Periode 1996-2009 (<i>Soemartini</i>) | 137 |
| M-18 | Kajian Secara Aljabar Tentang Perkalian Bilangan Bulat Sangat Besar (<i>Muhammad Sugeng, Mahmud Yunus</i>) | 149 |
| M-19 | Model Katastrofi Untuk Performansi Kerja: CUSP atau Swallowatil? (<i>Asti Meiza, Sutawanir Darwis, Agus Yodi Gunawan</i>) | 157 |
| M-20 | Analisis Peubah Prediktor yang Memuat Kesalahan Pengukuran dengan Regresi Ortogonal (<i>Kismiantini</i>) | 165 |
| M-21 | Karakteristik Persamaan Aljabar Riccati dan Penerapannya Pada Masalah Kendali (<i>Muhammad Wakhid Musthofa</i>) | 173 |
| M-22 | Prosedur Penaksiran Parameter Model Multilevel Menggunakan <i>Two Stage Least Square</i> dan <i>Iterative Generalized Least Square</i> (<i>Bertho Tantular</i>) | 181 |
| M-23 | Aplikasi Sistem Inferensi Fuzzy Metode Sugeno dalam Memperkirakan Produksi Air Mineral dalam Kemasan (<i>Suwandi, Mohammad Isa Irawan, dan Imam Mukhlash</i>) | 189 |
| M-24 | Kendali Optimal Pada Pencegahan Wabah Flu Burung dengan Eliminasi, Karantina dan Pengobatan (<i>Taslina, Subchan, Erna Apriliani</i>) | 199 |
| M-25 | Pengaruh Faktor Pertumbuhan Populasi Terhadap Epidemii Demam Berdarah Dengue (<i>Kusbudiono Dan Basuki Widodo</i>) | 209 |
| M-26 | Digraf Eksentrik dari Graf <i>Cocktail Party</i> (<i>Nugroho Arif Sudibyo, Sri Kuntari, dan Tri Atmojo Kusmayadi</i>) | 219 |
| M-27 | Digraf Eksentrik dari Graf Buku (<i>Sri Kuntari, Nugrohoarif Sudibyo, dan Tri Atmojo Kusmayadi</i>) | 223 |
| M-28 | Penerapan Grup Multiplikatif Atas \mathbb{Z}_p^* dalam Pembuatan Tanda Tangan Digital Elgamal (<i>Rininda Ulfa Arizka, Agus Maman Abadi</i>) | 227 |
| M-29 | Model Black Litterman dengan Pendekatan Teori Sampling (<i>Retno Subekti</i>) | 233 |
| M-30 | <i>Mabrur Ok</i> (Model Antrian Bijak Prioritas Usia Rentan Orientasi Keefektifan) : Solusi Akselerasi Pemberangkatan Jamaah Haji Nasional (<i>Nabih Ibrahim, Yuni Nurfiana W dan Nur Hera Utami</i>) | 243 |
| M-31 | Peramalan Suhu Udara di Yogyakarta dengan Menggunakan Model <i>Fuzzy</i> (<i>Jayus Priyana, Agus Maman Abadi</i>) | 253 |
| M-32 | <i>Double Glazing Design</i> untuk Efisiensienergi Pada Alat Rumah Tangga (<i>Dwi Lestari</i>) | 261 |
| M-33 | Simulasi <i>Granular Dynamics</i> Dimensi Dua Partikel dengan Ukuran Bervariasi (<i>Moh. Hasan</i>) | 267 |

| | | |
|------|---|-----|
| M-34 | Sistem Persamaan Linear Pada Aljabar Min-Plus (<i>Musthofa</i>) | 275 |
| M-35 | Simulasi Model Dispersi Polutan Karbon Monoksida di Pintu Masuk Tol (Studi Kasus <i>Line Source</i> di Ruas Tol Dupak, Surabaya) (<i>Endrayana Putut L.E., Basuki Widodo</i>) | 285 |
| M-36 | Sifat-Sifat Invarian Pada Inversi (<i>Himmawati Puji Lestari, Caturiyati</i>) | 295 |
| M-37 | Pelabelan Jumlah Eksklusif Pada Graf Tangga L_n (<i>Debby Sanjaya, Petter John, Muhammad Haryono</i>) | 299 |
| M-38 | Transformasi Hopf-Cole Pada Aproksimasi Difusi Untuk Menyelesaikan Persamaan Transfer Radiasi dalam <i>Inverse Problem</i> Pencitraan Kanker Otak (<i>Jumini, Erna Apriliani, Mahmud Yunus</i>) | 303 |
| M-39 | Protokol Perjanjian Kunci Berdasarkan Masalah Konjugasi Atas Grup Non-Komutatif (<i>M. Zaki Riyanto</i>) | 311 |
| M-40 | Pewilayahan Curah Hujan di Kabupaten Indramayu dengan Metode Gerombol (Berdasarkan Data Median Tahun 1980-2000) (<i>Dewi Retno Sari Saputro, Ahmad Ansori Mattjik, Rizaldi Boer³ Aji Hamim Wigena, Anik Djuraidah</i>) | 319 |
| M-41 | <i>Prediction-CFA</i> Pada CFA Regional (<i>Resa Septiani Pontoh</i>) | 329 |
| M-42 | Ideal Fuzzy yang Dibangun oleh Fuzzy Singleton Pada Suatu Semigrup (<i>Karyati, Sri Wahyuni, Budi Surodjo, Setiadji</i>) | 337 |
| M-43 | Peramalan Curah Hujan di Kota Yogyakarta dengan Model Fungsi Transfer Multivariat (<i>Khrisna Yuli Siswanti dan Dhoriva Urwatul Wutsqa</i>) | 343 |
| M-44 | Karakteristik Variasi Harian Komponen H Geomagnet Stasiun Pengamat Geomagnet Biak (<i>Habirun</i>) | 359 |
| M-45 | Optimisasi Konveks: Konsep-Konsep (<i>Caturiyati dan Himmawati Puji Lestari</i>) | 367 |

PENDIDIKAN SAINS DAN PENGEMBANGAN KARAKTER BANGSA UNTUK MERINTIS JALAN MENUJU HIDUP BAHAGIA

M. Amin Genda Paddusa

Jurusan Pendidikan Fisika FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta

PENDAHULUAN

Platform pendidikan karakter bangsa Indonesia telah dipelopori oleh tokoh pendidikan kita Ki Hadjar Dewantara yang lahir pada 02 Mei 1899 yang tertuang dalam tiga kalimat, yaitu: Ing ngarsa sung tuladha. Ing madya mbangun karsa. Tut wuri handayani. Tanggal 02 Mei dijadikan sebagai hari Pendidikan Nasional untuk menghormati Ki Hadjar Dewantara sebagai pelopor pendidikan Indonesia.

Ing ngarsa sung tuladha. Artinya ketika berada di depan dapat memberikan teladan, contoh, dan panutan. Ing madya mbangun karsa. Artinya keetika berada di tengah, hendaknya bisa menjadi penyatu tujuan dan cita-cita peserta didiknya. Seorang guru senantiasa berkonsolidasi memberikan bimbingan dan mengambil keputusan dengan musyawarah dan mufakat yang mengutamakan kepentingan peserta didik di masa depannya. Tut wuri handayani. Ketika berada di belakang, hendaknya bisa memberikan dorongan dan motivasi, sehingga peserta didik memiliki semangat dan daya juang dalam mengembangkan potensi dirinya. (M. Furqon Hidayatullah. 2009.14).

Sedangkan menurut Slamet Sutrisno dalam KR 28 April 2011 mengatakan bahwa: Ajaran Ki Hadjar Dewantara merupakan pendidikan yang maksudnya “Menuntun segala kekuatan kodrat yang ada pada anak-anak agar mereka sebagai manusia dan sebagai anggota masyarakat dapat mencapai keselamatan dan *kebahagiaan* yang setinggi-tingginya”.

Menurut R. Slamet Iman Santoso: “Pendidikan bertugas megembangkan potensi individu semaksimal mungkin dalam batas-batas kemampuannya, sehingga terbentuk manusia yang pandai, terampil, *jujur*, tahu kemampuan dan batas kemampuannya, serta mempunyai kehormatan diri. Dengan demikian, pembinaan *watak* merupakan tugas utama pendidikan”. (1980:iii). Selain itu ia juga mengatakan bahwa: “Tujuan tiap pendidikan yang murni ialah menyusun harga pribadi yang kukuh kuat dalam jiwa pelajar, supaya mereka kelak dapat bertahan dalam masyarakat. Hanya manusia yang memiliki harga pribadi yang teguh akan merasa aman dalam dunia ini; mereka memperoleh ketentraman dalam hidup, tidak akan terombang-ambing antara beraneka aliran dan pendirian, dan akan mampu memilih dengan tegas dan hati yang tetap”. (1980: 33-34).

UU Nomor 14 Tahun 2005 tentang Sistem Pendidikan Nasional (Sisdiknas) Pasal 3 menyatakan bahwa pendidikan nasional berfungsi mengembangkan kemampuan dan membentuk *watak* serta peradaban bangsa yang bermartabat dalam rangka mencerdaskan kehidupan bangsa, bertujuan untuk berkembangnya potensi peserta didik agar menjadi manusia yang beriman dan bertaqwa kepada Tuhan Yang Maha Esa, berakhlak mulia, sehat, berilmu. cakap, kreatif, mandiri, dan menjadi warga negara yang demokratis serta bertanggung jawab.

Setelah menyimak beberapa pernyataan di atas, ternyata tujuan pendidikan kita sangat bagus. Sekarang yang menjadi pertanyaan, kenapa keadaan negara kita masih tetap morat-marit? Penyelewengan, korupsi, perampokan, kenakalan remaja, orangtua dan lain-lain masih banyak terjadi dimana-mana dalam negeri Indonesia tercinta. Apakah pelaksana pendidikan belum melaksanakan tugas sebagai guru yang patut *ditiru* dan *digugu* atau tidak *saru* dan *wagu*? Apakah pendidikan karakter yang mulai (sudah) hilang? Sudah menjadi rahasia umum bahwa banyak orang yang mau menjadi pejabat atau kaya dengan menghalalkan segala cara. Apakah seseorang yang mempunyai jabatan pasti bahagia ? Apakah orang yang sudah kaya pasti bahagia? Kebahagiaan tidak mesti ditentukan oleh jabatan yang tinggi dan kekayaan yang melimpah.

Sehubungan dengan itu perlu kita ketahui faktor apa saja yang dapat menjadikan seseorang bahagia? Faktor apakah yang berhubungan dengan pendidikan Sains dan pengembangan karakter yang dapat digunakan merintis jalan menuju hidup bahagia? Dan sejak kapan pendidikan karakter

mulai diberikan? Hal ini perlu kita ketahui karena semua orang pasti ingin hidup bahagia dunia dan akhirat.

PEMBAHASAN

Dimana saja kita berada dan kapan saja tentu kita akan menemukan peristiwa IPA (Sains), sehingga seseorang sangat penting mempelajari sains. Pada saat menggunakan metode ilmiah dalam penelitian sains, kita harus bersikap ilmiah, misalnya: rendah hati, jujur, objektif, menghargai waktu, dll. Contoh sikap ilmiah tersebut jika sudah menjadi suatu kebiasaan akan menjadi suatu karakter.

Pendidikan Karakter dan Kebahagiaan

Menurut Poerwadarminta (1985: 445) “Karakter adalah tabiat, watak, sifat-sifat kejiwaan, akhlak atau budi pekerti yang membedakan seseorang daripada yang lain”. Sedangkan “Kebahagiaan adalah kesenangan dan ketenteraman hidup lahir-batin, kemujuran, keuntungan”.

Muhamad Nur dari UNESA dalam makalah yang disampaikan pada acara Penyamaan Persepsi Penyusunan SSP-PPG Basic Sains FMIPA UNY mengatakan bahwa karakter memiliki dua bagian besar yaitu karakter kinerja (*performance character*) dan karakter moral (*moral character*). Karakter kinerja terdiri dari seluruh kualitas yang memungkinkan kita untuk mencapai potensi tertinggi dalam setiap lingkungan kinerja (seperti di kelas dan tempat kerja) misalnya: inisiatif, disiplin diri, kegigihan, kerjasama, dan sejenisnya. Sedangkan karakter moral terdiri dari seluruh kualitas yang memungkinkan kita menjadi makhluk beretika terbaik dalam berbagai hubungan sosial dan dalam menjalankan peran sebagai warganegara, misalnya: hormat, keadilan, kebaikan hati, kejujuran, dan sebagainya. Selanjutnya dikatakan bahwa karakter kinerja merupakan orientasi ketuntasan. Orientasi ini terdiri dari: usaha, ketekunan, kegigihan, etika kerja yang kuat, sikap positif, kepintaran, dan disiplin yang dibutuhkan untuk merealisasikan potensi seseorang untuk unggul dalam bidang akademik, kegiatan ko-kurikuler, tempat kerja, atau setiap daerah usaha keras lainnya. Karakter moral merupakan orientasi relational yang terdiri dari: kejujuran, keadilan, kepedulian, dan hormat dibutuhkan untuk hubungan interpersonal dan perilaku beretika yang baik. Pada kesempatan tanya-jawab, Muhamad Nur juga mengatakan bahwa pendidikan karakter akan berhasil dengan baik apabila orang yang berperan langsung dapat menjadi contoh yang baik.

Tuhan menjadikan segala sesuatu berpasang-pasangan, misalnya aksi-reaksi, atas-bawah, bahagia-menderita, dan sebagainya. Manusia diberi kebebasan memilih, kecuali memilih akibat dari hasil pilihannya. Apapun yang terjadi di dalam diri kita, apapun yang menimpa kita, hasil apapun yang kita terima, sebetulnya adalah akibat dari serangkaian pilihan kita dimasa lalu. Bahagia atau menderita yang kita rasakan adalah hasil dari pilihan kita. Berpikir positif dapat membuat kita bahagia, sebaliknya berpikir negatif dapat membuat kita nestapa

Untuk menjadi orang bahagia memang butuh uang, butuh kawan, butuh kehormatan, dan lain-lain. Akan tetapi, jika semua itu sudah kita miliki, sementara perasaan kita tetap negatif, maka kebahagiaanpun tidak mungkin kita dapatkan. Jadi dapat kita katakan bahwa baik dan buruknya kehidupan kita, akan ditentukan oleh sikap dan perilaku kita sendiri. Karena itu kita harus berani memutuskan untuk segera membiasakan diri bersikap positif. Kitalah yang menciptakan karakter dan atau watak kita yang membawa kebahagiaan. Setiap kebahagiaan memiliki “perantara” dan “sebab” yang berbeda dan setiap kebahagiaan sangat tergantung pada perasaan masing-masing orang.

Banyak orang yang mengira bisa mendapatkan kebahagiaan dari materi berlimpah, seperti rumah mewah, mobil mewah, dan lain-lain walaupun dengan cara kredit. Ada juga orang yang terus mengejar tahta dan kekuasaan dengan menghalalkan segala cara. Mungkin apakah ini ada hubungannya dengan istilah 3 TA (harTA, tahTA, dan waniTA) ? Orang sebaiknya meletakkan kebahagiaan dalam hatinya, bukan pada barang yang dimiliki, karena sumber kebahagiaan adalah *hati*. Orang yang merasa bahagia karena harta, tahta, dan wanita termasuk kebahagiaan “kosmetik”. Dalam ajaran Islam dikatakan, dalam tubuh manusia ada segumpal daging, apabila daging itu rusak maka rusaklah manusia itu.

Gambaran pendidikan karakter kuat dapat juga dilihat pada sebuah syair dalam “tembang” yang berbunyi: *Dhondong apa salak, duku cilik-cilik. Ngandhong apa mbecak, mlaku thimik-*

thimik. Tembang ini memiliki filosofi dan nilai yang tinggi dan bermakna sangat dalam. Buah kedondong itu kulitnya halus, tetapi dalamnya kasar atau berserat. Sebaliknya buah salak kulitnya kasar, tetapi bagian dalamnya halus. Karena buah kedondong dan buah salak yang antara kulit dan isinya tidak sama, maka keduanya tidak dipilih. Ternyata yang dipilih adalah buah duku yang kulit dan isinya sama-sama halus. Naik bendi artinya menikmati kebahagiaan di atas penderitaan kuda, sedangkan naik beca artinya menikmati kebahagiaan di atas penderitaan manusia lain. Keduanya juga tidak dipilih, tetapi yang dipilih lebih baik berjalan pelan-pelan dan mengeluarkan tenaga, tetapi tidak menyusahkan pihak lain. (M. Furqon H, 2009: 15-16).

Buat apa kita berjaya, kalau hal itu terukir di atas penderitaan orang lain. Buat apa kita merasakan kesuksesan, kalau itu harus diraih dengan jalan memanipulasi dan menindas orang lain. Karena disadari atau tidak, hal itu pasti akan membuat nurani kita akan terbebani dan setidaknya akan membuat kehidupan menjadi tidak bahagia. Kalau sudah tidak bahagia, itu namanya bukan sukses. Karena sukses yang utama adalah kebahagiaan. Di Negara kita Indonesia tercinta kelihatannya tidak sulit mencari orang luar dan dalamnya tidak sama.

Dudung Hamdun (2009: 157) mengatakan bahwa “Orang sukses yang sejati adalah orang yang mampu membahagiakan dirinya sendiri dan juga orang yang berada disekitarnya. Orang sukses tidak akan pernah mencari popularitas dan pengakuan dari apa yang telah dilakukannya. Yang mereka cari hanyalah kepuasan hidup dan kebahagiaan yang menjadi tujuan kunci dari sebuah kesuksesan.

Menuju Hidup Bahagia

Semua orang pasti menginginkan hidup bahagia, tetapi sayang banyak sekali orang melakukan sesuatu yang menyebabkan dirinya tidak bahagia. Banyak orang mencari kebahagiaan di luar dirinya misalnya seperti pangkat, jabatan, gelar, dan materi, tetapi akhirnya belum bahagia. Abraham Lincoln mengatakan bahwa “Kebanyakan orang itu menjadi bahagia sejauh mereka putuskan sendiri bahwa mereka bahagia”

Kebahagiaan itu Insya Allah dapat kita capai dengan karakter yang baik sebagai perintis jalan. Adapun berbagai karakter yang dapat kita gunakan sebagai perintis jalan menuju hidup bahagia adalah antara lain.

1. Mempunyai Cita-cita

Cita-cita merupakan target yang hendak dicapai sesuai dengan potensi dan perencanaan, serta terdapat kemungkinan untuk mencapainya. Cita-cita ke depan itulah yang disebut visi. Menurut Mas ud Chasan (2008: 177-178) dalam bukunya Sukses Bisnis Modal Dengkul bahwa visi dapat disinonimkan dengan sasaran agung, sedang misi dapat disinonimkan dengan tugas agung. Pada tingkat personal, visi itu cita-cita sedang misi itu panggilan hidup. Visi itu berkarakter material, sedang misi itu berkarakter spiritual.

Untuk melahirkan suatu cita-cita biasanya melalui sebuah mimpi, tetapi mimpi tidak boleh muluk-muluk. Impian yang hebat dapat meningkatkan kesempatan untuk sukses. Makanya itu seseorang harus berani untuk bermimpi dan ertidak sesuai dengan impian itu. Orang yang tidak memiliki cita-cita di dalam hidupnya, biasanya selalu berdalih dengan bersembunyi di belakang kata “nasib” Padahal kita semua sering mendengar bahwa “Tuhan tidak akan merubah nasib suatu kaum (seseorang), selama kaum (seseorang) tersebut tidak mengubah nasibnya sendiri”.

Setiap kuliah pertama pada suatu kelas, kami biasanya mengedarkan angket untuk mengeahui etos kerja, cita-cita, dan hobby mahasiswa. Ternyata masih banyak mahasiswa yang belum mempunyai cita-cita yang sebenarnya. Bahkan ada mahasiswa tugas belajar dari Kalimantan Barat yang menulis cita-citanya mau menjadi dokter. Kapan cita-cita tersebut bisa tercapai, karena mahasiswa tersebut baru semester 4 pada jurdik Fisika.

2. Mulai Hari dengan Perasaan Optimis

Menurut An Ubaidy (2008: v) bahwa “Optimisme memiliki dua pengertian. Pertama, optimisme adalah doktrin hidup yang mengajarkan kita untuk meyakini adanya kehidupan yang lebih baik. Kedua, optimisme bearti kecenderungan batin untuk merencanakan aksi untuk mencapai hasil yang lebih bagus.

Optimisme merupakan suatu sumber inspirasi, vitalitas, dan harapan. Optimisme akan mendorong kita untuk mengangkat pandangan mata lebih atas, menciptakan masa depan yang baik atau tidak

menjadikan masa depan sebagai sumber ketakutan/ancaman. Jika kita mulai hari dengan perasaan optimisme, maka hari itu sangat diharapkan kita akan bekerja secara maksimal, sehingga mendapatkan hasil yang maksimal juga. Orang yang optimis tidak pernah mencari kambing hitam, mencoba mencari-cari alasan kegagalan dirinya dengan menyalahkan orang lain.

Sir Winston Churchill mengatakan bahwa “Orang yang pesimis melihat kesukaran di balik kesempatan, sedangkan orang optimis melihat kesempatan dalam setiap kesukaran. (Toto Tasmara, 2004: 54)

3. Bebaskan Pikiran dari Ketakutan

Napoleon Hill (2007: 9) mengatakan bahwa: “Ketakutan adalah biang utama dari kemiskinan, kegagalan, dan penderitaan yang muncul dengan ribuan bentuk berbeda. Orang yang bisa menaklukkan dan menguasai “rasa takut” akan bisa berjalan menuju pencapaian-pencapaian kesuksesan”. Ada beberapa ketakutan dasar, antara lain: takut miskin, takut tua, takut dikritik, dan takut mati.

a. Takut Miskin

Rasa takut akan kemiskinan ini muncul dari kebiasaan manusia memangsa manusia sesama manusia secara ekonomi. Sekarang banyak kita lihat orang sangat mendewa-dewakan uang. Begitu inginnya mendapatkan uang, ia bisa melakukan apa saja dengan cara ilegal. Kita mungkin pernah mendengar seseorang yang bercanda mengatakan bahwa yang haram saja sulit, apalagi yang halal. Takut menjadi miskin adalah hal yang sangat mengerikan, karena orang bisa melakukan pembunuhan, terlibat perampokan, perkosaan, dan semua bentuk pelanggaran hak-hak orang lain seperti yang banyak terjadi sekarang ini.

Orang tidak akan pernah takut miskin jika ia mengetahui bahwa rezeki yang disediakan oleh Allah sangat tidak terbatas, sehingga tidak akan habis sampai dunia kiamat. Orang tidak akan takut miskin jika punya landasan yang sangat kuat untuk mempercayai orang-orang lain yang memang patut dipercaya. Kembangkanlah sikap pantang menyerah dengan selalu berdoa kepada Ilahi Rabbi.

b. Takut Tua

Tanda ketuaan dan kemudaan tidak terletak pada rambut kepala, tetapi terletak pada hati. Ketuaan itu adalah ketuaan hati, bukan ketuaan rambut. (M. Musa Asy-syarif, 2006:44). Jadi jika kita ingin mengetahui, apakah kita sudah tua ataukah masih muda, maka tanyakan kepada hati masing-masing, jangan tanyakan pada rambut kepala. Sehubungan dengan itu seseorang tidak perlu menyemir rambut kepala, jika rambut sudah beruban, karena uban adalah cahaya bagi seorang muslim.

Seorang ahli zuhud mengatakan: “Uban bagaikan peringatan menakutkan bagi orang yang bodoh dan menjadi kabar gembira bagi orang cerdas. Dengan munculnya uban di kepala, diharapkan seseorang menjadi lebih dewasa dalam berpikir dan bertindak, sehingga bisa menjadi teladan bagi yang masih muda.

Seseorang takut tua, karena dihantui perasaan bahwa ia tidak lama lagi akan meninggal, padahal dosanya banyak. Ketakutan jenis ini bisa muncul pada pikiran seseorang, karena tidak sedikit orang tua yang disia-siakan atau kurang diperhatikan oleh anak cucunya. Slogan hidup yang perlu kita tanamkan adalah umur boleh tua tetapi semangat tetap muda.

c. Takut Dikritik.

Perasaan takut dikritik bisa muncul dalam berbagai bentuk yang berbeda. Sebenarnya bagi orang yang berkecimpung dalam bidang MIPA, seharusnya tidak takut dikritik, karena dalam sikap ilmiah kita dianjurkan kritis dan bersedia dikritik. Sebenarnya kalau kita mau jujur, kritikan itu merupakan masukan yang dapat dimanfaatkan untuk melengkapi pengetahuan kita.

Orang yang takut dikritik bisa disebabkan antara lain karena merasa dirinya sudah “baik” dalam jabatan maupun ilmu pengetahuan atau orang tersebut memang punya sifat egois tinggi.

d. Takut Mati

Orang hidup pasti mati dan masalah mati, jodoh, rezeki ada di tangan Tuhan. Agama sudah memberikan petunjuk jalan bagaimana manusia mengisi hidup dan kehidupan dengan baik dan benar, sehingga manusia bisa lebih tenang menghadapi kematian. Untuk menghindari diri dari perasaan takut mati, maka sebaiknya seseorang meningkatkan pendalaman pengetahuan agamanya dan sekaligus menjalankan perintah agamanya dengan baik dan benar.

Kematian adalah suatu kemiskinan seperti saat kita dilahirkan. Tiada arti lagi harta benda dengan segala kemewahannya yang dapat dijadikan perhiasan. Hanya amal ibadah yang ikhlas dan tulus yang menjadi simpanan kekayaan untuk menghadap Allah Swt. Selama nafas masih berhembus, badan masih dapat digerakkan, dan pikiran mampu dikendalikan, marilah kita mengejar ridha Allah yang maha pengasih dan penyayang, dan sekaligus mohon ampunan-Nya.

Ketakutan adalah musuh sukses nomor satu. Ketakutan dapat menghentikan orang memanfaatkan peluang, meletihkan vitalitas fisik, menyebabkan gangguan organik, memendekkan umur, dan menutup mulut kita ketika sebenarnya ingin berbicara. Kebimbangan dan penundaan memupuk rasa takut, makanya itukita tidak senang menunda pekerjaan atau mengerjakannya dengan penuh kebingungan.

K.H. Achmad Satori Ismail mengatakan bahwa: “Rasa takut dan kegelisahan muncul akibat khianat dan kufur nikmat. Rasa aman itu nikmat dan rasa takut adalah musibah. Pokok pangkal kenikmatan manusia terdapat pada rasa aman dan kelapangan hidup. Sedangkan pokok pangkal malapetaka terdapat pada rasa takut dan kesempatan hidup (Republika, 16 April 2011). Pada saatnya kita membuang jauh-jauh rasa takut dan menggantinya dengan keberanian yang disertai pemikiran matang dengan slogan “ Saya Berani dan Bisa, InsyaAllah”.

4. Bekerja dan Bersedekah dengan Ikhlas

Bekerja itu untuk memuliakan diri, menampilkan kemanusiaan seseorang, dan sebagai manifestasi dari amal sholeh sehingga mempunyai nilai ibadah yang sangat luhur. Pekerjaan tangan yang paling sederhana sekalipun, demi mempertahankan harga diri, jauh lebih utama daripada kekayaan yang didapat dari penyelewengan. Orang yang bekerja dengan ikhlas akan bekerja keras untuk menyelesaikan dengan baik amanah yang diberikan kepadanya. Kerja keras yang diimbangi dengan berbuat kebaikan akan menghasilkan semangat yang tinggi untuk mendapatkan lebih dari apa yang dibutuhkan.

Menurut Iqbal Hamdy (2006: 139) bahwa: “Kesuksesan bukanlah suatu bintang indah yang tergantung di langit yang tinggi dan tidak mungkin dicapai dengan tangan. Kesuksesan adalah hasil suatu proses kerja keras seseorang yang memberikan nilai lebih bagi kehidupannya dan manfaat bagi orang di sekitarnya, sehingga memberikan suatu kepuasan batin”. Jadi jika kita menikmati hasil tanpa bekerja, maka kita sudah terlibat dalam sebuah skandal ketidakadilan. Mari kita bekerja dengan penuh rasa cinta pada pekerjaan, bukan karena imbalan materinya yang banyak. Mencintai pekerjaan berarti mau melakukan pengorbanan dalam melaksanakan tugas.

Sedekah itu sebenarnya tidak ada batasan seperti zakat yang diwajibkan minimal 2,5 % dari penghasilan, kita dipersilakan berlomba sebanyak-banyaknya. Sedekah yang kita berikan merupakan bentuk dari tanggung jawab kita pada hari ini, hari depan, dan hari akhir sekaligus. Kita perlu ingat terus bahwa tangan di atas lebih baik tangan di bawah.

Selama kita masih mau melimpahkan se bagian harta untuk orang lain, maka selama itu kita akan merasa kaya, jadi bukan dengan korupsi. Menurut Heppy Trenggono (Republika,24-12-2010:23) bahwa “Tidak ada satupun teori di dunia ini yang mengatakan sedekah mengurangi harta, sedekah justru akan menambah harta”. Harta kita sesungguhnya hanya tiga macam, yaitu apa yang kita makan dan bermanfaat bagi tubuh, pakaian yang kita nikmati, dan sedekah jariah yang penuh keikhlasan.

5. Melaksanakan Pola Hidup Sederhana

Hidup sederhana bagi tiap orang tentu berbeda. Hidup sederhananya Melinda Dee tentu berbeda dengan hidup sederhananya seorang guru atau dosen. Tidak bakal susah orang yang hidup sederhana (Al-Hadist). Dengan pola hidup sederhana, tentu seseorang tidak akan melibatkan diri melakukan korupsi, penyelewengan, dsb.

Ada beberapa hal yang dapat dilakukan untuk menerapkan pola hidup sederhana seperti yang dipaparkan di bawah.

a. Hidup Sesuai Kemampuan

Hidup sesuai dengan kemampuan akan membawa kebahagiaan tersendiri bagi seseorang, karena tidak direpotkan oleh utang atau kredit. Napoleon Hill (2007: 138) menyatakan bahwa “Utang adalah penjajah yang tidak kenal ampun. Utang musuh mematikan bagi kebiasaan berhemat/menabung”

Seseorang yang menjadi budak utang tidak akan punya waktu dan daya untuk mewujudkan hal-hal ideal yang diinginkan. Akibatnya ia semakin terseret ke dalam jurang penderitaan. Orang yang pola hidupnya konsumtif yang biasa punya hobby utang/kredit.

b. Hidup Berhemat

Napoleon Hil juga mengatakan bahwa “Awalan sejati dari hampir semua keberuntungan baik kecil maupun besar adalah pembentukan kebiasaan untuk berhemat dan menabung uang”. Menghemat dan menabung uang adalah salah satu cara mendasar untuk meraih sukses.

Orang yang berhemat adalah orang yang mempunyai pandangan jauh kedepan. Berhemat bukanlah ingin menumpuk kekayaan sehingga melahirkan sifat kikir individualistis, melainkan karena alasan tidak selamanya waktu itu berjalan secara lurus, sehingga berhemat berarti mengestmasikan apa yang akan terjadi dimasa yang akan datang. Untuk belajar berhemat ada baiknya kita pertimbangkan mulai dari menghemat penggunaan air.

Masaru Emoto (2006:17) mengatakan bahwa “Tubuh manusia dewasa adalah terdiri dari 70 % air, jadi sebenarnya manusia adalah air. Karena itu kita seharusnya menghargai, mencintai, dan berterima kasih akan adanya air. Jika air berubah, kita akan ikut berubah. Hal yang paling penting adalah kita harus memperbaiki hati lebih dahulu agar bisa memperlakukan air dengan penuh penghargaan.

J.P. Morgan mengatakan bahwa: “Lebih baik meminjamkan 1 juta dollar pada orang yang punya kebiasaan berhemat dan menabung daripada meminjamkan seribu dollar pada orang boros”. Hal ini artinya orang yang hidup berhemat dan menabung jauh lebih dipercaya (1:1000) daripada orang yang cara hidupnya boros.

6. Mau Menjadi “Pelayan”

Toto Tasmara mengemukakan bahwa: “Budaya melayani dan menolong merupakan bagian dari citra diri seseorang. Mereka sadar bahwa kehadiran dirinya tidaklah terlepas dari tanggung jawab terhadap lingkungannya. Sebagai tanggung jawabnya, mereka menunjukkan sikapnya untuk senantiasa terbuka hatinya terhadap keberadaan orang lain, dan merasa terpanggil untuk melayani (2001:38).

Melayani dengan cinta, bukan karena tugas atau pengaruh dari luar. Tetapi, benar-benar sebuah obsesi sangat mendalam bahwa “saya ada karena saya melayani” Pelayanan akan memberikan keuntungan lahir batin. Dengan melayani orang lain berarti kita ikut diberdayakan menuju kualitas akhlak yang lebih luhur dan bermakna.

Kalau bawahan melayani atasan adalah hal biasa, tetapi kalau atasan melayani bawahan adalah luar biasa. Kalau bawahan melayani atasan mungkin ada udang dibalik batu, tetapi kalau atasan melayani bawahan pasti ada batu di balik udang. Maknanya, bawahan mungkin ada kebutuhannya, tetapi atasan yang demikian pasti sudah melaksanakan amanah yang dipikulnya.

7. Melakukan Sesuatu Seperti Apa yang Kita Harapkan Orang Lakukan

Dalam hal ini kita perlu melakukan “NYULAM SAPTO TERIMA” yaitu seNYUm, saLAM, SAPa, TOlong, TERIma kasih, dan MAaf.

Senyum yang tulus merupakan metode ampuh untuk mewujudkan sikap positif dan memiliki daya sentuh yang dalam, jatuh ke lubuk hati siapapun. Senyum adalah nikmat Allah yang besar bagi manusia yang mencintai kebaikan. Senyum tidak dimiliki oleh orang-orang yang keji, sombong, angkuh, dan orang busuk hati. Senyum merupakan suatu ibadah (A. Agiel J, 2009:230). “Berikanlah senyummu kepada semua orang, tetapi berikanlah hatimu kepada seseorang saja”.

Setelah memberikan senyum, sebaiknya kita memberikan salam. Ucapan salam kemudian diikuti tegur sapa dengan kata-kata yang lemah lembut. Andaikata kita memerlukan bantuan orang lain, maka sangat dianjurkan menggunakan kata tolong. Setelah kita ditolong oleh seseorang walaupun anak sendiri, maka diucapkan terima kasih. Dan apabila melakukan suatu kesalahan kepada siapa saja termasuk anak-isteri sendiri, mohon maaf atas kesalahan tersebut.

Albert Clarke (A. Agiel Joseph, 2009: 233). Dalam kehidupan sehari-hari, kita dapat melihat bahwa bukan kebahagiaan yang membuat kita berterimakasih, namun rasa terima kasihlah yang membuat kita berbahagia.

Menurut dr. Bambang Djarwoto SpPD bahwa rajin senyum akan menghemat 20 otot. Karena kalau judes membutuhkan 33 otot sedangkan senyum hanya 13 otot (Kedaulatan Rakyat, 31 Januari 2010: 15)

8. Hidup Teratur

Allah menciptakan segala sesuatu dengan teratur . Segala sesuatu yang teratur akan kelihatan indah dan dirasakan lebih bermanfaat. Misalnya: teratur makan-minum, tidur lebih kurang 8 jam dalam sehari-semalam, olah raga juga kalau bisa tiga kali dalam seminggu.

Seorang peneliti dari University of Tennessee dalam jurnal *Social Psychological and Personality Science* mengatakan bahwa “Berhubungan sex suami dan isteri secara rutin bisa menjadi satu cara untuk menjaga kepuasan tiap-tiap pasangan, khususnya bagi para penderita penyakit saraf”.(Media Indonesia, 14 Desember 2010)

9. Tidak Sering SMS

Dengan kemajuan teknologi sekarang handphone bukan lagi barang mewah, karena sudah digunakan segala lapisan masyarakat. Ternyata dibalik kemajuan teknologi muncul beberapa dampak negatif termasuk dalam pemakaian handphone. Banyak orang termasuk mahasiswa yang menggunakan han dphone bukan pada situasi dan tempat yang tidak tepat. Misalnya mahasiswa pada waktu kuliah atau menggunakan sepeda sepeda motor.

SMS yang dimaksud disini bukan itu, tetapi Senang Melihat orang Susah dan Susah Melihat oran Senang. Orang semacam ini tentu akan jauh dari kebahagiaan, karen sifat dengki, iri hati dilarang dalam agama.

Orang yang ingin bahagia, harus siap untuk mengatakan perpisahan dengan masa lalunya yang jelek. Kebiasaan, tabiat, dan karakter yang ada, harus diubah dan dinyatakan sebagai masa lalu. Seseorang tidak bisa lagi menjadii pribadi yang malas, cepat puas, tidak berani mengambil resiko, pesimis, dan penuh kedengkian.

Perlu selalu diingat bahwa segala sesuatu hanya dapat diperoleh dengan perjuangan mandi keringat. Harganya adalah ketekunan yang kuat dan semangat tahan uji yang membara tak kunjung padam. Karena itu gunakan setiap hari untuk berlatih berpikir positif. Setiap kali di kepala kita muncul pikiran-pikiran negatif, usirlah dan gantikan dengan pikiran-pikiran positif. Pikiran negatif misalnya: perasaan iri, dengki, serakah, sombong, benci, marah, rendah diri, dsb., diganti dengan perasaan-perasaan : hormat, cinta kasih, sabar, rendah hati, jujur, setia, menepati janji, dsb.

Sebaiknya kita sederhana dalam hidup, karena dengan demikian walaupun kita mendapatkan rezeki yang banyak, kita hanya menggunakan sedikit saja untuk kepentingan pribadi. Sehingga sisanya bisa ditabung dan disedekahkan.

Kebahagiaan itu tidak dapat dicadangkan untuk nanti, setelah memecahkan masaah tertentu atau mencapai sesuatu. Kalau kita mau bahagia, kita harus bahagia “titik”.Bukan bahagia “karena” atau “bila” atau kelak jika. Menteri Pendidikan Nasional pada perayaan hardiknas yang baru lalu, pendidikan karakter mulai tahun ajaran 2011 dari tingkat PAUD (pendidikan anak usia dini).

PENUTUP

Kesimpulan

1. Pendidikan Karakter sebaiknya diberikan sejak dini. Yaitu mulai dari tingkat PAUD
2. Karakter yang perlu dikembangkan untuk merintis hidup bahagia antara lain:
 - a. Mulai hari dengan pikiran positif,
 - b. bebaskan pikiran dari ketakutan,
 - c. hidup sederhana,
 - d. bekerja dan bersedekah dengan ikhlas, dll.

Saran

Mengajak semua yang sudah berumur 50 tahun ke atas supaya lebih banyak memikirkan akhirat dari pada memikirkan dunia.

DAFTAR PUSTAKA

1. Agil Josep. 2009. *Rahasia Di Balik Kata-Kata*. Yogyakarta: Diva Press.
2. An. Ubaedy. 2008. *Optimis Kunci Meraih Sukses*. Jakarta: PT. Visi Gagas Komunikasi

3. An. Ubaedy, 2008. *Ubah Sikap Raih Kesuksesan*. Jakarta: PT. Perspektif Media Komunika.
4. Ariwibowo, 2003. *Self Management, Guru Terbaik Sekaligus Musuh Terbesar Manusia*, Jakarta: PT. Alex Media Komputindo.
5. Ary Ginanjar Agustian, 2004. *ESQ Power*. Jakarta: ARGA
6. Asadullah Al-Faruq, 2008. *Dari Minder Jadi Super*. Sukoharjo: Samudera
7. Awadh Bin Muhammad Al-Qurni, 2004. *Kembangkan Potensi Diri Anda Sepenuhnya*. Yogyakarta: Mitra Pustaka.
8. Chin Ning Chu, 2008. *Rahasia Sukses*. Yogyakarta: Tugu Publisier.
9. D. Juliantara, 2004. *Setiap Orang Bisa*. Yogyakarta: Asia Sedar.
10. Dudung Hamdun, 2009. *The 7 Personalities of Success*. Yogyakarta: Garailmu
11. Emoto, Masaru, 2006. *The True Power of Water*. Bandung: MQ Publishing.
12. Goleman, Daniel, 1996. *Emotional Intelligence*. Jakarta: Gramedia Pustaka Utama.
13. Goleman, Daniel, 1999. *Kecerdasan Emosi untuk Mencapai Puncak Prestasi*. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama.
14. HD Iriyanto, 2009. *Dari Kepompong Menjadi Kupu-Kupu*. Yogyakarta: Pustaka Pelajar.
15. Hill, Napoleon, 2007. *Percaya Sukses, Harus Sukses*. Yogyakarta: Baca
16. Iqbal Hamdy, 2006. *Menggapai Hidup Bermakna*. Jakarta: Republika
17. Jaisy Muhammad, 2009. *Krisis Ada Dalam Dirimu, Inilah Cara Melawannya*. Yogyakarta: Diva Press.
18. Muhamad Nur, 2011. *Beberapa Konsep Pendidikan Karakter: Karakter Kinerja, dan Karakter Moral*. Surabaya: Makalah.
19. Muhammad Musa A.S, 2006. *Perbarui Hidupmu*. Jakarta: Fitra Press.
20. Poerwadaraminta, W.J.S., 1985. *Kamus Umum Bahasa Indonesia*. Jakarta: PT. Balai Pustaka
21. Schwartz, David J, 1996. *Berpikir dan Berjiwa Besar*. Jakarta: Binarupa Aksara.
22. Toto Tasmara, 2004. *Membudayakan Etos Kerja Islami*. Jakarta: Gema Insani.
23. Toto Tasmara, 2001. *Kecerdasan Ruhaniah*. Jakarta: Gema Insani.
24. Willy Bramantyo, 2010. *Sukses Adalah Hak Anda*. Yogyakarta: Surya Media.

EFEKTIFITAS MODEL PEMBELAJARAN *TEAM ACCELERATED INSTRUCTION* PADA SISWA KELAS X SMK TUNAS HARAPAN TAHUN PELAJARAN 2008-2009

Sri Adi Widodo

Pendidikan Matematika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Sarjanawiyata Tamansiswa Yogyakarta

Abstrak

Penelitian ini dilatarbelakangi oleh rendahnya prestasi belajar matematika yang dikarenakan persepsi negatif siswa terhadap matematika, kemampuan awal siswa sangat lemah, guru masih menggunakan model pembelajaran yang kurang menarik bagi siswa. Oleh karena itu, diperlukan model pembelajaran lain diantaranya adalah TAI agar siswa menjadi tertarik dan prestasi belajar matematika menjadi meningkat. Sehingga dalam penelitian ini bertujuan untuk mengetahui model pembelajaran manakah yang efektif digunakan guru dalam pembelajaran matematika, model pembelajaran langsung (*direct Instruction*) atau Model Pembelajaran *Team Accelerated Instruction* (TAI). Penelitian ini menggunakan metode eksperimen. Sampel yang digunakan dalam penelitian ini sebanyak 39 siswa yang terbagi menjadi 20 siswa sebagai kelompok kontrol dan 19 siswa sebagai kelompok eksperimen. Uji coba instrumen dilakukan menggunakan uji validitas, tingkat kesukaran, daya beda dan reliabilitas. Teknik pengumpulan data yang digunakan adalah dokumentasi untuk nilai UAN matematika SMP dan teknik tes untuk data prestasi belajar siswa pada pokok bahasan persamaan dan pertidaksamaan kuadrat. Teknik analisis data yang digunakan adalah analisis kovariansi. Sebagai persyaratan analisis yaitu populasi berdistribusi normal yang diuji menggunakan uji chi square, populasi mempunyai variansi yang sama yang diuji menggunakan metode Barlett dan uji linieritas menggunakan uji F. Kesimpulan dalam penelitian adalah model pembelajaran kooperatif tipe TAI belum efektif digunakan pada mata pelajaran matematika pokok bahasan persamaan dan pertidaksamaan kuadrat tahun pelajaran 2008-2009. Hal ini dapat dilihat dari hasil analisis kovariansi yang diperoleh sebesar (F_{obs}) 1,464 sedangkan daerah kritik uji F dengan $V_1 = 1$ dan $V_2 = 36$ pada taraf signifikansi 5% adalah $\{F|F \geq 4,11\}$.

Kata kunci: Model pembelajaran, Direct Instruction, TAI, Kemampuan awal, Prestasi belajar

PENDAHULUAN

Kemajuan dan perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi yang sangat pesat dewasa ini, menjadikan menempatkan posisi pendidikan sebagai penentu bagi kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi di masa selanjutnya. Walaupun IPTEK telah berkembang dengan pesat, namun masih banyak berbagai ilmu pengetahuan yang berkaitan dengan masyarakat ataupun mengenai pendidikan mengalami banyak kekurangan dan kelemahan. Karena itu kita memandang perlu penyempurnaan.

Sebagian besar siswa yang mengalami penurunan prestasi belajar di sekolah mengeluhkan sulitnya untuk memahami pelajaran matematika dan sebagian besar dari mereka memperoleh nilai matematika yang lebih rendah dibandingkan dengan nilai mata pelajaran lainnya (Siti Marliah Tambunan, 2006: 27 – 32).

Matematika merupakan salah satu materi yang sangat penting dan sangat diperlukan dalam perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi. Apalagi pelajaran matematika merupakan salah satu pelajaran yang di UAN kan. Sehingga materi matematika dijadikan sebagai tolok ukur untuk keberhasilan siswa melalui kelulusan siswa baik pada Sekolah Menengah Pertama maupun Sekolah Menengah Umum/Kejuruan.

Sebagian besar siswa beranggapan bahwa pelajaran matematika merupakan pelajaran yang sangat sulit dan rumit, sehingga siswa malas untuk mempelajarinya. Sikap siswa tersebut disebabkan oleh pengalaman siswa sebelumnya. Pengalaman siswa tersebut diantaranya persepsi siswa terhadap pelajaran matematika maupun guru matematikanya.

Selama ini guru Matematika di SMK Tunas Harapan Pati telah menggunakan strategi pembelajaran team teaching. Tetapi prestasi belajar siswa belum menunjukkan peningkatan. Hal ini terlihat dari masih banyaknya siswa yang memperoleh nilai dibawah Kriteria ketuntasan minimal (KKM) yaitu 75. Sehingga siswa masih banyak yang harus menempuh pembelajaran remedial.

Guru juga mempunyai peran yang penting dalam sistem pembelajaran terutama peningkatan kualitas pembelajaran. Untuk menarik minat belajar siswa guru harus menggunakan model pembelajaran selain model pembelajaran *Direct Instruction* (pembelajaran langsung). Sehingga pembelajaran yang menggunakan model pembelajaran langsung dapat menyebabkan siswa merasa bosan, walaupun menurut Baltimore Curriculum project (2009: 1) model pembelajaran langsung sudah memperlihatkan pola interaksi antara guru dengan peserta didik atau sekelompok anak didik. Hal ini dikarenakan pada model pembelajaran langsung pola komunikasi berjalan satu arah sehingga siswa merasa tidak terlibat secara langsung dalam pembelajaran.

Berbeda dengan model pembelajaran *Team Accelerated Instruction* (TAI), Erman Suherman (2009) menyatakan bahwa pola komunikasi yang terjalin antara guru dengan peserta didik atau antara peserta didik dengan peserta di dalam kelompoknya adalah negosiasi bukan imposisi-instruksi. Senada dengan Zhao Jianhua dan Kanji Akahori (2009) dalam mempelajari matematika, peserta didik dapat belajar pada tingkatan mereka sendiri sehingga peserta didik dapat menegosiasikan dengan teman di dalam kelompok atau menegosiasikan dengan guru terkait materi yang akan dipelajari di dalam kelompok. Slavin (1995: 97 – 98) juga menambahkan bahwa tujuan pembelajaran TAI adalah untuk mengadaptasi pembelajaran terhadap perbedaan tiap-tiap peserta berdasarkan kemampuan awal siswa.

Berdasarkan pengamatan peneliti selama mengajar, siswa mengalami kesulitan dalam pembelajaran matematika pada kompetensi dasar persamaan kuadrat terutama permasalahan faktorisasi, sub kompetensi dasar bentuk simetri dari rumus jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat dan sub kompetensi dasar menyusun persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya berhubungan dengan persamaan kuadrat lain.

Berdasarkan hal-hal tersebut, maka permasalahan yang diajukan dalam penelitian ini adalah manakah model pembelajaran yang efektif digunakan oleh guru, *Team Accelerated Instruction* (TAI) atau Model Pembelajaran Langsung?

Dari hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan informasi kepada guru atau calon guru matematika tentang pembelajaran kooperatif yang dapat digunakan sebagai salah satu cara untuk meningkatkan prestasi belajar siswa.

METODE PENELITIAN

Populasi dan sampel

Penelitian dilakukan di Sekolah Menengah Kejuruan (SMK) Tunas Harapan Pati yang memiliki program keahlian Teknik Permesin sebanyak 4 kelas, Teknik Kendaraan Ringan sebanyak 3 kelas, Teknik Kontrol Mekanik sebanyak 2 kelas, Teknik Komputer Jaringan sebanyak 2 kelas, dan Teknik Produksi Penyiaran Pertelevisian dan Animasi sebanyak 1 kelas. Adapun teknik pengambilan sampel menggunakan teknik random dengan sampel penelitian adalah siswa kelas X Otomotif 2 (20 siswa) yang akan digunakan sebagai kelompok eksperimen dan X BRT (19 siswa) yang akan digunakan sebagai kelompok kontrol.

Variabel Penelitian

Variabel terikat

Dalam penelitian ini yang menjadi variabel terikat adalah prestasi belajar matematika siswa, dimana prestasi belajar siswa didefinisikan dengan hasil prestasi belajar matematika pada kompetensi dasar persamaan dan pertidaksamaan kuadrat. Adapun indikator yang digunakan dalam penelitian ini adalah nilai tes prestasi belajar matematika siswa pada kompetensi dasar persamaan dan pertidaksamaan kuadrat.

Variabel Bebas

Variabel bebas dalam penelitian ini adalah model pembelajaran, dimana model pembelajaran didefinisikan dengan cara yang dipakai untuk menyampaikan materi pembelajaran

kepada siswa. Adapun model pembelajaran yang digunakan dalam penelitian ini adalah model pembelajaran *Team Accelerated Instruction* (TAI) dan Model Pembelajaran Langsung (MPL).

Metode pengumpulan data

Metode tes digunakan untuk mengetahui sejauhmana kemampuan peserta didik dalam menyerap materi pada kompetensi dasar persamaan dan pertidaksamaan kuadrat. Tes prestasi yang dibuat sebanyak 25 butir/item mengacu pada kisi-kisi soal yang mengacu indikator-indikator (materi) pada kompetensi dasar persamaan dan pertidaksamaan kudrat. Adapun materi yang terdapat pada kompetensi dasar persamaan dan pertidaksamaan kuadrat adalah (1) Persamaan kuadrat ditentukan penyelesaiannya, (2) pertidaksamaan kuadrat ditentukan penyelesaiannya, (3) persamaan kuadrat disusun berdasar akar-akar yang diketahui, (4) persamaan kuadrat disusun berdasar akar-akar persamaan kuadrat lain, dan (5) persamaan dan pertidaksamaan kuadrat diterapkan dalam menyelesaikan masalah sehari-hari.

Sedangkan metode dokumentasi yang berupa nilai Ujian Akhir Sekolah SMP pada mata pelajaran matematika digunakan untuk memperoleh data terkait kemampuan awal siswa.

Uji Coba Instrumen

Uji Coba instrumen yang digunakan dalam penelitian adalah uji validitas menggunakan uji validitas isi, daya pembeda, tingkat kesukaran dan uji reliabilitas yang menggunakan KR-20.

Uji validitas isi terhadap 25 item yang diujicobakan menunjukkan bahwa seluruh item dinyatakan memenuhi indikator yang telah ditentukan. Adapun indikator yang dijadikan penilai dalam validitas isi adalah (1) kesesuaian dengan kisi-kisi tes, (2) kesesuaian dengan tujuan penellitian, (3) butir soal merupakan sampel yang representatif dari sub kompetensi dasar, (4) butir soal tidak memerlukan pengetahuan lain dalam menjawabnya, dan (5) soal telah menggunakan kaidah Bahasa Indonesia.

Untuk daya beda butir dari 25 item yang diujicobakan menunjukkan bahwa seluruh item telah memenuhi syarat, yaitu indeks daya pembeda harus lebih dari atau sama dengan 0,30 ($r_{xy} \geq 0,30$). Sedangkan Tingkat Kesukaran dari 25 item yang diujicobakan menunjukkan bahwa seluruh item telah memenuhi syarat, yaitu tingkat kesukaran terletak pada interval 0,20 sampai 0,80. Dengan menggunakan uji KR-20 diperoleh bahwa dari 25 item yang dinyatakan memenuhi syarat menunjukkan bahwa indek reliabilitas sebesar 0,78.

Teknik Analisa Data

Data yang telah diperoleh, untuk menguji hipotesis kerja yang telah diberikan menggunakan teknik ANAKOVA dengan bantuan program SPSS. Adapun yang menjadi variabel kovariatnya adalah kemampuan awal yang diperoleh dari nilai UAN SMP siswa pada mata pelajaran matematika

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Deskripsi data tes prestasi

Dari data prestasi belajar siswa diperoleh bahwa nilai minimum untuk kelompok kontrol dan kelompok eksperimen adalah 10, nilai maksimum untuk kelompok kontrol dan eksperimen adalah 19. Sedangkan rata-rata kelompok kontrol dan eksperimen berturut turut adalah 14,74 dan 13,65. Adapun untuk kemampuan awal siswa diperoleh bahwa nilai minimum untuk kelompok kontrol dan kelompok eksperimen adalah 5,50 dan 7,00. Nilai maksimum untuk kelompok kontrol dan eksperimen adalah 8,00 dan 10,00. Rata-rata kelompok kontrol dan eksperimen adalah 6,54 dan 8,16.

Uji asumsi

Uji asumsi dilakukan untuk mengetahui apakah diperbolehkan menggunakan uji anakova. Dimana uji asumsi yang dilakukan adalah uji normalitas, uji homogenitas dan uji linieritas.

Uji normalitas yang dilakukan menunjukkan bahwa untuk kelompok kontrol diperoleh nilai χ^2 sebesar 4,158 sedangkan nilai χ^2 tabel untuk $df = 7$ pada taraf signifikansi 5% adalah 14,067. Untuk nilai χ^2 untuk kelompok ekperimen sebesar 7,900 sedangkan nilai χ^2 tabel untuk $df = 8$ pada

taraf signifikansi 5% adalah 15,507. Berdasarkan hal tersebut maka dapat disimpulkan bahwa data prestasi belajar siswa pada kelompok kontrol dan eksperimen berdistribusi normal.

Uji homogenitas varian yang dilakukan menunjukkan bahwa nilai χ^2 sebesar -120,228 sedangkan nilai χ^2 untuk $n = 1$ pada taraf signifikansi 5% adalah 3,841 Sehingga dapat disimpulkan bahwa variansi pada kelompok kontrol dengan eksperimen adalah sama.

Uji linieritas yang dilakukan menunjukkan bahwa nilai F sebesar -4,30, sedangkan nilai F tabel untuk (10,27) pada taraf signifikansi 5% adalah 2,20, sehingga dapat disimpulkan regresinya linier.

Uji hipotesis

Berdasarkan perhitungan uji statistik ANAKOVA diperoleh bahwa nilai F hitung sebesar 1,464. Sedangkan F tabel pada taraf signifikansi 5% dengan $V_1 = 1$ dan $V_2 = 36$ sebesar 4,11. Berdasarkan hal tersebut maka dapat disimpulkan bahwa model pembelajaran TAI belum berpengaruh terhadap prestasi belajar siswa kelas X SMK Tunas Harapan Pati tahun pelajaran 2008-2009.

Pembahasan

Berdasarkan uji statistik ANAKOVA yang telah dilakukan diperoleh bahwa nilai F_{obs} sebesar 1,464 dengan $V_1 = 1$ dan $V_2 = 36$ sedangkan daerah kritik uji F dengan $V_1 = 1$ dan $V_2 = 36$ pada taraf signifikansi 5% adalah $\{F|F \geq 4,11\}$. Sehingga F_{obs} tidak terletak pada Daerah Kritik atau dengan kata lain F_{obs} bukan anggota dari Daerah Kritik. Karena F_{obs} bukan anggota dari Daerah Kritik maka H_0 diterima.

Berdasarkan hal tersebut, maka dapat disimpulkan bahwa model pembelajaran kooperatif tipe TAI belum berpengaruh terhadap prestasi belajar siswa SMK Tunas Harapan Pati kelas X pada pokok bahasan persamaan dan pertidaksamaan kuadrat tahun pelajaran 2008-2009.

Belum berpengaruhnya model pembelajaran kooperatif tipe TAI terhadap prestasi belajar matematika pada pokok bahasan persamaan dan pertidaksamaan kuadrat menyebabkan pembelajaran menggunakan model kooperatif tipe TAI belum efektif digunakan untuk mata pelajaran matematika pokok bahasan persamaan dan pertidaksamaan kuadrat.

Belum efektifnya pembelajaran matematika pada pokok bahasan persamaan dan pertidaksamaan kuadrat kemungkinan dikarenakan jadwal pembelajaran pada SMK Tunas Harapan Pati menggunakan sistem blok. Artinya jika jadwalnya masuk dalam bengkel (praktek) maka kelas tersebut selama seminggu tidak diperkenankan ada jadwal teori. Begitu juga jika selama satu minggu kelas tersebut berisikan teori maka kelas tersebut tidak akan mendapatkan materi bengkel (praktek). Sehingga pembelajaran dengan menggunakan sistem blok menyebabkan siswa selama seminggu belum tentu memperoleh materi matematika karena bisa saja kelas tersebut masuk kedalam jadwal bengkel. Sehingga siswa kehilangan memori pada materi matematika pada pertemuan terakhir.

Dalam penelitian ini, kelompok eksperimen yang digunakan kelas yang digunakan adalah kelas X TKR 2 padahal untuk bidang keahlian TKR mempunyai 3 kelas. Akibatnya pada bidang keahlian TKR mempunyai 3 tipe jadwal untuk tiga kelas TKR, dimana salah satu tipe jadwal terdapat pembelajaran seminggu berada di bengkel. Sehingga dimungkinkan siswa pada bidang keahlian TKR tidak ada pertemuan (tatap muka) untuk mata pelajaran matematika selama satu minggu. Berbeda dengan kelompok kontrol yang menggunakan kelas X BRT. Karena SMK Tunas Harapan Pati hanya memiliki satu kelas untuk bidang keahlian BRT maka hanya memiliki satu tipe jadwal untuk bidang keahlian BRT. Sehingga setiap minggu kelas X BRT selalu ada pertemuan (tatap muka) untuk mata pelajaran matematika.

KESIMPULAN

Berdasarkan kajian teori dan hasil analisis serta mengacu pada perumusan masalah yang telah diuraikan pada bagian sebelumnya, maka dapat disimpulkan bahwa model pembelajaran kooperatif tipe TAI belum efektif digunakan pada mata pelajaran matematika pokok bahasan persamaan dan pertidaksamaan kuadrat tahun pelajaran 2008-2009.

Sedangkan saran yang diberikan peneliti diantaranya adalah (1) belum efektifnya pembelajaran dengan menggunakan TAI hanya dibatasi pada pokok bahasan persamaan dan pertidaksamaan kuadrat, sehingga dimungkinkan model pembelajaran TAI lebih efektif pada pokok bahasan yang lain, (2) penelitian ini hanya dibatasi pada model pembelajaran TAI sehingga dengan menggunakan model pembelajaran yang lain dimungkinkan prestasi belajar siswa pada mata pelajaran matematika dapat meningkat.

DAFTAR PUSTAKA

- Baltimore Curiculum Project. 2009. *Direct Instruction & Open Court Fact Sheet*. Diunduh dari www.baltimorecp.org pada tanggal 28 September 2009.
- Budiyono. 2003. *Metodologi Penelitian Pendidikan*. Solo: UNS Press.
- Budiyono. 2004. *Statistika Untuk Penelitian*. Solo: UNS Press
- Erman Suherman. 2009. Model Belajar dan Pembelajaran Berorientasi Kompetensi Siswa. *EDUCARE: Jurnal Pendidikan dan Budaya*. Diunduh dari <http://educare.e-fkipunla.net> tanggal 25 Mei 2009.
- Gregory, Anne, dkk. 2005. The Effects of Using Direct Instruction and a Re-Reading Contingency with a High School Student. *The International Journal of Special Education* vol 20 No 1. Diunduh dari <http://www.internationaljournalofspecialeducation.com> pada tanggal 10 Desember 2009.
- Jianhua, Zhao dan Kanji Akahori. 2009. *Web-Based Collaborative Learning Methods and Strategies in Higher Education*. Didownload di <http://www.eecs.kumamoto/u/ac.jp> pada tanggal 30 Maret 2009.
- Siti Marliah Tambunan. 2006. Hubungan Antara Kemampuan Spasial Dengan Prestasi Belajar Matematika. *Jurnal Makara, Sosial Humaniora*, Vol. 10, No. 1, hal 27 – 32. Diunduh dari <http://journal.ui.ac.id> tanggal 25 Mei 2009.
- Slavin, R.E. 1995. *Cooperativ Learning: Theory, Research and Practice*, 2th edition. Englewood Cliffs, New Jersey, USA: Prentice Hall.
- Slavin, R. E. 1992. *Cooperative Learning*. Didownload di www.uleth.ca/edu/research pada tanggal 30 Maret 2009.
- Wina Sanjaya. 2008. *Stategi Pembelajaran: berorientasi Standar Proses Pendidikan*. Jakarta: Kencana.

EKSPERIMENTASI PEMBELAJARAN MATEMATIKA MELALUI METODE *TEAM QUIZ* DAN *LEARNING CELL* DITINJAU DARI AKTIVITAS BELAJAR SISWA

Rita P.Khotimah, Mukhafifah

Program Studi Pend. Matematika FKIP-UMS

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui : (1) Pengaruh metode pembelajaran terhadap prestasi belajar matematika, (2) Pengaruh aktivitas belajar siswa terhadap prestasi belajar matematika, (3) Efek interaksi antara metode pembelajaran dan aktivitas belajar siswa terhadap prestasi belajar matematika. Populasi dalam penelitian ini adalah seluruh siswa kelas VII MTs N Surakarta II tahun 2008/2009 sebanyak tujuh kelas. Sampel penelitian ini adalah siswa sebanyak dua kelas, yaitu 36 siswa kelas VII F sebagai kelas kontrol dan 36 siswa kelas VII G. Metode pengumpulan data yang digunakan tes, angket, dan dokumentasi. Teknik analisis data yang digunakan adalah analisis variansi dua jalan dengan sel tak sama yang sebelumnya dilakukan uji normalitas dan uji homogenitas. Dari analisis variansi dua jalan dengan sel tak sama pada $\alpha = 5\%$, diperoleh : (1) $F_{hitung} = 28,33 > F_{tabel} = 3,99$ sehingga terdapat pengaruh yang signifikan metode pembelajaran terhadap prestasi belajar matematika, (2) $F_{hitung} = 23,76 > F_{tabel} = 3,14$ sehingga terdapat pengaruh yang signifikan aktivitas belajar siswa terhadap prestasi belajar matematika, dan (3) $F_{hitung} = 1,75 < F_{tabel} = 3,14$ sehingga tidak ada interaksi antara metode pembelajaran dan aktivitas belajar siswa terhadap prestasi belajar matematika.

Katakunci : Pembelajaran, matematika, team quiz, learning cell, aktivitas

PENDAHULUAN

Latar Belakang

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu yang bertujuan untuk mendidik siswa menjadi manusia yang dapat berfikir logis, kritis dan rasional serta menduduki peranan penting dalam dunia pendidikan. Namun, pada kenyataannya prestasi belajar yang dicapai oleh siswa masih rendah. Hal ini dapat dilihat dari kualitas lulusan pendidikan di Indonesia yang masih jauh tertinggal bila dibandingkan dengan negara Malaysia dan Singapura, terutama dalam bidang ilmu matematika. Data yang diperoleh *The International Consortium for Evaluation and Achievement (IES)* 2001 menyebutkan bahwa hasil penelitian yang hanya difokuskan untuk kelas 2 SMP di Indonesia berada pada peringkat 34 dari 38 negara dengan skor 403 untuk mata pelajaran Matematika.

Faktor-faktor yang dapat menyebabkan rendahnya prestasi belajar matematika siswa di antaranya adalah penggunaan metode pembelajaran oleh guru yang cenderung monoton, kurang bervariasi. Sebagian besar guru masih menggunakan metode konvensional dalam mengajar, yaitu guru menerangkan sedangkan siswa hanya mencatat sehingga siswa lebih banyak yang pasif.

Metode pembelajaran merupakan salah satu cara yang digunakan oleh guru dalam mengadakan hubungan dengan siswa pada saat berlangsungnya proses belajar mengajar. Metode pembelajaran yang baik adalah metode yang dapat menumbuhkan kegiatan belajar siswa. Untuk itu guru harus memahami sepenuhnya materi yang hendak disampaikan dan memilih metode pembelajaran yang tepat dalam penyampaian materi sehingga dapat menciptakan proses belajar mengajar yang baik.

Alternatif metode pembelajaran yang dapat digunakan yaitu melalui metode *team quiz*. *Team Quiz* merupakan salah satu tipe pembelajaran yang mampu meningkatkan keaktifan siswa

dalam proses belajar mengajar. Dalam metode ini siswa dibentuk dalam kelompok-kelompok kecil yang masing-masing anggotanya mempunyai tanggung jawab yang sama atas keberhasilan kelompoknya dalam menguasai materi dan menjawab soal dan siswa dilatih untuk mampu bekerja sama.

Metode pembelajaran yang lain adalah *Learning Cell*, yaitu suatu bentuk belajar kooperatif di mana siswa belajar secara berpasangan, kemudian siswa bertanya dan menjawab pertanyaan secara bergantian berdasarkan pada materi bacaan yang sama. Metode pembelajaran ini mempermudah siswa dalam memahami dan menemukan masalah yang sulit dengan berdiskusi. *Learning Cell* juga mendorong siswa untuk lebih aktif dalam mengemukakan pendapat dan pertanyaan (Hisyam Zaini, dkk, 2007: 89).

Faktor lain yang dapat mempengaruhi keberhasilan pembelajaran adalah aktivitas belajar siswa. Siswa yang lebih tinggi aktivitasnya dalam proses belajar mengajar dimungkinkan memiliki prestasi belajar yang lebih tinggi pula, sedangkan siswa yang pasif atau rendah aktivitasnya cenderung lebih sulit dalam mengikuti pembelajaran sehingga prestasi belajarnya pun cenderung lebih rendah.

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui: a. Pengaruh penggunaan metode pembelajaran terhadap prestasi belajar matematika siswa. b. Pengaruh aktivitas belajar terhadap prestasi belajar matematika siswa. c. Efek interaksi antara metode pembelajaran dan aktivitas belajar terhadap prestasi belajar matematika siswa. Manfaat yang dapat diperoleh antara lain : 1. Bagi siswa, siswa dapat memperoleh pengalaman langsung dengan adanya kebebasan dalam belajar secara aktif. 2. Bagi guru, pembelajaran *Team Quiz* dan *Learning Cell* dapat digunakan sebagai salah satu alternative di dalam proses belajar mengajar di kelas serta sebagai bahan pertimbangan untuk lebih meningkatkan keterlibatan siswa dalam kegiatan belajar mengajar. 3. Bagi sekolah, sebagai masukan untuk dapat meningkatkan kualitas pembelajaran di sekolah, khususnya pembelajaran matematika. 4. Bagi penelitian selanjutnya dapat digunakan sebagai penelitian yang relevan, dalam ruang lingkup yang lebih luas dan pembahasan yang lebih mendalam.

METODE PENELITIAN

Jenis penelitian ini adalah penelitian eksperimen. Penelitian dilaksanakan di MTs Negeri Surakarta II pada semester genap tahun ajaran 2008/2009. Populasi dalam penelitian ini adalah semua siswa kelas VII MTs Negeri Surakarta II tahun ajaran 2008/2009. Sampelnya adalah siswa kelas VIIF dan VIIG. Siswa kelas VIIG sebagai kelas eksperimen yang diajar dengan menggunakan metode *Team Quiz* dan siswa kelas VIIF sebagai kelas kontrol yang diajar menggunakan metode *Learning Cell*. Teknik pengambilan sampel yang digunakan adalah *cluster random sampling*.

Metode pengumpulan data yang digunakan adalah: a. Tes, yang digunakan untuk mengukur prestasi belajar siswa b. Angket, untuk mengetahui tingkat aktivitas belajar siswa. c. Dokumentasi untuk mengetahui daftar nama, nomor absen siswa dan daftar nilai UAS matematika semester ganjil.

PEMBAHASAN

Hipotesis Pertama

Dari hasil analisis variansi dua jalan sel tidak sama diperoleh $F_{hitung} = 28,33$ dan $F_{tabel} = 3,99$ dengan $\alpha = 5\%$. Karena $F_{hitung} > F_{tabel}$ maka H_{0A} ditolak sehingga ada perbedaan prestasi belajar matematika antara siswa yang diberi pembelajaran menggunakan metode *Team Quiz* dan siswa yang diberi pembelajaran menggunakan metode *Learning Cell*. Hal ini berarti terdapat pengaruh metode *Team Quiz* dan *Learning Cell* terhadap prestasi belajar matematika siswa.

Berdasarkan hasil penelitian diperoleh nilai rata-rata prestasi belajar siswa yang mendapat pembelajaran dengan metode *Team Quiz* adalah 61,944 sedangkan nilai rata-rata prestasi belajar siswa yang mendapat pembelajaran dengan metode *Learning Cell* adalah 47,222. Hal ini menunjukkan bahwa penggunaan metode *Team Quiz* ternyata memberikan hasil belajar yang lebih baik daripada metode *Learning Cell*.

Pada tahap pelaksanaan metode *Team Quiz*, proses belajar mengajar berlangsung dengan lancar. Dalam metode ini siswa dilatih untuk bekerja sama dan dibentuk dalam kelompok-kelompok kecil yang masing-masing anggotanya mempunyai tanggung jawab yang sama atas keberhasilan kelompoknya dalam menguasai materi dan menjawab soal. Dalam metode ini guru mendorong siswa untuk berkompetisi antar kelompok sehingga memacu semangat dan tanggung jawab siswa. Di sini siswa bersungguh-sungguh dalam memahami materi dan mempersiapkan pertanyaan. Selain itu, siswa juga aktif dalam menjawab pertanyaan karena suasana pembelajaran yang menyenangkan.

Hal ini sesuai dengan pendapat Mel Silberman yang dikutip oleh Sarjuli, dkk (2001:157) metode *Team Quiz* dapat meningkatkan kemampuan tanggung jawab siswa terhadap apa yang mereka pelajari melalui cara kolaborasi yang menyenangkan dan tidak menakutkan.

Dalam *Learning Cell*, siswa belajar secara berpasangan. Siswa bertanya dan menjawab pertanyaan secara bergantian berdasarkan pada materi bacaan yang sama. Dalam pelaksanaannya, siswa masih cenderung pasif dan belum paham dengan penggunaan metode ini sehingga kegiatan pembelajaran siswa masih banyak membutuhkan tuntunan dari guru.

Hipotesis Kedua

Dari analisis kedua variansi dua jalan sel tak sama diperoleh $F_{hitung} = 23,76$ sedangkan dengan $\alpha = 5\%$ diperoleh $F_{tabel} = 3,14$. Karena $F_{hitung} > F_{tabel}$ maka H_{0B} ditolak. Hal ini berarti ada pengaruh aktivitas belajar siswa terhadap prestasi belajar matematika siswa.

Berkaitan dengan hal tersebut, selama eksperimen diperoleh data bahwa dari keseluruhan siswa, 10 siswa mempunyai aktivitas belajar yang tinggi, 14 siswa mempunyai aktivitas belajar yang sedang, dan 12 siswa mempunyai aktivitas belajar yang rendah. Siswa yang mempunyai tingkat aktivitas belajar tinggi dan sedang memperoleh nilai prestasi yang lebih tinggi daripada siswa yang mempunyai aktivitas belajar rendah. Hal ini dikarenakan siswa yang aktivitas belajarnya tinggi dan sedang mempunyai frekuensi belajar tetap dan lebih aktif dalam mengikuti kegiatan pembelajaran sehingga lebih mudah menguasai materi pelajaran. Sedangkan siswa yang aktivitasnya rendah masih cenderung pasif dan tergantung pada guru sehingga kurang bisa menguasai materi pelajaran dengan baik.

Dalam kegiatan belajar mengajar perlu adanya aktivitas. Hal ini dikarenakan pada prinsipnya belajar adalah berbuat, yaitu berbuat untuk mengubah tingkah laku menjadi melakukan kegiatan. Jika tidak ada belajar maka tidak akan ada aktivitas. Oleh sebab itu, aktivitas merupakan asas yang sangat penting di dalam interaksi belajar mengajar.

Kualitas aktivitas belajar antara siswa yang satu dengan yang lain tidak sama. Ada yang tergolong tinggi, sedang, maupun rendah. Perbedaan kualitas aktivitas tersebut mempengaruhi prestasi belajar yang dicapai. Semakin tinggi aktivitas belajar siswa, semakin tinggi pula prestasi belajarnya. Sebaliknya semakin rendah aktivitas belajar siswa, semakin rendah pula prestasi belajarnya.

Sebagaimana pendapat Montessori dalam (Sardiman, 2001: 94) yang menegaskan bahwa siswa itu memiliki tenaga-tenaga untuk berkembang sendiri. Pendidik berperan sebagai pembimbing dan pengamat bagaimana perkembangan anak didiknya.

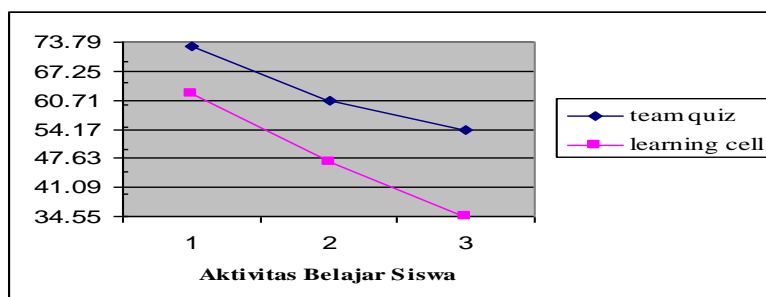
Hipotesis ketiga

Dari hasil analisis variansi dua jalan sel tak sama diperoleh $F_{hitung} = 1,75$ sedangkan dengan $\alpha = 5\%$ diperoleh $F_{tabel} = 3,14$. Karena $F_{hitung} < F_{tabel}$ maka H_{0AB} diterima. Hal ini berarti tidak terdapat efek interaksi antara metode pembelajaran dan aktivitas belajar siswa terhadap prestasi belajar matematika siswa.

Hasil penelitian menunjukkan bahwa rata-rata nilai kelas eksperimen lebih tinggi daripada rata-rata nilai kelas kontrol. Karakteristik perbedaan aktivitas belajar kelompok tinggi, sedang, dan rendah akan sama untuk setiap metode pembelajaran. Hal ini dikarenakan tidak ada interaksi antara metode pembelajaran dan aktivitas belajar terhadap prestasi belajar matematika. Dengan demikian,

perbandingan antara pembelajaran dengan metode *Team Quiz* dan pembelajaran dengan metode *Learning Cell* untuk setiap aktivitas belajar siswa mengikuti perbandingan marginalnya.

Secara grafis, tidak adanya interaksi antara metode pembelajaran dan aktivitas belajar siswa dapat dilihat pada gambar profil efek di bawah ini.



Gambar 1
Profil Efek Variabel Metode Pembelajaran

KESIMPULAN

Berdasarkan kajian teori dan didukung adanya analisis data dengan taraf signifikansi 5% dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Terdapat pengaruh yang signifikan penggunaan metode pembelajaran *Team Quiz* dengan metode *Learning Cell* terhadap prestasi belajar matematika pada pokok bahasan Sudut dan Garis.
2. Terdapat pengaruh yang signifikan aktivitas belajar siswa terhadap prestasi belajar matematika.
3. Tidak terdapat efek interaksi antara metode pembelajaran dengan aktivitas belajar siswa terhadap prestasi belajar matematika.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdurrahman, Mulyono, 2003. *Pendidikan Bagi Anak Berkesulitan Belajar*. Jakarta, Rineka Cipta.
- Arikunto, Suharsimi, 2002. *Prosedur Penelitian Suatu Pendekatan Praktek*. Jakarta, Rineka Cipta.
- Hamalik, Oemar, 2003. *Proses Belajar Mengajar*. Jakarta, Bumi Aksara.
- Ridwan, 2008. *Ketercapaian Prestasi Belajar*. [http://ridwan202.wordpress.com/2008/05/03/ketercapaian-prestasi-belajar/diakses 10 Februari 2009,12.50](http://ridwan202.wordpress.com/2008/05/03/ketercapaian-prestasi-belajar/diakses%2010%20Februari%202009,12.50).
- Sardiman, AM 2001. *Interaksi dan Motivasi Belajar Mengajar*, Jakarta, Raja Grafindo Persada.
- Sarjuli, dkk. 2001. *Active Learning: 101 Strategi Pembelajaran Aktif*. Yogyakarta: YAPPENDIS.
- Sudjana, Nana. 2000. *Dasar-dasar Proses Belajar Mengajar*. Bandung: Sinar Baru.
- Sugiyono. 2008. *Statistika Untuk Penelitian*. Bandung: Alfabeta.
- Uno, Hamzah B. 2006. *Orientasi Baru dalam Psikologi Pembelajaran*. Jakarta: Bumi Aksara.
- Usman, Moh. Uzer. 2006. *Menjadi Guru Profesional*. Bandung: Remaja Rosdakarya.
- Zaini, Hisyam, dkk. 2007. *Strategi Pembelajaran Aktif*. Yogyakarta: CTSD IAIN Sunan Kalijaga.

PEMBELAJARAN KONTEKSTUAL BERLATAR PONDOK PESANTREN PADA MATERI GARIS DAN SUDUT DI KELAS VII MTS

Eva Yusnita

Universitas madura

Email: evayusnita79@yahoo.com

Abstrak

Pembelajaran matematika dengan pendekatan kontekstual berlatar Pondok Pesantren pada dasarnya pemanfaatan realitas dan lingkungan yang dipahami peserta didik untuk memperlancar proses pembelajaran matematika sehingga tujuan pendidikan dapat dicapai. Proses pembelajaran kontekstual berlatar Pondok Pesantren menggunakan masalah nyata dalam kehidupan sehari-hari di pondok pesantren sebagai titik awal pembelajaran sehingga dicapai pembentukan konsep dan siswa dapat mengaplikasikan konsep tersebut pada masalah kontekstual sehingga dapat memperkuat pemahaman siswa. Salah satu materi yang sering muncul dan digunakan dalam kehidupan sehari-hari serta merupakan dasar dalam belajar matematika selanjutnya adalah garis dan sudut. Untuk meningkatkan pemahaman siswa terhadap materi garis dan sudut maka pembelajaran dengan pendekatan kontekstual berlatar Pondok Pesantren dirancang berawal dari masalah sederhana yang berada di sekitar siswa yang berada di lingkungan pondok pesantren dan berdasarkan pengetahuan yang telah dimiliki siswa dengan menggunakan langkah-langkah model pembelajaran kooperatif. Tujuan penelitian ini adalah untuk menghasilkan perangkat pembelajaran pada materi garis dan sudut kelas VII MTs dengan pendekatan pembelajaran kontekstual berlatar Pondok Pesantren. Pengembangan perangkat pembelajaran dalam penelitian ini modifikasi dari model 4-D (*Define, Design, Develop, Disseminate*). Sedangkan jenis penelitian ini adalah selain penelitian pengembangan juga termasuk penelitian eksperimen semu. Perangkat pembelajaran yang dimaksud adalah (1) rencana pelaksanaan pembelajaran, (2) buku siswa, (3) lembar kegiatan siswa
Kata kunci: pembelajaran kontekstual, Pondok pesantren, kooperatif

PENDAHULUAN

Latar Belakang

Masalah yang dialami siswa MTs. Miftahul Ulum Pondok Pesantren Banyu Ayu Pamekasan Madura adalah kesulitan memahami matematika pada materi garis dan sudut. Hal ini disebabkan oleh aktivitas santri dalam Pondok Pesantren selalu dikonsentrasikan kepada aktivitas yang berlandaskan kepada pendidikan agama yang merupakan rutinitas mereka. Akibat dari kebiasaan tersebut, siswa kurang tertarik mempelajari mata pelajaran umum seperti matematika. alasan memilih materi tersebut adalah (1) kurangnya pemahaman siswa tentang konsep garis dan sudut, khususnya siswa kelas VII MTs Miftahul Ulum Banyu Ayu Pamekasan, (2) materi garis dan sudut terdapat banyak permasalahan dunia nyata yang terdapat di sekitar siswa yaitu di dalam Pondok Pesantren yang dapat diselesaikan dengan konsep garis dan sudut sehingga memudahkan untuk membuat masalah autentik sebagai langkah awal untuk melaksanakan proses pembelajaran kontekstual berlatar Pondok Pesantren dan diharapkan prestasi belajar matematika siswa meningkat.

Untuk menunjang proses pembelajaran kontekstual berlatar Pondok Pesantren diperlukan suatu perangkat pembelajaran yang berciri pembelajaran kontekstual. Dengan demikian pada

penelitian ini perlu dihasilkan perangkat pembelajaran yang sesuai dengan komponen-komponen pembelajaran kontekstual pada materi garis dan sudut.

Pertanyaan Penelitian

Berdasarkan latar belakang diatas, maka rumusan pertanyaan adalah Bagaimanakah pengembangan dan hasil pengembangan perangkat pembelajaran kontekstual berlatar Pondok Pesantren yang baik pada materi garis dan sudut ?

Tujuan Penelitian

Untuk menghasilkan perangkat pembelajaran matematika yang baik dengan pembelajaran kontekstual berlatar Pondok Pesantren pada materi garis dan sudut.

PEMBAHASAN

Belajar matematika merupakan kegiatan mental yang tinggi, harus dilakukan secara berurutan, setapak demi setapak, kontinu, menggunakan pengalaman belajar sebelumnya, lebih mengutamakan pengertian dari pada hafalan dan harus mengkonstruksi (membangun) sendiri pengetahuannya melalui kegiatan aktif dalam belajar.

Pembelajaran matematika konvensional dapat diartikan sebagai proses pembelajaran matematika yang disampaikan oleh guru dengan cara menjelaskan materi kemudian diberikan masalah atau contoh-contoh soal yang dilanjutkan dengan latihan soal.

Pembelajaran kontekstual adalah suatu pembelajaran matematika yang dikaitkan dengan kehidupan nyata siswa dan mendorong siswa membuat hubungan antara pengetahuan yang dimilikinya dengan penerapannya dalam kehidupan sehari-hari dengan cara mengembangkan pemahaman akademiknya dan kemampuannya memecahkan berbagai masalah dunia nyata, yaitu dengan konteks personalnya sendiri, sosial dan lingkungan budayanya. Ada tujuh komponen utama pembelajaran yang mendasari penerapan pembelajaran kontekstual dikelas, yaitu: konstruktivis, inquiry, bertanya, masyarakat belajar, pemodelan, refleksi, penilaian autentik atau penilaian yang sebenarnya.

Teori yang terkait dengan pembelajaran kontekstual, yaitu (1) teori Bruner menyarankan agar siswa-siswa hendaknya belajar melalui partisipasi aktif dengan konsep-konsep dan prinsip-prinsip, agar mereka dianjurkan untuk memperoleh pengalaman, dan melakukan eksperimen-eksperimen yang mengizinkan mereka untuk menemukan prinsip-prinsip itu sendiri. (2) teori belajar sosial (*social learning theory*) menerima kebanyakan prinsip teori perilaku tetapi terfokus jauh lebih banyak pada efek isyarat pada perilaku dan pada proses mental internal, dengan menekankan efek pemikiran pada tindakan dan tindakan pada pemikiran. Implikasi teori belajar sosial dalam pembelajaran kontekstual berlatar Pondok Pesantren yaitu siswa akan mengamati sendiri masalah-masalah yang hendak dipecahkan sehingga terbentuk persepsi ingatan jangka panjang dalam memecahkan masalah tersebut. (3) teori belajar konstruktivis, Sumbangan teori konstruktivis terhadap pembelajaran kontekstual berlatar Pondok Pesantren adalah siswa diberi kesempatan penuh untuk mengemukakan dan mengembangkan ide-idenya, selain itu juga guru dalam memberi penilaian harus melihat dari proses yang dilakukan siswa dalam menyelesaikan masalah tersebut, (4) teori Vygotsky dikenal dengan Scaffolding yaitu menyediakan banyak dukungan kepada seorang anak selama tahap-tahap awal pembelajaran dan kemudian menghilangkan dukungan dan meminta anak tersebut memikul tanggung jawab yang makin besar begitu dia sanggup.

Pondok Pesantren adalah salah satu lembaga pendidikan yang mengharuskan siswa tinggal dalam Pondok. Oleh karena tinggal dalam Pondok, maka konsekuensinya segala aturan termasuk belajar harus taat dengan aturan yang berlaku pada Pondok. Sebagai suatu Pondok Pesantren, maka segala aktivitas mempunyai kecenderungan terkonsentrasi pada mata pelajaran yang berkaitan dengan pendidikan agama.

Budaya yang diciptakan dalam sebuah pondok pesantren memang sangat unik. Setiap pondok memiliki budaya dan suasana yang cukup berbeda walaupun tentu ada banyak kesamaan juga. Budaya ini terutama dibuat dari fakta lingkungan pondok yang sangat terbatas, sifat kyai dan sifat para santri. Oleh karena lingkungan pondok sangat terbatas dan banyak waktu harus dilewatkan di dalam satu tempat itu, maka harus ada kehormatan dan kesabaran yang tinggi sekali. Santri-santri harus bisa bekerja sama dan saling paham untuk menciptakan suasana yang tenang dan cocok untuk belajar dan beribadah.

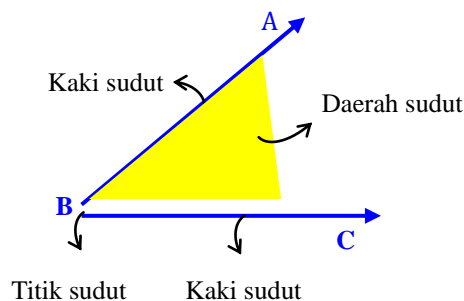
Model Pengembangan Perangkat Pembelajaran Menurut Thiagarajan, Semmel dan Semmel. Model ini dikenal dengan *Four-D Model* atau Model 4 – D dan secara khusus sebagai model pengembangan perangkat pembelajaran. Model ini terdiri atas empat tahap, yaitu: pendefinisian (*define*), perencanaan (*design*), pengembangan (*develop*) dan pendesiminasian (*dessiminate*). Masing-masing tahap terdiri atas beberapa kegiatan. Uraian keempat tahap beserta beberapa kegiatan yang harus dilakukan pada setiap tahap dari Model 4-D ini secara singkat diuraikan sebagai berikut. Kelebihan dari model 4-D antara lain: (a) lebih tepat digunakan sebagai dasar untuk mengembangkan perangkat pembelajaran bukan untuk mengembangkan sistem pembelajaran, (b) uraiannya tampak lebih lengkap dan sistematis, (c) dalam pengembangannya melibatkan penilaian ahli, sehingga sebelum dilakukan uji coba di lapangan perangkat pembelajaran telah dilakukan revisi berdasarkan penilaian, saran dan masukan para ahli. Modifikasi dilakukan antara lain dengan cara: (a) Memperjelas urutan kegiatan yang semula tidak jelas urutannya, (b) Mengganti istilah yang memiliki jangkauan lebih luas dan biasa digunakan oleh guru di lapangan, (c) Menambahkan kegiatan yang dianggap perlu dalam pengembangan perangkat pembelajaran dan instrumen penelitian yang akan dilakukan, (d) Mengurangi tahap atau kegiatan yang dianggap tidak perlu.

Garis merupakan bangun paling sederhana dalam Geometri, karena garis adalah bangun berdimensi satu.

Definisi yang disepakati digunakan dalam pelajaran geometri sebagaimana diungkapkan oleh Soedjadi (2000:27) adalah sebagai berikut.

Sudut adalah bangun yang terjadi jika dua sinar berpangkal sama (kedua sinar disebut kaki sudut, pangkal sinar disebut titik sudut).

Seperti tampak pada gambar dibawah ini.



Gambar 1. Sudut dan Komponennya

Dalam definisi ini tidak ada batasan bahwa sinar yang membentuk sudut tidak boleh terletak pada satu garis yang sama. Berarti sudut lurus tercakup juga dalam definisi ini. Dengan demikian definisi yang digunakan dalam pembelajaran matematika adalah definisi yang luas, yaitu definisi yang mencakup sudut lurus.

METODE PENELITIAN

Mengacu pada rumusan pertanyaan pada penelitian maka penelitian ini tergolong pada penelitian pengembangan. Adapun selama proses pembelajaran yang akan diteliti adalah beberapa hal yang berkaitan dengan proses pembelajaran matematika dengan pendekatan kontekstual berlatar Pondok Pesantren yang meliputi aktivitas siswa, kemampuan guru dalam mengelola pembelajaran, respons siswa terhadap proses pembelajaran, dan ketuntasan hasil belajar. Karena ada variabel yang sebenarnya mempengaruhi hasil penelitian tetapi tidak dikontrol, misalnya kesehatan siswa, kondisi ekonomi siswa maka penelitian ini tergolong penelitian eksperimen semu (*quasi experiment*).

Model pengembangan perangkat pembelajaran yang digunakan dalam penelitian ini mengacu pada model 4-D (four D model) menurut Thiagarajan yang dimodifikasi. Adapun modifikasi yang peneliti lakukan antara lain :

1. Penyederhanaan tahap-tahap pengembangan perangkat pembelajaran yaitu memuat tahap : tahap pendefinisian (*define*), tahap perancangan (*design*), tahap pengembangan (*develop*), sedangkan tahap penyebaran (*disseminate*) tidak dilaksanakan. Hal ini dikarenakan penelitian ini hanya sampai pada menghasilkan perangkat yang baik tanpa menyebarkannya.
2. Analisis konsep diganti analisis materi karena materi cakupannya lebih luas dari pada konsep.
3. Analisis materi dilakukan sebelum analisis tugas karena dalam matematika materinya terstruktur sehingga urutan tugas bergantung pada urutan materi
4. Dalam analisis materi dilakukan analisis konsep-konsep yang akan dipelajari siswa.
5. Dalam analisis tugas dilakukan analisis keterampilan-keterampilan yang harus dimiliki siswa, karena hal ini sebagai dasar untuk menentukan tugas-tugas yang akan diberikan kepada siswa.
6. Penyusunan tes hasil belajar dilakukan bersama-sama dengan perancangan awal perangkat pembelajaran lain.

Uji coba lapangan dilakukan untuk memperoleh masukan langsung berupa respons, reaksi, komentar dari guru, siswa dan para pengamat terhadap perangkat pembelajaran yang telah disusun dalam rangka revisi draft-II.

Dalam melaksanakan uji coba terbatas melibatkan guru mitra sebagai guru yang mensosialisasikan perangkat pembelajaran dan menyertakan 2 orang pengamat. Pengamatan dilakukan dalam setiap pertemuan untuk mengetahui aktivitas siswa, dan kegiatan guru dalam mengelola pembelajaran. Dari hasil uji coba ini digunakan untuk merevisi draf II sehingga diperoleh draf III.

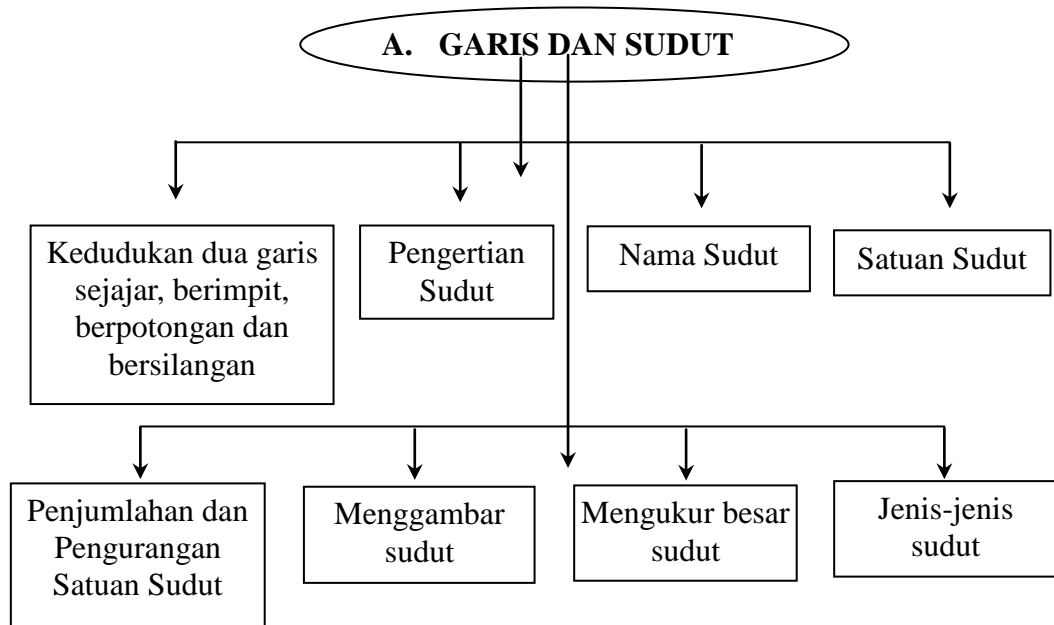
Penelitian dilaksanakan di MTs Miftahul Ulum Pondok Pesantren Banyu Ayu Pamekasan. Populasi penelitian adalah seluruh siswa kelas VII Miftahul Ulum Pondok Pesantren Banyu Ayu Pamekasan tahun ajaran 2009/2010, yang terdiri dari 4 kelas paralel Putra dan Putri. Sebagai sampel penelitian dipilih dua kelas Putri dari 4 kelas tersebut, satu sebagai kelas kontrol dan satu lagi sebagai kelas eksperimen. Sesuai dengan jenis penelitian yang dikemukakan terdahulu, maka rancangan penelitian ini adalah two-group pre-test-post-test




ANALISIS

Hasil Pengembangan Perangkat Pembelajaran dan Instrumen Penelitian

Deskripsi Hasil Tahap Pendefinisian

Dari analisis Awal-akhir ini telah diketahui bahwa, Sebagaimana telah dikemukakan pada bab pertama bahwa penyebab rendahnya kualitas pembelajaran di MTs Miftahul Ulum Pondok pesantren Banyu Ayu adalah proses pembelajaran yang masih dilaksanakan secara konvensional dan terlalu abstrak. Hal itu jelas bertentangan dengan perkembangan kognitif siswa MTs. Sebagai akibatnya banyak siswa yang tidak senang dan mengalami kesulitan untuk belajar matematika. Selain penyebab di atas, karena aktivitas santri dalam pondok selalu di konsentrasikan pada aktivitas yang berlandaskan kepada pendidikan agama yang merupakan rutinitas mereka.



Keterangan :  : Materi
 : Sub materi
 : terdiri dari
 Gambar Materi Utama dalam materi garis dan sudut

Deskripsi Hasil Tahap Perancangan

a. Pemilihan Media

Media yang diperlukan dalam pelaksanaan pembelajaran kontekstual berlatar Pondok Pesantren pada materi Garis dan Sudut di kelas VII MTs meliputi Buku Siswa, LKS, papan tulis, kapur tulis, busur, penggaris, pensil atau pulpen, buku tulis, dan penghapus.

b. Pemilihan Format

Format Rencana Pelaksanaan Pembelajaran (RPP) yang digunakan disesuaikan dengan format rencana pelaksanaan pembelajaran dalam Kurikulum 2006. Pada RPP tercantum Standar Kompetensi, Kompetensi Dasar, Hasil Belajar, Indikator Pencapaian Hasil Belajar, Materi Prasyarat, Kegiatan Pembelajaran, dan Skenario Pembelajaran.

Isi pembelajaran mengacu pada hasil analisis materi, hasil analisis tugas, dan spesifikasi indikator pencapaian hasil belajar yang telah dirumuskan pada tahap pendefinisian. Strategi pembelajaran yang akan digunakan yaitu siswa aktif belajar melalui penerapan pendekatan *kontekstual berlatar Pondok Pesantren*. Model pembelajaran yang digunakan yaitu model pembelajaran kooperatif, sedangkan metode pembelajaran yang digunakan yaitu metode ceramah, pemberian tugas dan diskusi.

Sumber belajar yang akan dikembangkan terdiri dari Buku Siswa (BS), Lembar Kegiatan Siswa (LKS). BS dibuat bergambar dan berwarna agar siswa tertarik. Selain itu, gambar-gambar yang berkaitan dengan materi pelajaran dan kehidupan siswa di Pondok Pesantren akan memudahkan siswa untuk mengingat materi tersebut. Tugas-tugas yang diberikan pada LKS berupa *soal yang terkait dengan kehidupan di Pondok Pesantren*. LKS dibagikan kepada setiap kelompok.

c. Perancangan awal perangkat pembelajaran

Pada langkah ini dihasilkan tiga buah Rencana Pelaksanaan Pembelajaran (RPP), satu buah Buku Siswa (BS) yang memuat materi-materi untuk tiga kali pertemuan, dan tiga buah Lembar

Kegiatan Siswa (LKS). Semua hasil pada tahap Perancangan ini disebut draft I.

Deskripsi hasil Tahap Pengembangan

d. Validasi Ahli

Validasi ahli dilakukan untuk melihat validitas isi (*content validity*) dari Draft I. Berdasarkan saran dan komentar dari para validator, dilakukan revisi dan penyempurnaan terhadap Draft I. Hasil revisi berdasarkan saran dan masukan dari para validator disebut Draft II.

e. Uji Coba Lapangan

Draft II diujicobakan di kelas VII.A1 MTs Miftahul Ulum Banyu Ayu Pamekasan. Uji coba berlangsung mulai tanggal 3 Mei 2010 sampai dengan tanggal 17 Mei 2010. Uji coba melibatkan seorang guru mitra dan dua orang pengamat. Pengamat melakukan pengamatan terhadap kemampuan guru mitra mengelola pembelajaran dan aktivitas siswa. Siswa yang diamati difokuskan pada 6 orang, yaitu 2 orang siswa kelompok atas, 2 orang siswa kelompok tengah, dan 2 orang siswa kelompok bawah. Berdasarkan hasil uji coba dilakukan revisi untuk menyempurnakan Draft II sebelum digunakan dalam penelitian eksperimen. Perangkat pembelajaran berupa Rencana Pelaksanaan Pembelajaran (RPP), Buku Siswa (BS), Lembar Kegiatan Siswa (LKS) diujicobakan untuk mengetahui kejelasan dan keterbacaan perangkat pembelajaran tersebut, serta kesesuaian waktu yang direncanakan. Instrumen Tes Hasil Belajar (THB) diujicobakan untuk mengetahui validitas, sensitivitas, dan reliabilitas instrumen. Ada empat jenis data yang dikumpulkan dalam pelaksanaan uji coba, yaitu:

HASIL PENELITIAN EKSPERIMEN

Penelitian eksperimen berlangsung mulai tanggal 29 Mei 2010 sampai dengan tanggal 09 Juni 2010. Kelas eksperimen dalam penelitian ini adalah kelas VII.B1, sedangkan kelas kontrol adalah kelas VII.B2. Penelitian melibatkan seorang guru mitra dan dua orang pengamat. Pengamat melakukan pengamatan terhadap kemampuan guru mitra mengelola pembelajaran dan aktivitas siswa. Siswa yang diamati difokuskan pada 6 orang, yaitu 2 orang siswa kelompok atas, 2 orang siswa kelompok tengah, dan 2 orang siswa kelompok bawah.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian diperoleh kesimpulan sebagai berikut:
Dari pengembangan perangkat pembelajaran yang menggunakan model 4-D yang telah dimodifikasi, dihasilkan perangkat pembelajaran kontekstual berlatar Pondok Pesantren yang meliputi Buku Siswa, Rencana Pelaksanaan Pembelajaran (RPP), Lembar Kerja Siswa (LKS), yang dapat dilihat pada lampiran.

DAFTAR PUSTAKA

- Alwasilah, Chaedar. 2008. *Contextual Teaching & Learning*. Bandung: MLC.
- Arends, Richard I. 2008. *Learning To Teach. Belajar untuk Mengajar*. Jakarta: Pustaka Pelajar.
- Arikunto, Suharsimi. 1991. *Prosedur Penelitian Suatu Pendekatan Praktek*. Jakarta: Rienika Cipta.
- Branca, N.A. 1980. Problem Solving as a goal, process and basic skills. In S. Krulik and R.E. Reys (Eds). *Problem Solving in School Mathematics*. Washington, DC: NCTM.
- Greenberg, Marvin Jay. 1980. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History 2nd Edition*. New York: W. H. Freeman and Company.
- Hudojo, Herman. 1990. *Strategi Belajar Mengajar Matematika*. Jakarta Depdikbud.

- Ibrahim, M dkk. 2000. *Pembelajaran Kooperatif*. Surabaya: Unesa University Press.
- Jacobs, Harold R. 1974. *Geometry*. San Francisco: W. H. Freeman and Company.
- Jihad, Asep. 2008. *Pengembangan Kurikulum Matematika (tinjauan teoritis dan historis)*. Bandung: Multi Pressindo.
- Johnson, D.W. & Johnson, R.T. 1994. *Learning Together and Alone: Cooperative, Competitive, and Individualistic Learning, Fourth Edition*. Massachusetts: Allyn & Bacon.
- Kemp, J.E., Morrison, G.R., dan Ross, S.M. 1994. *Design Effective Instruction*. New York: Macmillan Collage Publishing Company.
- Musser, Gary L., dan Burger, William F. 1993. *Mathematics for Elementary Teachers: A Contemporary Approach 3rd Edition*. New Jersey: Prentice Hall.
- Nurhadi, dkk. 2004. *Pembelajaran Kontekstual dan Penerapannya dalam KBK*. Malang: Universitas Negeri Malang.
- Purwanto, Dr. 2008. *Evaluasi Hasil Belajar*. Surakarta: Pustaka Pelajar.
- Polya, 1973. *How To Solve It (a new aspect of mathematical method)*, second edition, Princenton University Press, Princeton, New Jersey.
- Ratumanan, T.G. 2002. *Belajar dan Pembelajaran*. Surabaya: Unesa University Press.
- Riyanto, Yatim. 2005. *Paradigma Pembelajaran*. Surabaya: Unesa University Press.
- Russeffendi, ET. 1992. *Materi Pokok Pendidikan Matematika 3*. Depdikbud. P2LPTK, Jakarta.
- Saragih, S. 2000. *Pembelajaran Kooperatif Tipe STAD dengan Menggunakan Laboratorium Mini untuk Meningkatkan Kemampuan Keruangan*. Tesis. PPs Unesa: Surabaya
- Slavin, Robert E. 2008. *(Psikologi Pendidikan, Teori dan Praktek)*. Bandung: Nusa Media.
- Soedjadi, R. 2000. *Kiat Pendidikan Matematika di Indonesia*. Jakarta: Dirjen Dikti Departemen Pendidikan Nasional.

PROSES BERPIKIR SISWA SD BERKEMAMPUAN MATEMATIKA TINGGI DALAM MELAKUKAN ESTIMASI MASALAH BERHITUNG

Muh. Rizal

*Jurusan Pendidikan Matematika Universitas Tadulako
Email: ijiranarizal@yahoo.com*

Abstrak

Penelitian ini bertujuan mendeskripsikan proses berpikir siswa SD berkemampuan matematika tinggi dalam melakukan estimasi masalah berhitung. Pengungkapan proses berpikir ini dilakukan di kelas V SD, dengan mengambil subjek minimal satu orang dari siswa berkemampuan matematika tinggi (skor ≥ 75). Hasil penelitian menunjukkan bahwa proses berpikir siswa yang berkemampuan matematika tinggi dalam memahami masalah adalah proses akomodasi karena memahami masalah melalui pembacaan yang berulang. Dalam membuat perencanaan pemecahan masalah, subjek berkemampuan matematika tinggi menggunakan strategi estimasi, dalam membuat rencana tersebut tidak dapat ditentukan dengan segera namun ia mengakomodasi bilangan yang mempunyai keterkaitan sehingga mudah dihitung secara mental, dalam hal ini proses berpikirnya adalah proses akomodasi. Dalam melaksanakan rencana, siswa berkemampuan matematika tinggi melaksanakan sesuai rencana dan berhitung secara mental, sehingga proses berpikirnya adalah asimilasi. Dalam mengecek pekerjaan, siswa berkemampuan tinggi menelusuri kembali pekerjaan yang telah dibuat sebelum dan sesudah penyelesaian akhir melalui berhitung mental, sehingga proses berpikirnya adalah asimilasi.

Kata kunci: Proses berpikir, estimasi, asimilasi dan akomodasi, langkah-langkah Polya.

PENDAHULUAN

Latar Belakang

Estimasi merupakan bagian materi dari pelajaran matematika yang jarang dikaji dan diperhatikan oleh guru maupun peneliti. Pada Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan (Depdiknas, 2006) pada Standar Isi untuk mata pelajaran matematika SD kompetensi yang berkaitan dengan estimasi (menaksir) hanya terdapat di kelas IV dan V semester 1 dengan porsi yang sangat terbatas. Perhatian terhadap materi estimasi yang kurang dapat pula ditunjukkan pada buku-buku pelajaran yang beredar, termasuk buku elektronik yang kajiannya terhadap materi ini juga mempunyai porsi yang sangat sedikit. Padahal kemampuan tentang hal ini digunakan dalam kehidupan sehari-hari, tanpa mengurangi pentingnya kemampuan formal dalam perhitungan matematika.

Masalah matematika dalam kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan estimasi banyak dijumpai. Pada masalah tersebut tidak meminta suatu jawaban eksak, tetapi suatu perkiraan yang disertai alasan logis. Misalnya, cukupkah uang saya Rp 15.000 untuk membeli tiga kilogram jeruk yang berharga Rp 4.350 perkilogram?. Seseorang yang telah memiliki kemampuan estimasi dengan cepat mengetahui bahwa uang tersebut adalah cukup berdasarkan kelogisan (5.000×3 saja baru menghasilkan 15.000, sedangkan 4.350 lebih kecil dari 5.000). Contoh lain pada penggunaan kalkulator yang banyak digunakan masyarakat dalam kehidupan sehari-hari, utamanya masyarakat pedagang yang menginginkan hasil yang tepat dan akurat dalam waktu singkat. Hasil perhitungan dengan menggunakan kalkulator tidak tertutup kemungkinan mengalami kesalahan akibat karena baterainya lemah atau kekeliruan dalam memasukkan unsur-unsur yang dihitung (salah tekan tombol

digit pada kalkulator). Misal dalam hal perkalian $328.000 \times 2 = 456.000$, seseorang yang telah memiliki kemampuan estimasi dengan cepat mengetahui bahwa jawaban tersebut salah tanpa melakukan perhitungan kembali. Hal ini didasarkan pada kelogisan jawaban (300.000×2 saja sudah menghasilkan 600.000 sedangkan 328.000 lebih besar dari 300.000 maka hasilnya pasti lebih besar dari 600.000), sehingga tidak menimbulkan kerugian pada masyarakat akibat penggunaan kalkulator tersebut. Post (1992) menyatakan bahwa estimasi berhitung merupakan salah satu cara berhitung cepat selain kalkulator, berhitung mental dan algoritma yang menggunakan pensil dan kertas.

Hasil penelitian Carlton dan Fitzgerald melaporkan bahwa lebih dari 80% dari keseluruhan aplikasi matematika dalam kehidupan sehari-hari menggunakan estimasi bukan perhitungan yang eksak (Post, 1992; Jack Bana & Phuntsho Dolma, 2004).

Penerapan estimasi selain banyak dijumpai dalam kehidupan sehari-hari, juga digunakan dalam pembelajaran matematika untuk membangun pemahaman pada suatu konsep. Hal ini sejalan yang diungkapkan oleh Reys (Post, 1992) yang menyatakan bahwa estimasi merupakan salah satu jalan alternatif untuk membangun pemahaman siswa pada konsep pecahan. Misalnya, kapan suatu pecahan

bernilai dekat dengan 0, $\frac{1}{2}$ atau 1. Pengetahuan estimasi dapat digunakan untuk mengontrol kebenaran

suatu jawaban dan terjadinya miskonsepsi berdasarkan kelogisan. Misalnya, dalam penjumlahan

pecahan $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$ yang dikemukakan oleh Silver (Hiebert, 1986) bahwa kesalahan umum yang

terjadi adalah menjumlahkan pembilang dengan pembilang dan penyebut dengan penyebut, tetapi dengan pengetahuan estimasi miskonsepsi seperti ini tidak akan terjadi karena berdasarkan kelogisan

dengan cepat diketahui bahwa jawaban tersebut salah ($\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ lebih besar dari $\frac{1}{2}$, sehingga jawabannya

tidak mungkin $\frac{2}{5}$ karena ini lebih kecil dari $\frac{1}{2}$). Pengetahuan estimasi juga dapat mengarahkan

seseorang dalam menemukan jawaban dan mempersingkat prosedur dalam mendapatkan jawaban. Pengetahuan estimasi ini juga sangat diperlukan pada pengerjaan soal pilihan ganda maupun esei, tanpa mengurangi pentingnya kemampuan berhitung menggunakan algoritma.

Uraian tersebut memberi gambaran bahwa dalam melakukan estimasi berhitung selain membutuhkan kemampuan matematika juga membutuhkan ketelitian dan keterampilan dalam berhitung. Grouws (1992) mengatakan bahwa untuk dapat mengestimasi dengan baik harus menguasai fakta-fakta dasar, nilai tempat, sifat-sifat aritmetika, mempunyai keterampilan berhitung mental, peka terhadap suatu kesalahan, dapat menggunakan strategi estimasi. Berdasarkan hal tersebut dapat dikatakan bahwa perbedaan kemampuan, ketelitian dan keterampilan berhitung, kemungkinan akan memberikan hasil estimasi yang berbeda.

Mengingat estimasi ini manfaatnya sangat banyak, baik dalam pembelajaran matematika pada jenjang sekolah khususnya Sekolah Dasar (SD) maupun dalam kehidupan sehari-hari, maka perlu mendapat perhatian serius dari guru dalam mengajarkannya. Apabila guru dapat mengajarkan estimasi ini dengan baik, maka siswa akan dapat bersikap positif terhadap matematika. Hal ini sesuai yang diungkapkan oleh O'Deffer (2008) bahwa estimasi itu dapat membantu mengembangkan sikap positif siswa pada matematika. Dalam hal ini apabila siswa mengetahui akan manfaat estimasi dalam kehidupan mereka sehari-hari, maka siswa akan dapat menyenangi matematika dan tidak memandang bahwa matematika itu tidak ada kaitannya dengan kehidupan mereka sehari-hari. Sikap senang terhadap matematika dapat menjadi modal dasar bagi siswa dalam mempelajari matematika, sehingga pada akhirnya siswa dapat memperoleh prestasi sesuai dengan yang diharapkan.

Salah satu aspek penting yang harus diketahui oleh guru untuk dapat mengajarkan materi estimasi dengan baik adalah selain guru harus memperhatikan kondisi kelas, juga harus mengetahui proses berpikir siswa pada saat melakukan estimasi. Dengan mengetahui proses berpikir siswa, guru akan dapat mengetahui penyebab kesalahan yang dilakukan oleh siswa, mengetahui materi yang bisa

dan yang tidak bisa diasimilasikan ke dalam struktur kognitif anak sehingga materi yang diajarkan dapat bermakna bagi anak, mengetahui kesulitan siswa dan bagian-bagian yang belum dipahami oleh siswa. Dengan demikian guru akan dapat memberikan solusi pemecahan masalah sesuai dengan permasalahan yang dihadapi oleh siswa.

Steiner dan Cohors-Fresenberg (Zuhri, 1998) mengatakan bahwa, tugas pokok pendidikan matematika ialah menjelaskan proses berpikir siswa dalam mempelajari matematika dengan tujuan memperbaiki pengajaran matematika di sekolah. Sedangkan Marpaung (1986) mengatakan bahwa tugas pendidikan matematika memperjelas proses berpikir siswa dalam mempelajari matematika dan bagaimana pengetahuan matematika itu diinterpretasi dalam pikiran. Dengan melakukan interpretasi terhadap informasi (data) yang dikumpulkan melalui pengamatan terhadap tingkah laku siswa ketika sedang mempelajari matematika (baik dalam hal pembentukan konsep maupun dalam suasana pemecahan masalah) akan dapat dikonstruksi proses berpikir siswa tersebut.

Berdasarkan uraian tersebut di atas, maka peneliti ingin mengungkapkan proses berpikir siswa sekolah dasar berkemampuan matematika tinggi dalam melakukan estimasi pada saat memecahkan masalah berhitung berdasarkan langkah-langkah Polya (1973). Pengungkapan proses berpikir tersebut akan menggunakan kerangka kerja asimilasi dan akomodasi dari Piaget, mulai ketika siswa melakukan estimasi pada saat memahami masalah, membuat perencanaan pemecahan masalah, melaksanakan rencana hingga memeriksa kembali hasil berhitung yang telah dilakukan.

Pertanyaan Penelitian

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan pertanyaan penelitian adalah “bagaimana proses berpikir siswa sekolah dasar berkemampuan matematika tinggi dalam melakukan estimasi pada saat memecahkan masalah berhitung?”

Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini adalah mendiskripsikan proses berpikir siswa sekolah dasar berkemampuan matematika tinggi dalam melakukan estimasi pada saat memecahkan masalah berhitung.

Batasan Istilah

1. Proses berpikir dalam penelitian ini didefinisikan sebagai aktivitas kognitif atau mental dalam melakukan estimasi pada saat memecahkan masalah berhitung yang dikaji melalui proses asimilasi dan akomodasi. Asimilasi adalah proses pengintegrasian secara langsung stimulus baru ke dalam skema yang telah ada. Sedangkan akomodasi adalah proses pengintegrasian stimulus baru melalui perubahan skema lama atau pembentukan skema baru untuk menyesuaikan dengan stimulus yang diterima.
2. Estimasi berhitung adalah perkiraan yang mendekati hasil perhitungan atau gambaran hasil perhitungan dengan menggunakan alasan dan metode informal, yaitu metode yang tidak terkait dengan algoritma, tetapi dengan suatu kepekaan (pemahaman intuitif) dan tidak terikat ke satu metode. Tidak terikat ke satu metode bermakna bahwa dalam mengestimasi suatu bilangan dapat digunakan metode yang berbeda-beda, namun mengambil bilangan-bilangan pendekatan yang mudah dilakukan dengan berhitung mental. Misalnya, pembulatan, menggunakan angka-angka awal dan akhir, atau bilangan berkelipatan tertentu.

METODE

Subjek penelitian adalah siswa kelas V SD dengan pertimbangan bahwa pada jenjang ini berdasarkan KTSP materi estimasi terakhir disajikan serta siswa dianggap telah memahami konsep berhitung. Dari sejumlah siswa kelas V SD tersebut diberikan tes kemampuan matematika. Berdasarkan hasil tes tersebut diambil subjek penelitian minimal satu orang yang berkemampuan matematika tinggi (skor ≥ 75).

Untuk menggali informasi mengenai proses berpikir subjek dalam melakukan estimasi pada saat memecahkan masalah berhitung dilakukan wawancara mendalam, pengamatan langsung dan *think aloud*. Masalah estimasi berhitung yang dimaksud terdiri dari dua butir soal masing-masing disimbol M1 dan M2 sebagai berikut:

| | |
|----|---|
| M1 | Seorang anak ingin membeli delapan buku dan satu lusin pensil dengan harga satu buku Rp1.150 dan satu pensil Rp.1.250. Kemudian ia meminta uang kepada ibunya dan diberi Rp.30.000. Jelaskan menurut perkiraan kamu, apakah uang sejumlah itu cukup untuk membeli semua keinginan anak tersebut? |
| M2 | Seorang anak ingin membeli delapan buku buku dan setengah lusin pensil dengan harga satu buku Rp1.650 dan satu pensil Rp.1.350. Kemudian ia meminta uang kepada ibunya dan diberi Rp.27.000. Jelaskan menurut perkiraan kamu, apakah uang sejumlah itu cukup untuk membeli semua keinginan anak tersebut? |

Analisis data dalam penelitian ini menempuh enam tahapan sesuai yang dikemukakan Moleong (1988) yakni: (1) menelaah seluruh data, (2) reduksi data, (3) Pengolompokan data, (4) kategorisasi, (5) Melakukan pengkodean, dan (6) pemeriksaan data (pemeriksaan kredibilitas data menggunakan triangulasi waktu).

HASIL PENELITIAN

Untuk meminimalisir sifat subjektif data proses berpikir subjek dalam mengerjakan M1, dilakukan triangulasi waktu dengan mengerjakan soal setara yang disimbol M2 pada waktu yang berbeda. Hasil triangulasi tersebut menunjukkan ada konsistensi subjek dalam mengerjakan M1 dan M2. Sehingga disimpulkan bahwa data subjek dalam mengerjakan M1 adalah kredibel. Oleh karena data subjek kredibel, maka data proses berpikir subjek hanya menggunakan M1. Data subjek ketika menyelesaikan M1 sebagai berikut:

Saat Memahami M1: Berdasarkan hasil wawancara mendalam (lampiran) diketahui bahwa: (1) untuk memahami M1, subjek melakukan pengulangan membaca secara perlahan, melalui pembacaan demikian subjek dapat mengungkapkan secara langsung informasi yang tersedia (yang diketahui) dari M1 dengan lancar dan benar, (2) melalui pembacaan ulang secara perlahan, subjek dapat mengungkapkan apa yang ingin didapatkan (ditanyakan) dari M1 dengan lancar dan benar dan (3) subjek telah menghubungkan M1 dengan masalah mirip yang pernah dijumpai sehingga dapat mengetahui bahwa soal ini akan dikerjakan menggunakan taksiran berdasarkan pertanyaan dari M1.

Saat Membuat Perencanaan Pemecahan M1: Berdasarkan hasil wawancara mendalam(lampiran) diketahui bahwa: (1) subjek membuat rencana pemecahan M1 menggunakan estimasi dengan strategi estimasi yakni *rounding strategy* dan *compatible number strategi* yakni membulatkan bilangan dengan memperhatikan keterkaitan bilangan-bilangan tersebut sehingga mudah dihitung secara mental, (2) subjek membuat rencana penyelesaian M1 dengan langkah-langkah sebagai berikut: (a) 8 ditaksir menjadi 10, 12 tidak ditaksir, 1.150 ditaksir menjadi 1.000 dan 1.250 ditaksir menjadi 1.200, (b) mengalikan 10 dengan 1000 dan 12 dengan 1.200, (c) hasil perkalian yang diperoleh pada bagian (b) dijumlahkan dan (c) hasil penjumlahan tersebut diperkurangkan dengan 30.000.

Saat Melaksanakan Perencanaan Pemecahan M1: Melalui wawancara mendalam, hasil pekerjaan dan *think aloud* (lampiran) diketahui bahwa: (1) Untuk menyelesaikan M1, subjek terlebih dahulu mengungkapkan dan menuliskan yang diketahui dan ditanyakan dari M1, (2) subjek menyelesaikan M1 menggunakan *rounding strategy* dan *compatible number strategi* sesuai dengan yang direncanakan sebagai berikut: (a) 8 ditaksir menjadi 10, 1.150 ditaksir menjadi 1.000, 12 tidak taksir dan 1.250 ditaksir menjadi 1.200, (b) mengalikan 10 dengan 1.000 dan ditulis $10 \times 1.000 = 10.000$ dan 12 dengan 1.200 dan ditulis $12 \times 1.200 = 12.000$, (c) menjumlahkan hasil kali yang diperoleh dan ditulis secara bersusun $10.000 + 14.400 = 24.400$ dan (d) hasil penjumlahan yang diperoleh diperkurangkan dengan 30.000 dan ditulis secara bersusun $30.000 - 24.400 = 5.600$. Berdasarkan hasil tersebut, SUBJEK menyimpulkan bahwa uang yang diberikan cukup untuk membeli semua keinginan anak tersebut.

Saat Memeriksa Kembali Hasil Pekerjaan: Berdasarkan hasil wawancara mendalam(lampiran) dan pengamatan langsung diketahui bahwa: (1) subjek telah melakukan pemeriksaan dengan berhitung mental sebelum sampai pada penyelesaian akhir terhadap M1, (2) subjek memeriksa kembali langkah demi langkah pekerjaan yang telah dibuat melalui berhitung mental setelah penyelesaian akhir tanpa melakukan perhitungan (coret-coretan) pada lembar coret-coretan yang disediakan.

PEMBAHASAN

Untuk dapat memahami masalah estimasi, subjek laki-laki yang berkemampuan matematika tinggi melakukan pembacaan berulang. Melalui pembacaan demikian subjek tersebut dapat mengungkapkan langsung semua informasi yang tersedia (yang diketahui) dari masalah tersebut. Dalam hal ini proses berpikir subjek adalah proses akomodasi, karena pengungkapan informasi dapat dilakukan setelah pembacaan berulang. Proses akomodasi ini juga membawa subjek untuk dapat mengungkapkan apa yang ingin didapatkan (ditanyakan) dari masalah tersebut. Hal ini sesuai dengan pendapat psikolog Gestalt (Hergenhahn dan Olson, 2009) mengatakan bahwa, akomodasi dapat menyebabkan perubahan struktur mental, sehingga jika aspek lingkungan yang sebelumnya unik kemudian dijumpai lagi, aspek tersebut tidak akan menimbulkan ketidakseimbangan. Aspek tersebut akan mudah diasimilasikan ke dalam struktur kognitif. Hal ini juga sesuai yang diungkapkan oleh Yovan (2008) mengatakan bahwa pengulangan mampu meningkatkan pengingatan informasi disebabkan adanya aktivitas penguatan hubungan antar informasi. Informasi disimpan dipikiran dalam bentuk jaringan informasi, sehingga semakin sering menggunakan satu jalur informasi, maka informasi pada jalur tersebut semakin diperkuat dimemori dan dapat dengan mudah mengakses informasi pada jalur tersebut.

Selain itu dalam memahami masalah estimasi tersebut, subjek juga mengungkapkan bahwa masalah yang dihadapi akan diselesaikan dengan menggunakan penaksiran berdasarkan redaksi pertanyaan dari masalah. Untuk mengungkapkan hal ini subjek tersebut mengakomodasi informasi tentang penaksiran yang telah didapat sebelumnya yang mirip dengan masalah yang dihadapi. Hergenhahn dan Olson (2009) mengatakan bahwa seseorang merespon dunia berdasarkan pengalaman sebelumnya, tetapi setiap pengalaman memuat aspek-aspek yang berbeda dengan pengalaman yang dialami sebelumnya. Aspek unik dari pengalaman ini menyebabkan perubahan dalam struktur kognitif (akomodasi).

Untuk memecahkan masalah estimasi, siswa yang berkemampuan matematika tinggi membuat rencana penyelesaian menggunakan dua strategi estimasi yakni *rounding strategy* dan *compatible number strategy*. Dalam merencanakan strategi tersebut, ia mengakomodasi informasi tentang pembulatan bilangan dengan memperhatikan keterkaitan bilangan-bilangan tersebut agar mudah dihitung secara mental dan hasilnya mudah diperoleh. Uraian ini menggambarkan bahwa informasi tentang cara untuk memecahkan masalah yang dihadapi telah ada pada struktur mental subjek, tetapi belum sesuai dengan skema yang telah dimiliki (ada aspek unik atau baru). Sehingga skema tersebut harus berubah menjadi skema baru (aspek unik atau baru dapat masuk kepengalaman) sehingga informasi tersebut dapat diintegrasikan ke dalam stuktur kognitifnya. Piaget (Brooks & Brooks, 1993) mengatakan bahwa "*accommodation, existing schemes are modified to account for new information*". Stimulus yang diterima mungkin saja tidak sesuai dengan skema lama, oleh karena itu skema lama yang harus disesuaikan atau diubah hingga sesuai dengan stimulus yang masuk.

Sebelum melaksanakan rencana yang telah dibuat, siswa berkemampuan matematika tinggi terlebih dahulu menuliskan yang diketahui dan yang ditanyakan dari masalah tersebut. Kemudian menyelesaikan masalah tersebut menggunakan *rounding strategy* dan *compatible number strategy*, sesuai dengan yang direncanakan.

Untuk mendapatkan hasil dari setiap langkah penyelesaian masalah yang direncanakan pada umumnya dihitung secara mental dan hasilnya dapat diperoleh dengan segera dan benar. Uraian ini

memberikan gambaran bahwa informasi tentang cara menyelesaikan masalah tersebut telah sesuai dengan skema yang dimiliki oleh subjek tersebut, sehingga informasi tersebut dapat langsung diasimilasi ke dalam struktur kognitifnya. Hal ini sesuai dengan pendapat Piaget (Brooks & Brooks, 1993) menyatakan *assimilation is the incorporation of new events into intelligence as a scheme or concept*. Dalam asimilasi, stimulus diinterpretasikan berdasarkan skema yang dimiliki oleh seseorang. Jika stimulus yang masuk sesuai dengan skema yang ada, maka seseorang secara langsung dapat merespon stimulus tersebut. Hal senada diungkapkan oleh Hergenhahn dan Olson (2009) bahwa asimilasi memungkinkan seseorang untuk merespon situasi sekarang sesuai dengan pengetahuan sebelumnya.

Pekerjaan yang telah dilakukan oleh subjek berkemampuan matematika tinggi telah diperiksa sebelum dan sesudah penyelesaian akhir dengan cara menelusuri dan memeriksa kembali melalui berhitung mental dengan lancar. Sehingga dapat dikatakan bahwa proses berpikir subjek tersebut adalah proses asimilasi.

KESIMPULAN

Proses berpikir subjek berkemampuan matematika tinggi dalam memahami masalah estimasi berhitung adalah proses akomodasi, karena dapat memahami masalah estimasi yang diberikan melalui pembacaan berulang. Selain itu dalam memahami masalah estimasi berhitung, ia telah menghubungkan dengan pengalaman serupa yang pernah dijumpai, sehingga dapat menentukan bahwa masalah yang dihadapi akan dikerjakan menggunakan estimasi berdasarkan redaksi pertanyaan dari masalah tersebut.

Proses berpikir subjek berkemampuan matematika tinggi membuat perencanaan pemecahan masalah estimasi berhitung adalah proses akomodasi, karena dalam membuat rencana tersebut ia mengakomodasi pembulatan bilangan yang mempunyai keterkaitan dalam melakukan penaksiran, sehingga bilangan tersebut mudah dihitung secara mental.

Proses berpikir subjek dalam melaksanakan rencana yang dibuat adalah proses asimilasi, karena dalam melaksanakan rencana yang dibuat ia melakukan perhitungan menggunakan proses mental sehingga hasilnya dapat diperoleh dengan segera.

Proses berpikir subjek berkemampuan matematika tinggi memeriksa pekerjaan yang telah dibuat adalah proses asimilasi, karena memeriksa pekerjaan sebelum dan sesudah sampai pada penyelesaian akhir dengan cara menelusuri kembali perhitungan yang telah dilakukan melalui perhitungan secara mental dengan lancar.

DAFTAR PUSTAKA

Depdiknas, 2006. *Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan. Kompetensi Dasar Mata Pelajaran Matematika untuk Sekolah Dasar (SD)/Madrasah Ibtidaiyah (MI), Sekolah Menengah Pertama (SMP)/Madrasah Tsanawiyah (MTs), Sekolah Menengah Atas (SMA)/ Madrasah Aliyah (MA)*. Jakarta: Pusat Kurikulum, Balitbangdiknas, Jakarta.

Grouws D.A., 1992. *Handbook for research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan Publishing Company.

Hiebert, J. Ed, 1986. *Conceptual and Procedural Knowledge: The case of mathematics* New York:Macmillan Publishing Company.

Hergenhahn, B. R, dan Olson, M.H., 2009. *Theories of Learning*, Edisi ketujuh. Jakarta: Kencana.

Jack Bana, J and Phuntsho Dolma, P., 2004. *The relationship between the estimation and computation abilities of year 7 students. Mathematics Education research group of Australasia Inc.*

- Marpaung, 1986. *Sumbangan Pikiran terhadap Pendidikan Matematika dan Fisika*, Yogyakarta: Pusat Penelitian Pendidikan Matematika/Informatika FPMIPA, IKIP Sanata Darma Yogyakarta.
- Moleong, J. L., 1988. *Metodologi Penelitian Kualitatif*, Bandung: Remaja Rosdakarya Bandung.
- Polya, G., 1973. *How to Solve it (New of Mathematical Method). Second Edition*. New Jersey: Prentice University Press.
- Post, T.R., 1992. *Teaching Mathematics in grade K-8 Massachusetts, Research Based Methods*: Allyn and Bacon.
- O'Daffer, *The Value Of Estimation, Chapter 3* (<http://www.johngclayton.co.uk /website %20 files/ Output%20ch3.pdf>) diakses pada tanggal 19 Desember 2008
- Wadsworth, B.J. 1989. *Piaget's Theory of Cognitive and Affective Development*. New York: Longman.
- Zuhri, D., 1998. *Proses berpikir siswa kelas II SMP Negeri 16 Pekanbaru dalam Menyelesaikan Soal-soal Perbandingan senilai dan berbalik nilai*. Surabaya: Tesis Pascasarjana. Unesa.

LAMPIRAN

1. Transkrip hasil wawancara siswa berkemampuan matematika tinggi dalam memahami M1 yang dilakukan pada tanggal 23 Juni 2010 sebagai berikut:

P : Sebelum kamu kerjakan, coba baca dahulu soal itu!

S1 : Membaca M1 dengan suara nyaring. Setelah selesai, ia mengulang membaca dengan perlahan seakan menghayati yang dibaca, lalu diam.

P : Sudah mengerti yang kamu baca?

S1 : Sudah

P : Sekarang, coba ungkapkan apa yang kamu ketahui dari yang dibaca!

S1 : Mengungkapkan tanpa melihat lembaran soal "Seorang anak ingin membeli delapan buku dan satu lusin pensil dengan harga satu buku Rp1.150 dan satu pensil Rp.1.250. ia meminta uang kepada ibunya dan diberi 30.000.

P : Terus

S1 : Ditanyakan, kira-kira apakah uang sejumlah itu cukup untuk membeli semua keinginan anak tersebut?, Kemudian diam

P : Masih ada lagi yang kamu ketahui selain yang sudah disebut?

S1 : Membaca ulang M1, kemudian mengatakan "tidak ada"

P : Mau diapakan soal ini?

S1 : Ditaksir

P : Dari mana kamu tahu?

S1 : Ditanyakan, jelaskan menurut perkiraan kamu

P : Apakah kamu pernah mengerjakan soal seperti ini?

S1 : Tidak

P : Kalau soal yang disuruh menaksir?

S1 : Pernah, tapi tidak seperti ini soalnya

P : Terus, apalagi yang kamu ketahui selain yang sudah disebut?

S1 : Melihat kembali M1, lalu mengatakan "itu sudah"

P : Jadi tidak ada lagi?

S1 : Iya

2. Transkrip hasil wawancara siswa berkemampuan matematika tinggi dalam membuat perencanaan pemecahan M1 yang dilakukan pada tanggal 23 Juni 2010 sebagai berikut:

- P : Sekarang, bagaimana cara untuk menyelesaikan masalah itu?
 S1 : Ditaksir
 P : Dari mana kamu ketahui?
 S1 : Pertanyaannya, jelaskan menurut perkiraan
 P : Bagaimana caranya menaksir?
 S1 : Diam sambil memandang M1, kemudian mengatakan 8 ditaksir menjadi 10, kemudian diam lagi sambil memandang M1 selanjutnya mengatakan 12 tetap (tidak ditaksir), 1.150 ditaksir menjadi 1.000 dan 1.250 ditaksir menjadi 1.200
 P : Mengapa 8 kamu taksir menjadi 10 dan 1.150 kamu taksir menjadi 1.000?
 S1 : Supaya gampang diperkalikan dengan 1000
 P : Mengapa 12 tidak ditaksir dan 1.250 kamu taksir menjadi 1.200?
 S1 : Supaya gampang dikalikan
 P : Dikalikan yang mana?, sambil memandang M1
 S1 : 12 dikali 1.200
 P : Terus
 S1 : Dijumlahkan hasil kali 10 dengan 1000 dan 12 dengan 1.200 kemudian 30.000 dikurang dengan hasil penjumlahan itu. Sambil memegang dagunya
 P : Bagaimana diketahui bahwa uang 30.000 itu cukup membeli keinginan anak itu?
 S1 : Kalau ada sisa dari pengurangan itu berarti cukup
 P : Apakah ada cara lain?
 S1 : Tidak ada

3. Hasil tertulis siswa berkemampuan matematika tinggi ketika melaksanakan rencan pemecahan M1 yang dilakukan pada tanggal 23 Juni 2010 sebagai berikut:

Dik = Seorang anak ingin membeli 8 buku dan 1 lusin Pensi harga
 1 buku 1150 dan 1 Pensi 1250. ia meminta uang kepat ibunya
 diberi 30000
 Dit = Apakah uang itu cukup?
 Peny = 8 ditaksir = 10
 1150 ditaksir = 1000
 12 tetap
 1250 ditaksir = 1200

 $10 \times 1000 = 10000$
 $12 \times 1200 = 14400$
 $\underline{24400} +$
 30000
 $\underline{24400}$
 5600
 Jadi, uang itu cukup dan masih ada kembalinya = 5600

4. Transkrip hasil wawancara S1 dalam mengecek kembali hasil pekerjaan yang dilakukan untuk M1 yang dilakanakan pada tanggal 23 Juni 2010.

- P : Sekarang, periksa kembali pekerjaan yang telah kamu buat!
 S1 : Diam, kemudian memeriksa kebenaran pekerjaan yang dibuat seperti yang dilakukan tahap pelaksanaan di atas dengan cara menelusuri dan menghitung ulang langkah demi langkah secara mental.

P : Sudah diperiksa

S1 : Sudah

P : Sudah yakin tidak ada yang salah?

S1 : Iya

P : Dari mana kamu tahu tidak ada yang salah?

S1 : Saya hitung ulang satu-satu

P : yang mana kamu hitung?

S1 : Melihat pekerjaannya ($10 \times 1.000 = 10.000$, $12 \times 1200 = 14.400$, $10.000 + 14.400 = 24.400$ dan $30.000 - 24.400 = 5.600$)

P : Bagaimana caranya?

S1 : Saya hitung dalam hati

P : Apa kamu yakin benar?

S1 : Iya

P : Sudah kamu periksa semua?

PENGEMBANGAN PERANGKAT PEMBELAJARAN ESTIMASI BERHITUNG DI SEKOLAH DASAR

Muh Rizal

*Jurusan Pendidikan Matematika Universitas Tadulako
Email: ijiranarizal@yahoo.com*

Abstrak

Tulisan ini bertujuan mendeskripsikan pengembangan perangkat pembelajaran matematika SD yang menggunakan estimasi berhitung. Untuk mencapai tujuan tersebut dapat menggunakan metode pengembangan dengan mengacu kepada pengembangan model Dick dan Carey yang dimodifikasi yakni (1) Analisis kebutuhan, (2) persiapan pengembangan bahan ajar, (3) pengembangan bahan ajar, (4) Pengujian, Evaluasi dan revisi. Setelah perangkat tersusun (prototipe I), selanjutnya dilakukan evaluasi tahap I (validasi I) yang dinilai oleh pakar yang berkompeten dalam bidang ini. Kegiatan validasi ini untuk melihat kebenaran konsep, kesesuaian konsep dengan siswa, materi dengan tujuan, bahasa dan format perangkat pembelajaran. Berdasarkan hasil revisi dari penilaian oleh pakar diperoleh prototipe II yang akan diuji coba di kelas. Dari hasil uji coba dilakukan lagi revisi dan diperoleh prototipe III yang merupakan paket perangkat pembelajaran yang diharapkan.

Kata kunci: Estimasi berhitung, perangkat pembelajaran.

PENDAHULUAN

Latar Belakang

Banyak siswa mengatakan bahwa matematika sangat sulit untuk dipelajari karena di dalam kehidupan sehari-hari sangat jarang dijumpai masalah yang berkaitan dengan matematika, pendapat ini tidaklah tepat karena hampir seluruh aktivitas manusia memerlukan matematika. Misalnya berapa kilometer jarak dari rumah ke Sekolah?. Cukupkah uang saya yang jumlahnya Rp. 6.000 untuk membeli 2 atau 3 batang pensil yang harganya tiap batang Rp.2.400. Masalah ini merupakan suatu masalah matematika yang berkaitan dengan estimasi dan dapat dengan cepat ditentukan jawabannya kalau seseorang memiliki pengetahuan tentang estimasi.

Hasil penelitian Carlton dan Fitzgerald (Jack Bana and Phuntsho Dolma, 2004) melaporkan bahwa lebih dari 80% dari keseluruhan aplikasi matematika dalam kehidupan sehari-hari menggunakan estimasi bukan perhitungan yang eksak.

Oleh karena itu anak perlu dibekali pengetahuan estimasi agar masalah yang sering dijumpai dalam kehidupan mereka sehari-hari dapat diatasi. Mengetahui manfaat matematika, maka akan dapat mendorong anak untuk menyenangi matematika, dan tidak lagi memandang matematika suatu pelajaran yang sulit, bahkan akan menjadi suatu pelajaran yang menarik untuk dipelajari dan pada akhirnya anak dapat berprestasi pada pelajaran tersebut.

Selain dari masalah yang diungkap di atas yang juga memerlukan pengetahuan estimasi adalah pada pengerjaan soal esei maupun soal pilihan ganda. Soal pilihan ganda ini biasanya digunakan pada Ujian Akhir Semester (UAS) atau Ujian Akhir Nasional (UAN). Apabila seorang siswa tidak memiliki pengetahuan estimasi dalam mengerjakan soal pilihan ganda yang jumlahnya cukup banyak, sementara pengerjaannya dilakukan sebagaimana soal esei, maka waktu yang tersedia untuk digunakan mengerjakan soal tersebut tidak akan mencukupi, akibatnya akan banyak siswa yang tidak lulus seperti halnya yang dialami siswa SMP dan SMA beberapa tahun terakhir ini di daerah Palu pada khususnya dan Indonesia pada umumnya. Misalnya untuk soal ujian akhir SD tahun 2006/2007 nomor 5 yang diambil dari bank soal, siswa disuruh mencari bentuk desimal dari $\frac{3}{8}$ dengan alternatif jawaban; a.0,125 b.0,375 c. 0,575 d. 0,775. Kalau siswa mempunyai pengetahuan estimasi, maka siswa

dengan cepat menemukan jawabannya, karena 3 itu lebih kecil dari 4 maka c dan d tidak mungkin, yang mungkin jawabannya hanya a dan b. Tetapi karena 3 lebih besar dari 2 maka jawabannya pasti lebih besar dari 0,250, maka jawabannya adalah b. Dengan demikian dalam mendapatkan jawaban tidak perlu melakukan algoritma pembagian namun dengan cepat diperoleh jawabannya.

Pengetahuan estimasi dapat mengontrol kebenaran suatu jawaban tanpa melakukan perhitungan ulang, mengontrol terjadinya miskonsepsi berdasarkan kelogisan, serta mengarahkan seseorang dan mempersingkat prosedur dalam mendapatkan jawaban.

Oleh karena matematika merupakan salah satu pelajaran yang dipelajari secara hirarki pada jenjang persekolahan dan merupakan pelajaran yang sarat dengan perhitungan, sementara estimasi merupakan bagian dari matematika yang terapannya banyak dijumpai dalam kehidupan sehari-hari, disamping itu estimasi juga dapat mengontrol terjadinya kesalahan berdasarkan kelogisan serta terjadinya miskonsepsi, maka sangatlah beralasan apabila kita memberikan perhatian dan penekanan pengetahuan dalam estimasi berhitung pada pembelajaran matematika di mulai pada jenjang Sekolah Dasar (SD). Pada KTSP 2006 estimasi telah dipelajari di kelas IV dan V semester 1, akan tetapi belum mendapat perhatian serius dari para guru pada jenjang persekolahan tersebut.

Berdasarkan uraian di atas, maka perlu ada upaya untuk dapat mengajarkan materi tersebut dengan baik. Salah satu upaya yang dimaksud adalah perlu ada pengembangan perangkat pembelajaran terhadap materi tersebut. Apabila perangkat pembelajaran tersedia, maka guru akan dapat mengajar secara sistematis dan terarah.

Pertanyaan Penulisan

Berdasarkan latar belakang di atas, maka pertanyaan penulisan adalah Bagaimana pengembangan perangkat pembelajaran matematika menggunakan estimasi berhitung di SD?

Tujuan Penulisan

Adapun tujuan penulisan adalah mendikripsikan pengembangan perangkat pembelajaran matematika menggunakan estimasi berhitung di SD.

KAJIAN PUSTAKA

Pengertian Estimasi Berhitung

Mengestimasi suatu hasil dapat diibaratkan sebagai penembakan sebuah titik tertentu dengan panah. Sudah pasti bahwa kita akan sering tidak mengenai titik itu. Kebanyakan dari panah kita itu akan berserak disekitar titik tadi, ada yang tidak sampai, ada yang terlalu jauh, ada yang terlalu ke kiri ada pula yang terlalu ke kanan dan sangat sulit untuk tepat sekali mengenainya. Oleh karena itu, kita hanya berusaha agar nilai yang digunakan untuk mengestimasi tidak terlalu jauh menyimpang dari nilai yang diestimasi. Uraian tersebut menunjukkan bahwa mengestimasi hasil tidak ditujukan kepada satu jawaban eksak. Walle, (1994) menyatakan bahwa salah satu cara untuk mengindikasikan bahwa estimasi tidak ditujukan kepada satu jawaban benar adalah dengan meminta siswa untuk menentukan apakah hasil suatu perhitungan lebih atau kurang dari nilai tertentu. Misalnya apakah hasil dari $347 + 129$ lebih atau kurang dari 500.

Chaplin (dalam Kartono, 2008) menyatakan bahwa estimasi adalah suatu nilai yang diperoleh dengan pertimbangan subjektif, biasanya sesudah dilakukan pemeriksaan hati-hati mengenai data yang mendasari perkiraan tersebut. Sedangkan Owens, (1993) menyatakan bahwa estimasi berhitung adalah *computational estimation and mental computation are two ways of approaching number sense*. Ditinjau dari kerumitannya, estimasi berada pada posisi antara berhitung mental dan number sense dengan kata lain siswa harus menguasai berhitung mentalnya, baru kemudian dapat berhitung dengan baik. Bila keduanya telah dikuasai dengan baik oleh siswa maka pada tahap terakhir siswa dapat menguasai number sense dengan baik pula. Sedangkan number sense menurut Soedjadi, (2000) adalah meliputi hitung menghitung dan penggunaan bilangan yang tidak perlu melibatkan operasi (jumlah, kurangi dan sebagainya).

Jenis-Jenis dan Strategi Estimasi

Jenis estimasi yang seringkali didapat di dalam kehidupan sehari-hari adalah:

- a. *Estimasi Berhitung*, yaitu perkiraan yang mendekati hasil perhitungan atau gambaran hasil perhitungan dengan menggunakan alasan dan metode informal yaitu metode yang tidak terkait dengan algoritma, tetapi dengan pemahaman intuitif dan fleksibel (tidak terikat dengan satu metode). Rubenstein (dalam Grows, 1992) mengemukakan bahwa estimasi berhitung meliputi:
 - 1) Menetapkan apakah jawaban suatu perhitungan itu logis
 - 2) Menentukan apakah bilangan yang diketahui lebih atau kurang dari jawaban eksak
 - 3) Menentukan apakah jawaban yang diberikan lebih atau kurang dari bilangan-bilangan acuan yang diberikan
 - 4) Menentukan apakah suatu estimasi berada pada urutan besar bilangan yang betul.
- b. *Estimasi numerasi* adalah estimasi yang menjawab pertanyaan "berapa banyak". Misalnya, berapa banyak orang yang ada di dalam ruang pertemuan ini? atau berapa banyak mobil yang ada dilapangan parkir?
- c. *Estimasi pengukuran*, merupakan suatu proses untuk sampai kepada pengukuran tanpa menggunakan alat ukur. Salah satu contoh yang terkait dengan estimasi yang sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari adalah berapa tinggi pohon itu? atau berapa jauh jarak kota A ke kota B?.

Agar siswa dapat melakukan estimasi dengan baik, maka siswa harus menguasai konsep, mempunyai keterampilan dalam berhitung serta mengetahui strategi estimasi. Grouws (1992:327) mengatakan bahwa seseorang akan dapat mengestimasi dengan baik apabila menguasai dengan baik fakta-fakta, nilai tempat, sifat aritmetika, mempunyai keterampilan berhitung mental, percaya diri, peka terhadap kesalahan perhitungan, dapat menguasai strategi estimasi.

Menurut Post (1992) ada beberapa strategi estimasi yang sering digunakan yaitu:

- a. *Front-End strategy*, merupakan strategi estimasi yang memfokuskan pada bilangan paling kiri. Hal ini disebabkan bilangan ini merupakan bilangan yang sangat signifikan. Pada penjumlahan $4,19 + 0,86 + 1,39 + 0,29 + 2,14 + 0,23$ bilangan paling kiri berturut-turut 4, 0, 1, 0, 2 dan 0 jumlahnya adalah 7 sedangkan bilangan setelah koma hasilnya sekitar 2 ($0,86 + 0,19$ menghasilkan sekitar 1 dan total yang lainnya juga sekitar 1) sehingga total akhir sekitar 9.
- b. *Clustering Strategy*, sering ditemukan pada pengalaman sehari-hari dimana sekelompok bilangan mendekati suatu bilangan yang sama. Misalnya jumlah pengunjung ke suatu tempat dari hari senin sampai sabtu adalah 72.250; 63.819; 67.490; 73.180; 74.918; 68.490. Dari data ini dapat diperkirakan bahwa rata-rata pengunjung adalah 70.000 orang, kemudian rata-rata pengunjung itu dikalikan dengan banyak hari sehingga diperoleh $6 \times 70.000 = 420.000$.
- c. *Rounding strategy*, memuat bilangan yang dibulatkan, kemudian dihitung dengan bilangan yang dibulatkan itu. Misalnya untuk hasil kali 23 dan 78, hasil dari beberapa pembulatan dapat diperoleh (1) 20×80 atau 1.600, (2) 25×80 atau 2.000, (3) lebih dari 20×70 atau lebih dari 1.400 dan beberapa pembulatan lainnya.
- d. *Compatible number strategy*, pembulatan dilakukan sehingga hasil pembulatan itu dapat dihitung dengan mudah. Strategi ini khususnya efektif untuk estimasi masalah-masalah pembagian. Pembagian $4.936 : 48$ dapat diestimasi dengan menggunakan strategi compatible number menjadi $4.800 : 48$ sehingga dapat dengan mudah hasilnya yaitu 100.
- e. *Special strategy*, Bilangan-bilangan khusus meliputi pangkat 10 dari suatu bilangan atau pecahan dan desimal yang umum, 9,84% dari 816 dapat diestimasi dengan menggunakan bantuan 10% karena 9,84% mendekati 10% sehingga 10% dari 816 = 81,6%. Demikian juga hasilnya dengan $103,96 \times 14,8$ dapat diestimasi dengan menggunakan bantuan 100 karena 103,96 mendekati 100 sehingga $100 \times 14,8 = 14.800$. Contoh-contoh ini memiliki bilangan spesial sehingga dapat diestimasi dengan mudah. Untuk contoh 9,845% mendekati nilai spesial 10%, 103,96% mendekati nilai spesial 100.

Menurut Grouws (1992:373) ada 3 proses kunci untuk dapat mengestimasi dengan baik yang juga digunakan dalam strategi estimasi di atas yaitu:

- 1) *Reformulation*, yaitu proses merubah bentuk kesuatu bentuk lain yang lebih mudah ditangani dengan mental tanpa mengubah struktur masalah. Contohnya $(6 \times 347) : 43$ diubah menjadi $(6 \times 350) : 42$
- 2) *Translation*, yaitu merubah struktur masalah matematika menjadi bentuk yang lebih mudah dilakukan perhitungan secara mental, misalnya mengubah $8.946 + 7.212 + 7.814$ menjadi 8.000×3 dan mengubah $(347 \times 6) : 43$ menjadi $347 \times (6 : 43)$ dan selanjutnya $350 : 7$.
- 3) *Compensation*, yaitu penyesuaian yang dibuat untuk merefleksikan variabel numerik yang diperoleh dari hasil translasi atau reformulasi. Misalnya untuk masalah $21.319.908 : 26$ diperoleh dengan membagi $26.000.000$ dengan 26 yang menghasilkan $1.000.000$, kemudian dikompensasikan ke bawah menjadi 850.000 .

Berdasarkan uraian di atas dapat disimpulkan bahwa dalam melakukan estimasi kita dapat mengambil bilangan-bilangan pendekatan yang dapat dikerjakan dengan berhitung mental misalnya penjumlahan dengan kelipatan 5, 10, 100 dan sebagainya atau dengan pembulatan bilangan serta bentuk-bentuk lain yang memungkinkan dilakukan cara berhitung mental.

Pentingnya Estimasi dalam Pembelajaran Matematika

Matematika dalam kehidupan sehari-hari sangat banyak dijumpai dan hampir memasuki semua aktivitas manusia sehari-hari. Penerapan matematika yang banyak dijumpai dalam kehidupan sehari-hari adalah berkaitan dengan estimasi. Misalnya, berapa tinggi orang itu? Atau keranjang ini memuat berapa biji mangga? pertanyaan-pertanyaan seperti ini berkaitan dengan estimasi.

Di dalam pembelajaran, menyampaikan akan penting estimasi dalam kehidupan sehari-hari khususnya dalam kehidupan anak, maka akan dapat mendorong siswa untuk menyenangi matematika, dan tidak lagi menganggap matematika merupakan suatu pelajaran yang sulit dan membosankan, tetapi suatu pelajaran yang menarik. Sehingga pada akhirnya siswa dapat memperoleh prestasi yang baik pada matapelajaran ini. O'Daffer seorang profesor matematika yang dilibatkan dalam pendidikan mengklaim estimasi itu dapat membantu mengembangkan sikap positif siswa pada matematika.

Matematika yang sebagian orang mengidentikkan sebagai mata pelajaran berhitung. Didalam perhitungan seringkali terjadi kesalahan dan kekeliruan. Kekeliruan yang terjadi mungkin disebabkan kurang teliti. Kemampuan estimasi dapat mengontrol terjadinya kekeliruan dan ketidaktelitian orang dalam mengambil suatu kesimpulan. O'Daffer lebih lanjut mengatakan bahwa kemampuan estimasi dapat meningkatkan ketelitian mereka dalam mendapatkan suatu jawaban.

Oleh karena itu estimasi ini di dalam pembelajaran matematika sangat penting diberikan anak, karena dengan mengetahui estimasi akan dapat memperlancar pada pembelajaran berikutnya. Kita ketahui bahwa materi pelajaran matematika saling terkait dan hirarkis, siswa akan sulit mempelajari materi berikutnya apabila materi sebelumnya belum dikuasai.

Pengembangan perangkat Pembelajaran

Pengembangan perangkat pembelajaran yang dimaksud adalah menyusun Rencana Pembelajaran, Lembar Kerja Siswa (LKS) dan Pembuatan Buku Ajar. Pengembangan perangkat ini dapat mengacu kepada pengembangan model Dick dan Carey (1978) yang dimodifikasi dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Analisis kebutuhan
2. Persiapan pengembangan bahan ajar
Kegiatan yang akan dilakukan pada tahap ini terdiri atas:
 - a. Mengidentifikasi tujuan pembelajaran
 - b. Analisis pembelajaran, yakni menyusun secara sistematis konsep, aturan dan sifat-sifat yang akan dipelajari siswa termasuk sebaran materi pembelajaran tiap tatap muka.
 - c. Mengidentifikasi kondisi kemampuan siswa dalam kelas
 - d. Perumusan tujuan pembelajaran

3. Pengembangan bahan ajar/desain
Kegiatan yang dilakukan pada tahap ini adalah menyusun perangkat pembelajaran menggunakan estimasi berhitung yang terdiri atas:
 - a. Rencana Pembelajaran (minimal memuat: tujuan pembelajaran, materi ajar, metode pembelajaran, langkah-langkah pembelajaran, sumber belajar dan penilaian hasil belajar)
 - b. Lembar Kerja Siswa (LKS harus memperhatikan kesesuaian dengan RP)
 - c. Pembuatan Buku ajar (mengacu pada standar buku ajar yang ditentukan oleh puskur yakni memperhatikan organisasi materi: keruntunan, sistematika materi dan kesesuaian dengan alokasi waktu)
4. Pengujian, Evaluasi dan Revisi
Evaluasi tahap I: penilaian terhadap prototipe I yakni rencana pembelajaran, LKS dan buku ajar yang telah dibuat dinilai oleh pakar yang berkompeten dalam bidang ini. Hasil penilaian dari pakar direvisi sehingga diperoleh prototipe II perangkat pembelajaran. *Evaluasi tahap II:* dilakukan uji coba prototipe II, hasil uji coba direvisi lagi sehingga diperoleh prototipe III yang merupakan paket pembelajaran yang diharapkan.

KESIMPULAN

1. Untuk mengembangkan perangkat pembelajaran estimasi berhitung di SD dapat mengacu kepada pengembangan model Dick dan Carey yang dimodifikasi.
2. Rencana Pembelajaran yang dibuat minimal memuat tujuan pembelajaran, materi ajar, metode pembelajaran, langkah-langkah pembelajaran, sumber belajar dan penilaian hasil belajar; LKS yang dibuat harus memperhatikan kesesuaian dengan RP dan Buku ajar yang dibuat mengacu pada standar buku ajar yang ditentukan oleh puskur yakni memperhatikan organisasi materi: Keruntunan, Sistematika materi dan Kesesuaian dengan alokasi waktu)

DAFTAR PUSTAKA

- Carey, Lou and Dick, Walter, 1978. *The systematic Design of Instruction (3rded)*. United States of America, Harper Collins.
- Grouws D.A, 1992. *Handbook for research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan Publishing Company.
- Hari Wibawanto, *Pengukuran Kinerja Komputer dan Permasalahannya* URL: <http://www.elektroindonesia.com/elektro/tel29.html>, Download tanggal 29 Maret 2008.
- Hiebert, J (Ed), 1986. *Conceptual and Procedural Knowledge: The case of mathematics* New York: Macmillan Publishing Company.
- Jack Bana and Phuntsho Dolma, 2004. *The relationship between the estimation and computation abilities of year 7 students*. Mathematics Education research group of Australasia Inc.
- Kartono, K, 2008. *Kamus lengkap psikologi*. Jakarta: PT. Rajagrafindo Persada.
- O'Daffer, *The Value Of Estimation*, Chapter 3 ([http://www.johngclayton.co.uk/website %20 files/ Output%20ch3.pdf](http://www.johngclayton.co.uk/website%20files/Output%20ch3.pdf) diakses pada tanggal 19 Desember 2008)
- Owens, D.T.,1993. *Research Ides for the Classroom* (Middle grades mathematics). New York: Macmillan Publishing Company.
- Pribadi, B. A, 2009. *Model Desain Sistem Pembelajaran*. Jakarta: Dian Rakyat

Post, T.R., 1992. *Teaching Mathematics in Grade K-8 Massachusetts*: Allyn and Bacon.

Reys, R. E, 1992. *Helping children learn mathematics*. Needham Height: A Viacon Company.

Rinella Putri, 2007. *Benchmarking dalam TQM* URL: http://www.vibiznews.com/1new/journal_last.php?id=21&sub=journalmonth=DESEMBER&tahun=2007. Download tanggal 29 Maret 2008.

Siswono, T.Y.E., dan Rizal, M. 2009. *Kemampuan Estimasi Guru Sekolah Dasar dalam Operasi Hitung*, Hasil penelitian tidak dipublikasikan, Surabaya.

Soedjadi, R., 2000. *Kiat Pendidikan Matematika di Indonesia*. Jakarta: Dikti Depdiknas.

Whole Number Arithmetic Online Documentation , *Use estimating skills* (<http://www.sssoftware.com/docs/wnadoc/estimate.html>) diakses bulan oktober 2008.

Yang, D. C, 1998. *Realtionship beteween computational performance and numbering sense among sixth-and eighth-grade students in Taiwa*. Journal for research in mathematics education. 29(2):225-235.

TEKNIK-TEKNIK INOVASI YANG DIGUNAKAN GURU SMP DALAM MEMBUAT SOAL MATEMATIKA KONTEKSTUAL

Suryo Widodo

Universitas Nisantara PGRI Kediri
Email: widodonusantara@yahoo.co.id

Abstrak

Dalam pendahuluan kurikulum tingkat satuan pendidikan (KTSP) matematika sekolah pada semua kelas yang menganjurkan pada setiap kesempatan pembelajaran matematika agar dimulai dengan *contextual problems*; atau masalah kontekstual atau situasi yang pernah dialami siswa. Tujuan penelitian ini mengungkap teknik-teknik inovasi yang digunakan guru matematika SMP dalam membuat soal matematika kontekstual. Penelitian dilakukan pada guru peserta sertifikasi rayon 43 UNP Kediri. Subyek penelitian dua orang guru yang terdiri dari 1 guru dengan kualifikasi akademik S-1 pendidikan matematika dan 1 guru dengan kualifikasi akademik S-1 matematika. Metode pengumpulan data dengan wawancara berbasis tugas. Hasil yang diperoleh dalam penelitian adalah: (1) dalam menghasilkan masalah matematika kontekstual baru guru matematika dengan kualifikasi S-1 pendidikan matematika menggunakan (a) teknik inovasi mengganti bilangannya, (b) teknik inovasi mengganti konteksnya (c) teknik inovasi modifikasi pertanyaannya, dan (d) teknik inovasi menambah informasi. (2) dalam menghasilkan masalah matematika kontekstual baru guru matematika dengan kualifikasi S-1 matematika menggunakan (a) teknik inovasi mengganti bilangannya, (b) teknik inovasi mengganti konteksnya, dan (c) teknik inovasi menambah informasi.

Kata kunci: Teknik Inovasi, soal matematika kontekstual.

PENDAHULUAN

Menurut Zulkardi dan Ratu Ilma (2007), *trend* atau arah pendekatan pembelajaran matematika di Sekolah saat ini adalah penggunaan konteks dalam pembelajaran matematika. Inovasi tersebut berupa *Contextal Teaching and Learning* (CTL) dan *Realistic Mathematics Education* (RME). Untuk RME yang dikembangkan di Belanda, diadopsi di Indonesia menjadi Pendidikan Matematika Realistik Indonesia (PMRI) menggunakan konteks sebagai titik awal bagi siswa dalam mengembangkan pengertian matematika dan sekaligus menggunakan konteks tersebut sebagai sumber aplikasi matematika.

Karakteristik utama RME ini masuk dalam kurikulum tingkat satuan pendidikan (KTSP) matematika sekolah pada semua kelas yang menganjurkan pada setiap kesempatan pembelajaran matematika agar dimulai dengan *contextual problems*; atau masalah kontekstual atau situasi yang pernah dialami siswa. Inilah yang berbeda dari kurikulum berbasis kompetensi (KBK) dengan KTSP yakni Kegiatan Belajar Mengajar: (1) Berpusat pada peserta didik; (2) Mengembangkan kreativitas; (3) Menciptakan kondisi yang menyenangkan dan menantang; (4) Kontekstual; (5) Menyediakan pengalaman belajar yang beragam; (6) Belajar melalui berbuat.

Masalah kontekstual adalah masalah yang berkaitan dengan pengalaman anak tentang lingkungannya. Lingkungan yang dimaksud dapat berupa lingkungan yang sempit tetapi bisa juga berupa lingkungan yang lebih luas. Untuk pembelajaran awal matematika lebih tepat jika digunakan atau dimanfaatkan lingkungan yang dekat dengan anak. Pada perkembangannya masalah kontekstual dapat memuat pengetahuan yang dimiliki oleh anak, baik yang berada di dunia nyata atau yang dapat dijangkau oleh pikiran anak.

Begitu juga Permen no 16 tahun 2007 tentang standar kualifikasi akademik dan kompetensi guru, pada kompetensi profesional dalam bidang matematika “Menguasai pengetahuan konseptual dan

prosedural serta keterkaitan keduanya dalam **konteks** ... Mampu menggunakan matematisasi horizontal dan vertikal untuk menyelesaikan masalah matematika dan masalah dalam dunia nyata”

Demikian pentingnya masalah kontekstual ini hingga Wingard-Nelson (2005) mengatakan bahwa “*Math is all around, and an important part of your life. You use math when you are playing games, cooking food, spending money, telling time, reading music, or doing any other activity that uses numbers. Even finding a television station uses math!*” Matematika ada disekitar, dan merupakan bagian penting dari hidup kamu. Kamu menggunakan matematika ketika kamu sedang bermain game, memasak makanan, menghabiskan uang, mengatakan waktu, membaca musik, atau melakukan aktivitas lain yang menggunakan bilangan. Bahkan menemukan stasiun televisi menggunakan matematika!

Karakteristik pembelajaran kontekstual seperti tersebut di atas sangat cocok digunakan pada pendidikan dasar, karena siswa pada pendidikan dasar menurut Piaget masih berada pada operasi konkrit. Siswa SMP merupakan masa transisi dari operasi konkrit ke operasi formal sehingga penggunaan konteks dalam pembelajaran sangat besar manfaatnya. Oleh karena itu guru matematika SMP harus mampu dalam membuat soal matematika kontekstual.

Pengalaman di Amerika Serikat menunjukkan bahwa minat dan prestasi siswa dalam bidang matematika, sains, dan bahasa meningkat secara drastis pada saat (1) mereka dibantu untuk membangun keterkaitan antara informasi (pengetahuan) baru dengan pengalaman (pengetahuan lain) yang telah mereka miliki atau mereka kuasai; (2) mereka diajarkan bagaimana mereka mempelajari konsep, dan bagaimana konsep tersebut dapat dipergunakan di luar kelas; (3) guru menggunakan suatu pendekatan pembelajaran dan pengajaran kontekstual atau *Contextual Teaching and Learning* (CTL) (Johnson, 2002). Belanda mengenalkan pembelajaran matematika yang diorientasikan dengan dunia nyata yang dikembangkan berdasarkan pemikiran Hans Freudental. Ia berpendapat bahwa matematika merupakan aktivitas manusia (*human activities*) dan harus dikaitkan dengan realitas. Kemudian model ini dikenal dengan *Realistic Mathematics Education* (RME) (Gravemeijer, 1994).

Di Australia dikenal dengan *Mathematics in Contexts* yang telah berhasil diujicobakan juga pada sekolah di lingkungan suku aborigin (Board of Studies NSW, 2003).

Masalah berikutnya yang muncul adalah bagaimana kemampuan guru membuat soal kontekstual? Karena dalam pembelajaran kontekstual atau matematika realistik selalu dianjurkan menggunakan masalah kontekstual atau situasi yang pernah dialami siswa. Sehingga untuk dapat merumuskan masalah kontekstual diperlukan kreativitas guru. Ketika memberikan materi asesmen otentik pada guru di rayon 43 masih banyak guru yang belum dapat membuat soal beserta rubriknya, jika soal tersebut berbentuk pemecahan masalah. Hasil penelitian awal yang dilakukan Widodo (2009) pada 10 guru anggota MGMP Matematika Kabupaten Kediri hanya 30% guru yang dapat membuat 4 macam soal kontekstual matematika. Hasil ini mendukung temuan Joel dan Elizabeth (2006) bahwa guru matematika kesulitan dalam menyajikan pembelajaran melalui contoh kehidupan nyata untuk mengupayakan penguasaan penyelesaian masalah. Sehingga masih diperlukan banyak ide kreatif dari guru dalam membuat masalah kontekstual.

Namun, pemecahan masalah tidak bisa dimulai kecuali ada masalah untuk dipecahkan dan masalah yang baik untuk dipecahkan itu! Mana satu mendapatkan masalah yang baik? Salah satu aspek dari pemecahan masalah bahwa sekolah matematika guru perlu terlibat dalam adalah "seni mengajukan soal" (Brown dan Walter, 1993). Brown dan Walter (1993) berpendapat bahwa tingkat pemahaman seseorang matematika berhubungan erat dengan kemampuan seseorang untuk menghasilkan dan mengajukan pertanyaan-pertanyaan.

Guru kadang-kadang kehabisan ide dan mengalami kesulitan menciptakan masalah matematika kontekstual. Untuk itulah diperlukan inovasi dalam membuat masalah baru. Inovasi adalah proses menemukan atau mengimplementasikan sesuatu ke dalam situasi yang baru. Konsep kebaruan ini berbeda bagi kebanyakan orang karena sifatnya relatif (apa yang dianggap baru oleh seseorang atau pada suatu konteks dapat menjadi sesuatu yang lama bagi orang lain dalam konteks lain). Inovasi adalah memikirkan dan melakukan sesuatu yang baru yang menambah atau menciptakan nilai-nilai manfaat (Widodo, 2010).

Berbagai penelitian telah memberikan banyak ide dan saran tentang bagaimana guru matematika sekolah bisa mengembangkan keterampilan mengajukan masalah. Vistro-Yu (2009) mengembangkan ide teknik inovasi untuk menghasilkan masalah baru yang diadaptasi dari teknik inovasi dalam bercerita: (1) penggantian – membuat masalah yang sama tetapi berubah kuantitas, jumlah, unit, bentuk, (2) penambahan – membuat masalah yang sama tetapi menambahkan informasi baru atau kendala atau menambah hambatan, (3) modifikasi - mengambil kuantitas atau bilangan yang diberikan tetap sama tetapi merubah masalah konteksnya, (4) mengontekstualisasikan masalah agar masalah yang dibuat lebih relevan kepada siswa, (5) mengubah masalah di sekitar atau membalikkan masalah - mengambil masalah yang sama tetapi mengambil tujuan akhir sebagai yang diberikan dan yang diberikan sebagai tujuan akhir, (6) reformulasi – membuat masalah yang sama dalam representasi yang berbeda.

Dari uraian di atas dapat dirumuskan pertanyaan penelitian sebagai berikut, “Teknik-teknik inovasi apa yang digunakan oleh guru matematika SMP dalam membuat masalah matematika kontekstual? Tujuan penelitian ini adalah mengungkap teknik-teknik inovasi yang digunakan oleh guru matematika SMP dalam membuat masalah matematika kontekstual. Teknik-teknik inovasi ini akan dijadikan model dalam pelatihan guru, khususnya dalam bidang penilaian berbasis kelas.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif. Bila dilihat dari tujuannya untuk mengeksplorasi apa yang dilakukan guru dalam membuat masalah matematika kontekstual, maka penelitian ini tergolong penelitian eksploratif. Untuk memperoleh gambaran tersebut, peneliti memberikan tugas pada guru matematika SMP yaitu ES dan ST untuk membuat soal matematika kontekstual. ES adalah guru SMP kota Kediri dengan kualifikasi akademik S-1 pendidikan matematika. ST adalah guru SMP Nganjuk dengan kualifikasi akademik S-1 matematika. Berdasarkan hasil tugas yang dibuat guru tersebut dilakukan wawancara, sehingga disebut wawancara berbasis tugas. Instrumen yang digunakan untuk memperoleh data tersebut adalah peneliti itu sendiri sebagai instrumen utama. Peneliti juga menggunakan alat perekam audio dan audiovisual (handycam) sebagai instrumen pembantu. Langkah penelitian adalah sebagai berikut: Pertama, memilih subyek penelitian sesuai dengan kriteria yang telah ditetapkan. Kedua, memberikan tugas kepada guru untuk membuat soal kontekstual untuk memperoleh produk kreativitasnya. Ketiga, wawancara pada guru dengan berbasis tugas yang telah dikerjakan serta melakukan pengamatan langsung (dibantu dengan handycam). Keempat, menganalisis hasil tugas tertulis dan wawancara. Kelima, mengungkap teknik-teknik inovasi guru dalam membuat masalah matematika kontekstual.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Teknik-teknik inovasi yang digunakan ES dalam membuat soal kontekstual. Berdasarkan hasil tugas tertulis ES berhasil membuat soal matematika kontekstual sebanyak 5 butir soal. Soal nomor 1 dapat dilihat pada gambar berikut:

Soal yang dibuat ini termasuk soal kontekstual. Nampak bahwa bu ES telah memasukkan konteks masyarakat, karena bengkel pak anton berada di tengah masyarakat yang dikenal baik oleh siswa (lihat hasil wawancara berikut)

① Bengkel Pak Anton menerima pesanan daun pintu dan jendela. Untuk menyelesaikan 2 buah daun pintu dan 3 buah daun jendela bengkel Pak Anton membutuhkan waktu 12 jam. Untuk menyelesaikan 1 daun pintu dan 4 daun jendela membutuhkan waktu 11 jam. Berapa jam waktu yang dibutuhkan untuk menyelesaikan masing-masing 1 daun pintu dan 1 daun jendela?

② Bengkel Pak Anton menerima pesanan daun pintu dan jendela. Untuk menyelesaikan 2 buah daun pintu dan 4 buah daun jendela bengkel Pak Anton membutuhkan waktu 16 jam. Untuk menyelesaikan 1 daun pintu dan 3 daun jendela membutuhkan waktu 10 jam. Berapa jam waktu yang dibutuhkan untuk menyelesaikan masing-masing 1 daun pintu dan 1 daun jendela?

Dengan kata kunci "**mengganti bilangannya**" berarti ES telah menggunakan teknik inovasi **mengganti bilangannya** untuk menghasilkan soal kontekstual baru.

③ Istana roti Mariam menerima pesanan roti ulang tahun dan roti pesta pernikahan. Untuk menyelesaikan 2 roti ulang tahun dan 4 roti pesta pernikahan Istana Roti Mariam membutuhkan waktu 16 jam. Sedangkan untuk menyelesaikan 1 roti ulang tahun dan 3 roti pesta pernikahan dibutuhkan waktu 10 jam. Berapa waktu yang dibutuhkan Istana Roti Mariam untuk menyelesaikan masing-masing 1 roti ulang tahun dan 1 roti pesta pernikahan?

P: Bagus! Ibu telah berhasil membuat 5 soal. Darimana ibu mendapat ide bengkel Pak Anton untuk membuat soal no 1?

ES: Bengkel Pak Anton tidak jauh dari sekolah, sehingga anak-anak sudah mengenal bengkel Pak Anton.

P: Darimana ibu memunculkan bilangan 2, 3, 12 pada soal tersebut?

ES: Karena topiknya sistem persamaan linear 2 variabel saya tinggal menghubungkan dengan persamaan $2x+3y=12$. Begitu juga untuk bilangan berikutnya.

P: Bagaimana bisa muncul soal no 2 ini?

ES: Karena disuruh buat sebanyak-banyaknya maka tinggal **mengganti bilangannya**, tanpa mengganti masalah pada soal pertama sudah jadi soal baru yang tidak sama dengan soal pertama.

P: Selanjutnya bagaimana ibu mendapatkan ide untuk soal no 3?

ES: Soal no 3 ini saya buat dari soal no 2 lalu saya **ganti situasinya atau konteksnya** dengan konteks istana roti. Disini saya tidak merubah bilangannya.

P: Mengapa konteksnya diganti istana roti kok tidak yang lain?

ES: Murid disini sudah kenal baik dengan istana roti, sebab jika ulang tahun banyak yang membeli roti disana.

Dengan kata kunci “**ganti situasinya atau konteksnya**” berarti ES telah menggunakan teknik inovasi **mengganti konteksnya** untuk menghasilkan soal kontekstual baru.

- ④ Istana roti Mariam menerima pesanan roti ulang tahun dan roti pesta pernikahan. Untuk menyelesaikan 2 roti ulang tahun dan 4 roti pesta pernikahan istana roti Mariam membutuhkan waktu 16 jam. Sedangkan untuk menyelesaikan 1 roti ulang tahun dan 3 roti pesta pernikahan dibutuhkan waktu 10 jam. Berapa jam waktu yang dibutuhkan Istana roti Mariam, jika mendapat pesanan 10 roti ulang tahun dan 10 roti pesta pernikahan?

Dengan kata kunci “**modifikasi pertanyaanya**” berarti ES telah menggunakan teknik inovasi **memodifikasi pertanyaanya** untuk menghasilkan soal kontekstual baru.

- ⑤ Istana roti Mariam menerima pesanan roti ulang tahun dan roti pesta pernikahan. Untuk menyelesaikan 2 roti ulang tahun dan 4 roti pesta pernikahan istana roti Mariam membutuhkan waktu 16 jam. Sedangkan untuk menyelesaikan 1 roti ulang tahun dan 3 roti pesta pernikahan dibutuhkan waktu 10 jam. Jika dalam satu hari Istana roti Mariam bekerja selama 10 jam. Berapa banyak roti yang dihasilkan oleh Istana roti Mariam selama sehari?

P: Soal no 4 ini kelihatanya sama dengan soal no 3, lalu apanya yang baru?

ES: Memang kelihatanya sama, tetapi no 4 ini saya **modifikasi pertanyaanya** hingga menghasilkan soal kontekstual yang baru. Jadi murid dapat menjawab soal ini jika ia telah dapat jawab soal no 3. Sehingga levelnya diatas soal no 4.

P: Soal no 5 ini kelihatanya lebih panjang dari soal yang lain? lalu apanya yang baru?

ES: Benar pak soal no 5 ini lebih panjang dari soal yang lain. Karena saya **menambahkan informasi baru disitu** yaitu jam kerja istana roti selama sehari. Sehingga menghasilkan soal kontekstual yang baru. Dan **pertanyaanya saya balik**.

P: Apa maksudnya pertanyaan dibalik?

ES: Jika soal yang lain saya tanyakan berapa waktunya. Sekarang yang saya tanyakan banyak roti yang dihasilkan.

Dengan kata kunci “**menambahkan informasi baru**” berarti ES telah menggunakan teknik inovasi menambahkan informasi baru untuk menghasilkan soal kontekstual baru.

Selain dengan menambah informasi ternyata ES juga **membalik petanyaanya** sebagai hal yang diketahui pada soal sebelumnya. Yaitu banyak waktu yang digunakan untuk menyelesaikan roti, sedangkan soal 5 menanyakan banyak roti yang dihasilkan dalam satu hari. berarti ES telah menggunakan teknik inovasi **membalik informasi menjadi pertanyaan** untuk menghasilkan soal kontekstual baru.

P: Misalkan ibu diminta lagi untuk membuat soal yang baru, yang berbeda dari 5 soal yang telah ibu buat.

ES: Sudah habis pak.

P: Apa maksudnya sudah habis?

ES: Tidak ada cara lagi pak selain mengganti bilangannya, atau saya ganti konteksnya, atau memodif pertanyaanya, atau saya tambah informasinya, dan membalik informasi menjadi pertanyaan.

Ini menunjukkan bahwa teknik inovasi yang dimiliki ES hanya (a) teknik inovasi mengganti bilangannya, (b) teknik inovasi mengganti konteksnya (c) teknik inovasi modifikasi pertanyaannya, dan (d) teknik inovasi menambah informasi.

Berdasarkan hasil tugas tertulis ST berhasil membuat soal matematika kontekstual sebanyak 4 butir soal. Soal nomor 1 dapat dilihat pada gambar berikut:

1. Koperasi Sekolah menjual perlengkapan dng cara Paket
Paket A : 5 pensil dan 8 bukutulis seharga Rp 22000
Paket B : 3 pensil dan 5 bukutulis seharga Rp 13.500
Berapa harga tiap pensil dan bukutulis tersebut?

P: Apakah ide bapak hingga soal no 1 ini dihubungkan dengan koperasi siswa?

ST: Saya mengambil contoh tentang koperasi siswa karena semua siswa disini tahu tentang koperasi siswa dan banyak siswa yang belanja keperluan sekolah dikoperasi siswa.

Soal yang dibuat ini termasuk soal kontekstual. Nampak bahwa pak ST telah memasukkan konteks sekolah, karena koperasi siswa berada dilingkungan sekolah sehingga siswa mengenal dengan baik koperasi siswa tersebut.

2. Koperasi sekolah menjual perlengkapan dng cara paket
Paket A : 2 pensil dan 6 buku tulis seharga Rp 22000
Paket B : 1 pensil dan 6 buku tulis seharga Rp 20000
Berapa harga tiap pensil dan buku tulis tersebut?

P: Apakah ide bapak hingga dapat membuat soal no 2 ini?

ST: Untuk membuat soal lagi, tadinya saya bingung, lalu muncul ide, bagaimana kalau soal tadi **saya ganti angkanya**. Lalu saya masukkan saja, jadilah soal tersebut.

P: Angkanya atau bilangannya?

ST: Oh ya bilangannya pak.

Dengan kata kunci "**mengganti angkannya**" berarti ST telah menggunakan teknik inovasi **mengganti bilangannya** untuk menghasilkan soal kontekstual baru.

3. Industri rokok rumahan memiliki beberapa mesin jenis A dan B. Jika dalam sehari 2 mesin jenis A dan 6 mesin jenis B dapat menghasilkan 22.000 batang rokok, dan 1 mesin jenis A dan 6 mesin jenis B dapat menghasilkan 20.000 batang rokok. Berapa batang rokok yang dihasilkan tiap mesin jenis A dan B dalam sehari?

P: Bagaimana bapak mendapatkan ide untuk soal no 3 ini?

ST: Untuk membuat soal no 3 ini saya mengganti **situasi koperasi menjadi situasi industri**.

P: Mengapa diganti situasi industri ?

ST: Karena di desa ini banyak industri rokok rumahan.

Dengan kata kunci “*mengganti situasinya*” berarti ST telah menggunakan teknik inovasi **mengganti konteksnya** untuk menghasilkan soal kontekstual baru.

4. Industri rokok rumahan memiliki beberapa mesin jenis A dan B. Jika dalam sehari 2 mesin jenis A dan 6 mesin jenis B dapat menghasilkan 22.000 batang rokok, dan 1 mesin jenis A dan 6 mesin jenis B dapat menghasilkan 20.000 batang rokok. Jika tiap batang rokok yg dihasilkan oleh mesin A memberi keuntungan Rp100 dan oleh mesin B Rp 150. Berapa keuntungan sehari yg dapat dihasilkan oleh mesin A dan mesin B?

P: Bagaimana bapak dapat membuat soal no 4 ini?

ST: Soal no 4 ini saya buat dari soal no 3 dengan **informasi tambahan** yaitu keuntungan tiap batang rokok lalu ditanyakan berapa keuntungannya. Dengan demikian menghasilkan soal kontekstual yang baru yang berbeda dengan soal sebelumnya.

Dengan kata kunci “*menambahkan informasi baru*” berarti ES telah menggunakan teknik inovasi menambahkan informasi baru untuk menghasilkan soal kontekstual baru.

P: Misalkan bapak dipaksa lagi untuk membuat soal yang baru, yang berbeda dari 4 soal yang telah bapak buat.

ST: Bisa saja pak. Tapi soalnya itu-itu aja.

P: Apa maksudnya itu-itu aja?

ST: Ya paling saya ganti lagi bilangannya, atau saya ganti konteksnya, atau saya tambah informasinya.

P: Apakah tidak ada cara lain lagi?

ST: belum ada dalam pikiran saya pak.

Ini menunjukkan bahwa teknik inovasi yang dimiliki ST hanya (a) teknik inovasi mengganti bilangannya, (b) teknik inovasi mengganti konteksnya, dan (c) teknik inovasi menambah informasi.

KESIMPULAN, SARAN DAN REKOMENDASI

Dari hasil penelitian yang telah diuraikan di atas dapat disimpulkan bahwa (1) dalam menghasilkan masalah matematika kontekstual baru guru matematika dengan kualifikasi S-1 pendidikan matematika menggunakan (a) teknik inovasi mengganti bilangannya, (b) teknik inovasi mengganti konteksnya (c) teknik inovasi modifikasi pertanyaannya, dan (d) teknik inovasi menambah informasi. (2) dalam menghasilkan masalah matematika kontekstual baru guru matematika dengan kualifikasi S-1 matematika menggunakan (a) teknik inovasi mengganti bilangannya, (b) teknik inovasi mengganti konteksnya, dan (c) teknik inovasi menambah informasi.

Dari kesimpulan di atas disarankan (1) guru sebaiknya tahu tentang teknik-teknik inovasi dalam membuat soal kontekstual matematika. (2) teknik-teknik inovasi yang telah dilakukan oleh guru tersebut sebaiknya dilatihkan kepada guru yang lain.

Dari hasil penelitian ini direkomendasikan untuk peneliti, agar dapat meneliti juga kualitas soal kontekstual yang dihasilkan oleh guru.

DAFTAR PUSTAKA

Board of Studies NSW. 2003. *Mathematics in Indigenous Contexts*. Report on the Project. Tersedia di www.boardofstudies.nsw.edu.au. Diakses 2 Februari 2011.

Brown, S.I. & Walter, M.I; 1993. *Problem Posing in Mathematics Education, Problem Posing (Reflections and Applications)*, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Hillsdale, New Jersey.

- Gravemeijer, K.P.E. 1994. *Developing realistic mathematics education*. Utrecht:CD-β Press / Freudenthal Institute
- Joel, P. Kuehner & Elizabeth, K. Mauch. 2006. Engineering applications for demonstrating mathematical problem-solving methods at the secondary education level. *Teaching Mathematics and Its Applications*. Vol.25(4). pp. 189-195.
- Johnson, E.B. 2002. *Contextual Teaching And Learning, what it is and why it's here to stay*. Thousand Oaks: Corwin Press, Inc.
- Peraturan Menteri no 16 tahun 2007 Tentang Standar Kualifikasi Akademik Dan Kompetensi Guru http://www.setjen.depdiknas.go.id/prodhukum/dokumen/5212007134511Permen_162007.pdf/2008/01/10/. Diakses 2 Pebruari 2011
- VISTRO-YU, C.P. 2009. *Using Innovation Techniques to Generate 'New' Problems*. Dalam Kaur, B. Yeap, B. Kapur, M. (eds) *MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING Yearbook 2009*, Singapore: World Scientific Publishing Co.
- Widodo, Suryo. 2009. Kemampuan Guru Matematika Dalam Membuat Soal Kontekstual. (hal 228-235) dalam Susanto HA. Dkk (eds). *Prosiding Seminar Nasional Matematika Dan Pendidikan Matematika Tahun 2009*. Surabaya: University Press.
- Widodo, Suryo. 2010. *Pembelajaran Matematika yang Mendukung Kreativitas dan Berpikir Kreatif*. Jurnal Pendidikan Matematika. Vol. 1 No.1 Januari 2010 Hal 43 – 53. Malang: UMM
- Wingard-Nelson, Rebecca. 2005. *Word problems made easy*. USA: Enslow Publishers, Inc.

ANALISIS DATA UJIAN NASIONAL MATEMATIKA BERDASARKAN PENSKORAN MODEL *RASCH* DAN MODEL *PARTIAL CREDIT*

Awal Isgiyanto

Jurusan Matematika Universitas Bengkulu

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk menemukan: (1) atribut-atribut yang mendasari butir-butir soal Ujian Nasional Matematika, (2) ketuntasan atribut yang mendasari butir-butir soal Ujian Nasional Matematika; (3) kemampuan peserta dalam matematika pada model *Rasch* dan model *Partial Credit*; dan (4) nilai informasi butir dan informasi tes pada Ujian Nasional Matematika. Penelitian ini merupakan penelitian deskriptif eksploratif, yang menerapkan diagnosis *post-hoc*. Diagnosis ini digambarkan sebagai pendekatan *retrofitting* melalui analisis butir soal dan respons butir pada Ujian Nasional Matematika untuk menemukan informasi pada kategori isi, proses, dan keterampilan. Subjek penelitian adalah seluruh peserta Ujian Nasional Matematika SMP di wilayah Kabupaten Bantul, Daerah Istimewa Yogyakarta Tahun Pelajaran 2007/2008. Objek yang dipilih adalah butir soal, dan respons butir peserta Ujian Nasional Matematika yang diskor model *Rasch* dan model *Partial Credit*. Hasil penelitian menunjukkan bahwa: (1) atribut-atribut yang mendasari butir soal matematika ada 47 atribut, meliputi 4 atribut isi, 36 atribut proses, dan 7 atribut keterampilan, (2) ketuntasan atribut kategori isi, proses, dan keterampilan pada penskoran model *Partial Credit* lebih tinggi dan lebih akurat dibandingkan dengan ketuntasan atribut pada penskoran model *Rasch*, (3) rerata kemampuan peserta dalam matematika pada model *Partial Credit* lebih tinggi dibandingkan dengan rerata kemampuan peserta pada model *Rasch*, dan (4) informasi butir dan informasi tes pada penskoran model *Partial Credit* lebih baik dibandingkan dengan informasi butir dan informasi tes pada model *Rasch*.

Kata kunci: matematika, *retrofitting*, model *Rasch*, model *Partial Credit*

PENDAHULUAN

Latar Belakang

Pengukuran hasil belajar yang dilakukan oleh pemerintah diwujudkan dalam bentuk Ujian Nasional. Ujian Nasional (UN) adalah kegiatan pengukuran pencapaian kompetensi peserta didik pada beberapa mata pelajaran tertentu dalam kelompok mata pelajaran ilmu pengetahuan dan teknologi dalam rangka menilai pencapaian Standar Nasional Pendidikan. (Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Republik Indonesia Nomor 20 Tahun 2007, 2007a). Penyelenggara UN mempunyai harapan agar semua pihak yang terkait dengan UN terdorong bekerja keras untuk mencapai hasil UN yang sebaik-baiknya.

Ujian Nasional Matematika berupa tes tertulis dengan bentuk soal pilihan ganda. Soal pilihan ganda dapat diskor dengan mudah, cepat, dan memiliki objektivitas yang tinggi, mengukur berbagai tingkatan kognitif, serta dapat mencakup ruang lingkup materi yang luas (Panduan Penulisan Soal Pilihan Ganda, 2007b; Lampiran Keputusan Badan Standar Nasional Pendidikan Nomor 984/BNSP/XI/2007, 2007c). Tes tertulis dengan bentuk soal pilihan ganda banyak digunakan pada ujian dengan peserta tes yang banyak.

Butir soal UN Matematika berupa tes obyektif pilihan ganda dengan empat *option* (pilihan). Model penskoran dikotomis diterapkan pada UN Matematika. Data respons butir dikotomis mempunyai dua kategori skor jawaban, yaitu jawaban benar atau tuntas (skor 1) dan jawaban salah atau tidak tuntas (skor 0) (Bond & Fox, 2007: 49; DeMars, 2010: 9). Model

penskoran dikotomus disebut model logistik dikotomus (Hambleton, Swaminathan, & Rogers, 1991: 12). Model-model logistik dikotomus dinamai sesuai dengan jumlah parameter yang dilibatkan dalam model. Model logistik satu parameter (*1-PL-model*) adalah model yang melibatkan parameter tingkat kesulitan butir. Model logistik satu parameter disebut *Rasch Model (RM)*. Model matematika pada *1-PL-model* dan *RM* adalah *equivalent* (De Ayala, 2009: 19). Model logistik dua parameter (*2-PL-model*) adalah model yang melibatkan parameter tingkat kesulitan butir dan parameter daya beda. Model logistik tiga parameter (*3-PL-model*) adalah model yang melibatkan parameter tingkat kesulitan butir, daya beda dan parameter tebakan semu (*pseudoguessing*) (Bond & Fox, 2007: 265; Crocker & Algina, 1986: 352-354; DeMars, 2010: 9-16). Model penskoran dikotomus tersebut tidak dapat digunakan untuk membedakan kesalahan yang dilakukan oleh peserta didik, karena semua *option* yang salah diberi skor 0. Kenyataannya, kesalahan yang terjadi pada *option* yang salah dapat berasal dari penyebab kesalahan atribut yang berbeda, oleh karena itu data respons butir pada UN Matematika perlu diskor politomus.

Penyelesaian soal didasarkan pada atribut, yaitu prosedur, kompetensi, proses, atau keterampilan yang harus dimiliki peserta didik untuk menyelesaikan soal tes (Gierl, 2007a; Gierl, 2007b; Gierl, Yinggan Zheng, & Ying Cui, 2008; Robert & Gierl, 2010). Atribut dalam kategori isi (*content*) adalah materi yang digunakan di dalam kerangka tes. Atribut kategori proses (*process*) merupakan keterampilan umum. Kategori proses ini mengungkap keterampilan peserta didik yang diharapkan setelah mengikuti pelajaran dengan materi yang diberikan pada kategori isi. Atribut pada kategori keterampilan (*skill*) merupakan keterampilan proses yang spesifik.

Model penskoran politomus adalah model respons butir yang mempunyai kemungkinan jawaban lebih dari dua kategori (Wells, Hambleton, & Urip Purwono, 2008c: 1). Model penskoran meliputi *Graded Response Model (GRM)* dari Samejima, *Nominal Model (NM)* dari Bock, *Partial Credit Model (PCM)* dari Masters, *Generalized Partial Credit Model (GPCM)* dari Muraki, dan *Rating Scale Model (RSM)* dari Andrich (DeMars, 2010: 22; Thissen, Nelson, Rosa, et al., 2001: 143-149; Wells, Hambleton, & Urip Purwono, 2008c: 2-10; Hessen, 2009: 5-17). Model penskoran *PCM* merupakan pengembangan dari model penskoran *RM* (De Ayala, 2009: 209). Model penskoran politomus tersebut diduga dapat memberikan solusi terhadap beberapa keterbatasan model penskoran dikotomus, terkait dengan akurasi pengukuran, ketuntasan atribut yang mendasari butir soal, dan dalam penemuan informasi diagnostik yang belum didapat dari model penskoran dikotomus.

Rumusan Masalah

Masalah dalam penelitian ini dirumuskan sebagai berikut.

1. Apa atribut-atribut yang mendasari butir-butir soal UN Matematika?
2. Bagaimana ketuntasan atribut yang mendasari butir-butir soal UN Matematika?
3. Bagaimana fungsi informasi butir dan fungsi informasi tes pada UN Matematika?
4. Bagaimana pemetaan hasil analisis menggunakan data yang diskor model *Rasch* dan model *Partial Credit*?

Tujuan

Tujuan penelitian ini untuk menemukan:

1. atribut-atribut yang mendasari butir-butir soal UN Matematika,
2. ketuntasan atribut yang mendasari butir-butir soal UN Matematika,
3. fungsi informasi butir dan fungsi informasi tes pada UN Matematika?
4. pemetaan hasil analisis menggunakan data yang diskor model *Rasch* dan model *Partial Credit* pada UN Matematika.

Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini diharapkan dapat memberikan informasi tentang atribut yang mendasari butir-butir soal UN Matematika, ketuntasan atribut yang mendasari butir-butir soal UN

Matematika, fungsi informasi butir dan fungsi informasi tes pada UN Matematika, dan pemetaan hasil analisis menggunakan penskoran model *Rasch* dan penskoran model *Partial Credit*.

METODE PENELITIAN

Jenis dan Rancangan Penelitian

Jenis penelitian ini adalah penelitian deskriptif eksploratif terhadap data set butir soal dan respons butir peserta UN Matematika. Penelitian ini merupakan diagnosis *post-hoc* yang digambarkan sebagai pendekatan *retrofitting* (Gierl, 2007a). Pendekatan *retrofitting* dilakukan melalui analisis butir soal dan data respons butir pada UN Matematika.

Subjek dan Objek Penelitian

Subjek penelitian adalah peserta UN Matematika SMP Tahun Pelajaran 2007/2008 di wilayah Kabupaten Bantul, Daerah Istimewa Yogyakarta. Objek yang dipilih adalah butir soal objektif pilihan ganda, dan respons butir peserta UN yang diskor model *Rasch* dan diskor model *Partial Credit* yang dikembangkan.

Teknik Pengumpulan Data

Data berupa respons butir peserta ujian dan butir soal pada UN Matematika SMP Tahun Pelajaran 2007/2008 dikumpulkan dengan teknik dokumentasi. Data diambil dari Dinas Pendidikan dan Olahraga Daerah Istimewa Yogyakarta. Data yang dipilih butir soal UN sudah standar sehingga bias yang terjadi sudah minimal. Standarisasi butir tes UN sudah dikalibrasi sehingga dapat diperbandingkan antar seri dan antar paket dari tahun ke tahun. Butir soal UN Matematika merupakan salah satu mata pelajaran yang diujikan dalam UN, dan mata pelajaran matematika memerlukan peningkatan kualitas proses pembelajaran.

Teknik Analisis Data

1. Identifikasi Atribut

Identifikasi atribut melalui pendekatan *retrofitting* yang dilakukan dengan cara mengevaluasi butir soal UN. Pendekatan *retrofitting* didasarkan pada atribut yang muncul di antara butir soal UN Matematika. Atribut yang mendasari butir soal dikategorikan menjadi atribut kategori isi (I), atribut kategori proses (P), dan atribut kategori keterampilan (K). Atribut-atribut tersebut dapat dipandang sebagai variabel kognitif. Draft hasil identifikasi atribut divalidasi oleh beberapa guru matematika SMP dan tiga pakar pendidikan matematika.

2. Ketuntasan dan Ketidaktuntasan Atribut

Untuk mendapatkan informasi tentang ketuntasan atribut dengan mengubah respons butir yang teramati menjadi peluang ketuntasan atribut.

3. Model Penskoran Respons Butir

Draft rubrik penskoran disusun melalui pendekatan *retrofitting* didasarkan pada atribut yang muncul di antara butir soal, yang dilakukan dengan cara mengevaluasi setiap *option* butir soal UN Matematika. Hasil wawancara terhadap peserta didik, dan respons peserta didik dalam menyelesaikan butir soal sebagai masukan dalam penyusunan draft model penskoran. Draft model penskoran ditelaah dan divalidasi oleh beberapa guru matematika SMP dan tiga pakar pendidikan matematika.

4. Analisis Data Berdasarkan Penskoran Model *Rasch* dan Model *Partial Credit*

Untuk mendapatkan informasi tentang penguasaan atribut dengan mengubah respons butir yang teramati menjadi peluang penguasaan atau ketuntasan atribut. Estimasi kemampuan peserta dilakukan terhadap data model *Rasch* dan data model *Partial Credit*. Estimasi dilakukan menggunakan *R Programming version 2.9.0 (2009-04-17) packages irtoys, eRm (extended Rasch model)* dan *ltm (latent traits model)*, *SPSS*, dan *EXCEL*

a. Analisis Data Berdasarkan Penskoran Model *Rasch*

Analisis data dikotomus difokuskan pada *I-PL model* atau *RM*. Analisis *RM* untuk menentukan: *item information fuction (IIF)*, *test information fuction (TIF)*, estimasi parameter kemampuan peserta.

b. **Analisis Data Berdasarkan Penskoran Model *Partial Credit***

Analisis data yang diskor politomus difokuskan pada model *Partial Credit* yang dikembangkan. Analisis pada model *Partial Credit* untuk menentukan: *item information fuction (IIF)*, *test information fuction (TIF)*, dan estimasi parameter kemampuan peserta didik yang ditunjukkan oleh nilai parameter *theta*.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Penelitian ini mengambil subjek peserta Ujian Nasional Matematika SMP Tahun Pelajaran 2007/2008 di wilayah Kabupaten Bantul, Daerah Istimewa Yogyakarta. Objek yang dipilih adalah butir soal objektif pilihan ganda dan respons butir peserta UN Matematika. Data penelitian berupa butir soal dan respons butir peserta UN Matematika yang dikumpulkan dengan teknik dokumentasi. Data penelitian diambil dari Dinas Pendidikan dan Olahraga Daerah Istimewa Yogyakarta. Populasi penelitian ini adalah peserta UN Matematika meliputi 86 sekolah atau 9464 peserta di wilayah Kabupaten Bantul. Sampel diambil secara *simple area random sampling* diperoleh 12 sekolah (13,95%) atau 1016 siswa (10,74%). Berdasarkan sampel yang diperoleh untuk selanjutnya dilakukan penskoran model *Rasch* dan model *Partial Credit*.

1. Atribut yang Mendasari Butir Soal Ujian Nasional Matematika

Atribut yang mendasari butir soal UN dikategorikan menjadi atribut kategori isi (I), proses (P), dan keterampilan (K). Identifikasi atribut kategori isi (*content*) dibagi menjadi sub materi (a) bilangan, (b) aljabar, (c) geometri dan pengukuran, dan (d) statistika dan peluang. Sebaran hasil identifikasi atribut yang mendasari butir soal UN Matematika Tahun Pelajaran 2007/2008 disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1
Distribusi Atribut yang Mendasari Butir Soal Ujian Nasional
Matematika SMP Tahun Pelajaran 2007/2008

| | Bilangan | Aljabar | Geometri | Statistika | Matematika |
|-------------------|----------|---------|----------|------------|------------|
| Atribut Isi | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 |
| Atribut Proses | 6 | 17 | 20 | 6 | 36 |
| Atr. Keterampilan | 0 | 4 | 4 | 1 | 7 |
| Jumlah | 7 | 23 | 27 | 10 | 47 |

2. Ketuntasan Atribut

Untuk mendapatkan informasi tentang ketuntasan atribut dilakukan dengan mengubah respons butir yang teramati menjadi ketuntasan atribut (Gierl, 2007b). Informasi ketuntasan atribut diperoleh menurut kategori isi, proses, dan keterampilan.

a. Ketuntasan Atribut pada Model *Rasch*

1) Ketuntasan Atribut Kategori Isi pada Model *Rasch*

Ketuntasan atribut kategori isi pada butir soal matematika mempunyai rerata (0,5472). Ketuntasan atribut tertinggi dicapai pada bilangan (0,6973), diikuti aljabar (0,6040), statistika dan peluang (0,5383), dan yang terendah pada geometri dan pengukuran (0,4871). Hasil penelitian tersebut mendukung hasil penelitian yang dilakukan Tatsuoka, Corter, & Tatsuoka (2004) bahwa siswa-siswa Amerika lemah dalam hal geometri.

2) Ketuntasan Atribut Proses pada Model *Rasch*

Ketuntasan atribut kategori proses pada matematika mempunyai rerata (0,5869). Ketuntasan atribut tertinggi dicapai pada bilangan (0,7055), diikuti aljabar

(0,6), geometri dan pengukuran (0,5342), dan terendah statistika dan peluang (0,53).

3). Ketuntasan Atribut Kategori Keterampilan pada Model *Rasch*

Ketuntasan atribut kategori keterampilan mempunyai rerata (0,6548).

Ketuntasan atribut tertinggi dicapai pada aljabar (0,7044), diikuti geometri dan pengukuran (0,5641), dan yang terendah pada statistika dan peluang (0,5448).

b. Ketuntasan Atribut pada Model *Partial Credit*

1). Ketuntasan Atribut Isi pada Model *Partial Credit*

Ketuntasan atribut isi pada matematika mempunyai rerata (0,6923).

Ketuntasan atribut tertinggi dicapai aljabar (0,7339), diikuti geometri dan pengukuran (0,7066), statistika dan peluang (0,7217), dan yang terendah pada butir soal bilangan (0,6985). Hasil ini mendukung penelitian yang dilakukan oleh Yi-Hsin Chen, Gorin, Thompson, et al. (2008) bahwa siswa Cina Taipei tidak pernah tuntas dalam *number sense*.

2). Ketuntasan Atribut Proses pada Model *Partial Credit*

Ketuntasan atribut isi pada matematika mempunyai rerata (0,7508).

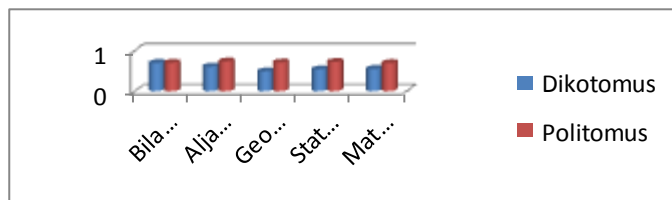
Ketuntasan atribut yang tertinggi dicapai pada aljabar (0,7723), diikuti bilangan (0,7613), geometri dan pengukuran (0,7604), dan yang terendah pada statistika dan peluang (0,7161).

3). Ketuntasan Atribut Kategori Keterampilan pada Model *Partial Credit*

Ketuntasan atribut pada matematika mempunyai rerata (0,8104). Ketuntasan

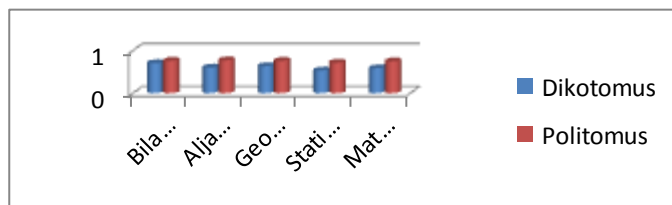
atribut yang tertinggi dicapai pada aljabar (0,8650), statistika dan peluang (0,8273), dan yang terendah pada geometri dan pengukuran (0,7102).

Untuk melihat gambaran ketuntasan atribut kategori isi secara bersama-sama disajikan pada Gambar 1, Gambar 2, dan Gambar 3.



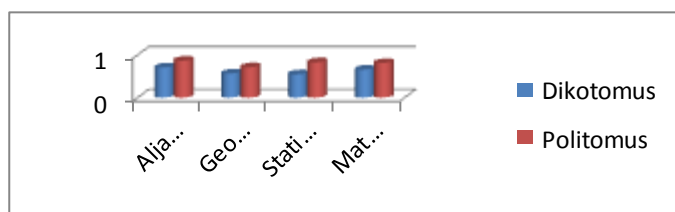
Gambar 1

Histogram Ketuntasan Atribut Kategori Isi



Gambar 2

Histogram Ketuntasan Atribut Kategori Proses



Gambar 3
Histogram Ketuntasan Atribut Kategori Keterampilan

Jika pada UN Matematika diskor politomus, maka peluang rerata skor yang diperoleh peserta lebih tinggi dibandingkan jika diskor dikotomus. Hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa baik pada sub materi bilangan, aljabar, geometri dan pengukuran, statistika dan peluang, dan matematika yang diskor politomus lebih tinggi dibandingkan dengan yang diskor dikotomus.

3. Fungsi Informasi Butir dan Fungsi Informasi Tes

Deskripsi hasil analisis disajikan pada Tabel 2. Hasil tersebut menunjukkan bahwa data UN Matematika pada *PCM* dapat memberikan informasi tes yang lebih baik apabila dibandingkan dengan informasi tes yang dihasilkan *RM*. Demikian juga hasil analisis *PCM* dapat memberikan hasil yang lebih akurat dibandingkan *RM*, Hasil penelitian ini sejalan dengan penelitian Wasis (2009: 50) bahwa semakin tinggi kurva fungsi informasi suatu butir atau tes, maka butir atau tes tersebut semakin akurat dalam mengestimasi kemampuan peserta.

Tabel 2
Fungsi Informasi Tes pada Model *Rasch* dan Model *Partial Credit*

| Materi | <i>RM</i> | | <i>PCM</i> | |
|------------|-----------|------------------|------------|------------------|
| | Total | <i>Std.Error</i> | Total | <i>Std.Error</i> |
| Bilangan | 6,91 | 0,38042 | 7,80 | 0,35806 |
| Aljabar | 17,29 | 0,24049 | 19,55 | 0,22617 |
| Geometri | 18,44 | 0,23287 | 19,30 | 0,22763 |
| Statistika | 3,46 | 0,53760 | 3,43 | 0,53995 |
| Matematika | 46,10 | 0,14728 | 50,09 | 0,14129 |

4. Estimasi Kemampuan Siswa pada Model *Rasch* (*RM*) dan Model *Partial Credit* (*PCM*)

a. Estimasi Kemampuan Peserta pada Model *Rasch*

Deskripsi kemampuan peserta untuk butir soal bilangan, aljabar, geometri dan pengukuran, statistika dan peluang, dan matematika pada *RM* disajikan pada Tabel 3.

Tabel 3

Estimasi Kemampuan Peserta pada Butir Soal Bilangan, Aljabar, Geometri, Statistika, dan Matematika pada Model *Rasch*

| | Rerata | Median | Simpangan Baku | <i>Std,Error</i> |
|------------|----------|----------|----------------|------------------|
| Bilangan | 0,40929 | 0,72329 | 1,02813 | 0,0420 |
| Aljabar | 0,11580 | 0,19543 | 1,06632 | 0,0428 |
| Geometri | -0,42052 | -0,56269 | 1,00634 | 0,0405 |
| Statistika | -0,06200 | -0,69751 | 0,69566 | 0,0324 |
| Matematika | -0,12623 | -0,21655 | 0,84313 | 0,0338 |

b. Estimasi Kemampuan Peserta pada Model *Partial Credit* (*PCM*)

Deskripsi kemampuan peserta untuk butir soal bilangan, aljabar, geometri, statistika, dan matematika pada *PCM* disajikan pada Tabel 4.

Tabel 4
Estimasi Kemampuan Peserta pada Butir Soal Bilangan, Aljabar, Geometri, Statistika, dan
Matematika pada Model *Partial Credit*

| | Rerata | Median | Simpangan Baku | <i>Std,Error</i> |
|------------|----------|----------|----------------|------------------|
| Bilangan | -0,06100 | -0,16298 | 0,49308 | 0,0198 |
| Aljabar | 0,28985 | 0,27174 | 0,43059 | 0,0173 |
| Geometri | 0,23777 | 0,18028 | 0,45521 | 0,0183 |
| Statistika | 0,29888 | 0,21774 | 0,58764 | 0,0236 |
| Matematika | 0,23910 | 0,18807 | 0,34016 | 0,0136 |

KESIMPULAN, SARAN DAN REKOMENDASI

Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis data dan pembahasan diperoleh simpulan berikut.

1. Atribut yang mendasari butir soal matematika ada 47 atribut, meliputi 4 atribut isi, 36 atribut proses, dan 7 atribut keterampilan
2. Ketuntasan atribut kategori isi, proses, dan keterampilan yang mendasari butir soal pada penskoran model *Partial Credit* lebih tinggi dan lebih akurat dibandingkan dengan ketuntasan atribut pada penskoran model *Rasch*
3. Penskoran model *Partial Credit* memberikan informasi tes yang lebih baik dibandingkan dengan informasi tes yang diberikan model *Rasch*.
4. Rerata kemampuan peserta dalam matematika pada model *Partial Credit* lebih tinggi dibandingkan dengan rerata kemampuan peserta pada model *Rasch*. Informasi tes yang dihasilkan model *Partial Credit* lebih baik dibandingkan dengan informasi tes yang dihasilkan model *Rasch*.

Saran dan Rekomendasi

1. Kepada praktisi pendidikan matematika

Informasi tentang atribut-atribut yang mendasari butir soal, ketuntasan atribut, dan pemetaan kemampuan peserta disarankan agar dapat dipertimbangkan di dalam manajemen peningkatan kualitas proses pembelajaran matematika.

2. Kepada pengambil keputusan
 - a. Penskoran model *Partial Credit* dapat menjadi solusi dari beberapa kelemahan penskoran model *Rasch*. Oleh karena itu pemangku kepentingan direkomendasikan agar penskoran pada tes objektif pilihan ganda pada matematika diarahkan pada penskoran model *Partial Credit*,
 - b. Penskoran politomus dapat menjadi solusi dari beberapa kelemahan penskoran dikotomus, oleh karena itu pada UN Matematika yang akan datang direkomendasikan untuk dikonstruksi dalam dua format, yaitu format tes objektif pilihan ganda yang disiapkan untuk diskor dikotomus, dan yang disiapkan untuk diskor politomus.
3. Kepada para peneliti

Pada penskoran *PCM* menghasilkan pengukuran yang lebih akurat dibandingkan dengan penskoran dikotomus *RM*, dan penskoran model politomus dapat memberikan solusi kelemahan penskoran model dikotomus. Para peneliti disarankan untuk melakukan penelitian yang diarahkan pada penskoran model politomus.

DAFTAR PUSTAKA

- Bond, T. G., & Fox, C. M. (2007). *Applying the rasch model: Fundamental measurement in the human sciences*. (2nd Ed.). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Crocker, L., & Algina, J. (1986). *Introduction to Classical and Modern Test Theory*. New York: CBS-College Publishing.
- De Ayala, R. J.. (2009). *The Theory and Practice of Item Response Theory*. New York: The Guilford Press.
- DeMars, C. (2010). *Item Response Theory*. New York: Oxford University Press, Inc.
- Depdiknas. (2007b). *Panduan Materi SMP dan MTs Ujian Nasional Tahun Pelajaran 2007/2008, Matematika*. Pusat Penilaian Pendidikan Balitbang Depdiknas.
- _____. (2007c). *Panduan Penulisan Soal Pilihan Ganda*. Jakarta: Pusat Penilaian Pendidikan Balitbang Depdiknas.
- _____. (2007d). *Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Republik Indonesia Nomor 20, Tahun 2007, tentang Standar Penilaian Pendidikan*.
- Gierl, M. J. (2007a). Making Diagnostic Inferences About Cognitive Attributes Using the Rule-Space Model and Attribute Hierarchy Method. *Journal of Educational Measurement*, 44(4), 325-340.
- _____. (6 February 2007). *Using the Attribute Hierarchy Method to Make Diagnostic Inferences about Examinees' Cognitive Skills*. Makalah disajikan dalam Association of Test Publishers Annual Meeting Palm Springs, CA.
- Gierl, M. J., Yinggan Zheng, & Ying Cui. (2008), Using the Attribute Hierarchy Method to Identify and Interpret Cognitive Skills that Produce Group Differences. *Journal of Educational Measurement*, 45 (1), 65-89.
- Hambleton, R. K., Swaminathan, H., & Rogers, H. J. (1991). *Fundamentals of Item Response Theory*, Newbury Park: Sage Publications.
- Hessen, D. J. (Juni, 2009). *Applying IRT using R*. Makalah disajikan dalam Pelatihan Aplikasi Program R dalam Bidang Psikometri dan Penilaian Pendidikan, di PPs Universitas Negeri Yogyakarta.
- Roberts, M. R., & Gierl, M. J. (2010). Developing Score Reports for Cognitive Diagnostic Assessment. *Educational Measurement: Issues and Practice*. 29 (3), 25-38.
- Tatsuoka, K., Corter, J.E., & Tatsuoka, C. (2004). Patterns of Diagnosed Mathematical Content and Process Skills in TIMSS-R A cross a Sample of 20 Countries. *American Educational Research Journal*, 41(4), 901-926.
- Thissen, D., Nelson, L., Rosa, K., et al. (2001). Item Response Theory for Items Scored in More Than Two Categories. Dalam D. Thissen & H. Wainer. *Test Scoring* (pp. 141-184). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

- Wasis. (2009). *Penskoran Model Partial Credit Pada Item Multiple True-False Bidang Fisika*. Disertasi doktor, tidak diterbitkan. Yogyakarta: Universitas Negeri Yogyakarta.
- Wells, C. S., Hambleton, R.K., & Urip Purwono. (18-24 Juni 2008a). *Assessing the Fix of IRT Models to Item Response Data*. Makalah disajikan dalam Pelatihan Asesmen Pendidikan dan Psikologi (Psikometri), di PPs Universitas Negeri Yogyakarta.
- Yi-Hsin Chen, Gorin, J.D., Thompson, M.S., et al. (2008). An alternative examination of Chinese Taipei mathematics achievement: Application of the rule-space method TIMSS 1999 data. *IERI Monograph Series, Issues and Methodologies in Large-Scale Assessments*. 1, 23-49.

**MENGESTIMASI KEMAMPUAN PESERTA TES URAIAN MATEMATIKA
DENGAN PENDEKATAN TEORI RESPONS BUTIR
DENGAN PENSKORAN POLITOMUS
DENGAN *GENERALIZED PARTIAL CREDIT MODEL***

Heri Retnawati

*Jurusan Pendidikan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Yogyakarta
Email: retnawati_heriuny@yahoo.co.id*

Abstrak

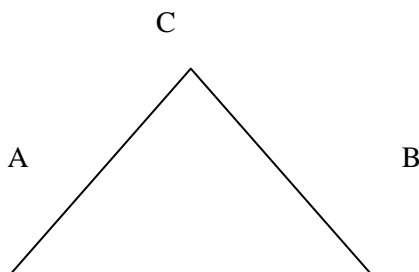
Dalam pelaksanaan tes uraian, penskoran biasanya dilakukan secara parsial berdasarkan langkah-langkah yang harus ditempuh untuk menjawab benar suatu butir soal. Penskoran dilakukan perlangkah dan skor perbutir diperoleh peserta diperoleh dengan menjumlah skor siswa tiap langkah, dan kemampuan diestimasi dengan skor mentah. Model penskoran seperti ini belum tentu tepat, karena tingkat kesulitan tiap langkah tidak diperhitungkan. Pendekatan alternatif yang dapat digunakan yakni pendekatan teori respons butir untuk penskoran politomus, salah satunya dengan *generalized partial credit model* (GPCM). Pada artikel ini disajikan penskoran butir pada GPCM, model matematikanya, estimasi parameternya, dan estimasi kemampuan peserta disertai kasus dan pemanfaatan *software* Parscale dari SSi.

Kata kunci: teori respons butir, *generalized partial credit model*

PENDAHULUAN

Ada berbagai bentuk tes yang biasa digunakan dalam pendidikan ataupun psikologi (Gronlund & Linn, 1990). Demikian pula bentuk tes dalam pendidikan matematika. Berbagai bentuk tes yang sering digunakan dalam pendidikan matematika diantaranya bentuk objektif dan uraian. Penskoran bentuk objektif biasanya dengan model dikotomi, betul diskor 1 dan salah diskor 0. Untuk uraian, penskoran dilakukan dengan melihat tahap-tahap peserta tes dalam menyelesaikan soal.

Sebagai contoh butir soal berikut.



Sebuah kolam berbentuk segitiga samakaki seperti yang digambarkan pada gambar di samping. Jika panjang AB 12 m, dan panjang AC 10 m. Jika biaya untuk membuat kolam per meter Rp. 150.000,-, berapakah biaya total untuk membuat kolam tersebut?

Agar penilaian menjadi lebih objektif, penyusun instrumen perlu membuat suatu rubric pedoman penskoran. Sebagai contoh rubriknya disajikan pada Tabel 1 sebagai berikut.

| Langkah | Skor |
|----------------------------------|------|
| Menghitung tinggi segitiga | 1 |
| Menghitung luas segitiga | 1 |
| Menghitung biaya pembuatan kolam | 1 |
| Total | 3 |

Pada pendekatan teori tes klasik, perhitungan skor dilakukan dengan menjumlah skor keseluruhan yang diperoleh siswa. Pendekatan ini belum tentu tepat, karena tingkat kesulitan tiap langkah tidak diperhitungkan. Pendekatan alternatif yang dapat digunakan yakni pendekatan teori respons butir untuk penskoran politomus, salah satunya dengan *generalized partial credit model* (GPCM) yang merupakan perluasan dari *Partial Credit Model* (PCM) (Muraki, 1999). Pada GPCM, tingkat kesulitan tiap langkah diperhitungkan untuk mengestimasi kemampuan peserta. Penskoran tidak dilakukan secara langsung, namun melalui menggunakan metode tertentu setelah estimasi parameter butir dilakukan. Pada artikel ini disajikan penskoran butir pada GPCM, model matematikanya, estimasi parameternya, dan estimasi kemampuan peserta disertai kasus dan pemanfaatan *software* Parscale dari SSI.

PEMBAHASAN

Penskoran dengan menggunakan skor menjawab benar pada jawaban siswa dengan model politomus tidak sepenuhnya tepat. Hal ini disebabkan karena tingkat kesukaran tiap langkah tidak diperhitungkan. Selain itu, peluang menjawab benar seorang siswa berdasarkan respons tertentu tidak dapat diprediksikan (Keeves & Alagumalai, 1999). Terkait dengan hal tersebut, perlunya pendekatan lain, diantaranya menggunakan teori respons butir.

Pada awal perkembangan teori respons butir politomus, model yang lebih dikenal yakni perluasan dari model Rasch yang disebut dengan *Partial Credit Model* (PCM). PCM merupakan model penskoran politomus yang merupakan perluasan dari model Rasch pada data dikotomi. Asumsi pada PCM yakni setiap butir mempunyai daya beda yang sama. PCM mempunyai kemiripan dengan *Graded Response Model* (GRM) pada butir yang diskor dalam kategori berjenjang, namun indeks kesukaran dalam setiap langkah tidak perlu terurut, suatu langkah dapat lebih sukar dibandingkan langkah berikutnya.

Bentuk umum PCM menurut Muraki & Bock (1997:16) sebagai berikut.

$$P_{jk}(\theta) = \frac{\exp \sum_{v=0}^k (\theta - b_{jv})}{\sum_{h=0}^m \exp \sum_{v=0}^h (\theta - b_{jv})}, k=0,1,2,\dots,m \dots\dots\dots(1)$$

Dengan

$P_{jk}(\theta)$ = probabilitas peserta berkemampuan θ memperoleh skor kategori k pada butir j,

θ : kemampuan peserta,

m+1 : banyaknya kategori butir j,

b_{jk} : indeks kesukaran kategori k butir j

$$\sum_{h=0}^k (\theta - b_{jh}) \equiv 0 \quad \text{dan} \quad \sum_{h=0}^h (\theta - b_{jh}) \equiv \sum_{h=1}^h (\theta - b_{jh}) \dots\dots\dots(2)$$

Skor kategori pada PCM menunjukkan banyaknya langkah untuk menyelesaikan dengan benar butir tersebut. Skor kategori yang lebih tinggi menunjukkan kemampuan yang lebih besar daripada skor kategori yang lebih rendah. Pada PCM, jika suatu butir memiliki dua kategori, maka persamaan 2 menjadi persamaan model Rasch, seperti persamaan yang dinyatakan oleh Hambleton,

Swaminathan (1985), dan juga diperkuat oleh Hambleton, Swaminathan, dan Roger (1991). Sebagai akibat dari hal ini, PCM dapat diterapkan pada butir politomus dan dikotomus.

Pengembangan lebih lanjut penskoran politomus adalah *Generalized Partial Credit Model* (GPCM). GPCM menurut Muraki (1997) merupakan bentuk umum dari PCM, yang dinyatakan dalam bentuk matematis, yang disebut sebagai fungsi respons kategori butir sebagai berikut.

$$P_{jh}(\theta) = \frac{\exp \sum_{v=0}^h Z_{jr}(\theta)}{\sum_{e=0}^{m_j} \exp \left[\sum_{v=0}^e Z_{jr}(\theta) \right]}, k=0,1,2,\dots,m_j \dots\dots\dots(3)$$

dan

$$Z_{jh}(\theta) = Da_j(\theta - b_{jh}) = Da_j(\theta - b_j + d_h), b_{j0} = 0 \dots\dots\dots(4)$$

Dengan

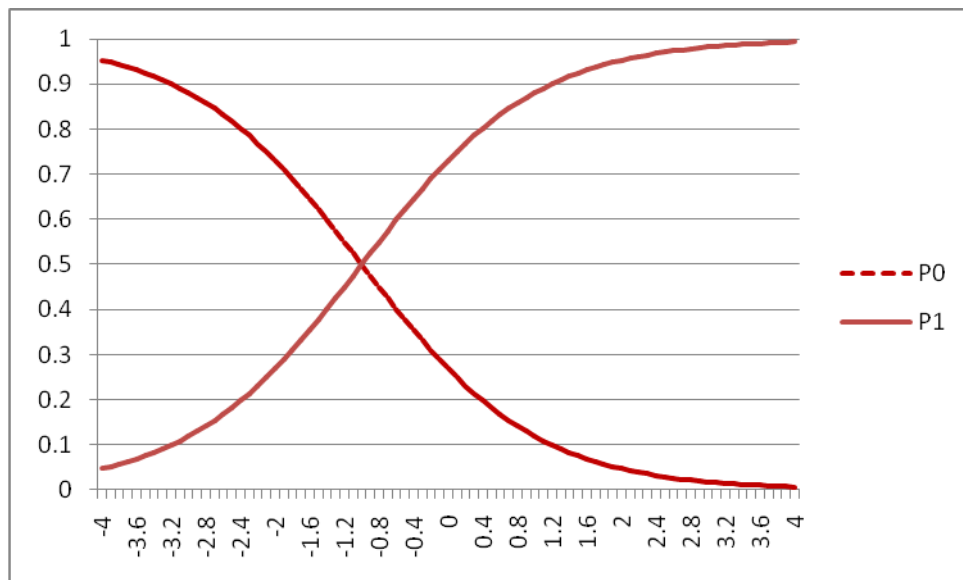
- $P_{jk}(\theta)$: probabilitas peserta berkemampuan θ memperoleh skor kategori k pada butir j,
- θ : kemampuan peserta,
- a_j : indeks daya beda butir j,
- b_{jh} : indeks kesukaran kategori k butir j,
- b_j : indeks kesukaran lokasi butir j (parameter butir lokasi)
- d_k : parameter kategori k,
- m_j+1 : banyaknya kategori butir j, dan
- D : faktor skala (D=1.7)

Parameter b_{jh} oleh Master dinamai dengan parameter tahap butir. Parameter ini merupakan titik potong antara kurva $P_{jk}(\theta)$ dengan $P_{j,k-1}(\theta)$. Kedua kurva hanya berpotongan di satu titik pada skala θ (van der Linden & Hambleton, 1997).

- Jika $\theta = b_{jk}$, maka $P_{jk}(\theta) = P_{j,k-1}(\theta)$
- Jika $\theta > b_{jk}$, maka $P_{jk}(\theta) > P_{j,k-1}(\theta)$
- Jika $\theta < b_{jk}$, maka $P_{jk}(\theta) < P_{j,k-1}(\theta)$, $K=1,2,3,\dots,m_j \dots\dots\dots(5)$

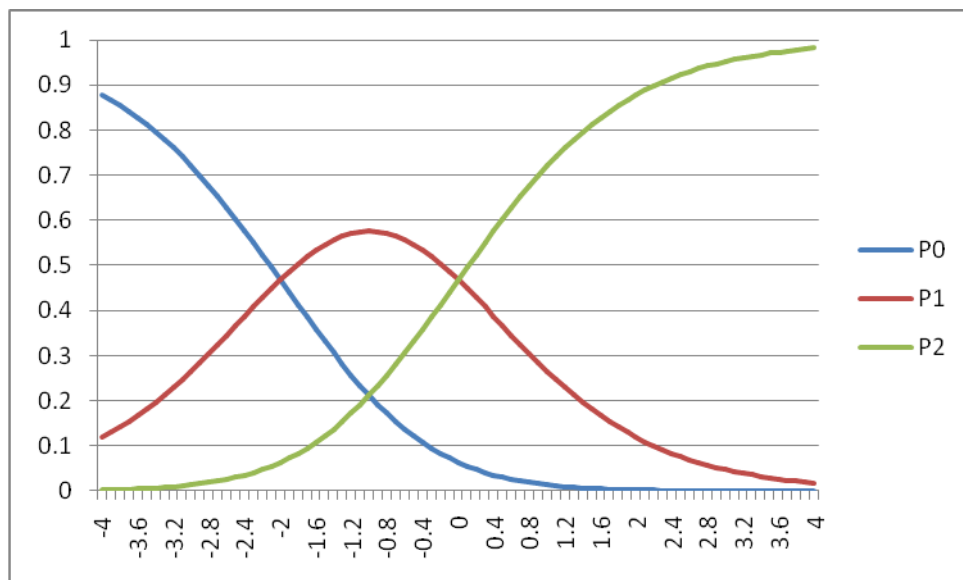
GPCM diformulasikan berdasarkan asumsi bahwa setiap probabilitas memilih kategori ke-k melampaui kategori ke-(k-1) dibangun oleh model dikotomi. P_{jk} merupakan probabilitas khusus memilih kategori ke-k dari $m_j + 1$ kategori. Hubungan probabilitas menjawab benar untuk tiap kemampuan θ disajikan dalam grafik *Categorical Response Function* (CRF) (du Toit, 2003). Grafik CRF pada 2, 3, 4, dan 5 kategori disajikan pada Gambar 1, 2, 3, dan 4.

Pada dikotomus model, ada 2 kategori yaitu 1 dan 0. Untuk daya pembeda (a) sebesar 1,0 dan tingkat kesulitan pada kategori menjawab 1 sebesar -1,0, disajikan pada Gambar 1.



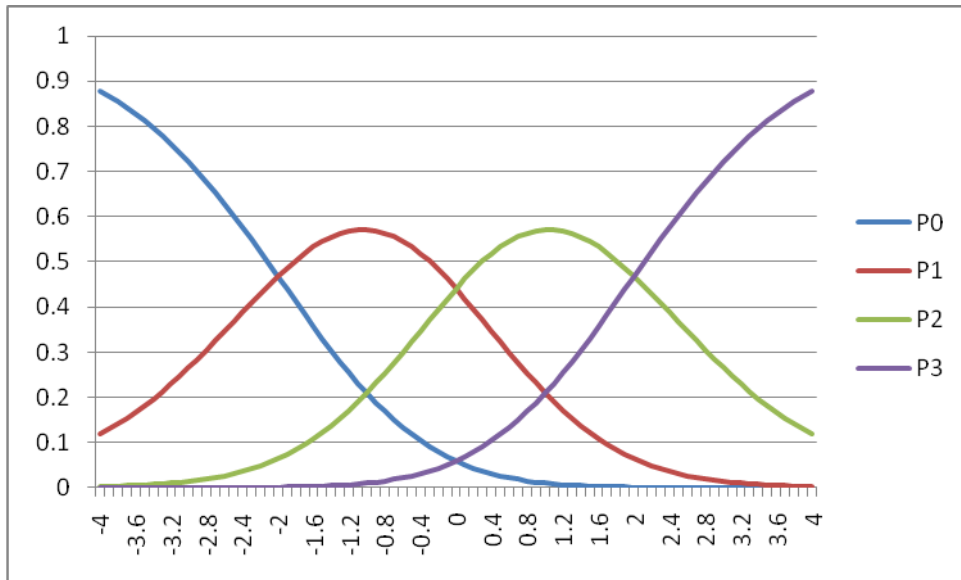
Gambar 1. Grafik CRF pada 2 kategori

Pada dikotomis model, ada 3 kategori yaitu 0, 1 dan 2. Untuk daya pembeda (a) sebesar 1,0 dan tingkat kesulitan pada kategori menjawab 1 sebesar -2,0 dan 0,0, disajikan pada Gambar 2.



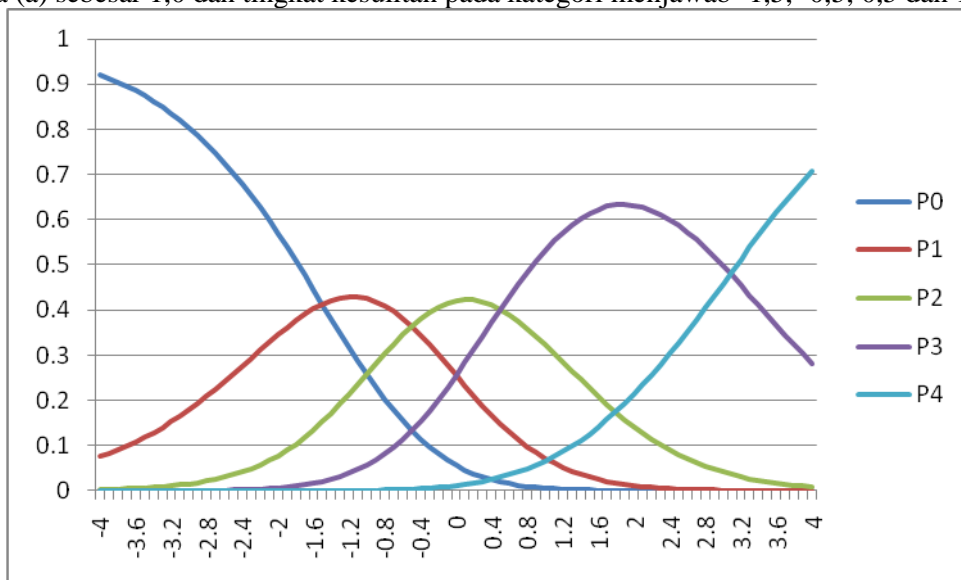
Gambar 2. Grafik CRF pada 3 kategori

Pada Gambar 3 disajikan model politomis dengan 4 kategori yaitu 0,1,2 dan 3. Untuk daya pembeda (a) sebesar 1,0 dan tingkat kesulitan pada kategori menjawab -2,0, 0,0 dan 2,0.



Gambar 3. Grafik CRF pada 4 kategori

Pada Gambar 4 disajikan model politomus dengan 4 kategori yaitu 0,1,2 dan 3. Untuk daya pembeda (a) sebesar 1,0 dan tingkat kesulitan pada kategori menjawab -1,5, -0,5, 0,5 dan 1,5.



Gambar 4. Grafik CRF pada 5 Kategori

Agar informasi yang diperoleh berguna dalam penskoran tes, parameter butir perlu diestimasi. Estimasi parameter butir dan mengecek kecocokan model sering disebut sebagai kalibrasi butir. Kalibrasi ini dapat dilakukan jika data respons peserta terhadap tes telah diperoleh (du Toit, 2003). Paling tidak ada 2 pendekatan yang dapat digunakan untuk estimasi parameter butir atau melakukan kalibrasi butir, yakni estimasi *Marginal Maximum Likelihood* (MML) dan estimasi *Marginal Maximum A Posteriori* (MMAP).

MML merupakan metode yang diyakini efisien untuk semua model respons butir dan untuk tes yang panjang maupun yang pendek. MML mengasumsikan adanya respons yang berbeda dari kemampuan θ yang sama. Untuk mengetahui parameter butir, metode yang terkenal yakni metode Bock & Lieberman, yang kemudian dirumuskan kembali oleh Bock & Aitkin tahun 1981 untuk

sampel besar (Muraki, 1997). Metode ini terdiri dari 2 langkah, yakni langkah estimasi dan langkah maksimasi. Pada langkah estimasi, frekuensi harapan provisional \bar{r}_{ihf} dan ukuran sampel harapan provisional \bar{N}_f dihitung. Kemudian pada langkah maksimasi, diestimasi Marginal Maximum Likelihood (MML) dengan metode penskoran Fisher.

Program yang digunakan untuk mengestimasi parameter butir dan kemampuan diantaranya Parscale dari SSI (Muraki & Bock, 1997). Untuk dapat menggunakan program ini, ada 2 hal yang perlu menjadi perhatian yakni input data dan sintaks analisis. Input Data dapat menggunakan format teks *.txt. Demikian pula sintaks analisis. Contoh masukan dan sintaks analisis disajikan pada Gambar 5 dan 6.

| | |
|------|-----------------------|
| 0001 | 42444232223343433332 |
| 0002 | 12221121122324121432 |
| 0003 | 32212212213342314121 |
| 0004 | 13222111113224221111 |
| 0005 | 21211122313132312131 |
| 0006 | 34443444344344444344 |
| 0007 | 23343213414312333331 |
| 0008 | 444444444444444344343 |
| 0009 | 44444234344444444333 |
| 0010 | 1111111111122111111 |
| ... | |
| 0999 | 12112111112212111221 |
| 1000 | 23322322312244424442 |

Gambar 5. Contoh Masukan Analisis untuk GPCM

```

EXAMPL03.PSL - ARTIFICIAL EXAMPLE (MONTE CARLO DATA)
GENERALIZED PARTIAL CREDIT MODEL - EAP SCALE SCORES
>COMMENTS

>FILES  DFNAME='EXAMPL01.DAT', SAVE;
>SAVE   SCORE='EXAMPL03.SCO';
>INPUT  NIDW=4, NTOTAL=20, NTEST=1, LENGTH=20;
(4A1,10X,20A1)
>TEST   TNAME='SCALE1', ITEM=(1(1)20), NBLOCK=2;
>BLOCK1 BNAME='SBLOCK1', NITEMS=10, NCAT=4, SCORING=(1,2,3,4);
>BLOCK2 BNAME='SBLOCK2', NITEMS=10, NCAT=4, MODIFIED=(1,1,2,2),
SCOR=(1,2);
>CALIB  PARTIAL, LOGISTIC, NQPTS=15, CYCLE=(100,1,1,1,1),
NEWTON=2,
          CRIT=0.01;
>SCORE  MLE, SMEAN=0.0, SSD=1.0, NAME='PCR_MLE', PFQ=5;
    
```

Gambar 6. Contoh Sintaks Analisis untuk GPCM dengan Parscale dari SSI

Setelah melakukan *running* dari Parscale, diperoleh output yang berupa file *.Ph1 (fase 1), *.Ph2 (fase 2), dan *.Ph3 (fase 3). Fase 1 merupakan hasil estimasi parameter berdasarkan teori tes klasik, yang meliputi proporsi menjawab benar perlangkah dan korelasi poliserial yang merupakan daya pembeda butir. Fase 2 merupakan fase estimasi parameter butir, dan fase 3 estimasi kemampuan peserta. Hasil tiap fase disajikan pada Gambar 7, 8, dan 9. Parameter butir

selengkapnya disajikan pada output *.PAR, pada Gambar 10.

| Ph1 | | | | | | | |
|---------------|---------------------------|------------------------------|--|------------------|---------------------|------|------|
| BLOCK NO.: | | 1 | NAME: SBLOCK1 | | | | |
| ITEM | TOTAL | NOT PRESENT | OMIT | CATEGORIES | | | |
| | | | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 0001 | | | | | | | |
| FREQ. | 1000 | 0 | 0 | 194 | 303 | 313 | 190 |
| PERC. | | 0.0 | 0.0 | 19.4 | 30.3 | 31.3 | 19.0 |
| 0002 | | | | | | | |
| FREQ. | 1000 | 0 | 0 | 204 | 284 | 310 | 202 |
| PERC. | | 0.0 | 0.0 | 20.4 | 28.4 | 31.0 | 20.2 |
| 0003 | | | | | | | |
| FREQ. | 1000 | 0 | 0 | 206 | 308 | 285 | 201 |
| PERC. | | 0.0 | 0.0 | 20.6 | 30.8 | 28.5 | 20.1 |
| 0004 | | | | | | | |
| FREQ. | 1000 | 0 | 0 | 199 | 301 | 286 | 214 |
| PERC. | | 0.0 | 0.0 | 19.9 | 30.1 | 28.6 | 21.4 |
| BLOCK ITEM | RESPONSE MEAN S.D.* | TOTAL SCORE MEAN S.D.* | PEARSON & POLYSERIAL CORRELATION | INITIAL SLOPE | INITIAL LOCATION | | |
| SBLOCK1 | | | | | | | |
| 1 0001 | 2.499 1.009* | 49.892 14.754* | 0.778 0.830 | 1.488 | -0.017 | | |
| 2 0002 | 2.510 1.030* | 49.892 14.754* | 0.797 0.852 | 1.628 | -0.036 | | |
| 3 0003 | 2.481 1.031* | 49.892 14.754* | 0.785 0.839 | 1.545 | 0.013 | | |
| 4 0004 | 2.515 1.037* | 49.892 14.754* | 0.805 0.861 | 1.695 | -0.053 | | |

Gambar 7. Output Phase 1

Ph2
ITEM BLOCK 2 SBLOCK2

SCORING FUNCTION : 1.000 2.000
STEP PARAMTER : 0.000 0.000
S.E. : 0.000 0.000

| ITEM | BLOCK | SLOPE | S.E. | LOCATION | S.E. | GUESSING | S.E. |
|------|-------|-------|-------|----------|-------|----------|-------|
| 0001 | 1 | 1.152 | 0.069 | 0.008 | 0.036 | 0.000 | 0.000 |
| 0002 | 1 | 1.192 | 0.076 | -0.005 | 0.035 | 0.000 | 0.000 |
| 0003 | 1 | 1.157 | 0.076 | 0.030 | 0.036 | 0.000 | 0.000 |
| 0004 | 1 | 1.290 | 0.082 | -0.011 | 0.034 | 0.000 | 0.000 |
| 0005 | 1 | 1.348 | 0.080 | -0.006 | 0.034 | 0.000 | 0.000 |
| 0006 | 1 | 0.812 | 0.052 | 0.503 | 0.042 | 0.000 | 0.000 |
| 0007 | 1 | 0.886 | 0.058 | 0.515 | 0.039 | 0.000 | 0.000 |
| 0008 | 1 | 0.972 | 0.062 | 0.469 | 0.038 | 0.000 | 0.000 |
| 0009 | 1 | 0.876 | 0.056 | 0.493 | 0.039 | 0.000 | 0.000 |
| 0010 | 1 | 0.867 | 0.056 | 0.505 | 0.042 | 0.000 | 0.000 |
| 0011 | 2 | 0.899 | 0.072 | -0.543 | 0.063 | 0.000 | 0.000 |
| 0012 | 2 | 0.882 | 0.069 | -0.586 | 0.064 | 0.000 | 0.000 |
| 0013 | 2 | 1.088 | 0.085 | -0.457 | 0.053 | 0.000 | 0.000 |
| 0014 | 2 | 0.964 | 0.076 | -0.461 | 0.058 | 0.000 | 0.000 |
| 0015 | 2 | 0.989 | 0.081 | -0.441 | 0.055 | 0.000 | 0.000 |
| 0016 | 2 | 0.766 | 0.061 | -0.018 | 0.062 | 0.000 | 0.000 |
| 0017 | 2 | 0.614 | 0.055 | -0.121 | 0.074 | 0.000 | 0.000 |
| 0018 | 2 | 0.755 | 0.062 | 0.077 | 0.063 | 0.000 | 0.000 |
| 0019 | 2 | 0.661 | 0.056 | 0.046 | 0.068 | 0.000 | 0.000 |
| 0020 | 2 | 0.687 | 0.059 | 0.070 | 0.066 | 0.000 | 0.000 |

Gambar 8. Output Phase 2

Ph.3

SUBJECT IDENTIFICATION WEIGHT/FREQUENCY

| SCORE | NAME | GROUP | WEIGHT | MEAN | CATEGORY | ATTEMPTS | ABILITY | S.E. |
|-------|---------|-------|--------|------|----------|----------|---------|--------|
| 0001 | | | 1 | | GROUP 01 | 1.00 | | |
| 1 | PCR_MLE | 1 | 1.00 | 2.40 | 1.00 | 1.00 | 0.7728 | 0.1801 |
| 0002 | | | 2 | | GROUP 01 | 1.00 | | |
| 1 | PCR_MLE | 1 | 1.00 | 1.45 | 1.00 | 1.00 | -0.8738 | 0.1865 |
| 0003 | | | 3 | | GROUP 01 | 1.00 | | |
| 1 | PCR_MLE | 1 | 1.00 | 1.65 | 1.00 | 1.00 | -0.4798 | 0.1689 |
| 0004 | | | 4 | | GROUP 01 | 1.00 | | |
| 1 | PCR_MLE | 1 | 1.00 | 1.35 | 1.00 | 1.00 | -0.9355 | 0.1907 |
| 0005 | | | 5 | | GROUP 01 | 1.00 | | |
| 1 | PCR_MLE | 1 | 1.00 | 1.50 | 1.00 | 1.00 | -0.7876 | 0.1814 |

Gambar 9. Output Phase 3

```
.par
EXAMPL03.PSL - ARTIFICIAL EXAMPLE (MONTE CARLO DATA)
      GENERALIZED PARTIAL CREDIT MODEL - EAP SCALE SCORES
TEST 01  2  20  7  0  1
      10 10
GROUP 01
SBLOCK1  40001  1.15154  0.06889  0.00831  0.03576  0.00000  0.00000
SBLOCK1  40002  1.19216  0.07569  -0.00498  0.03499  0.00000  0.00000
SBLOCK1  40003  1.15734  0.07614  0.03038  0.03561  0.00000  0.00000
.....
SBLOCK2  20011  0.89922  0.07164  -0.54271  0.06285  0.00000  0.00000
SBLOCK2  20012  0.88179  0.06943  -0.58600  0.06411  0.00000  0.00000
SBLOCK2  20013  1.08803  0.08457  -0.45680  0.05306  0.00000  0.00000
```

Gambar 10. Output Estimasi Parameter (*.PAR)

Hasil estimasi kemampuan disajikan pada skala interval (-4,+4). Agar dapat dimanfaatkan untuk memperoleh interpretasi yang lebih baik, selanjutnya perlu dilakukan dengan transformasi linear biasa. Misalnya disajikan pada rentang [0,10] atau [0,100].

KESIMPULAN

Pada tes esai atau constructed response, penskoran dilakukan dengan politomus. Untuk mengestimasi kemampuan, model alternatif yang dapat dilakukan yakni dengan *Generalized Partial Credit Model* (GPCM). Estimasi kemampuan dapat dilakukan dengan bantuan Parscale dari SSI. Estimasi kemampuan disajikan pada fase 3 pada skala (-4,+4) yang kemudian dapat ditransformasi agar lebih mudah dimaknai. Untuk dapat mengetahui ketepatannya dalam mengestimasi kemampuan, perlu dilakukan studi simulasi antara yang menggunakan total skor menjawab benar dan yang menggunakan GPCM.

DAFTAR PUSTAKA

- Du Toit, M. (2003). *IRT from SSI: BILOG-MG, MULTILOG, PARSCALE, TESTFACT*. Lincolnwood: SSI.
- Gronlund, N.E. & Linn, R.L. (1990). *Measurement and evaluation in teaching (6th ed)*. New York : Collier Macmillan Publishers
- Hambleton, R.K., Swaminathan, H., & Rogers, H.J. (1991). *Fundamental of item response theory*. Newbury Park, CA: Sage Publication Inc.
- Hambleton, R.K. & Swaminathan, H. (1985). *Item response theory*. Boston, MA: Kluwer Inc.
- Keeves, J.P. dan Alagumalai,S. (1999). New approaches to measurement. Dalam Masters, G.N. dan Keeves, J.P.(Eds). *Advances in measurement in educational research and assesment*. Amsterdam : Pergamon.
- Muraki, E. (1999). New approaches to measurement. Dalam Masters, G.N. dan Keeves, J.P.(Eds). *Advances in measurement in educational research and assesment*. Amsterdam : Pergamon.
- Muraki,E., & Bock, R.D. (1997). *Parscale 3: IRT based test scoring and item analysis for graded items and rating scales*. Chicago: Scintific Software Inc.

Heri Retnawati / Mengestimasi Kemampuan Peserta

Van der Linden, W.J., & Hambleton, R.K. (1997). *Handbook of modern item response theory*. New York: Springer-Verlag.

E-LEARNING ADAPTIF BERBASIS KARAKTERISTIK PESERTA DIDIK

Kuswari Hernawati

Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

E-mail : kuswari@uny.ac.id

Abstrak

Perkembangan teknologi komunikasi dan informasi telah mempengaruhi masyarakat, khususnya sistem pendidikan menuju paradigma pembelajaran baru diantaranya adalah dengan proses pembelajaran e-Learning. E-Learning adalah wujud penerapan teknologi informasi di bidang pendidikan dalam bentuk sekolah maya. Sistem e-learning telah banyak dikembangkan oleh berbagai lembaga pendidikan dan menjadi hal yang sangat penting dalam pelaksanaan pendidikan jarak jauh. Sistem e-learning yang ada sekarang ini umumnya menyajikan presentasi materi pembelajaran yang sama untuk setiap pengguna karena menganggap bahwa karakteristik semua pengguna adalah homogen, padahal dalam kenyataannya setiap peserta didik mempunyai karakteristik yang berbeda dalam belajar, di antaranya adalah gaya belajar, tingkat kematangan, latar belakang dan taraf pengetahuan, prestasi belajar dan lain lain, sehingga perlu digunakan sistem E-learning yang mampu untuk mengakomodasi permasalahan perbedaan karakteristik peserta didik tersebut, yang disebut sebagai E-learning adaptif. Model elearning adaptif berbasis karakteristik peserta didik adalah AES-CS(Adaptive Educational System base on Cognitive Style), Adaptive E-Learning Hypermedia System based on Learning Styles (AEHS-LS).

Kata kunci : E-learning Adaptif, karakteristik peserta didik

PENDAHULUAN

Sejalan dengan perkembangan internet, telah banyak aktivitas yang dilakukan dengan memanfaatkan jaringan internet, seperti e-Commerce, e-Banking, e-Government, e-Learning dan lainnya. Salah satu aktivitas yang berkaitan dengan proses pembelajaran adalah e-Learning. E-Learning adalah wujud penerapan teknologi informasi di bidang pendidikan dalam bentuk sekolah maya. E-Learning merupakan usaha untuk membuat sebuah transformasi proses belajar mengajar di sekolah dalam bentuk digital yang dijembatani oleh teknologi internet.

Sistem e-learning telah banyak dikembangkan oleh berbagai lembaga pendidikan dan menjadi hal yang sangat penting dalam pelaksanaan pendidikan jarak jauh. Sistem e-learning yang ada sekarang ini umumnya menyajikan presentasi materi pembelajaran yang sama untuk setiap pengguna karena menganggap bahwa karakteristik semua pengguna adalah homogen, padahal dalam kenyataannya setiap peserta didik mempunyai karakteristik yang berbeda dalam belajar, di antaranya adalah gaya belajar, tingkat kematangan, latar belakang dan taraf pengetahuan, prestasi belajar dan lain lain. Hal ini menyebabkan apa yang dipelajari tidak sesuai dengan karakteristik dari masing-masing peserta didik, sehingga apa yang diperoleh juga menjadi kurang optimal. Dalam teknologi sistem pendidikan yang muncul, perlu untuk memiliki sistem e-learning yang mampu untuk mengakomodasi permasalahan perbedaan karakteristik peserta didik, yang dapat memahami preferensi peserta didik dan berusaha untuk memberikan/menyampaikan konten dan menggunakan metode yang sesuai dengan karakteristik peserta didik, yang disebut sebagai E-learning adaptif. Banyak pendidik dan peneliti di bidang pendidikan telah berusaha dan melakukan penelitian untuk memberikan konten yang adaptif. Para peserta didik saat ini perlu melihat konten

yang akan sesuai dengan selera, tingkat pemahaman, dan sifat-sifat pribadi, sehingga proses belajar akan lebih efisien jika kebutuhan mereka terpenuhi.

Sistem e-learning adaptif dapat memberikan materi pembelajaran yang tingkat kesulitannya sesuai dengan kemampuan pengguna, dan cara mempresentasikan materi pembelajarannya sesuai dengan gaya belajar pengguna. Dengan kata lain sistem e-learning adaptif dapat mengadaptasikan tampilannya terhadap berbagai variasi karakteristik pengguna, sehingga mempunyai efektivitas pembelajaran yang tinggi.

PEMBAHASAN

A. Elearning

Definisi elearning yang diberikan oleh Gilbert & Jones (2001), yaitu pengiriman materi pembelajaran melalui suatu media elektronik seperti Internet, intranet/extranet, satellite broadcast, audio/video tape, interactive TV, CD-ROM, dan *computer-based training* (CBT). Definisi yang hampir sama diusulkan juga oleh the Australian National Training Authority (2003) yakni meliputi aplikasi dan proses yang menggunakan berbagai media elektronik seperti internet, audio/video tape, interactive TV and CD-ROM guna mengirimkan materi pembelajaran secara lebih fleksibel.

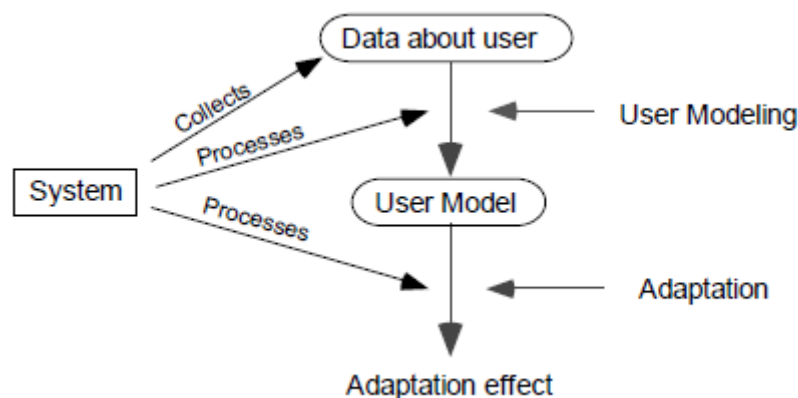
The ILRT of Bristol University (2005) mendefinisikan e-learning sebagai penggunaan teknologi elektronik untuk mengirim, mendukung, dan meningkatkan pengajaran, pembelajaran dan penilaian.

Udan and Weggen (2000) menyebutkan bahwa elearning adalah bagian dari pembelajaran jarak jauh sedangkan pembelajaran on-line adalah bagian dari elearning.

Di samping itu, istilah elearning meliputi berbagai aplikasi dan proses seperti *computer-based learning*, *web-based learning*, *virtual classroom*, dll; sementara itu pembelajaran on-line adalah bagian dari pembelajaran berbasis teknologi yang memanfaatkan sumber daya Internet, intranet, dan extranet. Lebih khusus lagi Rosenberg (2001) mendefinisikan elearning sebagai pemanfaatan teknologi Internet untuk mendistribusikan materi pembelajaran, sehingga siswa dapat mengakses dari mana saja. (Herman, 2010)

B. Adaptive Elearning System (AES)

Menurut Brusilovsky dan Maybury, (2002) dalam Sfenrianto (2009) menjelaskan model sistem adaptif, seperti gambar berikut: [27]



Gambar 1. Model Sistem Elearning Adaptif.

Proses dari model sistem adaptif terdiri atas tiga tahap, yaitu:

1. Proses pengumpulan data tentang profil pengguna (*user profile*), merupakan proses untuk mendapatkan informasi awal tentang pengguna. Informasi yang didapatkan akan disimpan pada

model pengguna (*user model*), yang dimulai dari tingkat pengetahuan awal, membangun pengetahuan, menambah pengetahuan dan pemeliharaan pengetahuan peserta didik.

2. Proses membangun model pengguna (*user model*), dihasilkan dari proses pengumpulan informasi profil pengguna yang dikategorikan, sebagai berikut:
 - a. **Student's behavior**, merupakan informasi tentang perilaku mahasiswa, seperti keadaan motivasi, gaya belajar dan sebagainya.
 - b. **Student's knowledge**, merupakan informasi pengetahuan mahasiswa dalam memahami suatu materi pembelajaran. Pengetahuan mahasiswa dapat dibagi menjadi beberapa tingkatan, yaitu: baru (*novice*), pemula (*beginner*), sedang (*means*), lanjut (*advance*), dan pakar (*expert*). Pendekatan yang dapat dilakukan untuk mengukur tingkatan pengetahuan tersebut adalah dengan cara tes secara otomatis (*auto evaluation*) melalui sistem adaptif.
 - c. **Student's achievement**, merupakan informasi hasil pencapaian mahasiswa dalam proses pembelajaran pada sistem e-learning adaptif. Hasil pencapaian tersebut dapat dilihat dari indikator perolehan nilai kuis atau latihan yang diberikan oleh sistem elearning adaptif kepada mahasiswa.
 - d. **Student's preferences**, merupakan informasi suatu konsep struktur tentang preferensi mahasiswa dalam sistem e-learning adaptif. Preferensi tersebut bertujuan untuk mempresentasikan materi pembelajaran (konten, latihan, kuis, dll) dengan menggunakan dukungan komponen sistem hipermedia adaptif (teks, video, gambar, dll).

Beberapa tujuan dari *user model* dalam sistem adaptif adalah: memberikan informasi konten pembelajaran yang sesuai dengan *student's behavior*, menyesuaikan *user interface* dengan mahasiswa, membantu mahasiswa menemukan informasi yang dibutuhkan, memberikan umpan balik kepada mahasiswa tentang pengetahuannya dan memberikan bantuan dalam penggunaan sistem. Oleh karena itu sistem e-learning adaptif mempunyai kemampuan untuk mengubah informasi *student's behavior* pada *user model*.

3. Proses model adaptasi (*adaptation model*).

Model adaptasi berisi satu set aturan adaptasi yang dinyatakan dalam wujud ketentuan dan tindakan suatu kondisi tertentu pada sistem adaptif. Aturan adaptasi tersebut diproses oleh model adaptasi berdasarkan hasil informasi dari model user. Model adaptasi akan menghasilkan sistem adaptif pada sistem e-learning adaptif yang bertujuan untuk: [20].

1. **Adaptive information resources**, memberikan para mahasiswa informasi materi pembelajaran berdasarkan materi yang relevan dengan topik yang sedang dipelajari.
2. **Adaptive navigational structure**, mengadaptasi struktur navigasi pembelajaran sebagai informasi tambahan kepada mahasiswa, terhadap materi pembelajaran berikutnya.
3. **Adaptive trail generation**, menyediakan fasilitas tambahan dalam sistem e-learning adaptif, seperti memberikan contoh dari suatu topik yang sedang dipelajari agar mahasiswa lebih mudah memahami topik tersebut.
4. **Adaptive Contents selection**, menyediakan pilihan konten pembelajaran yang dapat disesuaikan dengan perilaku mahasiswanya (*students behavior*), pengetahuan mahasiswa (*students knowledge*), pencapaian mahasiswa (*students achievement*) dan preferensi mahasiswa (*students preferences*).
5. **Adaptive goal selection**, menyediakan pilihan tujuan pembelajaran yang dapat disesuaikan dengan perilaku mahasiswanya (*students behavior*).

C. Karakteristik Peserta Didik

Karakteristik peserta didik adalah keseluruhan kelakuan dan kemampuan yang ada pada peserta didik sebagai hasil dari pembawaan dan lingkungan sosialnya sehingga menentukan pola aktivitas dalam meraih cita-citanya. Dengan demikian, penentuan tujuan belajar itu sebenarnya harus dikaitkan atau disesuaikan dengan keadaan atau karakteristik peserta didik itu sendiri.

Ada tiga hal yang perlu diperhatikan dalam karakteristik peserta didik yaitu:

1. Karakteristik atau keadaan yang berkenaan dengan kemampuan awal atau Prerequisite skills, seperti misalnya kemampuan intelektual, kemampuan berfikir, mengucapkan hal-hal yang berkaitan dengan aspek psikomotor dan lainnya.
2. Karakteristik yang berhubungan dengan latar belakang dan status sosial (socioculture)
3. Karakteristik yang berkenaan dengan perbedaan-perbedaan kepribadian seperti sikap, perasaan, minat dan lain-lain.

Adapun Karakteristik peserta didik yang mempengaruhi kegiatan belajar peserta didik antara lain: Kondisi fisik, Latar belakang pengetahuan dan taraf pengetahuan, Gaya belajar, Usia, Tingkat kematangan, Ruang lingkup minat dan bakat, Lingkungan sosial ekonomi dan budaya, Faktor emosional, Faktor komunikasi, Intelegensia Keselaran dan attitude, Prestasi belajar, Motivasi dan lain-lain. (Muhammad Faiq Dzaki,)

D. Aspek kognitif (penguasaan intelektual)

Istilah kognitif berasal dari cognition yang bersinonim dengan kata knowing yang berarti pengetahuan, dalam arti luas kognisi adalah perolehan, penataan, dan penggunaan pengetahuan. Menurut para ahli psikologi kognitif, aspek kognitif ini merupakan sumber sekaligus sebagai pengendali aspek-aspek yang lain, yakni aspek afektif dan juga aspek psikomotorik.

Aspek kognitif dalam proses belajar mengajar selalu ada, hal ini dapat diketahui dikarenakan dalam belajar anak didik diharapkan mampu menghafal berbagai konsep teoritis yang disampaikan oleh guru, sebagai pendidik guru menanamkan ilmu dan selanjutnya agar anak didik dapat merealisasikan konsep-konsep teoritis itu dalam bentuk praktek nyata.

Selama proses belajar mengajar siswa menerima mata pelajaran yang berbeda-beda yang kesemuanya perlu dihafal oleh siswa, guru dapat mengetahui sejauh mana penyerapan anak didik terhadap mata pelajaran yang telah diterimanya yaitu dengan penyerapan anak didik untuk mengulang kembali atas daya hafalnya. Dengan demikian jika hasil belajar dalam aspek kognitif tinggi maka dia akan mudah untuk berfikir sehingga ia akan mudah memahami dan meyakini materi-materi pelajaran yang di berikan kepadanya serta mampu menangkap pelan-pelan moral dan nilai-nilai yang terkandung didalam materi tersebut. Sebaliknya, jika hasil belajar kognitif rendah maka ia akan sulit untuk memahami materi

tersebut untuk kemudian diinternalisasikan Dalam dirinya dan diwujudkan dalam perbuatannya.

Jenis hasil belajar aspek kognitif ini meliputi enam kemampuan atau kecakapan antara lain:

1. Pengetahuan (knowledge), kemampuan seseorang untuk mengingat-ingat kembali (recall) atau mengenali kembali tentang nama, istilah, ide, gejala, rumus-rumus dan sebagainya.
2. Pemahaman (comprehension), kemampuan seseorang untuk mengerti dan memahami sesuatu setelah sesuatu itu diketahui dan diingat,
3. Penerapan atau aplikasi (aplication), adalah kesanggupan seseorang untuk menerangkan atau menggunakan ide-ide umum, tata cara, ataupun metode-metode, prinsip-prinsip, rumus-rumus, teori-teori dan sebagainya, dalam situasi yang kongkrit.
4. Analisis (analysis), adalah kemampuan seseorang untuk merinci atau menguraikan suatu bahan atau keadaan menurut bagian-bagian dan faktor-faktor yang satu dengan faktor yang lainnya.
5. Sintensis (syntensis), adalah suatu proses yang memadukan bagian-bagian atau unsur-unsur secara logis sehingga menjelma menjadi suatu pola yang berstruktur atau berbentuk pola baru
6. Penilaian dan evaluasi (evaluation), adalah kemampuan seseorang untuk membuat pertimbangan Jterhadap situasi, nilai atau ide atau kemampuan untuk mengambil keputusan (menentukan nilai) sesuatu yang dipelajari untuk tujuan tertentu

(Sofiyatin, 2011).

E. Gaya Belajar

Terdapat banyak definisi tentang gaya belajar atau learning style. Menurut James dan Blank (1993), gaya belajar didefinisikan sebagai kebiasaan belajar dimana seseorang merasa paling efisien dan efektif dalam menerima, memproses, menyimpan dan mengeluarkan sesuatu yang dipelajari. McLoughlin (1999) menyimpulkan bahwa istilah gaya belajar merujuk pada kebiasaan dalam memperoleh pengetahuan. Honey dan Mumford (1992) mendefinisikan gaya belajar sebagai sikap dan tingkah laku yang menunjukkan cara belajar seseorang yang paling disukai.

Ringkasan dari beberapa penelitian mengenai gaya belajar menunjukkan bahwa (1) beberapa pelajar mempunyai kebiasaan belajar yang berbeda dengan yang lainnya, (2) beberapa pelajar belajar lebih efektif bila diajar dengan metode yang paling disukai, dan (3) prestasi pelajar berkaitan dengan bagaimana caranya belajar (Riding & Rayner, 1998). Gaya belajar mempengaruhi efektivitas pelatihan, tidak peduli apakah pelatihan tersebut dilakukan secara tatap muka atau secara on-line (Benham, 2002).

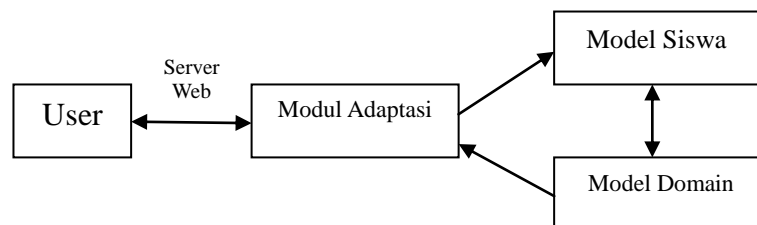
Gaya belajar sering diukur dengan menggunakan kuesioner atau tes psikometrik (McLoughlin, 1999). Terdapat berbagai macam alat untuk mengukur gaya belajar, diantaranya adalah:

- Honey and Mumford's Learning Styles Questionnaire
- Grasha-Riechmann Student Learning Style Scales
- Felder's Index of Learning Styles

Salah satu gaya belajar yang dikenal dengan kesederhanaannya adalah VAK. Gaya belajar VAK menggunakan tiga penerima sensori utama, yakni visual, auditory dan kinestetik dalam menentukan gaya belajar seorang peserta didik yang dominan (Rose, 1987). Gaya belajar VAK ini didasarkan atas teori modaliti, yakni meskipun dalam setiap proses pembelajaran, peserta didik menerima informasi dari ketiga sensor tersebut, akan tetapi ada salah satu atau dua sensori yang dominan.

F. Adaptive Educational System base on Cognitive Style (AES-CS)

Ciri utama dari AES-CS adalah proses pembelajaran dapat disesuaikan dengan gaya kognitif dan dengan tingkat pengetahuan yang diperoleh oleh peserta didik. Sistem ini terdiri dari tiga modul dasar: model domain, model mahasiswa, dan adaptasi modul (Gambar 2). Ketiga komponen itu berinteraksi untuk mengadaptasi aspek-aspek yang berbeda dalam proses pembelajaran, mengadaptasi isi /konten sesuai dengan pengetahuan peserta didik; mengadaptasi isi presentasi melalui seleksi dan kombinasi yang sesuai dengan media; mengadaptasi strategi pengajaran; memodifikasi pemilihan contoh dan link, dan merekomendasikan hyperlink yang sesuai.



Gambar.2 Model AES-CS

Domain model

Model domain adalah satu set konsep domain. Berfungsi sebagai dasar untuk penataan isi AES-CS. Setiap konsep terstruktur dalam sekumpulan topik. Topik-topik itu mewakili dasar pengetahuan untuk suatu domain dan ukurannya tergantung pada domain. Topik terkait satu sama lain sehingga membentuk semacam jaringan semantik. Jaringan ini sebenarnya struktur domain pengetahuan. Pada AES-CS setiap halaman hypermedia benar-benar sesuai dengan satu topik saja.

Model Siswa

Pada Model siswa harus mudah digunakan untuk membangun, memodifikasi dan harus akurat mencerminkan karakteristik siswa yang berbeda. Tiga kategori yang berbeda informasi dibangun di dalam model siswa: profil pribadi (yang meliputi data statis misalnya nama dan password), profil kognitif (yang mencakup data adaptasi seperti preferensi gaya kognitif), dan profil pengetahuan seorang siswa (yang menggambarkan pengetahuan siswa tentang suatu subjek).

Modul Adaptasi

Untuk mendukung adaptivity, AES-CS menggunakan 'teknik presentasi adaptif' yang bertujuan untuk menyesuaikan informasi yang disajikan kepada pengguna sesuai dengan gaya kognitif dan pengetahuannya. Representasi teks dan halaman bersyarat digunakan untuk mencapai presentasi adaptif. Dengan teknik teks bersyarat, halaman dibagi menjadi potongan. Setiap potongan informasi dikaitkan dengan halaman lain yang sesuai dengan kondisi peserta didik.

Salah satu model AES-CS yang sudah banyak dipakai adalah model *Dynamic Intellectual Learning (DIL)*. Model DIL akan memberikan kesempatan kepada para peserta didik untuk mengeksplorasi materi perkuliahan sesuai dengan kemampuan masing masing peserta didik. Langkah-langkah yang dilakukan dalam metode DIL sebagai berikut:

1. Melakukan uji coba pre-tes terhadap peserta didik

Sebelum mengambil bab (*chapter*) dari sebuah materi (*course*) peserta didik akan memperoleh pre-tes dengan ketentuan sebagai berikut.

- a. Soal yang diambil adalah beberapa soal yang mewakili masing-masing bab dalam materi tersebut.
- b. Soal diambil sebanyak 20% dari soal yang akan dikeluarkan nanti pada tes session.
- c. Hasil yang dipakai adalah lulus atau tidak peserta didik pada sebuah bab.
- d. Hasil lulus atau tidak pada sebuah bab ditentukan dengan persentase jumlah jawaban yang benar pada soal di bab tersebut dengan jumlah soal yang diambil pada bab tersebut lebih dari 66%.

Tujuan adanya pre-tes ini adalah untuk mengetahui kemampuan awal dari peserta didik. Setelah melakukan pengujian pre-tes, sistem akan memberikan bab yang berhak untuk diakses pada materi sesuai tingkat pemahaman peserta didik.

Kemungkinan yang bisa diperoleh dari hasil pre-tes tersebut adalah sebagai berikut.

- a. Tidak ada bab yang lulus
Jika semua bab tidak lulus maka peserta didik hanya boleh mengakses bab terendah yang belum lulus dan tidak terkunci.
- b. Beberapa bab lulus atau semua bab lulus
Jika ada beberapa atau semua bab yang lulus maka yang dapat diakses adalah bab yang lulus saja.

2. Memilih materi

Peserta didik boleh memilih materi yang telah diposting. Sistem akan mengecek apakah ada bab yang harus diambil pada materi atau tidak. Kemungkinan kejadian adalah:

- a. Ada bab yang harus diambil
Ini adalah kondisi dimana peserta didik sudah pernah melakukan pembelajaran sebelumnya namun ada bab yang tidak lulus sehingga bab tersebut harus dituntaskan sebelum melanjutkan pembelajaran. Peserta didik akan langsung dibawa untuk mengambil bab.
- b. Tidak ada bab yang harus diambil
Kemungkinan dari kondisi ini adalah peserta didik belum pernah mengambil pembelajaran pada materi atau sudah pernah melakukan pembelajaran dengan hasil semua bab lulus. Peserta didik selanjutnya dibawa untuk mengambil pre-tes.

3. Mengambil bab

Ada 2 kondisi dalam pengambilan materi:

- a. Kondisi dimana peserta didik bebas dalam memilih materi
- b. Kondisi dimana peserta didik harus mengambil materi yang ditentukan. Ini terjadi karena ada materi yang tidak lulus pada session tes sehingga harus dituntaskan.

4. Mengambil session tes

Setelah memilih bab yang diberikan dari langkah 3 di atas peserta didik diharuskan untuk mengambil session tes. Ketentuan dari session tes adalah sebagai berikut:

- a. Soal yang diambil dari session tes adalah soal dari bab yang diambil, beserta soal dari bab relasi yang telah ditentukan oleh pemosting.
- b. Hasil lulus atau tidak pada sebuah bab ketentuannya sama dengan soal pada pre-tes, perbedaannya yaitu batas kelulusan ditentukan pemosting saat menentukan relasi.
- c. Jika peserta didik tidak mengambil session tes, peserta didik tidak akan bisa melanjutkan pembelajaran.
- d. Hasil yang diperoleh nanti berupa lulus atau tidak peserta didik pada masing masing bab.

Kemungkinan yang bisa diperoleh dari hasil tes session ini adalah sebagai berikut:

- a. Peserta didik lulus di semua bab
Jika peserta didik lulus di semua bab maka peserta didik boleh melanjutkan pembelajaran untuk mengambil bab lain.
- b. Ada beberapa bab yang tidak lulus atau semua bab tidak lulus.
Jika ada bab yang tidak lulus atau semua bab tidak lulus maka peserta didik akan diarahkan untuk mengambil bab terkecil yang tidak lulus. Semua bab yang berada di bawah bab terkecil yang tidak lulus tersebut akan diluluskan, sedangkan untuk bab yang berada di atas bab terkecil yang tidak lulus yang memiliki hubungan dengan bab tersebut untuk sementara aksesnya ditutup.

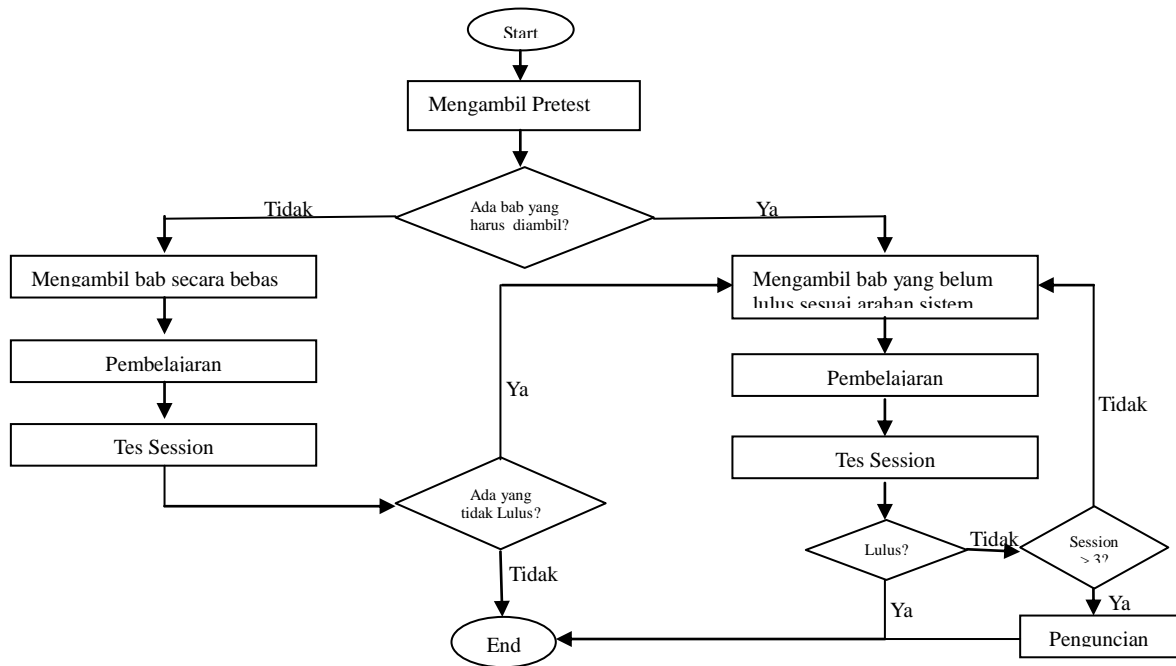
5. Peserta didik diharuskan mengambil materi yang tidak lulus

Kejadian ini akan terjadi dimana peserta didik diharuskan untuk mengambil bab terkecil yang belum lulus saat *session tes*. Kemungkinan hasil yang didapat adalah:

- a. Peserta didik lulus di bab tersebut
Peserta didik boleh melanjutkan pembelajaran untuk bab yang lain.
- b. Peserta didik tidak lulus di materi tersebut
Peserta didik hanya diberikan kesempatan untuk mengulang session sebanyak 3 kali. Jika lebih dari itu peserta didik belum lulus maka peserta didik tidak boleh lagi mengambil bab tersebut dan juga tidak boleh mengambil bab yang berhubungan dengan bab yang tidak lulus tersebut. Dengan kata lain bab pada materi tersebut akan dikunci.

(Gede Rasben Dantes dkk, 2010)

Alur aktivitas *learner* sesuai langkah di atas dalam *Dynamic Intellectual Learning* dapat digambarkan sebagai berikut:

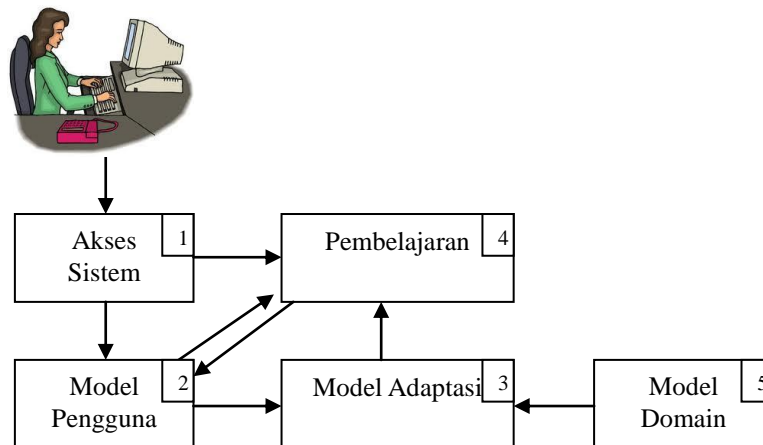


Gambar 1. Aliran Aktivitas *Dynamic Intellectual Learning*

G. Adaptive E-Learning Hypermedia System based on Learning Styles (AEHS-LS)

Pengguna sistem e-learning adaptif dapat memperoleh materi pembelajaran sesuai dengan gaya belajarnya, sehingga proses pembelajaran menjadi lebih optimal. Untuk mengidentifikasi kecenderungan gaya belajar pengguna digunakan daftar pertanyaan yang berupa kuesioner. Model gaya belajar yang dibahas dalam sistem e-learning ini adalah Visual-Auditory-Kinesthetic (VAK). Model VAK ini sangat populer akan tetapi cukup sederhana dalam implementasinya. Model VAK akan mengidentifikasi kecenderungan gaya belajar mahasiswa yang berkaitan dengan aspek visual (misalnya: gambar, diagram, grafik, dll), aspek audio (misalnya: narasi, efek suara, dll) dan aspek kinestetik atau gerakan misalnya: memegang, melakukan, dll).

Arsitektur sistem **AEHS-LS** adalah sebagai berikut :



Gambar 3. Arsitektur Elearning adaptif AEHS-LS

Desain tahap selanjutnya menghasilkan rancangan sistem yang diimplementasikan dengan diagram Use Case. Suatu Use Case diagram digunakan untuk menunjukkan fungsionalitas suatu entitas seperti sebuah sistem, sub-sistem atau class dengan menggunakan aktor-aktor, use case dan hubungan antar mereka (Alhir, 2002; Booch, Rumbaugh, & Jacobson, 1999).

Suatu aktor adalah seperangkat peran dimana pengguna dapat beraktivitas ketika berinteraksi dengan entitas. Aktor dapat berwujud pengguna manusia atau sistem lain. Sebuah use case adalah satu unit perilaku atau fungsionalitas dari suatu entitas dilihat dari prespektif pengguna.

Aktor-aktor dan use case sebagai berikut.

- Aktor: Mahasiswa, Dosen, Admin dan Sub-sistem
- Use Cases:
 - Mahasiswa (mahasiswa yang sudah terdaftar, mahasiswa yang belum terdaftar): mendaftar, login, logout, mengisi kuesioner, mempelajari materi pembelajaran, mengerjakan latihan, mengerjakan soal tes, melihat profil, mengulang mengisi kuesioner.
 - Dosen: login, logout, mengedit materi pembelajaran, mengupload materi pembelajaran, mengedit soal-soal tes, mengedit kuesioner.
 - Admin: login, logoff, mengelola mahasiswa dan dosen
 - Sub-sistem: membuat profil, mengupdate profil, menyajikan kuesioner, menentukan skor hasil jawaban kuesioner, mengarahkan mahasiswa ke mode pembelajaran tertentu, menyajikan materi pembelajaran dengan mode tertentu, menyajikan soal-soal tes, memberi kesempatan mahasiswa untuk mengulang mengisi kuesioner.

Fungsi sistem sebagai berikut:

- Sistem menampilkan halaman depan dimana dari halaman ini pengguna harus dapat login dan mendapatkan informasi awal.
- Bila pengguna login sebagai mahasiswa, maka sistem memberikan daftar pertanyaan (kuesioner) untuk mengungkap kecenderungan gaya belajar pengguna.
- Sistem menentukan kecenderungan gaya belajar pengguna berdasarkan skor yang diperoleh dalam menjawab kuesioner.
- Pengguna dengan skor mayoritas pada aspek V akan diarahkan pada mode pembelajaran yang menonjolkan unsur visual. Pada mode ini sistem akan menampilkan materi pembelajaran dengan disertai ilustrasi yang berupa gambar, diagram, grafik, dll.
- Pengguna dengan skor mayoritas pada aspek A akan diarahkan pada mode pembelajaran yang menonjolkan unsur audio. Pada mode ini sistem akan menampilkan materi pembelajaran dengan disertai ilustrasi yang berupa narasi audio atau uraian verbal.
- Pengguna dengan skor mayoritas pada aspek K akan diarahkan pada mode pembelajaran yang menonjolkan unsur kinestetik. Pada mode ini sistem akan menampilkan materi pembelajaran dengan disertai ilustrasi yang membutuhkan gerakan tangan (memindahkan, menggeser, menekan, dll).
- Pada akhir materi pembelajaran sistem akan menampilkan tes untuk mengevaluasi pencapaian pemahaman mahasiswa.
- Bila hasil tes kurang dari batas minimum, maka sistem memberi kesempatan kepada pengguna untuk mengisi kuesioner kembali. Karena ada kemungkinan pengguna akan mengikuti mode pembelajaran yang lain.
- Bila pengguna login sebagai dosen, maka sistem menampilkan interface untuk mengedit dan mengupload materi pembelajaran.
- Bila pengguna login sebagai admin, maka sistem menampilkan interface untuk mengelola sistem.

Dengan beberapa model pembelajaran dengan elearning adaptif tersebut maka diharapkan setiap peserta didik bisa memperoleh materi yang disesuaikan karakteristiknya masing-masing terutama dapat disesuaikan dengan kemampuan, pengetahuan dan gaya belajarnya sehingga apa yang diperoleh selama dalam proses pembelajaran akan lebih optimal dan memperoleh hasil yang maksimal.

KESIMPULAN

Dalam sistem elearning adaptif berbasis karakteristik peserta didik , seorang peserta didik dapat diberikan presentasi yang disesuaikan dengan tingkat pengetahuannya, gaya belajarnya dan preferensi lainnya. Dalam model sistem elearning AEHS-CS seorang peserta didik dapat diberikan materi yang disesuaikan dengan kemampuan dan pengetahuannya, sedangkan pada AEHS-LS seorang peserta didik akan memperoleh materi sesuai dengan gaya belajarnya masing-masing yang diukur dengan instrumen gaya belajar VAK (visual, auditory, kinestetik). Dengan demikian setiap siswa akan mendapatkan sajian materi pembelajaran yang sesuai dengan kecenderungan gaya belajarnya. Dengan cara ini diharapkan apa yang diperoleh selama dalam proses belajar dapat menjadi optimal.

DAFTAR PUSTAKA

- Benham, H. C. (2002). *Training effectiveness, online delivery and the influence of learning style*. Paper presented at the 2002 ACM SIGCPR Conference on Computing Personal Research, Kristiansand, Norway
- Dantes, Gede Rasben, dkk, 2010, Model Dynamic Intellectual Learning (DIL): Pergeseran Paradigma E-Learning Menuju Adaptive Learning, Prosiding Konferensi Nasional Sistem dan Informatika 2010, Universitas Pendidikan Ganesha, Singaraja, Bali
- Herman Dwi Surjono, Nurkhamid (2008) Pengembangan Model E-Learning Adaptif terhadap Keragaman Gaya Belajar Mahasiswa untuk Meningkatkan Efektivitas Pembelajaran, Universitas Negeri Yogyakarta
- Herman Dwi Surjono, (2010), Membangun Course E-Learning Berbasis Moodle, UNY Press
- Honey dan Mumford (1992) Honey, P., & Mumford, A. (1992). *The Manual of Learning Styles* (3rd ed.).Maidenhead, UK: Peters Honey.
- James, W. B., & Blank, W. E. (1993). Review and critique of available learningstyle instruments for adults. In D. Flannery (Ed.), *Applying cognitive learning styles* San Francisco: Jossey-Bass.
- McLoughlin, C. (1999). The implications of research literature on learning styles for the design of instructional material. *Australian Journal of Educational Technology*, 15(3)
- Muhammad Faiq Dzaki, Karakteristik Peserta Didik dalam Proses Pembelajaran, <http://www.scribd.com/doc/47228121/KARAKTERISTIK-PESERTA-DIDIK-DALAM-PROSES-PEMBELAJARAN>
- Rose, Colin, (1987). Accelerated Learning. New York: Bantam Dell Pub Group

Sofiyatin, (2011), Aspek kognitif (penguasaan intelektual), <http://id.shvoong.com/social-sciences/education/2143464-aspek-kognitif-penguasaan-intelektual/#ixzz1Lh4uXw4e>

Sfenrianto, (2009), Model Adaptive E-Learning System (AES) Berbasis Motivasi Mahasiswa, Fakultas Ilmu Komputer, Universitas Indonesia

Triantafillou, Evangelos, et.al., AES-CS: Adaptive Educational System based on Cognitif Style, Computer Science Department, Aristotle University of Thessaloniki

MENGEMBANGKAN KARAKTER SISWA MELALUI PEMBELAJARAN MATEMATIKA

Ali Mahmudi

Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY Yogyakarta

Abstrak

UU No. 20 Tahun 2003 tentang Sistem Pendidikan Nasional pasal 3 mengamanatkan bahwa pendidikan nasional berfungsi mengembangkan dan membentuk karakter serta peradaban bangsa yang bermartabat dalam rangka mencerdaskan kehidupan bangsa. Rumusan ini menegaskan mengenai kualitas manusia Indonesia yang harus dikembangkan oleh setiap satuan pendidikan. Tujuan pendidikan nasional yang bersifat normatif ini harus dijabarkan, dieksplicitkan, dan diimplementasikan dalam praktik pembelajaran, termasuk pembelajaran matematika. Pembelajaran matematika harus dirancang dengan baik sedemikian sehingga dapat digunakan sebagai wahana dalam membelajarkan karakter positif siswa. Melalui pembelajaran matematika, secara implisit maupun eksplisit, dapat dibelajarkan berbagai karakter positif, seperti kemampuan berpikir kritis, logis, cermat, analitis, runtut, sistematis, dan konsisten dalam bersikap, bahkan untuk mengembangkan nilai-nilai kemanusiaan. Pembelajaran yang demikian perlu dilakukan secara konsisten sehingga akan menimbulkan pembiasaan bagi siswa yang apabila melampaui batas tertentu, kebiasaan itu menjadi milik siswa dan membudaya dalam dirinya.

Kata kunci: pembelajaran matematika, karakter

PENDAHULUAN

Dalam kehidupannya, setiap individu menghadapi masalah, dalam skala sempit maupun luas, sederhana maupun kompleks. Kompleksitas masalah tersebut kian bertambah seiring derasnya arus globalisasi dan kian kompleksnya tantangan hidup. Setiap individu memerlukan kemampuan maupun karakter strategis agar sukses dalam menyelesaikan berbagai masalah dan menghadapi berbagai tantangan, di dunia kerja maupun dalam kehidupan pribadi.

Untuk menggapai kesuksesan dalam dunia kerja maupun dalam kehidupan pribadi, seseorang tidak hanya memerlukan keterampilan yang bersifat teknis, melainkan juga keterampilan yang bersifat nonteknis. Pentingnya kemampuan yang bersifat nonteknis ini digambarkan oleh Beach (Tim Program Hibah Kompetisi Berbasis Institusi Universitas Udayana, 2010) yang menunjukkan bahwa sebanyak 87% orang kehilangan pekerjaan atau gagal dipromosikan karena memiliki gaya hidup dan perilaku yang tidak baik, selain karena keterampilan kerja atau pengetahuan yang belum mencukupi.

Salah satu keterampilan yang bersifat nonteknis yang mendukung kesuksesan individu tersebut adalah karakter individu. Institusi pendidikan memiliki tanggung jawab untuk mengembangkan karakter siswa melalui pembelajaran sebagaimana diamanahkan oleh UU No. 20 Tahun 2003 tentang Sistem Pendidikan Nasional pasal 3 yang menyebutkan bahwa pendidikan nasional berfungsi mengembangkan dan membentuk karakter serta peradaban bangsa yang bermartabat dalam rangka mencerdaskan kehidupan bangsa. Rumusan ini menegaskan mengenai kualitas manusia Indonesia yang harus dikembangkan oleh setiap satuan pendidikan. Tujuan pendidikan nasional yang bersifat normatif ini harus dijabarkan, dieksplicitkan, dan diimplementasikan dalam praktik pembelajaran, termasuk pembelajaran matematika.

Pembelajaran matematika harus dirancang dengan baik sedemikian sehingga dapat digunakan sebagai wahana dalam membelajarkan karakter positif siswa. Melalui pembelajaran matematika, secara implisit maupun eksplisit, dapat dibelajarkan kepada siswa berbagai karakter positif, seperti kemampuan berpikir kritis, logis, cermat, analitis, runtut, sistematis, dan konsisten dalam bersikap, bahkan untuk mengembangkan nilai-nilai kemanusiaan. Pembelajaran yang demikian perlu dilakukan secara konsisten sehingga akan menimbulkan pembiasaan bagi siswa

yang apabila melampaui batas tertentu, kebiasaan itu menjadi milik siswa dan membudaya dalam dirinya.

PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan diuraikan mengenai karakter dan pengembangannya melalui pembelajaran matematika.

1. Pengembangan Karakter

Setiap orang memerlukan kompetensi tertentu untuk sukses dalam dunia kerja maupun dalam kehidupan pribadinya. Berdasarkan survei yang dilakukannya, Ruben dan DeAngelis (Tim Program Hibah Kompetensi Berbasis Institusi Universitas Udayana, 2010) mengidentifikasi kompetensi atau karakter yang diperlukan seseorang untuk sukses di dunia kerja maupun dalam kehidupan pribadinya. Karakter-karakter tersebut adalah karakter personal, sosial, dan karakter organisasi. Sementara menurut Pulliam (2008), kompetensi yang paling dikehendaki dunia kerja adalah kompetensi berkomunikasi, kejujuran, keterampilan interpersonal, memiliki motivasi/inisiatif, memiliki etika kerja yang kuat, bekerja dalam tim, berpikir analitis, fleksibilitas/adaptabilitas, dan berorientasi pada ketelitian (*detail oriented*).

Hasil survei NACE USA (Tim Program Hibah Kompetensi Berbasis Institusi Universitas Udayana, 2010) juga menyebutkan 14 kompetensi atau karakteristik yang harus dimiliki individu untuk sukses dalam dunia kerja. Kompetensi-kompetensi atau karakteristik-karakteristik tersebut adalah kemampuan komunikasi, kejujuran/integritas, kemampuan bekerja sama, kemampuan interpersonal, beretika, memiliki motivasi/inisiatif, kemampuan beradaptasi, daya analitik, penguasaan komputer, kemampuan berorganisasi, berorientasi pada kedetailan, kepemimpinan, kepercayaan diri, dan ramah.

Pusat Data dan Analisis Tempo ((Tim Program Hibah Kompetensi Berbasis Institusi Universitas Udayana, 2010) juga melakukan survei mengenai karakter juara pilihan dunia kerja sebagaimana disajikan pada tabel berikut.

Tabel 1. Peringkat Karakter Pencari Kerja yang Dituntut Dunia Kerja

| No | Karakter Juara | Persentase |
|----|--------------------------------|------------|
| 1 | Mau bekerja keras | 9,03 |
| 2 | Kepercayaan diri tinggi | 8,75 |
| 3 | Memiliki visi ke depan | 8,37 |
| 4 | Mampu bekerja dalam tim | 8,07 |
| 5 | Memiliki perencanaan matang | 7,91 |
| 6 | Mampu berpikir analitis | 7,82 |
| 7 | Mudah beradaptasi | 7,12 |
| 8 | Mampu bekerja dalam tekanan | 5,91 |
| 9 | Cakap berbahasa Inggris | 5,27 |
| 10 | Mampu mengorganisasi pekerjaan | 5,26 |

Berbagai karakter yang diuraikan di atas hendaknya dijadikan acuan dalam melaksanakan pembelajaran yang memungkinkan tumbuhnya berbagai karakter tersebut. Harus diakui jika karakter-karakter tersebut belum dikembangkan secara optimal di sekolah. Memang, hal itu tidak terdapat secara eksplisit di kurikulum sekolah. Namun perlu dipahami bahwa kurikulum bukan sekadar kompilasi dari sejumlah mata pelajaran. Kurikulum merupakan rencana perjalanan edukatif yang disusun untuk mengantarkan peserta didik ke tujuan tertentu yang telah dirumuskan (Buchori, 2000). Seharusnya, kegiatan pembelajaran yang dilaksanakan dapat mengintegrasikan berbagai kecakapan atau karakter tersebut.

2. Pengembangan Karakter melalui Pembelajaran Matematika

Matematika mempunyai peranan yang cukup strategis dalam perkembangan IPTEK. Namun, bukan semata-mata karena hal ini matematika perlu dipelajari. Para pendidik matematika hendaknya bertanya pada diri sendiri, sebenarnya untuk apakah matematika diajarkan kepada siswa. Apakah dimaksudkan agar siswa mengetahui semua materi matematika yang ada atau

sebanyak mungkin mengetahui matematika? Tentu bukan. Pembelajaran matematika tidak hanya dimaksudkan untuk mencerdaskan siswa, tetapi juga untuk menghasilkan siswa yang mempunyai daya nalar dan berkepribadian dan berkarakter baik (Soedjadi, 1999). Hal ini dapat dimengerti, sebab tidak semua siswa yang menerima pelajaran matematika pada akhirnya akan tetap menggunakan atau menerapkan matematika yang dipelajari. Padahal hampir semua siswa memerlukan penalaran dan kepribadian yang baik dalam kehidupan sehari-hari.

Melalui pembelajaran matematika siswa diharapkan dapat berpikir secara logis, rasional, kritis, cermat, efisien, efektif, jujur, dan mempunyai integritas tinggi. Kecakapan-kecakapan atau karakter-karakter inilah yang sesungguhnya sangat diperlukan siswa untuk dapat menghadapi kehidupan di era globalisasi yang penuh dengan ketidakpastian dan sarat dengan persaingan yang ketat. Siswa tidak hanya dipersiapkan untuk mempunyai kecakapan-kecakapan yang berkaitan dengan olah pikir dan daya nalar, melainkan juga dipersiapkan agar mempunyai kepribadian, integritas, dan karakter yang baik. Mudah dimengerti dan dapat dibayangkan apa yang akan terjadi seseorang yang mempunyai kemampuan, pengetahuan, keterampilan, dan kemauan serta etos kerja yang tinggi tetapi tidak dilandasi oleh sikap dan moralitas yang tinggi.

Apakah karakter-karakter sebagaimana dikemukakan di atas dapat dikembangkan melalui pembelajaran matematika? Dengan berbagai karakteristiknya, pembelajaran matematika yang dirancang dengan baik dapat digunakan sebagai sarana untuk menumbuhkan berbagai karakter tersebut. Sebagai ilustrasi, sebagaimana diketahui, dalam matematika banyak dijumpai adanya definisi dan teorema. Setiap definisi pada dasarnya adalah kesepakatan yang harus ditaati penggunaannya (Mardiyono, 2005). Begitu pula teorema pada dasarnya adalah aturan yang harus ditaati pula. Dapat dibayangkan apa yang akan terjadi jika berbagai kesepakatan (definisi) dan aturan (teorema) tidak ditaati, tentu akan terjadi banyak kerancuan dan kekacauan. Konsistensi penggunaan kesepakatan dan aturan ini erat sekali dengan sikap dan karakter seseorang. Dengan demikian, kualitas sikap dan karakter seseorang yang sangat diperlukan dalam kehidupan manusia berpeluang besar untuk dapat diperoleh dan dikembangkan melalui pembelajaran matematika. Berbagai karakter lain seperti kecermatan dan kemampuan berpikir kritis dapat ditumbuhkan melalui aktivitas pemecahan masalah dalam pembelajaran matematika. Sementara berbagai karakter seperti kemampuan bekerja sama, mengorganisasi, dan menghargai pendapat orang lain dapat ditumbuhkan melalui aktivitas pembelajaran matematika dalam *setting* diskusi kelas. Dengan demikian, matematika dapat digunakan dan difungsikan sebagai wahana untuk menumbuhkembangkan kecerdasan, kemampuan, keterampilan, serta untuk membentuk karakter siswa.

Dalam konteks pembelajaran matematika, karakter-karakter positif yang dapat dikembangkan sering diistilahkan dengan nilai-nilai matematis (*mathematics value*). Menurut Bishop (1998), *values in mathematics education is the deep affective qualities which education fosters through the school subject of mathematics*. Nilai-nilai dalam pembelajaran atau pendidikan matematika merupakan komponen penting dalam pembelajaran matematika di kelas. Nilai-nilai itu dapat dibelajarkan kepada siswa baik secara implisit maupun eksplisit dalam pembelajaran matematika. Misalnya, melalui rangkaian langkah-langkah pemecahan masalah, siswa dilatih untuk bersikap kritis, cermat, runtut, analitis, rasional, dan efisien.

Menurut Taplin (2003), terdapat beberapa nilai-nilai atau karakter-karakter universal yang perlu dibelajarkan kepada siswa. Karakter-karakter tersebut di antaranya adalah: (1) kejujuran, (2) bertindak (berperilaku) benar dan tepat, efisiensi, hidup sehat, dan hemat, (3) kedamaian, seperti ketenangan, kepuasan, kesabaran, konsentrasi, optimisme, penerimaan diri, disiplin, dan percaya diri, (4) cinta, seperti belas kasih, mudah memberi maaf, dan toleransi, dan (5) antikekerasan, seperti kebajikan, kerjasama, menghargai keberagaman, menghargai kehidupan, menghargai kepemilikan, dan memperhatikan keseimbangan ekologi.

Aspek-aspek karakter yang dapat dikembangkan dalam pembelajaran matematika secara umum dapat dibedakan menjadi dua macam, yakni aspek-aspek karakter dalam pendidikan secara umum (juga yang berkembang secara umum di masyarakat) dan aspek-aspek karakter dalam matematika (juga dalam pendidikan matematika). Sebagai ilustrasi, ketika guru mengharuskan siswa untuk bertindak jujur dalam mengerjakan tes, maka nilai-nilai kejujuran, perilaku yang baik, yang secara umum berasal dari nilai-nilai pendidikan secara umum, telah dikenalkan guru kepada siswa. Sedangkan ketika siswa mendeskripsikan dan membandingkan beberapa pembuktian yang

berbeda dari teorema Pythagoras, nilai-nilai matematika seperti rasionalitas, keterbukaan, dan kecermatan telah dikenalkan dan dilatihkan kepada siswa.

Berdasarkan uraian di atas, sesungguhnya untuk membelajarkan berbagai kecakapan dan karakter positif kepada siswa tidak diwujudkan dengan memberikan mata pelajaran tertentu yang baru, tidak perlu menambah alokasi waktu, tidak memerlukan tambahan guru baru, melainkan dapat diintegrasikan dalam mata pelajaran yang ada. Pembelajaran demokrasi misalnya, selain dapat dilakukan melalui aktivitas diskusi sebagaimana dikemukakan di muka, juga dapat dilekatkan secara substansial pada materi matematika tertentu. Sebagai contoh, terdapat beragam definisi persegi yang dapat dikonstruksi siswa. Misalnya, persegi dapat didefinisikan sebagai segiempat yang keempat sisinya saling kongruen dan sudut-sudutnya siku-siku. Persegi dapat pula didefinisikan sebagai persegipanjang yang sisi-sisinya saling kongruen. Selain itu, dapat pula didefinisikan, persegi adalah belah ketupat yang salah satu sudutnya siku-siku. Dalam hal ini dapat ditekankan kepada siswa bahwa meskipun tampak berbeda, berbagai pendapat boleh jadi secara substansial benar. Hal ini akan melatih siswa untuk menghargai pendapat orang lain dan tidak bersikukuh bahwa hanya pendapatnya sendiri yang paling benar.

Berikut diberikan beberapa contoh pengintegrasian berbagai karakter dalam pembelajaran matematika. Salah satu cara dimaksud melalui pembelajaran pemecahan masalah. Pemecahan masalah merupakan bagian yang penting dan merupakan salah satu tujuan pembelajaran matematika. Melalui pemecahan masalah, diharapkan siswa dapat mengembangkan kemampuan-kemampuan berpikir kritis, cermat, dan bernalar dengan baik. Kemampuan-kemampuan yang demikian begitu penting dikuasai siswa sebagai bekal untuk menghadapi tantangan hidup kelak. Berikut adalah contoh masalah yang melibatkan banyak informasi yang menuntut siswa untuk memilah dan memanfaatkannya dalam menyelesaikan masalah.

Minggu lalu Adi melakukan perjalanan dengan kereta api sejauh 1093 km. Kereta api berangkat pukul 08.00. Setelah melakukan perjalanan 4 jam dengan kecepatan rata-rata 86 km/jam kereta api berhenti di stasiun berikutnya selama 1½ jam. Kemudian kereta api melakukan perjalanan lagi selama 3 jam dengan kecepatan rata-rata 78 km/jam hingga berhenti di stasiun terakhir. Berapa kilometer jarak yang ditempuh oleh kereta api itu?

Untuk dapat menyelesaikan masalah seperti di atas, siswa tidak dapat hanya menggunakan pengetahuan dari buku mereka. Siswa dituntut untuk dapat memilih informasi-informasi yang relevan yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah itu.

Cara lain yang dapat digunakan untuk mengembangkan daya nalar siswa adalah dengan memberikan informasi yang kurang lengkap pada suatu masalah (soal). Masalah seperti ini sering disebut dengan masalah *Fermi* (Taplin, 2003). Dengan menggunakan daya nalar dan pengalamannya, diharapkan siswa dapat memperoleh jawaban yang rasional terhadap masalah itu. Masalah seperti ini akan lebih baik jika diselesaikan dalam konteks diskusi kelompok atau pembelajaran kooperatif. Berikut adalah contoh-contoh masalah *Fermi* yang menuntut siswa untuk mempunyai kepedulian terhadap masalah-masalah sosial.

- *Berapa liter bensin yang dibutuhkan di kota Anda setiap hari?*
- *Berapa rupiah yang dapat dihemat jika orang-orang menggunakan alat transportasi umum dibandingkan menggunakan kendaraan pribadi?*

Masalah *Fermi* juga dapat digunakan untuk membelajarkan nilai-nilai atau karakter kemanusiaan (Taplin, 2003). Ketika seorang guru akan mengajarkan topik nilai uang, ia terlebih dahulu dapat memberikan cerita tentang seorang anak yang bersedih karena gagal membujuk orang tuanya untuk membelikannya sepatu olah raga yang mahal di hari ulang tahunnya. Anak itu merasa orang tuanya tidak menyayanginya. Orang tuanya begitu sedih akan anggapan itu. Mereka berharap agar anaknya memahami kondisi keuangan keluarga. Mereka bertanya kepada anak itu, berapa banyaknya uang yang harus dikeluarkan untuk keperluannya? Sayangnya, anak itu tidak dapat memberikan jawaban. Berdasarkan cerita tersebut, guru dapat mengajukan beberapa pertanyaan kepada siswa seperti berikut ini.

- *Berapa banyaknya uang yang dikeluarkan oleh orang tuamu untuk memenuhi keperluanmu setiap tahun?*
- *Berapa banyaknya uang yang dikeluarkan oleh orang tuamu untuk memenuhi keperluanmu hingga sekarang?*

Pertanyaan-pertanyaan tersebut merupakan pertanyaan terbuka yang memungkinkan diperolehnya jawaban beragam. Diharapkan siswa menyadari bahwa uang yang mereka terima dari orang tua mereka begitu besar, sesuatu yang kadang tidak mereka duga sebelumnya. Hal ini pula yang hendaknya dapat menyadarkan siswa untuk tidak selalu menghendaki agar keinginannya harus selalu dituruti oleh orang lain, juga orang tua mereka. Hal yang demikian diharapkan dapat menumbuhkan karakter-karakter positif pada diri siswa, seperti sifat hemat, peka, dan peduli terhadap kesulitan orang lain.

Guru juga dapat menggunakan masalah *non-rutin* untuk menumbuhkan berbagai karakter positif lainnya. Masalah *non-rutin* dapat digunakan untuk mendorong tumbuhnya kemampuan berpikir logis dan mengembangkan strategi pemecahan masalah yang dapat diaplikasikan pada situasi lain. Berikut adalah contoh masalah *non-rutin* yang menuntut kemampuan berpikir tingkat tinggi.

Tentukan suatu bilangan yang memenuhi sifat berikut.

- *Jika dibagi 3 sisanya adalah 1*
- *Jika dibagi 4 sisanya adalah 2*
- *Jika dibagi 5 sisanya adalah 3*
- *Jika dibagi 6 sisanya adalah 4*

Salah satu topik matematika yang dapat digunakan untuk membelajarkan sikap kepedulian terhadap lingkungan dan hemat energi adalah statistika, khususnya penyajian data. Untuk mengawali pembelajaran, guru dapat meminta siswa untuk memprediksi banyaknya kertas yang mereka gunakan setiap minggu. Gunakan tabel untuk menyajikan data yang diperoleh siswa. Tanyakan kepada siswa, apakah mereka terkejut? Apakah mereka menggunakan kertas terlalu banyak? Mengapa penggunaan kertas pada hari atau minggu tertentu lebih banyak daripada hari/minggu-minggu yang lain? Apakah mereka mempunyai ide untuk lebih menghemat kertas? Apakah kampanye penghematan kertas akan berhasil? Diskusikan jawaban siswa. Jawaban-jawaban siswa dapat digunakan sebagai dasar untuk menumbuhkan sifat hemat dan kepedulian pada lingkungan.

Cara lain yang dapat dikembangkan untuk membelajarkan karakter atau nilai kemanusiaan adalah dengan menyampaikan sejarah atau biografi tokoh-tokoh matematika. Salah satu tokoh matematika yang terkenal adalah Maria Agnesi (1718-1799). Ia seorang tokoh matematika berkebangsaan Italia yang mempunyai andil besar terhadap perkembangan Kalkulus. Ketika kecil, ia sering membantu belajar anak-anak yang lebih kecil darinya, selain menyelesaikan studinya sendiri. Pada usia dua puluh tahun, ia mengawali suatu proyek penulisan buku yang kemudian diberi judul *Analytic Institution*. Kadang, ia menemui masalah dalam menyelesaikan penulisan buku itu. Namun, pikirannya senantiasa bekerja, bahkan ketika ia tidur. Pernah, dalam kondisi tidur, ia berjalan ke meja kerjanya untuk menuliskan sesuatu kemudian kembali lagi ke tempat tidurnya. Di pagi harinya, ia telah menemukan jawaban atas masalah yang dihadapinya. Buku yang ditulisnya menjadikannya terkenal. Dalam buku ini, ia membuktikan pernyataan yang pernah dikemukakannya ketika ia berumur 9 tahun. Selain matematika, Maria juga mempunyai minat pada bidang lain. Ia bergaul dan bekerja dengan masyarakat miskin di daerah tempat ia tinggal. Bahkan ia meminta kepada ayahnya untuk menjadikan sebagian ruangnya sebagai rumah sakit pribadi. Ia juga bekerja di suatu rumah sakit hingga ia meninggal pada usia 81 tahun. Ia sering membantu orang-orang yang tidak beruntung dan tidak memperoleh kesempatan. Biografi ini dapat digunakan sebagai sarana untuk mengembangkan berbagai sikap positif pada diri siswa seperti ketekunan, kegigihan, dan kepedulian sosial.

Jumsai (Taplin, 2003) menyarankan salah satu alternatif cara untuk mengembangkan nilai-nilai atau karakter-karakter dalam pembelajaran matematika, yakni dengan menyusun soal-soal yang memuat karakter-karakter positif, atau mengkalimatkan ulang sebuah soal (*rewording problems*) yang telah ada. Melalui soal-soal dimaksud, diharapkan tersampaikan pesan kepada siswa mengenai perilaku positif yang dikehendaki. Sebagai contoh, misal terdapat soal sebagai berikut.

Seorang petani mempunyai 35 ekor sapi. Seorang pencuri mengambil 14 dari sapi-sapi itu. Berapakah banyaknya sapi petani itu sekarang?

Soal itu dapat dikalimatkan ulang sehingga mengandung nilai-nilai positif, sebagai berikut.

Seorang petani mempunyai 35 ekor sapi. Petani itu baik hati sehingga ia memberikan 14 sapi kepada orang-orang yang memerlukannya. Berapakah banyaknya sapi petani itu sekarang?

Pesan yang diharapkan tersampaikan kepada siswa dengan penyusunan soal di atas adalah berkembangnya karakter-karakter positif pada diri siswa, seperti bermurah hati, mempunyai rasa empati, suka menolong, dan sebagainya.

Berbagai karakter positif akan lebih efektif ditumbuhkembangkan dalam konteks sosial, melalui diskusi kelas. Siswa akan lebih mudah mencapai pemahaman pada banyak topik matematika jika mereka diberikan kesempatan untuk bekerja sama secara berpasangan atau melalui diskusi kelompok kecil.

KESIMPULAN

Pembelajaran matematika yang dirancang dengan baik dapat dimanfaatkan untuk membelajarkan karakter seperti kemampuan berpikir kritis, logis, cermat, analitis, runtut, sistematis, dan konsisten dalam bersikap, bahkan untuk mengembangkan nilai-nilai kemanusiaan. Pembelajaran yang demikian perlu dilakukan secara konsisten sehingga akan menimbulkan pembiasaan bagi siswa yang apabila melampaui batas tertentu, kebiasaan itu menjadi milik siswa dan membudaya dalam dirinya.

DAFTAR PUSTAKA

- Bishop, A. et al. 1998. *Values in Mathematics Education: Making Values Teaching Explicit in The Mathematics Classroom*. [Online]. Tersedia; <http://www.aare.edu.au/99pap/bis99188.htm>. [9 September 2008]
- Buchori, M. 2000. *Peranan Pendidikan dalam Pembentukan Budaya Politik di Indonesia*. Makalah Seminar Nasional berjudul “Quo Vadis Pendidikan di Indonesia” yang diselenggarakan oleh Universitas Sanata Dharma Yogyakarta pada 21 – 23 Agustus 2000.
- Mardiyono, S. 2005. *Inovasi Pembelajaran Matematika dan Sistem Evaluasinya Berdasarkan Kurikulum Berbasis Kompetensi*. Makalah Seminar Nasional Pendidikan Matematika yang diselenggarakan oleh Himpunan Mahasiswa Pendidikan Matematika FMIPA UNY Yogyakarta pada 27 Maret 2005.
- Soedjadi, R. 1999. *Kiat Pendidikan Matematika di Indonesia (Konstataasi Keadaan Masa Kini Menuju Harapan Masa Depan)*. Jakarta: Ditjen Dikti Depdikbud.
- Taplin, M. 2003. *Teaching Values through a Problem Solving Approach to Mathematics*. [Online] Tersedia: http://www.mathgoodies.com/articles/teaching_values.shtm. [9 September 2008].
- Pulliam, M.G. (2008). *Skill Employer Seek. Career Corner, Excelsior College*. [Online]. Tersedia: http://www.excelsior.edu/Excelsior_College/Publications/Skills_Employers_Seek_16.pdf. [3 April 2011].
- Tim Program Hibah Kompetensi Berbasis Institusi Universitas Udayana. 2010. *Konsep Pengembangan Panduan Evaluasi Pengembangan Soft-Skill Mahasiswa melalui proses Pembelajaran di Universitas Udayana*. Udayana: Universitas Udayana Bali.

MENINGKATKAN *SOFT SKILLS* MAHASISWA MELALUI PEMAHAMAN PROSES BERPIKIR DALAM MEMECAHAN MASALAH MATEMATIKA BERDASAR TIPE KEPRIBADIAN

M.J. Dewiyani S

Program Studi Sistem Informasi, STIKOM Surabaya
Email : dewiyani@stikom.edu

Abstrak

Tuntutan masyarakat terhadap pendidikan tinggi dalam mempersiapkan mahasiswa menjadi insan yang utuh, saat ini semakin kompleks. Perguruan Tinggi tidak cukup hanya mempersiapkan kemampuan dari segi materi, atau *hard skills* saja, namun tuntutan terhadap perilaku personal dan interpersonal yang mengembangkan dan memaksimalkan kinerja, *soft skills*, juga harus dipersiapkan. Pembelajaran *soft skills* harus diintegrasikan sedemikian teratur dan membentuk satu sistem, yang dikenal sebagai *soft skills managemen system*. Dari segi *hard skills*, pemecahan masalah (*problem solving*) merupakan salah satu bagian penting dari matematika. Pemecahan masalah dianggap penting karena dengan kemampuan memecahkan masalah yang didapat, peserta didik dapat menggunakannya untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari, atau dengan perkataan lain, matematika digunakan untuk hidup, dan bukan hidup untuk matematika. Namun, karena sifatnya yang abstrak menyebabkan pemecahan masalah ini sering dianggap sulit oleh mahasiswa. Berdasarkan penelitian terdahulu, Dewiyani (2010), menemukan salah satu cara untuk mengatasi kesulitan tersebut, yaitu dengan mengenal proses berpikir masing-masing mahasiswa yang digolongkan berdasar tipe kepribadian dalam memecahkan masalah. Dengan dikenalnya proses berpikir mahasiswa yang telah digolongkan berdasar tipe kepribadian, maka pengajar lebih mudah untuk meningkatkan kemampuan pemecahan masalah bagi mahasiswa. Setelah profil proses berpikir mahasiswa dalam memecahkan masalah matematika berdasar penggolongan tipe kepribadian ditemukan, maka pada kajian kali ini, dengan memanfaatkan hasil tersebut, akan diupayakan untuk meningkatkan *soft skills* mahasiswa. Hal ini dimungkinkan, karena dengan tipe kepribadian yang berbeda, akan membawa pengaruh pada perilaku personal maupun interpersonal yang berbeda, yang menjadi unsur penting dalam pengembangan kinerja. Ini berarti bahwa profil proses berpikir juga akan berpengaruh terhadap perilaku personal maupun interpersonal mahasiswa, sehingga atribut *soft skills* tertentu yang dirasa kurang akan dapat ditingkatkan. Hasil yang didapat dari kajian ini menunjukkan bahwa karakter maupun atribut *soft skills* setiap mahasiswa memang berbeda, dan dapat ditingkatkan melalui pengenalan terhadap profil proses berpikir berdasar penggolongan tipe kepribadiannya.

Kata kunci : *soft skills*, proses berpikir, pemecahan masalah matematika, penggolongan tipe kepribadian.

PENDAHULUAN

Latar Belakang Masalah

Menurut survey yang diadakan oleh National Association of Colleges and Employers (NACE) pada tahun 2002 di Amerika Serikat, dari hasil jajak pendapat pada 457 pengusaha diperoleh kesimpulan bahwa Indeks Prestasi hanyalah menempati urutan 17 dari 20 kualitas yang dianggap penting dari seorang lulusan universitas. Kualitas yang menempati peringkat atas justru hal-hal yang tidak disebut dalam iklan lowongan kerja, seperti kemampuan berkomunikasi, integritas dan kemampuan bekerja sama dengan orang lain. Kualitas-kualitas ini tidak terlihat wujudnya (*intangible*) namun ternyata sangat diperlukan. Seseorang dengan kemampuan yang luar biasa, namun tidak memiliki kemampuan bekerja sama, misalnya, akan sangat menyulitkan bagi organisasi tersebut. Kemampuan seperti disebut di atas, dikenal dengan nama *soft skills*.

Demikian pentingnya *soft skills* pada waktu seorang lulusan perguruan tinggi bekerja, maupun seandainya lulusan tersebut berwiraswasta, menyebabkan perguruan tinggi saat ini mulai berusaha untuk meningkatkan *soft skills* mahasiswanya, meskipun banyak diantaranya belum bersistem. Akan menjadi semakin sempurna apabila pembinaan *soft skills* diimplementasikan dengan sistem, yang dikenal sebagai *soft skills management system*. Pada *soft skills management system*, pencapaian *soft skills* yang diharapkan harus direncanakan, dilaksanakan dan dievaluasi, agar dapat terlihat dengan jelas arah perkembangan dan pencapaiannya.

Sebagai wujud perencanaan *soft skills management system*, akan dikaji cara untuk meningkatkan atribut *soft skills* bagi mahasiswa dengan menggunakan pendekatan tipe kepribadian, yang pada kajian ini akan menggunakan penggolongan menurut David Keirsey. Pendekatan ini diambil karena dari hasil pengamatan langsung sebagai seorang pengajar, setiap orang mempunyai karakter yang berbeda-beda, sehingga cara belajar maupun atribut *soft skills* yang dimiliki juga tergantung dari karakter masing-masing.

Perumusan Masalah.

Masalah yang akan dikaji pada kajian kali ini adalah : Bagaimana meningkatkan atribut *soft skills* mahasiswa melalui pemahaman proses berpikir dalam memecahkan masalah matematika berdasar tipe kepribadian ?.

Urgensi Masalah.

Masalah dalam kajian ini menjadi penting sebab Perguruan Tinggi saat ini diharuskan mengambil peran penting dalam pengembangan *soft skills* mahasiswa, dengan cara mendefinisikan *soft skills* yang memang penting diadopsi dalam kurikulum, penyusunan program pengembangan dengan memasukan *soft skills* yang telah ditentukan ke dalam rancangan pembelajaran dan mengevaluasi *soft skills* dengan menentukan alat ukur yang sesuai untuk menilai *soft skills* yang telah di masukan ke dalam kurikulum program studi.

Kajian kali ini lebih memfokuskan diri pada pendefinisian *soft skills*, berupa penentuan atribut *soft skills* yang harus ditingkatkan pada masing-masing tipe kepribadian melalui pengenalan terhadap proses berpikir dalam memecahkan masalah matematika.

Setelah atribut *soft skills* pada masing-masing tipe kepribadian dapat ditentukan, maka langkah selanjutnya adalah membuat model pembelajaran dan perangkat pembelajarannya. Dengan demikian, Perguruan Tinggi mampu membekali mahasiswanya dalam kedua aspek yang dibutuhkan saat ini, yaitu penguasaan materi melalui profil proses berpikir dalam memecahkan masalah matematika, maupun atribut *soft skills* yang dibutuhkan sebagai sarana dalam pendekatan *interpersonal* maupun *intrapersonal*.

PEMBAHASAN

1. Profil Proses Berpikir Mahasiswa dalam Memecahkan Masalah Matematika.

Pada sub bab ini, akan dibahas profil proses berpikir mahasiswa dalam memecahkan masalah matematika berdasar penggolongan tipe kepribadian. Dwiyani (2010) dalam penelitiannya, telah memperolehnya, dengan menggunakan penggolongan tipe kepribadian menurut David Keirsey. Hasilnya adalah sebagai berikut :

a. Tipe Rational

Proses berpikir mahasiswa dengan tipe *Rational* dalam memecahkan masalah matematika, berdasar langkah-langkah Polya, dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut :

Memahami masalah oleh tipe ini dimulai dengan menangkap situasi pada soal secara urut dan utuh, berupa makna pada setiap kalimat, dan dengan menggunakan simbol, sehingga subjek dapat menemukan dengan tepat hal yang diketahui berdasar pada pertanyaan yang ada. Kaitan antara hal yang diketahui dan ditanyakan, ditentukan berdasar satuan yang digunakan, dan informasi yang dianggap oleh subjek terpenting adalah pada pertanyaan, karena informasi lain tidak akan berarti jika tidak menunjang pertanyaan. Informasi yang disimpan adalah pokok permasalahan, dan dituangkan dalam bentuk tulisan, yang berasal dari kerangka permasalahan, hingga dapat diceritakan kembali secara utuh dan lengkap.

Dalam **merencanakan pemecahan masalah**, subjek menggunakan prosedur bertahap yang disusunnya sendiri, berdasar soal yang pernah dijumpai sebelumnya, dengan urutan : jumlah penjualan, keuntungan, diakhiri dengan rata-rata keuntungan. Dengan rencana ini, subjek merasa yakin bahwa informasi pada soal cukup untuk menjawab masalah yang ada, karena analisis berdasar satuan yang terkait.

Dalam **menyelesaikan masalah**, subjek menggunakan rencana yang telah disusunnya.

Dalam **memeriksa kembali jawaban**, subjek mengubah urutan pengerjaan.

b. Tipe *Idealist*

Proses berpikir mahasiswa dengan tipe *Idealist* dalam memecahkan masalah matematika, berdasar langkah-langkah Polya, dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut :

Memahami masalah oleh tipe ini dimulai dengan menangkap situasi pada soal secara utuh dan utuh, berupa inti kalimat, sehingga subjek dapat menemukan dengan tepat hal yang diketahui berdasar pada pertanyaan yang ada. Kaitan antara hal yang diketahui dan ditanyakan, ditentukan berdasar kesamaan makna, dan informasi yang dianggap oleh subjek terpenting adalah banyaknya kenaikan penjualan setiap periode, karena informasi inilah yang akan menjawab pertanyaan. Informasi yang disimpan adalah inti kalimat, dan disimpan dalam bentuk tulisan, hingga dapat diceritakan kembali secara utuh dan lengkap.

Dalam **merencanakan pemecahan masalah**, subjek menggunakan konsep deret, dengan urutan : jumlah penjualan, keuntungan, diakhiri dengan rata-rata keuntungan. Dengan rencana ini, subjek merasa yakin bahwa informasi pada soal cukup untuk menjawab masalah yang ada, berdasar kegunaan masing-masing informasi.

Dalam **menyelesaikan masalah**, subjek menggunakan rencana yang telah disusunnya.

Dalam **memeriksa kembali jawaban** dengan mengubah perhitungan pada waktu menentukan jumlah penjualan dalam setahun.

c. Tipe *Artisan*

Proses berpikir mahasiswa dengan tipe *Artisan* dalam memecahkan masalah matematika, berdasar langkah-langkah Polya, dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut : **Memahami masalah** oleh subjek tipe ini dimulai dengan menangkap situasi pada soal dengan secara utuh namun tidak utuh, terhadap inti kalimat, namun lebih mementingkan pada pertanyaan. Hal yang diketahui dan ditanyakan ditemukan berdasar perumuman pada suatu soal, yaitu adanya angka yang dapat mengindikasikan hal yang diketahui, sedang hal yang ditanyakan berdasar jenis kalimat. Kaitan antara hal yang diketahui dan ditanyakan, ditentukan berdasar kesamaan kata, yaitu mengenai keuntungan. Tidak ada informasi terpenting, karena semua informasi mendukung terjawabnya pertanyaan. Informasi yang disimpan adalah pokok permasalahan, dan dengan menggunakan bantuan variabel dan tidak disimpan dalam bentuk tulisan, hingga dapat diceritakan kembali secara utuh dan lengkap.

Dalam **merencanakan pemecahan masalah**, subjek tidak menggunakan konsep tertentu, dengan urutan : jumlah penjualan, keuntungan, diakhiri dengan rata-rata keuntungan. Dengan rencana ini, subjek merasa yakin bahwa informasi pada soal cukup untuk menjawab masalah yang ada, berdasar kegunaan masing-masing informasi.

Dalam **menyelesaikan masalah**, subjek tidak menggunakan rencana yang telah disusunnya.

Dalam **memeriksa kembali jawaban** dengan memeriksa ulang operasi pembagian yang telah dibuatnya.

d. Tipe *Guardian*

Proses berpikir mahasiswa dengan tipe *Guardian* dalam memecahkan masalah matematika, berdasar langkah-langkah Polya, dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut :

Memahami masalah oleh subjek tipe ini dimulai dengan menangkap situasi pada soal dengan secara utuh dan utuh, dengan memberi tanda pada bagian yang menunjang rencana pemecahan masalah, hingga masing-masing informasi dapat dimaknai secara mendalam. Hal yang diketahui ditemukan berdasar inti kalimat, sedangkan hal yang ditanyakan ditemukan berdasar jenis kalimat. Kaitan antara hal yang diketahui dan ditanyakan, ditentukan berdasar kesamaan makna yaitu mengenai harga. Tidak ada informasi terpenting, karena semua informasi mendukung

terjawabnya pertanyaan. Informasi yang disimpan adalah pokok permasalahan, disimpan tanpa tulisan, hingga dapat diceritakan kembali secara utuh dan lengkap.

Dalam **merencanakan pemecahan masalah**, subjek tidak menggunakan konsep tertentu, namun sesuai inti kalimat, dan dengan urutan : jumlah penjualan, keuntungan, diakhiri dengan rata-rata keuntungan. Dengan rencana ini, subjek merasa yakin bahwa informasi pada soal cukup untuk menjawab masalah yang ada, berdasar kegunaan masing-masing informasi.

Dalam **menyelesaikan masalah**, subjek ternyata tidak menggunakan rencana yang telah disusunnya, menuangkan dalam bentuk tulisan.

Dalam **memeriksa kembali jawaban** dengan memeriksa kembali perhitungan.

2. Soft skills

Patrick (2001) menyatakan *soft skills* didefinisikan sebagai kemampuan non teknis yang tidak terlihat wujudnya (*intangible*) namun sangat diperlukan. Begitu banyaknya atribut *soft skills* yang dikenal di masyarakat kita, diantaranya yang dikenal dengan nama *Winning Characteristic*, yang terdiri dari *communication skills, organizational skills, leadership, logic, effort, group skills* dan *ethics*.

Sementara itu, Conrad dan Leigh (Dalam Szul. L. F 2002) mendefinisikan *soft skills* sebagai *...as nonthechnical skills, abilities, and traits required to function in a specific employment and can be placed in categories. Problem solving and other cognitive skills involve identifying problems and formulation and evaluating alternative solutions by wighing risks and benefit : Oral comunication skills include the abillity to speak well and listen well, personal qualities important to job performance include self esteem, selft management, responsibility, and motivation, interpersonal and teamwork skills are those needed to negoitate with others, to participate as a member as a member of a team, to serve clients and customers in a way that meets their expectations, and to resolve conflict maturely*

Hal ini mengartikan bahwa menurut pandangan di atas, kemampuan *soft skill* mencakup kemampuan memecahkan masalah dan kemampuan kognitif, kemampuan komunikasi dan kemampuan interpersonal dan bekerja sama. Masing-masing kemampuan dapat dikembangkan menurut karakter masing-masing bidang.

Dalam kaitannya dengan pembelajaran pada mata kuliah matematika, aspek pengembangan *soft skills* mencakup: kemampuan komunikasi secara tertulis atau lisan, kemampuan untuk bekerja dalam kelompok (tim) saat menyelesaikan soal-soal, kemampuan berpikir sintetis, kebijaksanaan dalam menyelesaikan masalah, kemampuan dalam memahami keragaman tipe mahasiswa lain, kemampuan bekerja secara mandiri, dan kemampuan berfikir analitik.

Mengenal Atribut *Soft skills* berdasar Penggolongan Tipe Kepribadian.

Setelah diketahui profil proses berpikir masing-masing tipe kepribadian, maka dapat dikaji atribut *soft skills* yang harus ditingkatkan berdasar profil yang ada.

a. Tipe *Rational*.

Menurut Dwiyani (2010), tipe *rational* senantiasa mengerjakan pemecahan masalah secara runtut dan utuh, yang mengartikan tipe ini mempunyai atribut *soft skills* dalam berpikir sintesis, teliti, mempunyai kebijaksanaan dalam menyelesaikan masalah, dan konsisten terhadap pendapatnya. Melalui model pembelajaran yang akan diciptakan, maka atribut *soft skills* yang sudah dimiliki, harus dapat dipertahankan dengan baik.

Sedangkan atribut *soft skills* yang harus dikembangkan oleh tipe ini adalah kemampuan menerima pendapat orang lain, yang sering terabaikan akibat tipe ini terlalu konsisten terhadap pendapatnya, hingga sering kurang dapat menerima pendapat orang lain. Selain itu, akibat kurangnya kemampuan menerima pendapat orang lain, maka kemampuan bekerja sama dalam sebuah kelompok juga dirasa harus ditingkatkan bagi tipe ini, tidak hanya dengan teman yang mempunyai tipe kepribadian yang sama, namun juga pada tipe kepribadian yang lain. Bagi tipe ini, harus diciptakan suatu model pembelajaran yang dapat menumbuhkan sikap kerja sama dan kemampuan untuk dapat menerima pendapat orang lain agar timbul kesadaran bahwa tidak selamanya pendapat sendiri itu selalu benar. Dengan kemampuan bekerja sama yang baik,

sekaligus akan meningkatkan kemampuan sosial dalam pergaulan, yang secara umum memang dirasa kurang, karena tipe ini termasuk dalam tipe *introvert*.

b. Tipe Idealist

Menurut Dewiyani (2010), tipe *idealist* mampu mendapatkan cara yang berbeda untuk memeriksa kebenaran jawaban pada soal yang dijumpainya. Ini mengartikan bahwa tipe ini mempunyai daya juang yang tinggi pada penyelesaian masalah, serta ingin mencapai kesempurnaan dalam penyelesaian masalah, terbukti dari diperiksanya kembali pekerjaan yang telah selesai dikerjakannya. Selain itu, tipe ini mempunyai kreativitas yang tinggi pula dalam penyelesaian masalah. Melalui model pembelajaran yang akan diciptakan, maka atribut *soft skills* yang sudah dimiliki, harus dapat dipertahankan dengan baik.

Sedangkan atribut *soft skills* yang harus dikembangkan oleh tipe ini adalah kemampuan untuk bertoleransi jika diletakkan dalam kelas besar, karena tipe ini sesungguhnya lebih menyukai kelas kecil. Bagi tipe ini, harus diciptakan suatu model pembelajaran yang dapat mendidik mereka untuk menerima lingkungan yang tidak hanya terdiri dari lingkungan yang terbatas saja, namun juga lingkungan yang terdiri dari macam-macam golongan.

c. Tipe Artisan

Menurut Dewiyani (2010), tipe *Artisan* mempunyai kemampuan untuk menghidupkan suasana yang ada, hingga menjadi bersemangat dan bergairah. Kemampuan bekerja sama tipe ini sangat bagus dan mampu mempengaruhi tipe lain untuk bekerja secara lebih baik. Segala pekerjaan didokumentasi dengan baik, karena tipe ini merasa tidak dapat mengingat tanpa menulis. Melalui model pembelajaran yang akan diciptakan, maka atribut *soft skills* yang sudah dimiliki, harus dapat dipertahankan dengan baik.

Atribut *soft skills* yang harus dikembangkan oleh tipe ini adalah kemampuan berpikir secara analitik dan kemampuan untuk mengabstraksi permasalahan. Selain itu, tipe ini juga harus mampu untuk dapat menerima tugas yang diberikan kepadanya meskipun diberikan tanpa tujuan dan arah yang jelas, sehingga justru kemampuan abstraksi yang diharapkan muncul pada tipe ini. Pengendalian emosi yang terkadang meledak-ledak pada tipe ini juga harus dikendalikan agar dapat lebih berkonsentrasi pada masalah yang dihadapi. Jadi, bagi tipe ini harus diciptakan suatu model pembelajaran yang dapat mengatasi kelemahan-kelemahan yang ada.

d. Tipe Guardian

Menurut Dewiyani (2010), tipe Guardian mempunyai kelebihan yaitu bertanggung jawab terhadap tugas yang diberikan kepadanya, tepat waktu, dan detail dalam menjabarkan tugas. Di samping itu, tipe ini mampu menjadi pemimpin yang mengarahkan dan melindungi anak buahnya. Daya ingat yang cukup kuat menyebabkan tipe ini selalu berusaha mengerjakan tugas dengan sempurna, meskipun cara yang digunakan sering tidak bervariasi, karena tipe ini lebih bersifat monoton dan kaku. Melalui model pembelajaran yang akan diciptakan, maka atribut *soft skills* yang sudah dimiliki, harus dapat dipertahankan dengan baik.

Adapun atribut *soft skills* yang perlu dikembangkan adalah fleksibel, mau menerima tugas meskipun tidak menguntungkan bagi dirinya, dan menciptakan variasi dalam bekerja. . Jadi bagi tipe ini, harus diciptakan suatu model pembelajaran yang dapat menumbuhkan fleksibilitas dalam menerima tugas meskipun dalam tujuan apapun.

PENUTUP

Kesimpulan

Berdasarkan hasil kajian yang telah didapatkan, maka dikemukakan beberapa simpulan sebagai berikut:

- a. Atribut *soft skills* mahasiswa dapat ditingkatkan melalui pengenalan masing-masing tipe kepribadian terhadap atributnya.
- b. Peserta didik dengan tipe *Rational*, sangat kaya akan imajinasi, serta bekerja berdasar daya nalar yang tinggi. Tipe soal yang lebih abstrak, akan semakin menantang bagi tipe ini. Atribut *Soft skills* yang telah dimiliki adalah mampu berpikir sintesis, teliti, bijaksana, dan konsisten. Sedangkan atribut *Soft skills* yang harus ditingkatkan adalah

- kemampuan menerima pendapat orang lain, kemampuan bekerja sama pada sebuah kelompok, dan kemampuan bergaul secara sosial.
- c. Peserta didik dengan tipe *Idealist*, cenderung dapat melihat suatu masalah dengan sudut pandang yang luas, dan tidak hanya terpaku pada masalah yang dihadapi. Pengajar dapat membuat variasi soal yang cukup luas kepada tipe ini, karena justru banyaknya variasi soal akan membuat tipe ini lebih tertarik. Atribut *Soft skills* yang telah dimiliki adalah daya juang, kreativitas. Sedangkan atribut *Soft skills* yang harus ditingkatkan adalah kemampuan bertoleransi.
 - d. Peserta didik dengan tipe *Artisan*, merupakan peserta didik yang tidak mudah menyerah, serta dapat dibimbing untuk menuju ke tingkatan soal yang lebih tinggi, asal pengajar memulainya dengan segala sesuatu yang konkrit atau fakta. Langkah yang jelas sangat diperlukan oleh pelajar dengan tipe ini. Atribut *Soft skills* yang telah dimiliki adalah kemampuan bekerja sama, mempengaruhi teman lain, dan dokumentasi yang baik. Sedangkan atribut *Soft skills* yang harus ditingkatkan adalah kemampuan berpikir secara analitik, kemampuan untuk mengabstraksi permasalahan, dan pengendalian emosi yang meledak-ledak.
 - e. Peserta didik dengan tipe *Guardian*, merupakan peserta didik yang selalu ingin mengetahui kegunaan dari suatu materi maupun suatu soal. Untuk membuat tipe ini tertarik, pengajar harus secara gamblang menjelaskan tujuannya. Setelah tipe ini merasa tertarik, maka pengajar dapat membawa tipe ini ke berbagai jenis soal, asal disajikan secara jelas dan tidak bertele-tele. Atribut *Soft skills* yang telah dimiliki adalah bertanggung jawab, tepat waktu, detail dalam menjabarkan tugas, dan mampu menjadi pemimpin yang mengarahkan dan melindungi anak buahnya. Sedangkan atribut *Soft skills* yang harus ditingkatkan adalah fleksibel, dan variasi dalam mengerjakan suatu hal.
 - f. Pengajar harus menyadari akan perbedaan proses berpikir dan kelemahan atribut *soft skills* pada masing-masing peserta didik. Salah satu cara adalah dengan mengelompokkan peserta didik sesuai dengan tipe kepribadiannya, agar dalam melaksanakan proses belajar mengajar, peserta didik lebih merasa dihargai secara individu, dan bukan secara umum, di mana banyak kepribadian menjadi satu.

Saran

Karena tulisan dalam makalah ini masih merupakan hasil kajian awal, yang akan digunakan untuk mendukung penelitian selanjutnya, maka masih banyak terdapat hal-hal yang menjadi saran perbaikan dari kajian ini :

- a. Soal pemecahan masalah dapat ditambah dengan penekanan pada prosedur/ algoritma serta aritmatika, di mana keduanya juga dibutuhkan sebagai dasar pemrograman pada jurusan Sistem Informasi.
- b. Setelah profil proses berpikir dan *atribut soft skills* pada masing-masing tipe didapatkan, maka penelitian ini dapat dilanjutkan dengan pembuatan model pembelajaran dan perangkat pembelajaran sesuai dengan profil proses berpikir dan atribut *soft skills* yang sudah dimiliki dan yang harus ditingkatkan .
- c. Penelitian akan dilanjutkan pada tingkat Sekolah Menengah.

Rekomendasi

Kajian ini dapat direkomendasikan untuk dilanjutkan sebagai penelitian dalam bidang pendidikan matematika, agar semakin dapat ditonjolkan peran materi pemecahan masalah dalam matematika untuk meningkatkan *soft skills* bagi setiap mahasiswa sesuai dengan tipe kepribadiannya.

DAFTAR PUSTAKA

- Dewiyani , 2010, *Profil Proses Berpikir Mahasiswa dalam Memecahkan Masalah Matematika berdasar Penggolongan Tipe Kepribadian dan Gender*, Disertasi Program S3 Pendidikan Matematika Universitas Negeri Surabaya.
- Keirsey, David & Bates, Marilyn, 1984, *Please Understand Me*, Prometheus Nemesis Book Copmany, California
- Keirsey Temperament Sorter, <http://www.answers.com/topic/keirsey-temperament-sorter>, diakses 2 April 2008.
- Patrick S. O'Brien, 2001, *Making College Count: a Real Wolrd Look at How to Succeed in and After College*, Monster.Com, USA.
- Polya G, 1973, *How To Solve It*, Princenton University Press, Princenton, New Jersey.
- Szul L. F., 2002, *Meeting the Demand: Teaching Soft Skills, Strategies and Resources to Develop Workplace Skills*, Delta Pi Epsilon.

MODEL ASSESMENT PEMBELAJARAN BERDASARKAN HASIL UJIAN AKHIR SEKOLAH BERSTANDAR NASIONAL MATEMATIKA SD

Sumardi

FKIP Universitas Muhammadiyah Surakarta

Abstrak

Penelitian ini didasari oleh rendahnya mutu pendidikan dasar di Indonesia dengan melihat hasil TIMSS versi Indonesia tahun 2006 (Puspendik, 2007) menunjukkan prestasi bidang matematika dan bahasa, dengan standar pencapaian 65% soal dapat dijawab benar, hanya akan ada kurang dari 10% siswa sampel uji yang mampu mencapainya ; (1) Mendeskripsikan kelemahan pembelajaran matematika yang terdapat di Sekolah Dasar berdasarkan informasi UASBN; (2) Mendeskripsikan peta kelemahan kognitif siswa Sekolah Dasar; (3) Menentukan model pembelajaran matematika di tingkat Sekolah Dasar melalui AFL untuk memperbaiki pembelajaran matematika berdasarkan kelemahan yang dihadapi oleh guru dan siswa. Jenis penelitian yang digunakan adalah Reseach & Pengembangan. Produk yang dikembangkan adalah perangkat penilaian untuk pembelajaran. Penelitian awal dilakukan di sekolah dasar se kabupaten Sukoharjo-Jawa Tengah. Data diperoleh dengan dokumentasi, diperoleh hasil UASBN, melalui program ITEMAN peneliti memperoleh informasi tentang karakteristik soal dan peta kesulitan yang dihadapi siswa pada materi kelompok aritmatika, geometri dan pengolahan data. Pada tahap pengembangan ,berdasarkan hasil tersebut peneliti membuat Instrumen pembelajaran dengan bantuan program *fox pro* sebagai umpan balik dalam model pembelajaran AFL. Setelah melalui 3 uji coba di 6 sekolah dasar dengan jumlah siswa 157 di kabupaten Sukoharjo Dapat dihasilkan **profil kelas dan profil diri dari seluruh anak** sehingga dapat dipakai dasar untuk perbaikan program pembelajaran selanjutnya.

Kata kunci: *model assesmen, UASBN, profil kelas dan profil diri*

PENDAHULUAN

Latar Belakang Masalah

Kondisi pendidikan nasional ini terefleksi dalam hasil UN dan TIMSS versi Indonesia tahun 2006 yang menempatkan prestasi belajar siswa yang kurang menggembirakan. Hasil TIMSS versi Indonesia tahun 2006 (Puspendik, 2007) menunjukkan prestasi bidang matematika dan bahasa dengan standar pencapaian 65% soal dapat dijawab benar, hanya akan ada kurang dari 10% siswa sampel uji yang mampu mencapainya.

Kebijakan pendidikan yang ditetapkan berdasarkan SK Mendiknas Nomor 11/U/2002 tentang penghapusan EBTANAS SD dan SK Mendinas Nomor 01/U/U/22 tentang penggantian EBTANAS SD dengan Ujian akhir Sekolah menyebabkan siswa pada transisi ke SMP harus melewati beberapa kali ujian dan seleksi. Kebijakan Evaluasi tingkat Sekolah Dasar diterapkan siswa hanya cukup ujian dua kali saja yaitu Ujian Akhir Sekolah Berstandar Nasional (UASBN) dan ujian Akhir Sekolah (UAS). Kebijakan UAS diterapkan karena EBTANAS dipandang memiliki beberapa kelemahan.

Menurut Djemari Mardapi (1999: 79) beberapa kelemahan tersebut adalah secara kuantitas EBTANAS cenderung memacu guru untuk menyelesaikan kegiatan belajar mengajar berdasarkan kurikulum mata pelajaran yang di EBTANAS-kan tetapi tidak demikian untuk mata pelajaran yang lain (2) EBTANAS belum mampu mempercepat peningkatan dan pemerataan mutu pendidikan dasar dan menengah; (3) EBTANAS berhasil merintis baku mutu untuk SMP namun belum bisa untuk SD dan SMU; (4) EBTANAS merupakan seleksi siswa baru yang efisien dan

obyektif, namun karakteristik tes berbeda dengan tes seleksi dan (5) validitas prediktif NEM cukup rendah.

Djemari Mardapi dkk (1999b: 79) menemukan beberapa hal yang membuat sistem evaluasi hasil belajar yang dilakukan di sekolah maupun di daerah belum mendukung peningkatan kualitas pendidikan, antara lain (1) kualitas tes buatan guru masih kurang memadai; (2) jaringan pengujian di daerah belum dimanfaatkan dengan baik; (3) pelaporan hasil penyelenggaraan ujian oleh guru kepada kepala sekolah belum terlaksana secara rutin; dan (4) hasil-hasil ujian belum dimanfaatkan secara optimal untuk perbaikan proses pembelajaran di kelas.

Dari beberapa kelemahan tersebut peneliti ingin mengetahui dimana letak kelemahannya terutama pada ujian tingkat Sekolah Dasar atau yang sekarang ini disebut UASBN.

Penelitian ini dirancang untuk dilaksanakan di Sekolah Dasar Negeri Sukoharjo, Kecamatan Sukoharjo, dengan melakukan pemetaan penguasaan materi yang dikuasai siswa dalam bidang studi matematika berdasarkan hasil UASBN

Identifikasi Masalah

1. Mutu pendidikan matematika yang relative masih rendah.
2. Prestasi belajar siswa dalam bidang studi matematika masih tergolong rendah bila dilihat dari hasil ujian akhir sekolah berstandar nasional (UASBN).
3. Penilaian hasil belajar masih didominasi oleh guru tanpa melibatkan siswa didalamnya.

Pembatasan Masalah atau Fokus Penelitian

Matematika merupakan suatu mata pelajaran di sekolah dasar (SD) diajarkan pada seluruh tingkatan kelas, mulai dari kelas 1 sampai dengan kelas VI untuk tiap semester. Matematika mempunyai cakupan yang luas, oleh karena itu penelitian ini hanya terbatas pada materi kelas IV, V dan VI dengan mengambil pokok bahasan berhitung, pengukuran, geometri dan pengolahan data atau statistik. Dimana materi di kelas ini merupakan materi yang dijadikan bahan UASBN.

Rumusan Masalah

Secara operasional masalah penelitian dalam pengembangan model *A/L* berdasarkan UASBN dapat dirumuskan sebagai berikut.

1. Bagaimana peta kesulitan berdasarkan kemampuan siswa Sekolah Dasar di Kecamatan Sukoharjo?
2. Bagaimana peta kesulitan berdasarkan letak peta wilayah kecamatan siswa Sekolah Dasar di Kecamatan Sukoharjo?
3. Bagaimana merencanakan Asesmen berdasarkan kesulitan yang dihadapi siswa sekolah dasar ?

Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah

1. Menentukan peta kesulitan berdasarkan kemampuan siswa Sekolah Dasar di Kecamatan Sukoharjo.
2. Menentukan peta kesulitan berdasarkan letak peta wilayah kecamatan siswa Sekolah Dasar di Kecamatan Sukoharjo
3. Merencanakan Asesmen berdasarkan kesulitan yang dihadapi siswa sekolah dasar

Manfaat Penelitian

Dengan mengetahui peta penguasaan materi oleh siswa, maka guru dapat membuat perencanaan dengan baik berdasarkan tingkat kesulitan yang dihadapi siswa. Dengan demikian kebijakan yang akan dilakukan oleh Dinas pendidikan kabupaten maupun Kecamatan akan semakin terarah.

KAJIAN TEORI

Ujian Akhir Sekolah Berstandar Nasional (UASBN)

Ujian akhir pada SD sudah beberapa kali mengalami perubahan sistem ujian. Pada tahun 2006/2007 ujian akhir dilaksanakan sendiri oleh masing-masing sekolah, dengan berpedoman pada Keputusan Badan Standar Nasional Nomor 550/BSNP/II/2007 tanggal 13 Februari 2007 tentang Perubahan Keputusan Badan Standar Pendidikan Nomor 58 tentang Prosedur Operasi Standar (POS) Ujian Sekolah/Madrasah tahun pelajaran 2006/2007 (BSNP, 2007). Pada sistem ini penyelenggara ujian (sekolah) memiliki kewenangan penuh dalam merencanakan dan melaksanakan ujian serta menentukan kelulusan siswa.

Sistem ujian akhir (*final examination*) yang dilakukan sendiri oleh masing-masing sekolah tersebut memiliki beberapa kelemahan diantaranya, mutu bahan ujian yang digunakan masing-masing sekolah berbeda-beda, bahkan cenderung tidak diketahui. Kualitas tes yang digunakan sangat heterogen di semua wilayah di Indonesia, karena sangat tergantung dengan kemampuan guru yang ada di daerah dalam membuat soal ujian. Hal ini berdampak pada hasil dan kelulusan ujian sekolah yang sering sekali kurang mendapatkan pengakuan dari masyarakat secara luas.

Kelemahan mendasar tersebut disikapi pemerintah dengan menyelenggarakan sistem ujian akhir sekolah yang terintegrasi antara ujian sekolah dan ujian nasional yang dikenal dengan istilah Ujian Akhir Sekolah Berstandar Nasional (UASBN). Dilihat dari tujuan dan waktu pelaksanaannya maka UASBN dapat digolongkan ke dalam tipe tes sumatif (*summative evaluation*). UASBN dilaksanakan pada akhir satuan pendidikan dan dimaksudkan untuk menilai ketuntasan belajar di sekolah.

UASBN adalah ujian nasional yang dilaksanakan dengan pelaksanaan ujian Sekolah Dasar / Madrasah Ibtidaiyah / Sekolah Dasar Luar Biasa (SD/MI/SDLB). Ujian ini dalam pelaksanaannya berpedoman pada Keputusan Badan Standar Nasional Pendidikan Nomor 983/BSNP/XI/2007 tentang Prosedur Operasi Standar (POS). Bentuk tes yang digunakan diantaranya berupa tes tertulis (*paper and pencil test*). Tes tertulis merupakan teknik penilaian yang seringkali digunakan untuk menilai prestasi belajar siswa. Melalui tes prestasi belajar, dapat diperoleh informasi yang dapat menggambarkan kemampuan siswa. Oleh karena itu, pengelolaan ujian dan mutu bahan ujian yang digunakan perlu mendapat perhatian agar hasil tes dapat mencerminkan kemampuan siswa yang sebenarnya.

Standar Kompetensi Lulusan

Standar Kompetensi Lulusan Satuan Pendidikan matematika SD/MI adalah:

1. Memahami konsep bilangan bulat dan pecahan, operasi hitung dan sifat-sifatnya, serta menggunakannya dalam pemecahan masalah kehidupan sehari-hari.
2. Memahami bangun datar dan bangun ruang sederhana, unsur-unsur dan sifat-sifatnya serta menerapkannya dalam pemecahan masalah kehidupan sehari-hari.
3. Memahami konsep ukuran dan pengukuran berat, panjang, luas, volume, sudut, waktu, kecepatan, debit, serta mengaplikasikannya dalam pemecahan masalah kehidupan sehari-hari.
4. Memahami konsep koordinat untuk menentukan letak benda dan menggunakannya dalam pemecahan masalah kehidupan sehari-hari.
5. Memahami konsep pengumpulan data, penyajian data dengan tabel gambar dan grafik (diagram), mengurutkan data, rentangan data, rerata hitung modus serta menerapkannya dalam pemecahan masalah kehidupan sehari-hari.
6. Memiliki sikap menghargai matematika dan kegunaannya dalam kehidupan.
7. Memiliki kemampuan berpikir logis, kritis, dan kreatif. (Permen Diknas No : 23/2006 hal: 16)

Analisis Butir Soal

1. Telaah Butir Soal

Depdikbud melalui Puskisjia telah membuat pedoman penelaahan butir soal yang dapat digunakan untuk menilai butir soal bentuk pilihan ganda, yang dikenal dengan nama pedoman penelaahan butir soal. Adapun pedoman tersebut dikemukakan sbb:

- a. Aspek Materi
- b. Aspek Konstruksi
- c. Aspek Bahasa

Ruang Lingkup

Mata pelajaran Matematika pada satuan pendidikan SD/MI meliputi aspek aspek sebagai berikut.

- a. Bilangan ,b.Geometri dan pengukuran,cPengolahan data

Hasil Belajar Berhitung

Ada tiga hasil dalam mata pelajaran berhitung yang harus dapat dicapai oleh tiap anak. Ketiga hasil belajar tersebut adalah (1) pemahaman konsep, (2) keterampilan, dan (3) pemecahan masalah.

Berbagai Kekeliruan Umum yang Dilakukan Anak Berkesulitan Belajar Berhitung

1. Kekurangan Pemahaman tentang Simbol
2. Kekurangan Pemahaman tentang Nilai Tempat
3. Kekurangan Pemahaman dalam Melakukan Perhitungan (*Komputasi*)
4. Penggunaan Proses Menghitung yang Keliru
5. Tulisan Tidak Dapat Dibaca

Kerangka Pikir

Hasil UASBN merupakan informasi yang bisa digunakan sebagai acuan untuk melakukan perbaikan di dalam pembelajaran termasuk model asseamennya. Berdasarkan informasi tersebut guru dapat memodifikasi strategi penilaian dan pembelajaran sesuai dengan kebutuhan siswa. Selanjutnya memberikan tugas terstruktur untuk diselesaikan dalam kelas dan di rumah sebagai dasar bagi guru dalam mengamati perilaku siswa, memberikan umpan balik, dan melibatkan siswa dalam menilai pekerjaan mereka sendiri.Pengamatan secara langsung perilaku siswa selama proses pembelajaran, akan memberikan informasi yang memadai tentang masalah-maslah yang dihadapi mereka,sehingga guru dapat menetapkan banuan untuk mengatasinya.

Pertanyaan Penelitian

Berdasarkan kajian teoritik, penelitian yang relevan, kerangka pikir tersebut dan sebagai acuan dalam menguji efektivitas UASBN, pertanyaan dalam penelitian ini :

1. Bagaimana peta kesulitan berdasarkan kemampuan siswa dan letak peta wilayah kecamatan Sekolah Dasar di KecamatanSukoharjo?
2. Bagaimana solusi terhadap hasil pemetaan penguasaan materi berdasarkan UASBN ?
3. Merencanakan Asesmen berdasarkan kesulitan yang dihadapi siswa sekolah dasar

METODE PENELITIAN

Pendekatan Penelitian

Penelitian ni merupakan awal dari penelitian Riset and Pengembangan (R&D).Pada tahapawal ini peneliti mengambil hasil UASBN yang telah dilakukan tahun 2008/2009 di seluruh SD se kecamatan Sukoharjo. Sebanyak 46 Sekolah Dasar dengan jumlah siswa 1190 (Sumber : Disdik Sukoharjo).Hasil lembar UASBN tersebut kita olah dengan bantuan program ITEMAN.

Hasil tersebut peneliti melakukan analisis terhadap jawaban, yang nantinya peneliti akan mendapatkan gambaran tentang peta kesulitan yang dilakukan siswa ditinjau dan aspek kognitifnya dengan melihat distraktor yang ditunjukkan oleh kolom prop. endorsing. Selain itu peneliti juga mendapatkan peta kesulitan berdasarkan letak geografis

HASIL DANPEMBAHASAN PENELITIAN AWAL

Hasil peneltian berupa pemetaan materi yang dianggap sulit berdasarkan olah data melaluiprogram ITEMAN , dari 40 soal UASBN

Tabel kesulitan Berdasarkan
Kelas, Materi, Standar Kompetensi dan Kompetensi Dasar

| No | Klas | Materi | Standar Kompetensi | Kompetensi Dasar | No Soal |
|----|------|----------------------------|---|--|---------|
| 1 | IV | 1. Aritmatika | 1. Memahami dan menggunakan sifat-sifat operasi hitung bilangan dalam pemecahan masalah pecahan | 1. Melakkan operasi perkalian dan pembagian | 3 |
| | | | 2 Memahami dan menggunakan faktor dan kelipatan dalam pemecahan masalah | 2.Menentukan kelipatan persekutuan terkecil (KPK) dan faktor kelipatan terbesar(FPB) | 12 |
| | | 2. Pengukuran dan Geometri | 1.Memahami sifat bangun ruang sederhana dan hubungan antar bangun datar | 1Menentukan hasil pencerminan suatu bangun datar | 27 |
| | | | 2.Menggunakan konsep keliling dan luas bangun datar sederhana dalam pemecaan masalah | 2.Menentukan keliling dan luas jajaran genjang dan segitiga | 30 |
| 2 | V | 1. Aritmatika | 1.Menggunakan Pecahan dalam pemecahan masalah | 1 Mengubah pecahan ke bentuk persen serta desimal | 10 |
| | | | 2.Menghitung luas bangun datar sederhana dan menggunakannya dalam pemecahan masalah | 2.Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan luas bangun datar | 22 |
| | | | 3.Menggunakan pengukuran waktu, sudut, jarak, dan kecepatan dalam pemecahan masalah | 3.Melakuka operasi hitung yang melibatkan satuan waktu | 24 |
| | | 2. Pengukuran dan Geometri | 1.Memahami sifat bangun ruang sederhana dan hubungan antar bangun datar | 1.Menghitung volme kubus dan balok | 34 |
| | | | 2.Menghitung luas bangun datar sederhana dan menggunakannya dalam pemecahan masalah | 2.Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan luas bangun datar | 35 |
| | | | | | |
| 3 | VI | 1. Aritmatika | 1. Memahami pecahan sederhana dan penggunaannya dalam pemecahan masalah | 1. Melakukan operasi hitung yang melibatkan berbagai bentuk | 9 |
| | | | 2. Memahami pecahan sederhana dan penggunaannya dalam pemecahan masalah | 2.Memecahkan maslah perbandingan dan skala | 16 |
| | | 2. Pengolahan Data | 1.Menggunakan sistem koordinat dalam pemecahan masalah | 1.Menentukan rata-rata hitung dan modus sekumpulan data | 39 |
| | | | | | |

Tabel 4.5
Rekapitulasi Butir Soal UASBN yang Benar Kurang dari 60 %
Berdasarkan Prop Endorsing

| Kecamatan | No butir Soal | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----------|---------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Grogol | 3 | 9 | 10 | 12 | 16 | 20 | 21 | 22 | 24 | 27 | 28 | 30 | 31 | 32 | 34 | 35 | 36 | 37 | 39 | 40 | | | | |
| Kartasuro | 3 | 9 | 10 | 12 | 14 | 16 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 27 | 28 | 31 | 32 | 34 | 38 | 39 | 40 | | | | |
| Baki | 3 | 6 | 9 | 10 | 12 | 14 | 15 | 16 | 19 | 20 | 21 | 22 | 24 | 25 | 27 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 38 | 39 | 40 |
| Bendosar | 9 | 10 | 12 | 14 | 15 | 16 | 19 | 20 | 21 | 22 | 24 | 27 | 30 | 31 | 32 | 34 | 35 | 38 | | | | | | |
| Bulu | 9 | 10 | 12 | 16 | 19 | 20 | 22 | 24 | 27 | 30 | 32 | 34 | 38 | | | | | | | | | | | |
| Gatak | 3 | 6 | 9 | 10 | 12 | 14 | 16 | 20 | 22 | 24 | 27 | 32 | 34 | 38 | 39 | | | | | | | | | |
| Mojolaban | 3 | 9 | 10 | 12 | 16 | 20 | 24 | 27 | 28 | 30 | 32 | 38 | | | | | | | | | | | | |
| Nguter | 3 | 9 | 10 | 12 | 16 | 19 | 20 | 24 | 27 | 30 | 32 | 35 | 38 | | | | | | | | | | | |
| Polokarto | 3 | 9 | 10 | 12 | 15 | 16 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 27 | 30 | 32 | 34 | 35 | 38 | 39 | 40 | | | | |
| Sukoharjo | 3 | 9 | 10 | 11 | 12 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 20 | 21 | 24 | 27 | 30 | 31 | 32 | 34 | 35 | 38 | 39 | 40 | | |
| Twsari | 3 | 7 | 9 | 10 | 12 | 16 | 19 | 22 | 24 | 27 | 30 | 32 | 34 | 35 | 38 | 39 | | | | | | | | |
| Weru | 3 | 9 | 12 | 14 | 16 | 20 | 22 | 24 | 27 | 30 | 32 | 38 | 39 | | | | | | | | | | | |

Ruang lingkup soal dalam UASBN meliputi Bilangan/Aritmatika, Geometri dan Pengukuran, Pengolahan data , dengan pengelompokan sebagai berikut :

- No 1 sampai dengan 24 Bilangan
- No 25 sampai dengan 36 geometri dan pengukuran
- No 37 sampai dengan 40 pengolahan data dan statistik

Tabel X
Prosentase Kesulitan Aritmatika, Geometri dan Pengolaan Data
Antar Kecamatan se Kabupaten Sukoharjo
UASBN Matematika 2008/2009

| No | Kecamatan | Aritmatika | Geometri | Pengolahan Data |
|-----|-------------|------------|----------|-----------------|
| 1. | Grogol | 37,5 | 67,7 | 75 |
| 2. | Kartasura | 50 | 40,2 | 50 |
| 3. | Baki | 58 | 50.8 | 50 |
| 4. | Bendosari | 49 | 50 | 25 |
| 5. | Bulu | 33 | 33,3 | 25 |
| 6. | Gatak | 42 | 25 | 50 |
| 7. | Mojolaban | 29 | 33,3 | 25 |
| 8. | Nguter | 33 | 33,3 | 25 |
| 9. | Polokarto | 50 | 40,2 | 75 |
| 10. | Sukoharjo | 50 | 50 | 75 |
| 11. | Tawang Sari | 37,5 | 37,5 | 50 |
| 12. | Weru | 33 | 25 | 50 |

Kemampuan yang belum dikuasai siswa, berdasarkan analisis pada soal UASBN matematika di Kabupaten Sukoharjo tahun 2008/2009

1. Menentukan hasil operasi hitung campuran pada bilangan bulat
2. Soal cerita yang berkaitan dengan operasi hitung campuran bilangan pecahan (bilangan pecahan biasa, campuran dan desimal)
3. Soal cerita yang berkaitan dengan operasi hitung perkalian dan pembagian dengan menggunakan prosentase
4. Menyelesaikan soal cerita yang di dalamnya terdapat KPK

5. Menyelesaikan soal cerita yang di dalamnya terdapat menggunakan hitung skala
6. Menyelesaikan soal cerita yang berkaitan dengan pengukuran dalam geometri, dengan melakukan penyamaan suatu panjang
7. Menyelesaikan soal cerita yang berkaitan dengan pengukuran, dengan melakukan penyamaan satuan masa/berat
8. Menyelesaikan soal cerita yang berkaitan dengan pengukuran dalam geometri, dengan melakukan penyamaan satuan luas
9. Menyelesaikan soal cerita yang berkaitan dengan jarak, kecepatan dan waktu
10. Menentukan bentuk bidang datar dari hasil pencerminan dengan sebuah garis
11. Menentukan hasil dari rotasi bangun datar dengan pusat putaran yang telah ditentukan
12. Menentukan keliling gabungan dua bangun datar persegi empat dan setengah lingkaran yang telah ditentukan ukurannya
13. Menyelesaikan soal cerita yang berkaitan dengan bentuk geometri (bangun datar)
14. Menentukan luas dari gabungan dua bangun datar yang ukuran sisinya telah ditentukan
15. Menghitung volume dari bangun ruang yang bentuknya telah ditentukan
16. Menentukan luas permukaan dari sebuah balok yang ukuran rusuknya telah ditentukan
17. Menentukan salah satu titik koordinat dari jajar genjang yang telah diketahui 3 titik yang lain dengan diagram kartesius
18. Menentukan unsur yang belum diketahui dari diagram batang
19. Menentukan unsur yang belum diketahui dari diagram lingkaran
20. Menentukan nilai rata-rata dari kumpulan data yang telah diketahui
21. Menyelesaikan soal cerita yang berkaitan dengan modus dari data yang telah diketahui

DAFTAR PUSTAKA

- Abdurrahman Mulyono, 2003, *Pendidikan Bagi Anak Berkesulitan Belajar*, Jakarta, Rineka Cipta
- Anonim. 2003. *UU Sistem Pendidikan Nasional No 20 tahun 2003*. Depdiknas.
- , 2008. *Peraturan Menteri No. 77 Tahun 2008 Tentang Pelaksanaan Ujian Nasional*. Jakarta: Depdiknas
- Borg, W.R., & Gall, M.D. (1983). *Educational research and introduction*. New York : Logman.
- De Lange, J. 1999. *Frame for Classroom Assessment in Mathematics*. Ultrat: Freudental Institute.
- Depdiknas. (2006). *Peraturan Pemerintah nomor 23 tahun 2006 tentang standar kompetensi lulusan untuk satuan pendidikan dasar dan menengah*. www.unm.ac.id
- Depdiknas. (2007). *Peraturan Operasi Standar (P)S UASBN untuk satuan pendidikan dasar dan menengah*. Jakarta: BSNP
- Depdiknas. (2007). *UASBN SD tahun 2008*. Jakarta : BSNP
- Depdiknas. (2007). *Keputusan BSNP Nomor 550/BSNP/II/2007*. Jakarta : BSNP
- Djemari Mardapi. (2008). *Teknis Penyusunan Instrumen tes dan nontes*. Yogyakarta: Mitra Cendekia Press.)
- Djemari Mardapi, dkk. (1999b). *Suvey kegiatan guru dalam melakukan penilaian di kelas*. Laporan Penelitian. Yogyakarta: IKIP Yogyakarta.
- Eid, Karim Ghada. 2005. *The Effects of Sample Size on the Equating of Test Items*. *Proquest Journals*. Vol. 126, Iss. 1; pg. 165, 16 pgs diakses tanggal 22 Januari 2009.

Gronlund, Norman E. 2006. *Measurement & Evaluation in Teaching*. MacMillan Publishing

Indrajati Sidi. (November 2004). Peningkatan kualitas pendidikan melalui sistem pendidikan. *Media Informasi Newsletter HEPI*,I(2),1.

Iwan Pranoto, 2010, *Pengajaran Matematika Salah Konsep*, Kompas, 23 Januari

PERMEN DIKNAS, 2006, (*Peraturan Menteri Pendidikan Nasional No: 23/2006 tentang STANDAR KOMPETENSI LULUSAN (SKL)*), Jakarta, Balai Pustaka

Departemen Pendidikan Nasional, 2009, *UJIAN AKHIR SEKOLAH BERSTADAR NASIONAL Matematika SD/MI* (naskah Ujian P.02 UTAMA) Tahun Pelajaran 2008/2009

Suryanto, 2000, *Hambatan Dalam Pengajaran Matematika Di Sekolah Dasar*,

**PEMANFAATAN *MICROSOFT ACCESS*
SEBAGAI PEREKAM KINERJA AKADEMIK MAHASISWA
DALAM PROSES PEMBELAJARAN**

Sri Andayani

Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta

Abstrak

Teknologi komputer telah banyak dimanfaatkan untuk mendukung kegiatan perencanaan pembelajaran, alat bantu pembelajaran, media, administrasi dan asesmen. Dalam hal asesmen, dosen dapat menggunakan teknologi komputer untuk memfasilitasi berbagai macam strategi asesmen dan evaluasi. Salah satunya adalah menggunakan program aplikasi basis data *Microsoft Access* untuk merekam data kinerja akademis mahasiswa dalam proses pembelajaran. Perekaman data kinerja akademis mahasiswa selama proses pembelajaran merupakan implementasi dari *asesment alternative*, yakni suatu pemanfaatan pendekatan non-tradisional untuk memberi penilaian kinerja atau hasil belajar mahasiswa. Asesmen bukan kegiatan yang terpisah dari pembelajaran, sehingga selayaknya dosen mengumpulkan semua sumber informasi sebanyak mungkin dari mahasiswa melalui observasi, wawancara, atau memberi tugas individu maupun kelompok. Perangkat pembantu untuk melakukan asesmen tersebut dapat dikembangkan dalam bentuk aplikasi basis data sederhana dengan menggunakan *Microsoft Access*. Beberapa tabel yang diperlukan untuk mencatat data kinerja mahasiswa dalam proses pembelajaran adalah tabel data mahasiswa, matakuliah, jenis tugas, rubrik penilaian, deskripsi tugas dan penilaian. Dengan aplikasi yang dikembangkan diharapkan dapat membantu dosen dalam mengolah dan menyimpan data-data kinerja akademis mahasiswa selama pembelajaran yang dapat dijadikan sebagai dasar perhitungan nilai akhir mata kuliah.

Kata kunci: Asesmen pembelajaran, teknologi komputer, *Microsoft Access*.

PENDAHULUAN

Perkembangan teknologi dewasa ini telah menyediakan berbagai kemudahan dalam mendukung pelaksanaan proses pembelajaran. Komputer dan berbagai perangkat pendukungnya telah menjadi piranti yang dibutuhkan dalam setiap aspek kegiatan pembelajaran dan administrasinya.

Teknologi komputer banyak dimanfaatkan sebagai alat bantu pembelajaran atau media, dan untuk melakukan perencanaan pembelajaran, administrasi dan asesmen. Dalam hal asesmen, teknologi komputer digunakan untuk memfasilitasi berbagai macam strategi asesmen dan evaluasi.

Asesmen bukan sekedar aktivitas yang cukup melibatkan suatu test tunggal atau serangkaian tes baku. Tes baku didasarkan pada prinsip-prinsip validitas, reliabilitas keadilan, kemanfaatan dan akurasi suatu pengukuran hasil belajar. Berdasarkan teori konstruktivisme yang memandang pembelajaran sebagai suatu proses yang dilakukan peserta didik untuk mengkonstruksi pengetahuannya sendiri, maka tes baku semakin tidak relevan untuk digunakan sebagai asesmen pembelajaran.

Pertengahan tahun 1980 menjadi saksi tumbuhnya tuntutan reformasi dalam paktek penilaian (asesmen) pembelajaran. Setidaknya ada 3 hal yang mempengaruhi tuntutan tersebut,

yaitu (1). Alam perubahan dalam tujuan pendidikan, (2) hubungan antara asesmen dengan pembelajaran, dan (3). Keterbatasan metode pencatatan kinerja dan pemberian nilai (Marzano, dkk. 1994: 9). Pada tahun 1987 *The National Board for Professional Teaching Standards* (NBPTS), suatu badan nasional Amerika yang konsen dalam meningkatkan profesionalisme pembelajaran, menyatakan asesmen seharusnya memberikan makna yang lebih kompleks dan berarti dalam memverifikasi kompetensi guru dengan menggunakan berbagai proses (Bullock & Hawk, 2005:7).

Beberapa hal yang dapat dilakukan dalam kaitannya dengan pemanfaatan teknologi dalam asesmen adalah: (1) menggunakan teknologi untuk melakukan asesmen pembelajaran suatu mata kuliah terhadap mahasiswa dengan menggunakan teknik asesmen yang bervariasi, (2) menggunakan sumber-sumber teknologi untuk mengumpulkan dan menganalisis data, menginterpretasikan hasil, dan mengkomunikasikan temuannya untuk meningkatkan praktek pembelajaran dan memaksimalkan pembelajaran mahasiswa, dan (3) menerapkan multi metode evaluasi untuk menentukan penggunaan sumber teknologi yang tepat bagi mahasiswa untuk pembelajaran, komunikasi dan produktivitas (Lever-Duffy & McDonald, 2008:9)

Banyak cara yang dapat dilakukan dosen untuk melakukan penilaian atas kinerja mahasiswa dalam mata kuliah. Seiring dengan pergeseran paradigma pembelajaran yang melihat peserta didik sebagai seorang yang berproses dalam pembelajarannya, penilaian yang dilakukan dosen tidak boleh hanya bertumpu pada suatu tes baku yang dilakukan secara singkat yang kadangkala memiliki banyak kelemahan. Dosen dapat menerapkan asesmen alternatif dalam penentuan nilai akhir suatu mata kuliah, yakni suatu pemanfaatan pendekatan non-tradisional (*pencil and paper test*) untuk memberi penilaian kinerja atau hasil belajar mahasiswa. Asesmen alternatif dipandang sebagai upaya untuk mengintegrasikan kegiatan pengukuran hasil belajar dengan keseluruhan proses pembelajaran (Asmawi Zainul, 2005:3). Oleh karena itu selayaknya setiap dosen mempunyai rekaman kinerja akademik mahasiswa dalam mata kuliah yang diampunya, yang merupakan kumpulan informasi atas kinerja mahasiswa mulai dari awal hingga akhir perkuliahan dan dapat digunakan menjadi dasar penentuan nilai akhir matakuliah.

Memperhatikan perkembangan teknologi saat ini, maka dapat dikembangkan suatu fasilitas berbasis komputer yang memudahkan dosen untuk merekam semua kinerja akademik mahasiswa selama perkuliahan. Beberapa perangkat lunak bantu dapat dimanfaatkan untuk membuat fasilitas yang dimaksud, di antaranya adalah *Microsoft Access*. *Microsoft Access* merupakan suatu program aplikasi untuk mengolah basis data (*database*). *Database* dalam *Access* terdiri atas satu atau lebih *table*, *query*, *form*, *report*, *page*, *makro* dan *modul* yang semuanya saling terkait. Banyaknya objek maksimum yang dimiliki sebuah file database adalah 32768 objek.

PEMBAHASAN

Fasilitas rekaman kinerja akademik berbasis komputer dapat dipandang sebagai suatu program aplikasi basis data. Pengembangan fasilitas ini akan memperhatikan sebagai berikut.

1. Rekaman tersebut diharapkan dapat mengakomodasi semua jenis penilaian kinerja mahasiswa, untuk itu dibutuhkan identifikasi tentang semua asesmen kinerja beserta cara penilaiannya.
2. Rekaman dapat menghasilkan laporan kinerja mahasiswa berdasarkan kriteria tertentu, untuk itu dibutuhkan rancangan basis data guna menyimpan data-data yang terkait dengan penilaian kinerja mahasiswa.

Identifikasi Jenis-jenis Asesmen alternatif

Asesmen dapat dipandang sebagai proses pengumpulan informasi, baik bersifat kualitatif maupun kuantitatif, yang dilakukan secara sistematis, sebagai cara untuk menginformasikan kepada peserta didik tentang bagaimana yang mereka kerjakan atau sebaik apa yang telah mereka lakukan dalam pembelajaran. Visi penting dari asesmen adalah sebagai suatu proses dinamis yang

secara kontinu menghasilkan informasi tentang kemajuan prestasi siswa yang tercantum dalam tujuan pembelajaran (Grafield, dikutip Cholis Sa'dijah, 2009)

Istilah *alternative assesment*, *authentic assesment* dan *performance assesment* sering dipertukarkan pemakaiannya, meskipun istilah-istilah tersebut mempunyai arti yang berbeda-beda. *Alternative assesment* merujuk pada sebarang dan semua asesmen yang berbeda dari bentuk asesmen yang mewarnai sebagian besar asesmen standar di kelas. *Authentic assesment* mengungkap bahwa asesmen seharusnya mengajak mahasiswa agar menerapkan pengetahuan dan ketrampilan dengan cara yang sama sebagaimana mereka berada di dunia nyata, di luar sekolah. *Performance assesment* merupakan istilah yang lebih luas pengertiannya, yang meliputi karakteristik dalam *alternative assesment* dan *authentic assesment* (Marzano, dkk. 1994:13).

Pengertian dasar ketiga istilah di atas adalah *assesment*, yang mengharuskan mahasiswa mempertunjukkan kinerja, bukan menjawab atau memilih jawaban dari sederetan kemungkinan jawaban yang sudah disediakan (Asmawi Zainul, 2005:8). Asesmen kinerja dilakukan melalui pemberian tugas dan penilaiannya dilakukan dengan menggunakan rubrik, yaitu kriteria yang disepakati terlebih dahulu. Asesmen bukan kegiatan yang terpisah dari pembelajaran. Dosen seharusnya mengumpulkan semua sumber informasi sebanyak mungkin dari mahasiswa (Duffy & Jonassen, 1992:39). Informasi dapat dikumpulkan dengan melakukan observasi, wawancara, memberi tugas individu maupun kelompok.

Asesmen kinerja dilakukan diwujudkan berdasarkan “empat asumsi” pokok, yaitu (1) asesmen kinerja yang didasarkan pada partisipasi aktif mahasiswa, (2) tugas-tugas yang diberikan atau dikerjakan oleh mahasiswa yang merupakan bagian yang tak terpisahkan dari keseluruhan proses pembelajaran, (3) asesmen tidak hanya untuk mengetahui pembelajaran, tetapi lebih dari itu, asesmen juga dimaksudkan untuk memperbaiki proses pembelajaran, dan (4) dengan mengetahui lebih dahulu kriteria yang akan digunakan untuk mengukur dan menilai keberhasilan proses pembelajarannya, mahasiswa akan secara terbuka dan aktif berupaya untuk mencapai tujuan pembelajaran (Asmawi Zainul, 2005:9).

Menurut Asmawi Zainul (2005:11) ada 11 macam tugas yang dapat diberikan dalam melakukan asesmen kinerja mahasiswa. Bentuk tugas-tugas tersebut disajikan dalam Tabel 1.

Tabel 1. Jenis-jenis tugas untuk asesmen kinerja siswa

| No | Jenis Tugas | Keterangan |
|----|--|--|
| 1 | <i>Computer adaptive testing</i> | Bentuk ini berbeda dengan bentuk tes obyektif |
| 2 | Tes pilihan ganda yang diperluas | Tes ini tidak sekedar memilih jawaban yang benar akan tetapi menuntut mahasiswa memikirkan alasan pemilihan jawabannya. |
| 3 | <i>Extended-response</i> atau <i>open ended question</i> | Tugas bentuk ini bersifat terbuka, artinya tidak menuntut adanya satu jawaban ‘benar’ yang terpola. |
| 4 | <i>Group performance assesment</i> | tugas yang dikerjakan secara berkelompok oleh mahasiswa |
| 5 | <i>Individual performance assesment</i> | Tugas individual yang dikerjakan secara mandiri oleh mahasiswa |
| 6 | <i>Interview</i> | Mahasiswa merespon pertanyaan-pertanyaan dari dosen |
| 7 | <i>Nontraditional test items</i> | Butir soal tidak bersifat obyektif tetapi merupakan suatu perangkat respon yang mengharuskan mahasiswa memilih berdasarkan kriteria yang ditetapkan. |
| 8 | Observasi | Dilakukan baik secara terbuka maupun tertutup pada saat mahasiswa melakukan suatu tugas |
| 9 | Portofolio | Suatu kumpulan hasil karya mahasiswa yang disusun berdasarkan urutan waktu maupun urutan kategori kegiatan. |
| 10 | <i>Project, exhibition</i> atau <i>demonstration.</i> | Asesmen jenis ini dapat merupakan suatu penyelesaian tugas yang lebih kompleks yang dapat memperlihatkan penguasaan kemampuan mahasiswa pada tingkatan tertentu. |
| 11 | <i>Short-answer, open ended.</i> | Pertanyaan terbuka yang menuntut jawaban singkat tetapi bukan memilih jawaban dari sederet alternatif jawaban yang disediakan. |

Penilaian terhadap tugas yang diberikan harus berpegang pada suatu kriteria penilaian yang telah ditentukan sebelumnya. Berbeda dengan *paper and pencil based test* yang dapat bergantung pada kunci jawaban, asesmen kinerja membutuhkan suatu kriteria penilaian yang lebih kompleks dalam melakukan penilaian hasil pekerjaan mahasiswa. Kriteria penilaian tersebut harus dapat menghindari adanya subyektivitas dosen dalam melakukan penilaian. Diperlukan cara-cara tertentu yang dapat menjamin reliabilitas, kebenaran dan keadilan penilaian. Untuk itu dikembangkan seperangkat kriteria penilaian yang biasa disebut dengan rubrik, yang dapat membantu menentukan tingkat ketercapaian kinerja yang diharapkan.

Pada dasarnya, rubrik terdiri dari daftar yang memuat 2 kolom aspek penilaian. Kolom pertama adalah kriteria yang berupa dimensi-dimensi kinerja, aspek-aspek atau konsep-konsep yang akan dinilai. Kolom kedua adalah gradasi mutu dari dimensi kinerja/aspek/konsep yang dinilai, yang diwujudkan dalam bentuk skor, mulai dari tingkat yang paling sempurna sampai dengan tingkat paling buruk. Kriteria dapat dinyatakan secara garis besar kemudian dirinci menjadi komponen-komponen penting, atau dapat langsung dinyatakan dalam komponen-komponennya tanpa dikelompokkan dalam garis besar.

Ada 2 macam rubrik jika ditinjau dari cakupannya, yaitu rubrik yang berlaku umum dan rubrik bersifat khusus. Rubrik yang berlaku umum berisi kriteria yang dapat digunakan untuk semua jenis tugas, tanpa memandang materi topik yang diberikan dalam tugas. Rubrik khusus hanya berlaku untuk suatu topik tertentu dalam mata kuliah tertentu. Rubrik umum dapat disajikan dalam bentuk *holistic rubric* atau dalam bentuk *analytic rubric*. Tabel 2 berikut merupakan contoh *holistic rubric* yang dapat digunakan untuk beberapa jenis tugas, tanpa melihat isi topik yang diberikan dalam tugas.

Tabel 2. *Holistic rubric*

| Skor | Deskripsi |
|------|---|
| 4 | Respon terhadap tugas sangat spesifik. Informasi yang diberikan akurat dan memperlihatkan pemahaman yang utuh. Respons dikemukakan dalam suatu tulisan yang lancar dan hidup. Jawaban singkat dan langsung ke masalah yang diminta. Kesimpulan atau pendapat mengalir secara logis. Secara lengkap respon lengkap dan sangat memuaskan. |
| 3 | Respon sudah menjawab tugas yang diberikan. Informasi yang diberikan akurat. Respon dikemukakan dalam tulisan yang lancar. Uraian cenderung bertele-tele. |
| 2 | Respon kurang memuaskan. Meskipun informasi yang diberikan akurat tetapi tidak ada kesimpulan atau pendapat. alur berpikir kurang logis. |
| 1 | Respon tidak menjawab tugas yang diberikan. Banyak informasi yang hilang dan tidak akurat. Tidak ada kesimpulan atau pendapat. Secara menyeluruh respon tidak akurat dan tidak lengkap. |

Penyusunan rancangan basis data

Fasilitas berbasis komputer rekaman kinerja akademik mahasiswa dirancang untuk dapat mempermudah penyimpanan dan pengolahan data-data asesmen kinerja mahasiswa. Untuk itu, prinsip pembuatan basis data harus digunakan dalam merancang tabel-tabel yang akan dipakai menyimpan data, agar tidak terjadi duplikasi, redundansi dan inkonsistensi data. Tabel-tabel yang akan digunakan adalah sebagai berikut:

1. Tabel *student*, berfungsi untuk menyimpan data nama mahasiswa, NIM dan kelasnya.
2. Tabel Jenis *Task*, untuk menyimpan 12 macam bentuk tugas sebagai perwujudan asesmen kinerja beserta jenis rubrik yang digunakan untuk penilaian, seperti telah disebutkan di atas
3. Tabel Jenis rubrik, berfungsi menyimpan jenis rubrik diantaranya *holistic* dan *analytic rubrik*

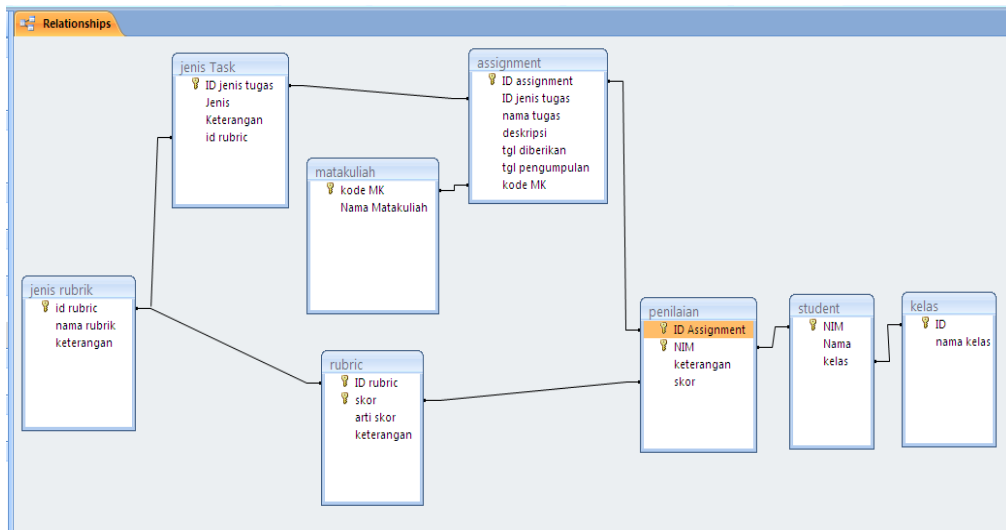
4. Tabel rubrik, untuk menyimpan detik isi rubrik yang meliputi kriteria yang dinilai dan skornya
5. Tabel *assignment*. Tabel ini digunakan untuk menyimpan detil tugas yang diberikan oleh dosen, diantaranya deskripsi tugas, tanggal pengumpulan dan kode matakuliah
6. Tabel Matakuliah, berisi kode matakuliah dan nama matakuliah.
7. Tabel Kelas, berfungsi menyimpan kode kelas dan nam kelas.
8. Tabel Penilaian, berfungsi menyimpan komentar yang diberikan dosen atas hasil pekerjaan tugas mahasiswa, disertai dengan skor sesuai dengan rubrik yang digunakan.

Deskripsi *field-field* yang terdapat pada masing-masing tabel disajikan dalam Tabel 3.

Tabel 3. Deskripsi Tabel-tabel dalam rekaman kinerja akademik mahasiswa

| No | Nama Tabel | Nama field | Tipe data field | Fungsi field |
|----|-------------------|----------------------|-----------------|---|
| 1 | <i>Student</i> | NIM | Text | Menyimpan data NIM |
| | | Nama | Text | Menyimpan data Nama mahasiswa |
| | | Kelas | Number | Menyimpan kode untuk tiap kelas |
| 2 | <i>Jenis Task</i> | Id jenis tugas | Number | Menyimpan kode unik jenis tugas |
| | | Jenis | Text | Menyimpan nama jenis tugas |
| | | Keterangan | Memo | Member keterangan jenis tugas |
| | | Id rubric | Number | Menghubungkan jenis task dengan rubric yang digunakan |
| 3 | Jenis rubric | Id rubric | Number | Menyimpan kode unik jenis rubric |
| | | Nama rubric | Text | Menyimpan nama rubric |
| | | keterangan | text | Memberi keterangan rubric |
| 4 | Rubrik | Id Rubric | Number | Menyimpan kode unik jenis rubric |
| | | skor | Number | Menyimpan Skor dalam rubric |
| | | Arti skor | Memo | Memberi arti skor dalam rubric |
| | | keterangan | Memo | Menyimpan keterangan jika diperlukan |
| 5 | <i>Assignment</i> | Id assignment | Number | Kode unik untuk tugas yang diberikan |
| | | Id jenis tugas | Number | Menghubungkan ke id jenis tugas |
| | | Nama tugas | Text | Menyimpan Nama tugas |
| | | Deskripsi | Memo | Deskripsi lengkap tiap tugas |
| | | Tgl diberikan | Date/time | Tanggal tugas diberikan |
| | | Tgl pengumpulan | Date/time | Tanggal tugas seharusnya dikumpulkan |
| 6 | Mata kuliah | Kode MK | Text | Menghubungkan kode matakuliah |
| | | Nama matakuliah | text | Menyimpan Nama matakuliah |
| 7 | Kelas | Id kelas | Number | Kode unik tiap kelas |
| | | Nama kelas | Text | Menyimpan Nama kelas |
| 8 | Penilaian | Id <i>assignment</i> | Number | Kode unik untuk tugas yang diberikan |
| | | NIM | text | Menghubungkan ke data NIM |
| | | Keterangan | Text | Keterangan penilaian jika diperlukan |
| | | Skor | Text | Skor penilaian tugas |

Relasi antar tabel-tabel tersebut ditunjukkan dalam Gambar 1 berikut.



Gambar 1. Relasi antar tabel

Rancangan tabel-tabel tersebut kemudian diimplementasikan dengan menggunakan perangkat lunak bantu *Microsoft Access*. Setelah tabel-tabel yang dibutuhkan dibuat, selanjutnya dibuat formulir yang berfungsi sebagai antarmuka untuk memudahkan dosen dalam memasukkan data-data tugas dan penilaian tugas mahasiswa.

Berikut ini 3 form utama yang dianggap penting sebagai antarmuka yang harus ada untuk memasukkan data tugas dan penilaiannya. Form ditampilkan dalam bentuk *split form*, yakni data yang telah tersimpan dalam tabel yang bersesuaian dapat dilihat pada bagian bawah form. Form-form juga dilengkapi dengan tombol tambah data, hapus data dan simpan.

a. Form *student*, untuk memasukkan data-data mahasiswa, ditunjukkan dalam gambar 2.

| NIM | Nama | kelas |
|-------------|------------------|-------------|
| 07301241003 | UKI RAHMAWATI | PMAT Sub 07 |
| 07301241004 | TRI WIJAYANTI | PMAT Sub 07 |
| 07301241008 | MULYADI | PMAT Sub 07 |
| 07301241014 | ADI RAHMAN | PMAT Sub 07 |
| 07301241015 | RIANA SINTA DEWI | PMAT Sub 07 |

Gambar 2. Form *student*

b. Form *Assignment*, sebagai antarmuka untuk memasukkan data tugas yang akan diberikan dosen. **Field id jenis tugas** dan **kode MK** dalam form tersebut dilengkapi dengan tombol *drop down*, sehingga dosen hanya tinggal memilih data yang diinginkan dari tabel yang bersesuaian. Gambar 3 menunjukkan form *assignment*.

| ID assignme | ID jenis tugas | nama tugas | deskripsi | tgl diberika | tgl pengum | kode MK |
|-------------|------------------------------|--------------------------|----------------|--------------|------------|---------|
| 1 | Interview | tanya jawab | tanya jawab sa | 21/12/2010 | 21/12/2010 | MAA319 |
| 2 | group performance assessment | Tugas kelompok type data | Tugas kelompok | 28/11/2010 | 06/12/2010 | MAA319 |

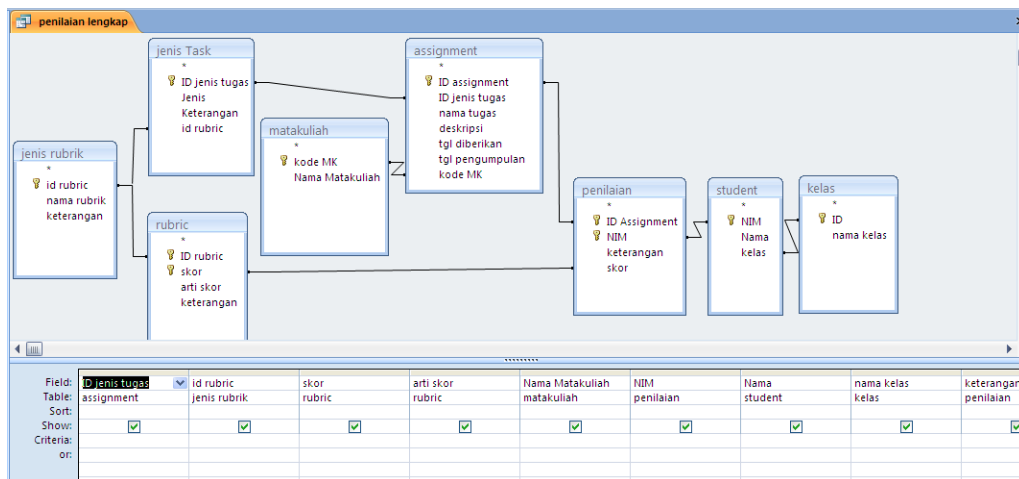
Gambar 3. Form *assignment*

- c. Form Penilaian, seperti ditunjukkan dalam Gambar 4, digunakan sebagai antarmuka untuk memasukkan data penilaian tugas untuk setiap mahasiswa. Pada *field id assignment*, dosen tinggal memilih data id tugas dari tabel *assignment*. Dengan demikian, dosen akan terhindar dari kesalahan memasukkan data id *assignment*. Demikian juga pada *field skor*, tombol drop down disediakan untuk memudahkan dosen melihat skor sesuai dengan rubrik penilaian untuk tugas yang diberikan.

| ID Assignme | NIM | keterangan | skor |
|-------------|-------------|---|------|
| 1 | 07301241003 | dapat menjawab pertanyaa dengan benar, rasional logis dan lengkap | 4 |
| 1 | 07301241004 | dapat menjawab pertanyaa dengan benar, rasio | 4 |

Gambar 4. Form penilaian

Langkah terakhir yang menjadi tujuan utama dalam pembuatan aplikasi rekaman kinerja akademik ini adalah membuat *report* (laporan). *Report* dapat dibuat berdasarkan tabel yang ada atau berdasarkan *query*. *Query* adalah rangkaian perintah yang bertujuan memperoleh data yang lebih lengkap dengan menggunakan hubungan data antar tabel. Contoh *query* yang bertujuan untuk memperoleh hasil penilaian ditunjukkan dalam Gambar 5. *Query* tersebut menggunakan semua tabel yang ada, karena untuk mendapatkan data penilaian yang lengkap, harus mengakses *field-field* pada tabel yang saling berkaitan.



Gambar 5. Query untuk memperoleh data penilaian lengkap dari tabel-tabel terkait

Berdasarkan query tersebut dapat dibuat laporan penilaian, dengan format yang dapat diatur sesuai dengan kebutuhan. Gambar 6 berikut menunjukkan salah satu contoh laporan yang dapat dihasilkan dari aplikasi rekaman kinerja akademik mahasiswa.

| Rekap penilaian tugas Mahasiswa | | | | | |
|---------------------------------|---------------|--------------|--|------|---|
| Pemrograman Komputer | | | | | |
| nama tugas | tanya jawab | nama rubrik: | holistic rubric | | |
| Jenis: | interview | | | | |
| NIM | Nama | nama kelas | keterangan | skor | arti skor |
| 07301241003 | UKI RAHMAWATI | PMAT Sub 07 | dapat menjawab pertanyaan dengan benar, rasional logis dan lengkap | 4 | Respon terhadap tugas sangat spesifik. Informasi yang diberikan akurat dan memperlihatkan pemahaman yang utuh. Respons dikemukakan dalam suatu tulisan yang lancar dan hidup. Jawaban singkat dan langsung ke masalah yang diminta. Kesimpulan atau pendapat mengalir secara logis. Secara lengkap respon lengkap dan sangat menuaskan. |
| 07301241004 | TRI WIJAYANTI | PMAT Sub 07 | dapat menjawab pertanyaan dengan benar, rasional logis dan lengkap | 4 | Respon terhadap tugas sangat spesifik. Informasi yang diberikan akurat dan memperlihatkan pemahaman yang utuh. |

Gambar 6. Contoh laporan penilaian hasil program rekaman akademik

Gambar 6 menunjukkan laporan penilaian pada satu tugas tertentu. Fasilitas berbasis komputer rekaman kinerja akademik ini dapat menghasilkan laporan yang dapat diatur sesuai dengan kebutuhan penilaian yang akan dilakukan oleh dosen.

KESIMPULAN

Perangkat lunak bantu *Microsoft Access* dapat digunakan untuk mengembangkan program aplikasi basis data sederhana untuk merekam kinerja akademik mahasiswa yang dapat

mengakomodasi kebutuhan dosen dalam menyimpan data-data asesmen kinerja mahasiswa dalam suatu matakuliah. Tabel yang dirancang diharapkan dapat menampung semua aspek penilaian yang seharusnya digunakan dosen dalam melakukan penilaian. Laporan yang dihasilkan dapat diatur agar sesuai dengan kebutuhan saat melakukan penilaian.

DAFTAR PUSTAKA

- Asmawi Zainul. 2005. *Alternative Assesment*. Pusat Antar Universitas - Peningkatan dan Pengembangan Aktivitas Instruksional - Universitas Terbuka (PAU-PPAI-UT). Jakarta
- Bullock, A.A. & Hawk, P.P. 2005. *Developing a Teaching Portofolio, A Guide for Preservice and Practicing Teachers. Second Edition*. Pearson Education, Inc. New Jersey.
- Cholis Sa'dijah. *Asesmen kinerja dalam pembelajaran matematika*, tersedia di <http://jurnaljpi.files.wordpress.com/2009/09/vol-4-no-2-cholis-sadijah.pdf>. Diunduh tgl 9 Maret 2010
- Lever-Duffy, J. & McDonald, J.B. 2008. *Teaching and Learning with Technology*. Pearson Education, Inc. Boston.
- Duffy,T.M. & Jonassen,D.H. 1992. *Contructivism and the technology of instruction, A conversation*. Lawrence and Erlbaum Associates, Publisher. New Jersey.
- Marzano,R.J, Pickering,D.J, & McTighe,J. 1994. *Assesing student Outcomes: Performance assesment using the dimensions of learning model*. Association for supervision and curriculum development, Alexandria, Virginia USA

PEMBELAJARAN PEMBAGIAN MENGGUNAKAN PERAGA MANIPULATIF DENGAN PENDEKATAN ALGORITMA TUNGGAL

Qodri Ali Hasan

Universitas Palangkaraya

Abstrak

Tujuan penelitian ini adalah menyusun kegiatan pembelajaran pembagian yang pengajarannya dengan kasus konkret dan alat peraga untuk membantu siswa memahami prinsip-prinsip pembagian, Penelitian ini merupakan penelitian tindakan yang menggunakan pendekatan kualitatif. Sumber data dari penelitian ini adalah 11 siswa sekolah dasar di Kelurahan Panarung Kotamadya Palangkaraya yang tidak mampu melakukan operasi pembagian. Berdasarkan hasil penelitian diperoleh kesimpulan bahwa pembelajarannya dapat dilakukan sebagai berikut : (a) tahap awal yaitu (i) mengingatkan kepada siswa akan materi prasyarat yang diperlukan, (ii) memperkenalkan konsep-konsep yang ada dalam algoritma pembagian melalui contoh-conto relevan (kasus nyata/konkret) yang sering dijumpai siswa; (b) tahap inti yaitu (i) menunjukkan contoh-contoh konsep yang relevan, (ii) dengan benda konkret melakukan manipulasi pembagian, (iii) dengan gambar mental konsep tersebut disajikan dalam bentuk semi konkret, (iv) dengan menggunakan tabel, konsep pembagian disajikan dalam bentuk simbol; (c) tahap akhir yaitu (i) sebagai pementapan materi siswa diminta mengerjakan LKS dengan melakukan manipulasi sendiri, (ii) membahas hasil kerja siswa secara bersama-sama, (iii) menegaskan kembali konsep yang benar.

Kata kunci: Pembelajaran, Algoritma pembagian, Kasus konkret, Alat peraga

PENDAHULUAN

Ada 4 (empat) operasi hitung dasar pada bilangan cacah, keempat operasi hitung ini adalah penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian (Surtini, 2000:1). Penguasaan operasi hitung dasar sangat penting karena operasi ini akan menjadi dasar bagi mereka yang mau belajar matematika, oleh karena itu konsep berhitung harus benar-benar dipahami oleh mereka yang akan belajar matematika.

Untuk menanamkan konsep berhitung perlu dilakukan suatu pengajaran yang lebih memungkinkan siswa untuk memahami konsep tersebut. Sehingga penyajian secara enaktif, ikonik, dan simbolik perlu dilakukan untuk lebih memudahkan seseorang memahami konsep (Bruner dalam Dahar 1988:124).

Di antara keempat operasi hitung pembagian adalah yang paling sulit untuk dipelajari (John, 1988:107). Mengingat pentingnya penguasaan konsep berhitung maka konsep berhitung perlu benar-benar dikuasai siswa. Hudojo (1988:10) mengatakan bahwa teori belajar sangat membantu guru dalam menyampaikan bahan pelajaran kepada siswa. Ruseffendi (1992:107) menyatakan bahwa begitu pentingnya pengetahuan tentang teori belajar dalam sistem penyampaian materi dalam kelas, sehingga setiap metode pengajaran dapat selalu disesuaikan dengan teori-teori belajar.

Pada umumnya siswa Sekolah Dasar berumur sekitar 7 – 12 tahun. Menurut Piaget (dalam Hudoyo, 1988:45) anak seumur itu pada tahap operasi konkret. Periode ini disebut operasi konkret sebab berfikir logikanya didasarkan atas manipulasi fisik dan objek-objek atau peristiwa-peristiwa yang langsung dialaminya (Hudoyo, 1979:87). Operasi pada periode ini terikat kepada pengalaman pribadi dan pengalaman-pengalaman ini konkret bukan formal. Anak pada tahap ini dapat bernalar secara induktif tetapi masih sangat lemah dalam bernalar deduktif dan masih

mengalami kesulitan-kesulitan dalam menangkap ide atau gagasan-gagasan abstrak (Sutawidjaja, 1998:4). Untuk itu yang perlu diperhatikan pada tahap operasi konkret adalah siswa dapat lebih memahami konsep-konsep matematika yang didasarkan pada benda-benda konkret. Bahkan Ausubel (dalam Hudojo, 1979:95) menekankan bahwa sekalipun seseorang sudah dalam operasi formal, bila menghadapi suatu konsep yang benar-benar baru biasanya cenderung menggunakan pendekatan konkret.

Berdasarkan pernyataan di atas, maka penyajian konsep berhitung perlu mendapat perhatian. Hal ini sesuai dengan pernyataan Kennedy dan Tips (1994:342) yang menyatakan bahwa pengajaran pada tahap awal pengenalan operasi hitung bentuk abstrak masih sulit untuk dipahami oleh siswa, oleh sebab itu diperlukan lingkungan belajar dalam situasi nyata dan dengan cara yang sederhana kepada siswa agar mampu memahami konsep abstrak. As'ari (1998:5) menyatakan bahwa untuk memudahkan seorang anak memahami konsep matematika yang abstrak, perlu menggunakan masalah yang konkret dan benda-benda konkret.

Untuk membantu siswa memahami materi yang abstrak, perlu alat peraga yang memungkinkan siswa untuk memahami materi tersebut. Alat peraga digunakan sebagai perantara antara hal yang konkret yang dipahami siswa dengan konsep matematika yang abstrak. Dengan alat peraga diharapkan cara-cara penyajian materi sesuai dengan tahapan perkembangan mental siswa.

Banyak siswa SMP dan SMA yang masih kesulitan melakukan pembagian padahal pembelajaran pembagian adalah pembelajaran yang dilakukan di Sekolah Dasar, Hal ini mungkin disebabkan mereka tidak memahami proses bagaimana pembagian dilakukan. Untuk itu perlu dilakukan pencarian model pembelajaran pembagian yang memungkinkan siswa untuk lebih mudah memahami pembagian.

Sedangkan yang menjadi permasalahan dalam penelitian ini adalah bagaimana mengajarkan konsep pembagian pada siswa Sekolah Dasar (memperkenalkan algoritma pembagian) dengan menggunakan kasus konkret?. Sejalan dengan pertanyaan di atas, maka penelitian ini bertujuan menyusun kegiatan pembelajaran pada topik pembagian yang dilakukan dengan mempergunakan kasus-kasus pembagian yang konkret yang sering dijumpai siswa dari lingkungan sekitarnya. untuk membantu menemukan prinsip-prinsip pembagian.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini didesain untuk memecahkan permasalahan yang dihadapi guru dalam memilih pendekatan mengajar yang sesuai. Pendekatan yang digunakan dalam penelitian ini adalah pendekatan kualitatif. Sebagaimana yang dikemukakan oleh Moleong (2000:4), Pendekatan kualitatif dalam penelitian ini digunakan untuk menelusuri dan mendapatkan gambaran secara jelas tentang fenomena yang tampak selama proses pembelajaran berlangsung.

Jenis penelitian ini adalah penelitian tindakan kelas (PTK), karena sesuai dengan karakteristik penelitian tindakan kelas (Kasbolah, 1998:14; Madya, 1994:27; As'ari, 2000:14) merupakan penelitian yang bersifat reflektif dilakukan dengan melakukan tindakan-tindakan tertentu untuk mengembangkan dan meningkatkan kualitas guru mengajar, memperdalam pemahaman terhadap tindakan-tindakan yang dilakukan agar menjadi lebih profesional.

Prinsip dasar setiap tindakan dalam penelitian ini mengacu pada model Hopkins (dalam Tim Pelatih Proyek PGSM, 1999:5) yaitu yang digambarkan sebagai siklus spiral yang terdiri dari empat komponen yaitu perencanaan, pemberian tindakan, pengamatan (observasi), dan refleksi.

Sumber data penelitian adalah seluruh siswa yang mau mengikuti pembelajaran pembagian yang di adakan di LBB Teknos Palangkaraya. Untuk lebih mendalami tentang pemahaman siswa tentang materi pembelajaran dipilih 3 (tiga) siswa berdasarkan tes awal dari semua siswa yang ikut, masing-masing 1 (satu) siswa yang mendapat nilai tertinggi, sedang, dan terendah

Data dalam penelitian didapatkan dengan cara wawancara yang direkam untuk mendalami pemahaman siswa, hasil pengamatan untuk mengetahui proses pelaksanaan

pembelajaran, hasil tes awal, hasil tes di akhir setiap tindakan, catatan lapangan yang meliputi seluruh catatan menyangkut dengan kegiatan pada saat tindakan, serta koesioner tentang sikap siswa terhadap pembelajaran dengan menggunakan kasus yang konkret dan menggunakan alat peraga sederhana.

Data yang diperoleh dianalisis dengan menggunakan alur sebagaimana yang dikemukakan oleh Mills dan Huberman (dalam Mc Niff, 1992:166), yaitu : (1) reduksi data; (2) penyajian data; (3) penarikan kesimpulan atau verifikasi. Ketiga komponen ini merupakan satu kesatuan yang saling berkaitan dan prosesnya berulang secara interaktif. Analisis data dilakukan selama dan atau sesudah pengumpulan data.

HASIL PENELITIAN

Untuk menanamkan konsep pembagian pembelajaran dilaksanakan dalam dua topik. Topik I adalah memperkenalkan algoritma pembagian dalam bentuk sederhana yaitu pembagian hanya melibatkan satu satuan. Pada topik ini siswa diajarkan untuk memahami adanya bilangan yang dibagi, bilangan pembagi, bilangan hasil bagi dan bilangan sisa pembagian.

Topik I diperkenalkan melalui kasus-kasus yang sering dijumpai siswa dalam lingkungannya. Umumnya siswa sudah mengenal pembagian yang pernah dijumpai dari lingkungan sekitar siswa, seperti membagi mangga kepada beberapa anak, membagi satu kotak kelereng ke beberapa kotak yang lebih kecil. Dari kasus yang diketahui ini siswa sudah memahami adanya sesuatu yang dibagi, pembagi, hasil bagi, dan sisa.

Hasil tes akhir dari topik I ternyata cukup bagus. Evaluasi di akhir pembelajaran dalam bentuk tes menunjukkan bahwa rata-rata skor kelas adalah 87,21 dan siswa yang memperoleh nilai ≥ 65 % sebanyak 100 % siswa. Kegiatan pembelajaran II adalah memperkenalkan alat peraga pembagian pada siswa, hal ini dilakukan karena alat peraga pembagian merupakan barang baru yang baru dikenal siswa. Alat peraga merupakan upaya menterjemahkan kasus konkret dengan benda konkret yang umumnya lebih mudah dipahami siswa.

Evaluasi di akhir pembelajaran dalam bentuk tes menunjukkan bahwa rata-rata skor kelas adalah 88,64 dan siswa yang memperoleh nilai ≥ 65 % sebanyak 100 % siswa. Dilihat dari proses pembelajaran umumnya siswa aktif dan berani bertanya pada guru mengenai hal-hal yang masih kurang jelas.

Berdasarkan observasi dan refleksi dari Topik I sampai topik II dan dari hasil kuesioner serta hasil wawancara dapat dikemukakan temuan penelitian sebagai berikut.

1. Dari pembelajaran topik I ternyata siswa memahami atribut-atribut pada pembagian seperti bilangan yang dibagi, bilangan pembagi, bilangan hasil bagi, dan sisa pembagian.
2. Dari pembelajaran topik II siswa mampu memahami prosedur pembagian berikut
 - a. Menentukan satuan terbesar pembagi
 - b. Mengurangi bilangan yang dibagi dengan bilangan pembagi dikalikan satuan pembagi sampai bilangan yang dibagi lebih kecil dari bilangan pembagi dikalikan satuan pembagi.
 - c. Menuliskan banyaknya pengurangan dan satuan diatas simbol pembagian
 - d. Menuliskan sisa pembagian di bawah garis.
 - e. Mengecilkan satuan pembagi, jika sisa lebih besar dari pembagi maka dilakukan pengurangan seperti pada b, jika tidak satuan pembagi diperkecil lagi.
 - f. Melakukan prosedur b sampai e (algoritma pembagian) berulang-ulang sehingga sisa pembagian nol atau hasil bagi membentuk pola yang sama.
3. Pembelajaran yang dilakukan membuat siswa lebih memahami keterkaitan antara penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian. sehingga konsep pembagian yang terdapat dalam diri siswa merupakan pengetahuan yang terangkai dalam struktur kognitif siswa.
4. Penggunaan kasus yang ada dalam lingkungan sekitar siswa membantu siswa memahami materi pembelajaran.

PEMBAHASAN

Diawal pembelajaran guru melakukan cek terhadap kemampuan materi prasyarat dan diketahui umumnya siswa telah menguasai kemampuan prasyarat pembagian. Hal ini sesuai dengan pendapat Bendal dan Galili (1993:169) yang menyatakan bahwa bila guru tidak memperhatikan pengetahuan awal siswa, siswa akan mungkin mengalami kesulitan dalam pembelajaran. Hal senada dikatakan oleh Hudojo (1998:4) bahwa konsep B akan sulit dikuasai jika siswa tidak menguasai konsep A, karena konsep A merupakan dasar dari konsep B. Hal ini disebabkan karena adanya sifat yang dimiliki konsep matematika, yaitu konsep yang satu berkaitan dengan konsep yang lain.

Penyajian enaktif dengan menggunakan alat peraga dikenalkan melalui pembagian yang sering dijumpai dalam lingkungan siswa (kasus konkret). Perlunya memperkenalkan pembagian dengan apa yang sering dijumpai siswa karena kaitan antara alat peraga dengan materi pembagian harus dipahami siswa.

Kegiatan ini sesuai dengan teori konstruksi yang dikemukakan oleh Bruner (dalam Ruseffendi; 1992:110) bahwa meletakkan ide atau definisi tertentu dalam pikiran siswa, maka siswa harus menguasai konsep dengan melakukan sendiri penyusunan representasi konsep itu dengan bantuan benda konkret. Karena dengan kegiatan ini siswa akan lebih mudah mengingat ide-ide yang dipelajari.

Di samping penyajian dengan benda konkret, penyajian dengan gambar mental dari benda-benda yang dimanipulasi juga dilakukan oleh guru. Penyajian dengan gambar mental memperlancar pemahaman dan ingatan, hal ini dikemukakan Biehler (dalam Dahar, 1988:59). Pada penyajian dengan gambar mental untuk menjembatani konsep dari bentuk konkret ke bentuk abstrak (simbol). Hal ini sesuai dengan apa yang dikatakan Gagne (dalam Dahar, 1988:59) bahwa untuk memikirkan dimensi-dimensi abstrak, dapat pula dilakukan penyajian melalui gambar mental.

Setelah terbentuk skemata konsep pembagian dalam benak siswa pembelajaran dilanjutkan kegiatan pembelajaran dilanjutkan dengan simbol bilangan. Siswa dapat menentukan hasil pembagian dan sisa pembagian dengan cepat sebagaimana mereka melakukan dengan benda nyata. Ini berarti telah terjadi proses asimilasi sesuai dengan apa yang dikatakan Piaget (dalam Hudojo, 1990:37) bahwa asimilasi adalah proses mendapatkan informasi dan pengalaman baru yang langsung menyatu dengan struktur mental yang dimiliki seseorang.

Selanjutnya menjelaskan keadaan pengurangan dengan sisa kurang dari bilangan pembagi sebagai suatu kondisi di mana kita akan melakukan pembagian dengan satuan yang lebih kecil. Keadaan pembagian dengan sisa yang lebih kecil dari bilangan pembagi dikatakan sebagai algoritma pembagian. Karena adanya pengalaman konkret siswa dengan mudah memahami hal ini. Sebab setiap kali mereka melakukan pengurangan, pada suatu saat sisa dari bilangan yang dikurangi akan lebih kecil dari bilangan pembagi.

Selanjutnya untuk aktivitas pemahaman dilakukan dengan menggunakan LKS. Kegiatan ini dimaksudkan untuk lebih memantapkan pemahaman siswa. Pemberian latihan ini sesuai dengan pendapat Hudojo (1988:105) bahwa setelah pengertian diperoleh, siswa memerlukan latihan yang cukup agar mereka mendapatkan kesempatan untuk mengorganisasikan kembali atau menstruktur kembali pengetahuan-pengetahuan yang berkembang dengan konsep yang telah dipelajari.

Selanjutnya prosedur pembagian dikenalkan melalui conchoc-contoh nyata yang sering dijumpai siswa dalam lingkungan sosialnya. Melalui contoh nyata ini siswa diarahkan untuk mampu memahami prosedur pembagian pada matematika. Hal ini sesuai dengan apa yang dikatakan Hudojo (1988:46) pada usia 7-12 tahun pengerjaan-pengerjaan logik dapat dilakukan dengan berorientasi ke objek-objek atau peristiwa-peristiwa yang langsung dialami siswa. Hal senada juga dikatakan Skemp (1975:32) bahwa konsep-konsep matematika pada awal perkenalannya tidak diajarkan melalui definisi, tetapi hendaknya melalui contoh-contoh yang relevan. Dengan peragaan siswa melihat langsung proses pembagian sama dengan proses

pembagian yang sering ia jumpai sehingga dalam benak siswa terbentuk skemata tentang pembagian dengan menggunakan simbol. Hal ini sesuai dengan apa yang dikatakan Suherman (2001:203) bahwa (1) konsep abstrak matematika yang tersajikan dalam bentuk konkret akan lebih mudah dipahami dan dimengerti, (2) hubungan konsep abstrak matematika dengan alam sekitar akan lebih mudah dipahami.

Tabel disusun dari nilai tempat yang besar ke nilai tempat yang kecil. Melalui tabel ini diharapkan terjadi kompilasi pengetahuan yaitu suatu proses pembentukan suatu penyajian untuk urutan-urutan aksi yang menuju pada tindakan yang lancar dan cepat (Dahar, 1988:87). Dengan adanya contoh-contoh yang sudah dikenali oleh siswa, maka guru mengarahkan siswa untuk menstruktur konsep dalam benaknya. Dengan adanya konsep awal yang sudah ada dalam benak siswa, diharapkan konsep yang terbentuk dalam diri siswa adalah konsep yang terangkai. Karena dengan konsep yang terangkai dalam benak siswa pengetahuan akan lebih bertahan lama dan akan lebih mudah dipanggil dalam memori kerja. Hal ini sejalan dengan apa yang dikatakan Ausubel (dalam Dahar, 1988:137) bahwa belajar bermakna merupakan suatu proses dikaitkannya informasi baru pada konsep-konsep yang relevan yang terdapat pada struktur kognitif seseorang.

Ruseffendi (1980:383) meyakini adanya hubungan antara pengajaran dengan benda-benda yang ada di sekitarnya atau peristiwa di masyarakat sangat penting. Karena dengan hal tersebut materi pembelajaran dapat disajikan lebih menarik dan mudah dipahami. Dengan materi yang menarik siswa akan tumbuh minatnya dalam belajar matematika.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian diperoleh kesimpulan sebagai berikut. (a) tahap awal yaitu (i) mengingatkan kepada siswa akan materi prasyarat yang diperlukan, (ii) memperkenalkan konsep-konsep yang ada dalam algoritma pembagian melalui contoh-contoh relevan (kasus nyata/konkret) yang sering dijumpai siswa; (b) tahap inti yaitu (i) menunjukkan contoh-contoh konsep yang relevan, (ii) dengan benda konkret melakukan manipulasi pembagian, (iii) dengan gambar mental konsep tersebut disajikan dalam bentuk semi konkret, (iv) dengan menggunakan tabel, konsep pembagian disajikan dalam bentuk simbol; (c) tahap akhir yaitu (i) sebagai pemantapan materi siswa diminta mengerjakan LKS dengan melakukan manipulasi sendiri, (ii) membahas hasil kerja siswa secara bersama-sama, (iii) menegaskan kembali konsep yang benar.

Terdapat beberapa saran yang perlu disampaikan. (1) Dalam pembelajaran konsep pembagian perlu diajarkan atribut-atribut yang terdapat dalam algoritma pembagian; (2) Bagi guru matematika tingkat sekolah dasar/madrasah Ibtidaiyah disarankan untuk menggunakan alat peraga agar penyajian materi matematika lebih mudah dipahami oleh siswa. Jika tidak ada alat peraga, sebaiknya perlu digunakan gambar mental dari konsep yang disajikan. (3) Contoh-contoh konsep yang digunakan untuk memperkenalkan materi pembelajaran sebaiknya diambil dari contoh-contoh yang pernah dijumpai oleh siswa dan relevan dengan materi yang disajikan; (4) Mengingat konsep dalam matematika saling terkait, dalam pembelajaran sebaiknya guru tidak terlalu kaku terikat dengan kurikulum. Kemampuan dan kondisi siswa perlu menjadi perhatian utama dalam pembelajaran.

DAFTAR PUSTAKA

- As'ari, A.R. 1998. *Penggunaan Alat Peraga Manipulatif dalam Penanaman Konsep Matematika*. Jurnal Matematika, Ilmu Pengetahuan Alam dan Pengajarannya, 27(1): 1-13.
- Ausubel, D.P. 1968. *Educational Psychology A Cognitive View*. New York: Holt, Rinehart, and Winston.
- Dahar, R.W. 1988. *Teori-teori Belajar*. Jakarta: Erlangga.

Qodri Ali Hasan / Pembelajaran Pembagian Menggunakan

Good, 1973. *Dictionary of Education*. New York: Mc Grow Hill Book.

Hudoyo, H. 1979. *Pengembangan Kurikulum Matematika*. Jakarta: Proyek Pengembangan Lembaga Pendidikan Tenaga Kependidikan. Direktorat Jendral Pendidikan Tinggi. Depdikbud.

Hudoyo, H. 1990. *Strategi Mengajar Belajar Matematika*. Malang: IKIP Malang.

Hudoyo, H. 1998. *Pembelajaran Matematika Menurut Pandangan Konstruktivistik*. Makalah disajikan pada Seminar Nasional Upaya-upaya Meningkatkan Peran Pendidikan Matematika dalam Menghadapi Era Globalisasi: Prespektif Pembelajaran Alternatif-Kompetitif. Program Pasca Sarjana, IKIP Malang. 4 April 1998.

John L. & Marks. *Metode Mengajar Matematika untuk Sekolah Dasar*. Terjemahan oleh Bambang Sumantri. 1988. Erlangga: Jakarta.

Kasbolah. K. 1998. *Penelitian Tindakan Kelas (PTK)*. Jakarta: Proyek Pendidikan Guru Sekolah Dasar. Direktorat Jendral Pendidikan Tinggi. Departemen Pendidikan dan Kebudayaan.

Kennedy. L. M. Tipps. & Stave, 1994. *Guiding Children's Learning of Mathematics*, Belmont, California: Wadsworth Publishing Company.

Mc Niff, J. 1992. *Action Research Principles and Practice*. New York: Chapman and Hall, Inc.

Skemp, R.R. 1975. *The Psychology of Learning Mathematics*. Harmondsworth: Penguin Book.

Suherman, E., Tarmudi, Suryadi, D., Herman, T., Suhendra, Prabawanto, S., Nurjanah, Rohayati, A., T2001. *Strategi Pembelajaran Matematika Kontemporer*. Badung: JICA-Universitas Pendidikan Indonesia.

Sutawidjaya. 1998. *Pembelajaran Matematika Sekolah Dasar*. (tidak dipublikasikan). Makalah untuk Mahasiswam Pasca Sarjana, Program Studi Matematika SD. IKIP Malang.

Surtini, S. 2000. *Pendekatan CPSA untuk Membantu Siswa Kelas III di SDN Mangunsari 3 Kotamadya Salatiga Memecahkan Masalah Perkalian Bilangan Cacah*. Tesis tidak dipublikasikan. Malang: PPS UM.

Tim Pelatihan Proyek PGSM, 1999, *Penelitian Tindakan Kelas*, Jakarta: depdikbud.

PENGEMBANGAN MATERI PEMBELAJARAN OPERASI PEMBAGIAN DENGAN MENGGUNAKAN ALAT PERAGA MANIPULATIF

Qodri Ali Hasan

Universitas Palangkaraya

Abstrak

Tulisan ini bertujuan mendeskripsikan materi pembagian jika disajikan dengan menggunakan alat peraga pembagian manipulatif. Dengan menggunakan peraga pembagian manipulatif kegiatan pembagian dapat dilakukan dalam bentuk konkret dan langsung diamati sehingga lebih mudah untuk dipahami dan berguna terutama bagi siswa yang kesulitan melakukan operasi pembagian jika langsung disajikan dalam bentuk formal. Materi-materi pembagian yang dapat disajikan dalam bentuk konkret sampai bentuk formal adalah hampir semua materi pembagian baik materi pembagian bilangan bulat dengan bilangan bulat, bilangan bulat dengan bilangan pecah, bilangan pecahan dengan pecahan, bilangan negatif, membagi dengan basis 10, dengan basis n , dengan basis x (pembagian dalam bentuk fungsi). Mengingat terbatasnya waktu dan tempat penyajian, pada tulisan ini hanya akan disajikan sajian materi pembagian dari bilangan bulat, sedangkan penyajian materi selanjutnya hanya secara garis besarnya saja yang pada hakekatnya dilakukan berdasarkan prinsip pengambilan berulang.

Kata kunci: Operasi pembagian, Peraga pembagian manipulatif

PENDAHULUAN

Penyebab rendahnya prestasi belajar matematika sangat kompleks, salah satunya karena pelaksanaan pembelajaran matematika di sekolah masih dihadapkan pada masalah pembelajaran itu sendiri. Kebanyakan guru (dosen) melaksanakan pembelajaran dengan menggunakan pendekatan yang pembelajarannya masih berpusat pada pengajar. Banyak temuan yang menunjukkan akibat negatif pengajaran matematika yang berpusat pada guru/dosen. Schoenfeld (dalam Yuwono, 2001) menyatakan bahwa pembelajaran matematika yang berpusat pada guru (dosen) mengakibatkan siswa (mahasiswa) hanya bekerja secara prosedural dan memahami matematika tanpa penalaran.

Berbagai usaha perbaikan dan peningkatan mutu pendidikan matematika telah dilakukan, namun hasil belajar belum sesuai dengan harapan. Menurut (Hudojo, 2002) hasil belajar matematika sekolah ternyata tidak memuaskan berbagai pihak. Karena itu perlu terobosan untuk meningkatkan hasil belajar matematika.

Salah satu upaya untuk melakukan perbaikan adalah dengan melakukan perubahan dan perbaikan pada aspek pembelajarannya. Dengan upaya perubahan dan perbaikan pembelajaran tersebut, diharapkan akan dapat memberikan nuansa baru bagi pembelajar dalam belajar matematika maupun pengajar dalam mengajar yang pada gilirannya diharapkan dapat mempengaruhi proses dan hasil belajar (Rahaju, dkk, 2002).

Ditinjau dari pendekatan pembelajarannya, pada umumnya pengajar mengajar matematika berdasarkan apa yang tertulis dalam buku ajar. Mereka mengejar target kurikulum tanpa memikirkan kemampuan berfikir pembelajar. Akibatnya tidak semua pembelajar mampu memahami materi secara bermakna (Sa'diyah, 2001). Pembelajaran matematika yang hanya berorientasi sekedar pemindahan pengetahuan dari pengajar ke pembelajar perlu dikaji ulang (Hudojo, 1998). Perlu dipikirkan alternatif yang memandang pembelajaran adalah sebagai usaha

pembelajar untuk mengkonstruksi konsep-konsep/prinsip-prinsip matematika dengan kemampuannya sendiri melalui proses internalisasi sehingga konsep tersebut terbangun (Nickson dalam Hudojo, 1998).

Menurut pandangan konstruktivistik, pengetahuan dibangun secara aktif oleh individu (Suparno, 1997), pengetahuan dapat dibentuk oleh pembelajar dalam pikirannya sendiri setelah adanya interaksi dengan lingkungan, oleh karena itu paham konstruktivis lebih menekankan pada pembelajaran yang berpusat pada pembelajar (Soejadi, 2000). Novak (1985) menyatakan bahwa salah satu faktor penting yang dapat mempengaruhi belajar pembelajar adalah apa yang telah diketahuinya. Pengajar hendaknya memperhatikan dan memanfaatkan pengetahuan awal yang telah ada dalam diri pembelajar, karena menurut Ausubel (dalam Hudojo, 1988) pengetahuan baru yang dipelajari bergantung pada pengetahuan yang telah dimiliki sebelumnya.

Nickson (dalam Hudojo, 1998: 6) mengatakan bahwa pembelajaran matematika menurut pandangan konstruktivis adalah pembelajaran untuk membantu siswa membangun konsep-konsep/prinsip-prinsip matematika dengan kemampuan mereka sendiri melalui proses internalisasi sehingga konsep/prinsip tersebut terbangun kembali dan transformasi informasi yang diperoleh menjadi konsep/prinsip baru yang terbentuk dari dalam benak siswa. Lebih lanjut Nickson mengatakan bahwa terbentuknya skemata dalam benak siswa menyebabkan terjadinya pemahaman sehingga transformasi mudah terjadi. Jadi pembelajaran matematika adalah membangun pemahaman yang merupakan hal terpenting dari hasil belajar sebab pemahaman akan bermakna pada materi yang dipelajari.

Menurut Sembiring (dalam TIM Penulis Pakerti, 2000), karakteristik utama matematika terletak pada disiplin atau pola berpikir yang sering disebut sebagai penalaran matematika yaitu konsep-konsep matematika tersusun secara hirarkhis, terstruktur, logis, sistematis, dan konsisten mulai dari konsep yang paling sederhana sampai konsep yang paling kompleks. Jika konsep yang paling dasar tidak dipahami dengan baik maka pembentukan konsep-konsep selanjutnya akan semakin sulit, untuk itu materi awal matematika sangat perlu dipahami oleh siswa dengan baik dan benar.

Berhitung adalah dasar bagi mereka yang mempelajari matematika, Di antara operasi hitung yaitu penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian, konsep pembagian adalah yang paling sulit untuk dipelajari (John, 1988:107). Mengingat pentingnya penguasaan konsep berhitung untuk belajar matematika pada tingkat selanjutnya maka konsep berhitung perlu benar-benar dikuasai siswa. Dengan demikian karena pembagian merupakan salah satu materi berhitung dasar maka materi ini juga penting untuk dikuasai dan dipahami dengan benar. Tulisan ini berusaha memaparkan materi operasi pembagian yang dikembangkan dari lingkungan dan disajikan lebih konkret sehingga lebih mudah dipahami oleh siswa SD/MI.

PEMBAHASAN

Pembagian yang ada dilingkungan siswa

Pengertian pembagian secara intuitif umumnya sudah diketahui anak dari lingkungannya. Mereka mengetahui melalui pengalaman langsung seperti membagi kue, buah, dan lain sebagainya. Anak biasanya mengerti bahwa membagi pada awalnya dikenal dari lingkungan masyarakat sebagai mempartisi sesuatu menjadi lebih dari satu bagian. Dengan demikian sebelum belajar disekolah umumnya anak sudah mengerti pembagian dalam objek-objek fisik meski masih dalam tahap intuitif. Dalam ide matematika proses tersebut diberikan sebagai proses mengurangi dengan cacah/ukuran yang sama.

Mempartisi sekumpulan benda dapat dilakukan dengan dua cara yaitu dengan menghitung dan dengan mengukur. Benda benda dengan jumlah yang mungkin dihitung dengan cara mempartisi dapat dilakukan dengan mencacah dan ini biasanya dilakukan untuk memperkenalkan pembagian pada tahap awal. Sedangkan mempartisi benda yang tak mungkin dihitung dilakukan dengan mengukur (seperti membagi beras, gula minyak goreng dan lain sebagainya dapat dilakukan dengan timbangan, literan dan lain sebagainya).

Pada saat siswa ke sekolah, mereka sudah memiliki beberapa pemahaman intuitif tentang beberapa konsep matematika, termasuk bilangan dan pengukuran. Contoh siswa taman kanak-kanak dan siswa kelas 1 SD dapat menyelesaikan masalah penggabungan, pemisahan, membandingkan kuantitas secara intuitif dengan melakukan aktifitas menyelesaikan masalah dengan sekumpulan objek (Carpenter & Lahrer, 1999). Perluasan strategi dapat dilakukan untuk mengembangkan konsep penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian (Carpenter, Fennema, Fuson, Hiebert, Human, Murray, Oliver, & Wearne, 1999).

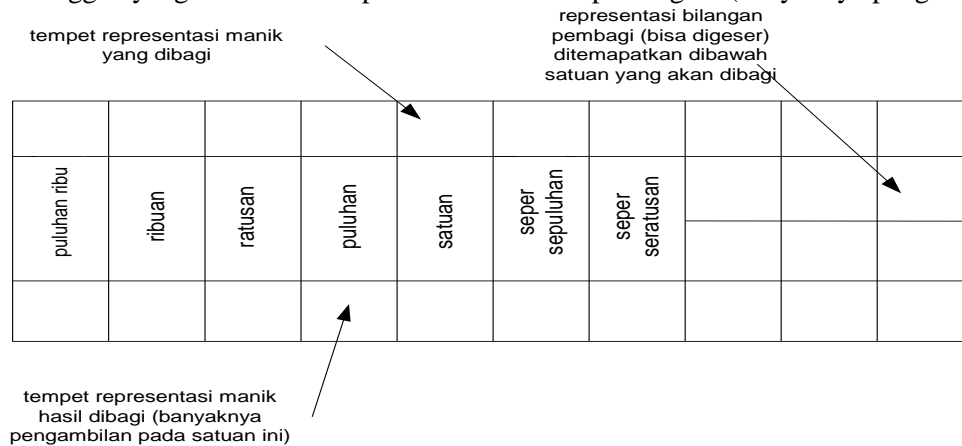
Pada saat siswa belajar ide dasar matematika, 3 (tiga) hal penting yang harus diperhatikan adalah : (1) mereka belajar konsep empirik, (2) mereka belajar tentang objek matematika, dan (3) mereka belajar tentang hubungan antara konsep empirik dan objek matematika yang merupakan potongan-potongan abstrak (White :2004). Konsep empirik merupakan hasil abstraksi empirik, yaitu mengenal kesamaan yang fokus pada objek dan sifatnya. Siswa yang gagal dalam membuat hubungan antara potongan-abstrak konsep matematika dengan konsep empirik yang bersesuaian akan kesulitan belajar matematika. Menurut Yetkin (2003) kesulitan-kesulitan siswa dalam belajar matematika meliputi kesulitan dalam belajar simbol-simbol tertulis, konsep, dan prosedur.

Peraga Manipulatif Pembagian

Peraga manipulatif dikembangkan atas dasar pembagian dengan menggunakan pengukuran dan pencacahan. Nilai-nilai tempat adalah pengembangan dari ukuran-ukuran yang dibagi, sedangkan cacah manik yang terletak pada peraga adalah pengembangan dari membagi dengan cara mencacah. Tempat bilangan pembagi, berguna untuk membagi bilangan negatif, pembagian pada fungsi. Tempat ini bisa digeser- geser. Gambar peraga tersebut adalah sbb:



Peraga manipulatif ini adalah analog dengan membagi dengan menggunakan prinsip pengukuran baik satuan berat, volume ataupun panjang. Hanya pada peraga ini satuan digantikan dengan puluhan ribu, ribuan, ratusan, puluhan, satuan, sepersepuluh dan seterusnya. Setiap tonggak mewakili satu nilai tempat. Tonggak diatas merepresentasikan cacah manik yang dibagi, sedangkan tonggak yang dibawah merepresentasikan hasil pembagian (banyaknya pengambilan).



Sajian Materi Pembelajaran dengan Peraga Manipulatif

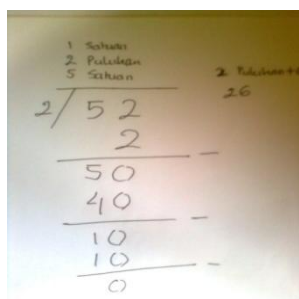
Menurut Soejono (1988:33) perlu dilakukan pembelajaran yang sesuai dengan usia kognitif siswa, karena jika konsep-konsep diperkenalkan terlalu cepat atau terlalu abstrak untuk siswa akan bisa mengakibatkan timbulnya sikap negatif yang diakibatkan oleh pengalaman-pengalaman yang tidak menyenangkan dari belajar matematika. Pada siswa sekolah dasar untuk bisa memahami sesuatu mereka lebih mudah bila ada benda konkret yang dapat membantu untuk memahami konsep tersebut. Jika kesulitan abstraksi bisa dikurangi maka mereka lebih mudah memahami konsep dan mereka akan lebih siap untuk belajar lebih lanjut.

Mengingat pentingnya operasi dasar matematika sebagai prasyarat untuk belajar matematika lebih lanjut, maka pembentukan konsep pembagian perlu disajikan secara jelas dan terinci yang memungkinkan siswa memahami kaitan keempat operasi dasar tersebut maupun kaitannya dengan konsep dasar matematika yang lain. Untuk dapat sampai pada terbentuknya struktur pemahaman dalam diri siswa Bergeron & Herscovics, memperkenalkan konstruksi pemahaman konsep dengan model tingkat II. Dengan tingkat pertama ditunjukkan pada penggambaran pemahaman konsep fisik, dan tingkat kedua menggambarkan pemahaman konsep matematika yang muncul dari proses matematika (Bergeron & Herscovics, 1988).

Dalam membagi, ada dua cara yaitu dengan menghitung secara langsung dan dengan melakukan pengukuran. Jika jumlah benda yang akan dibagi dalam jumlah berhingga dan memungkinkan untuk dilakukan pencacahan, maka pembagian dengan cara mencacah benda tersebut masih dimungkinkan.

Namun jika cacah bendanya terlalu banyak atau tidak mungkin dilakukan penghitungan, pembagian dapat dilakukan dengan cara mengukur, misalnya gula pasir, beras, minyak dan lain sebagainya. Contoh-contoh ini dapat memberikan gambaran bahwa membagi tidak hanya dilakukan dengan cara mencacah, namun dapat pula dilakukan dengan cara mengukur. Untuk menunjukkan bahwa hasil membagi dengan menggunakan pengukuran tidak berbeda dengan hasil pencacahan dapat diberikan contoh membagi kelereng yang mempunyai ukuran sama dengan cara mencacah kemudian dilanjutkan membagi kelereng tersebut dengan cara menimbang. Perlunya pengukuran untuk membagi ditunjukkan pada siswa adalah bahwa pada siswa juga diajarkan konversi satuan-satuan pengukuran dari kg, hg, dg, g, dan seterusnya untuk satuan berat, kl, hl, dl, l, dan seterusnya untuk satuan volume yang umumnya menggunakan basis 10.

Pembagian pertama ditunjukkan contoh membagi dengan kasus satuan yang dapat dilakukan dengan satuan tunggal, seperti 4 kg dibagi 2, maka masing masing akan mendapat 2 kg. Selanjutnya 3 kg dibagi dua maka hasilnya satu kg dengan sisa 1 kg. Satu kg dibagi 2 dapat dilakukan dengan konversi 1 kg menjadi 10 hg, yang hasilnya adalah masing- masing 5 hg. Penggunaan konversi pada pengukuran untuk kegiatan membagi bertujuan agar siswa memahami pada prinsipnya prosedur membagi jika sisa sudah lebih sedikit dari pembagi, maka dapat dikonversikan ke satuan yang lebih kecil. Dengan demikian siswa juga memahami mengapa membagi dilakukan dari bilangan paling besar. Sebab jika dilakukan dari yang arah kebalikan sisa konversi kenilai yang lebih besar tidak memungkinkan sisa dibagi lagi dengan satuan lebih besar, sehingga akhirnya pembagiannya pun nanti akan berjalan kearah yang lebih kecil.



Contoh hasil pekerjaan siswa yang melakukan pembagian dari nilai tempat yang kecil dengan menggunakan peraga pembagian manipulatif, akhirnya pembagian berjalan dari, satuan 1, kemudian satuan 10, dan akhirnya terpaksa kembali lagi ke satuan 1.

Prinsip membagi pada peraga manipulatif sama dengan membagi biasa, jadi hasil pembagian ditunjukkan dengan banyaknya pengambilan pada masing-masing satuan. Contoh 750 dibagi 4, maka 7 ratusan diambil empat ratusan sisa 3 ratusan, karena 3 lebih kecil 4 maka 3 pada ratusan tidak mungkin lagi dilakukan pengurangan sebanyak 4. Untuk dapat dilakukan pengurangan 4 maka 3 ratusan dikonversi menjadi 30 puluhan. 30 puluhan dikurangi 4 puluhan sebanyak 7 kali sisa 2 puluhan, karena 2 lebih kecil 4 maka tidak bisa lagi dilakukan pengurangan pada puluhan, 2 puluhan dikonversi menjadi 20 satuan. 20 satuan dikurangi 4 satuan 5 kali sisanya 0. Jadi hasil pembagian adalah.

$$1 \text{ ratusan} + 7 \text{ Puluhan} + 5 \text{ satuan} = 175$$

Untuk sampai pada formalisasi maka ketika siswa sudah memahami abstraksi logika matematik, maka diarahkan dalam melakukan pencatatan setiap kali pembagian dalam tabel berikut:

tabel pembagian 700:4

| Nilai tempat | cacah manik yang dibagi | banyaknya pengambilan | sisa | sisanya ditukarkan dengan |
|--------------|-------------------------------|-----------------------|------|------------------------------|
| Ratusan | 7 | 1 | 3 | 3 ratusan ditukar 30 puluhan |
| Puluhan | 30 = 0 + 30 dari sisa ratusan | 7 | 2 | 2 puluhan ditukar 20 satuan |
| Satuan | 20 = 0 + 20 dari sisa puluhan | 5 | 0 | |

Dari tabel ini nanti diarahkan penulisan dengan cara bersusun ke bawah

$$\begin{array}{r}
 175 \text{ berasal dari } 1 \text{ ratusan} + 7 \text{ puluhan} + 5 \text{ satuan} \\
 4 \overline{) 700} \\
 \underline{4} \quad \leftarrow \text{ 1 kali pengambilan ratusan} \\
 30 \\
 \underline{28} \quad \leftarrow \text{ 7 kali pengambilan puluhan} \\
 20 \\
 \underline{20} \quad \leftarrow \text{ 5 kali pengambilan satuan} \\
 0
 \end{array}$$

Dari model penyajian diatas tampak bahwa konsep pembagian tidak terlepas dari konsep-konsep dasar matematika yang lain seperti pengukuran, nilai tempat, konversi nilai, pengurangan yang dipresentasikan sebagai pengambilan. Materi-materi dasar matematika seperti nilai tempat, pengukuran dan konversi nilai diajarkan pada kelas IV. Dengan demikian pembelajaran pembagian dengan mengkaitkan konsep lain dan dunia real di sekitar anak sangat mungkin dilakukan.

Representasi pembagi yang diletakan di papan yang bisa di sangat perlu, karena pada manipulasi pembagi yang digeser tersebut, membagi pecahan, membagi dengan bilangan negatif dan membagi dengan basis x (untuk fungsi aljabar) dapat disajikan secara konkret, sehingga penjelasanyapun mudah ditangkap oleh siswa terutama yang kesulitan jika langsung disajikan secara simbolik. Pada pembagian bilangan bulat misal 4, maka pada papan pembagi diletakkan bilangan 4 dan dibawahnya 1, dalam arti setiap kita mengambil 4 pada manik yang dibagi berarti kita telah melakukan sekali pengambilan. Dengan menggunakan manik yang bisa dibelah, maka kita bisa melakukan pengambilan tidak bulat, misalnya kita membagi dengan $\frac{1}{2}$. Berarti setiap pengambilan $\frac{1}{2}$ manik kita telah melakukan 1 kali pengambilan, dengan demikian pengambilan

sebanyak 2 kali maka kita telah mengambil 1 manik. Dengan demikian pada papan bilangan dibagi bisa kita letakkan 1 diatas dan 2 dibawah yang berarti setiap pengambilan 1 manik berarti kita telah melakukan 2 kali pengambilan, sehingga jika kita telah mengambil 4 manik pada bilangan yang dibagi, berarti telah melakukan 8 kali pengambilan $\frac{1}{2}$ manik.

Pengalaman penulis dilapangan ketika mahasiswa kesulitan melakukan operasi pembagian non basis sepuluh, penyajian konkret sangat membantu sekali Contoh $55_7 : 4_7$. Ilustrasi di bawah ini adalah gambaran manik yang ada dalam peraga pembagian, mahasiswa hanya melakukan pencatatan pada tabel dibawah gambar bagan peraga ini.

| | | | | | | | | |
|-------|--|--|---|-------|----------|----------|----------|----------|
| | | | 5 | 5 | | | | |
| 7^4 | | | 4 | 7^0 | 7^{-1} | 7^{-2} | 7^{-3} | 7^{-4} |
| | | | 1 | | | | | |
| | | | | | | | | |

Kondisi alat peraga setelah dilakukan 1 kali pengambilan kelompok 7^1

| | | | | | | | | |
|-------|-------|--|---|---|----------|----------|----------|----------|
| | | | 1 | 5 | | | | |
| 7^4 | 7^3 | | | 4 | 7^{-1} | 7^{-2} | 7^{-3} | 7^{-4} |
| | | | | 1 | | | | |
| | | | 1 | | | | | |

Kondisi alat peraga setelah dilakukan 1 kali pengambilan kelompok 7^1

| | | | | | | | | |
|-------|-------|--|---|---|----------|----------|----------|----------|
| | | | 1 | 1 | | | | |
| 7^4 | 7^3 | | | 4 | 7^{-1} | 7^{-2} | 7^{-3} | 7^{-4} |
| | | | | 1 | | | | |
| | | | 1 | 1 | | | | |

Kondisi alat peraga setelah dilakukan penukaran kelompok 1 kelompok 7^1 dengan 7 kelompok 7^0

| | | | | | | | | |
|-------|-------|--|---|---|----------|----------|----------|----------|
| | | | 0 | 8 | | | | |
| 7^4 | 7^3 | | | 4 | 7^{-1} | 7^{-2} | 7^{-3} | 7^{-4} |
| | | | | 1 | | | | |
| | | | 1 | 1 | | | | |

Kondisi alat peraga setelah selesai dilakukan pengambilan.

| | | | | | | | | |
|-------|-------|--|---|---|----------|----------|----------|----------|
| | | | 0 | 0 | | | | |
| 7^4 | 7^3 | | | 4 | 7^{-1} | 7^{-2} | 7^{-3} | 7^{-4} |
| | | | | 1 | | | | |
| | | | 1 | 3 | | | | |

Dengan hasil pembagian 1 kelompok $7^1 + 3$ kelompok 7^0 atau secara formal ditulis 13_7

Tabel catatan ketika melakukan pembagian dengan peraga pembagian

| Nilai Tempat | Cacah Manik-manik | Hasil | Sisa | Keterangan |
|--------------|-------------------|-------|------|--|
| 7^1 | 5 | 1 | 1 | Sisa 1 pada 7^1 ditukar dengan 7 manik dan ditempatkan pada tempat 7^0 |
| 7^0 | $7 + 5 = 12$ | 3 | 0 | Pembagian selesai |

Dari hal ini ternyata meskipun mahasiswa sudah dalam tahap operasi formal, namun ternyata benda konkret dapat membantu untuk memahami konsep yang mereka anggap sulit dipahami ketika disajikan secara abstrak.

Dari dua kali hasil penelityian yang pernah penulis lakukan, hasil pembelajaran dengan peraga manipulatif cukup tinggi, penelitian pada 11 siswa kelas 5 yang kurang bisa melakukan operasi pembagian setelah belajar dengan peraga manipulatif mampu mencapai rata-rata 8,7 pada skala 10 (Qodri, 2007).

KESIMPULAN

Sebagai akhrit tulisan ini, dapat dikatakan bahwa pembelajaran konsep pembagian dapat disajikan lebih konkret, dengan peraga manipulatif pembagian. Konsep pembagian yang telah diketahui oleh siswa dari lingkungannya dapat digunakan sebagai batu loncatan menjelaskan operasi hitung pembagian dengan menekankan pada pemahaman siswa, bukan hanya pada kemampuan instrumental saja, sehingga konsep hitung pembagian dapat dipahami sehingga tahu alasan dan ide yang mendasari operasi tersebut.

Sebagai saran diakhir tulisan ini hendaknya para guru matematika dalam pembelajaran matematika tidak terpaku pada buku yang digunakan, namun bisa diusahakan menggunakan lingkungan dan pengalaman siswa diluar sekolah sebagai salah satu pijakan untuk membentuk konsep-konsep matematika sehingga siswa lebih memahami kaitan konsep matematika dengan apa yang ada dalam lingkungannya.

DAFTAR PUSTAKA

- Hudojo, H. 1988. *Belajar Mengajar Matematika*. Jakarta: Depdiknas, Proyek P2LPTK.
- Hudojo, H. 2002. *Representasi Belajar Berbasis Masalah*. Prosiding Konferensi nasional Matematika XI Bagian 1. Jurnal matematika atau Pembelajarannya Universitas Negeri Malang tahun VIII edisi Khusus. Malang.
- John L, & marks, *Metode Mengajar Matematika Untuk Sekolah Dasar*, Terjemahan oleh Bambang Sumantri, 1988. Erlangga: Jakarta.
- Marpaung, 1986. *Proses Berpikir Siswa dalam Pembentukan Konsep Algoritma Matematis*. Pidato Dies Natalis XXXI IKIP Sanata Darma Yogyakarta.
- Qodri, 2007. *Pembelajaran Pembagian Menggunakan Peraga Manipulatif Dengan Pendekata Algoritma Tunggal*. Laporan Penelitian Dosen Muda Universitas Palangkaraya. Lemlit UNPAR. Palangkaraya.
- Soedjadi, R. 2000. *Kiat Pendidikan Matematika di Indonesia*. Jakarta: Dikti Depdiknas.
- Suparno, 1997. *Filsafat Konstruktifisme Dalam Pendidikan*. Yogyakarta, Kanisius.

**PEMBELAJARAN MATEMATIKA DENGAN PEMECAHAN MASALAH
UNTUK MENUMBUHKEMBANGKAN
KEMAMPUAN BERPIKIR KRITIS SISWA**

Desti Haryani

Universitas Palangkaraya

Abstrak

Tujuan tulisan ini untuk membahas tentang pembelajaran matematika dengan pemecahan masalah yang dapat menumbuhkembangkan kemampuan berpikir kritis siswa. Untuk mencapai tujuan ini metode yang digunakan adalah dengan mendeskripsikan pembelajaran matematika dengan pemecahan masalah yang dapat menumbuhkembangkan kemampuan berpikir kritis siswa berdasarkan kajian referensi-referensi yang mendukung. Dalam era globalisasi ini seseorang dapat memperoleh informasi dengan berbagai cara, tempat, dan waktu. Agar informasi yang diperoleh seseorang dapat berdaya guna dan tidak menimbulkan dampak negatif maka diperlukan “filter” untuk menyaring setiap informasi yang diterima. Salah satu filter tersebut adalah kemampuan berpikir kritis yang dimiliki seseorang. Dengan kemampuan berpikir kritis seseorang akan menentukan/mempertimbangkan secara hati-hati dan sengaja apakah menerima, menolak, atau menunda menerima suatu informasi. Mengingat pentingnya kemampuan berpikir kritis maka kemampuan berpikir kritis perlu dimiliki oleh setiap orang. Kemampuan berpikir kritis dapat diajarkan salah satunya adalah melalui pembelajaran matematika khususnya pembelajaran matematika dengan pemecahan masalah. Melalui pembelajaran matematika dengan pemecahan masalah siswa dilatih untuk menggunakan kemampuan berpikir kritis dalam setiap tahapan pemecahan masalah mulai dari memahami masalah, merencanakan pemecahan, melaksanakan rencana pemecahan sampai pada mengevaluasi kembali pemecahan yang telah dilaksanakan. Dengan selalu dilatih untuk menggunakan kemampuan berpikir kritis dalam pembelajaran matematika dengan pemecahan masalah diharapkan dapat “menumbuhkembangkan” kemampuan berpikir kritis siswa.

Kata kunci: pembelajaran matematika, pemecahan masalah, kemampuan berpikir kritis

PENDAHULUAN

Dalam kehidupan sehari-hari manusia seringkali berhadapan dengan masalah baik yang berasal dari dalam dirinya sendiri maupun dari lingkungannya, mulai dari masalah yang sederhana sampai masalah yang kompleks. Adanya masalah dalam kehidupan manusia mempunyai dampak negatif dan positif bagi manusia. Dampak negatif dari masalah adalah dengan adanya masalah membuat manusia merasa tidak nyaman bahkan merasa tertekan, sedangkan dampak positif dengan adanya masalah adalah jika manusia dapat memecahkannya manusia menjadi semakin bijaksana. Bahkan dalam bidang ilmu pengetahuan adanya masalah membuat ilmu pengetahuan semakin berkembang.

Masalah sering juga disebut sebagai kesulitan, hambatan, gangguan, ketidakpuasan, ataupun kesenjangan. Secara umum dan hampir semua ahli psikologi kognitif (Anderson (1980), Evans (1991), Hayes (1978), Ellis dan Hunt (1993), dalam Suharnan, 2005: 283) sependapat bahwa masalah adalah suatu kesenjangan antara situasi sekarang dengan situasi yang akan datang atau tujuan yang diinginkan. Keadaan sekarang sering pula disebut *present state*, sedangkan keadaan yang diharapkan sering pula disebut *final state/goal state*. Jadi suatu masalah muncul apabila ada halangan atau hambatan yang memisahkan antara *present state* dengan *final*

state/goal state.

Dalam matematika masalah biasanya berbentuk soal matematika, tetapi tidak semua soal matematika merupakan masalah. Menurut Hudojo (1988:174), suatu soal/pertanyaan disebut masalah tergantung kepada pengetahuan yang dimiliki penjawab. Dapat terjadi bagi seseorang soal itu dapat dijawab dengan menggunakan prosedur rutin baginya, namun bagi orang lain soal tersebut memerlukan pengorganisasian pengetahuan yang telah dimiliki secara tidak rutin dan orang tersebut tertantang untuk menjawab/memecahkannya. Sedangkan dalam NCTM (1980:1) dikatakan bahwa masalah adalah suatu soal dalam matematika dan tidak ada cara yang siap langsung dapat digunakan untuk menyelesaikannya.

Dalam pembelajaran matematika pemecahan masalah merupakan aktivitas yang penting. Bahkan Holmes (dalam NCTM, 1980) menyatakan bahwa pemecahan masalah adalah “jantung” dari matematika (*heart of mathematics*). Karena dalam pemecahan masalah matematika memerlukan pengetahuan materi matematika, pengetahuan tentang strategi pemecahan masalah, pemantauan diri yang efektif, dan suatu sikap produktif untuk menyikapi dan menyelesaikan masalah (Dewi, 2009:25). Davis & McKillip (1980) menyatakan “*The ability to solve the problems is one of the most important objectives in the study of mathematics*”. Kemampuan memecahkan masalah merupakan salah satu tujuan yang paling penting dalam matematika. Davis & McKillip (dalam Warli, 2010) menambahkan bahwa pemecahan masalah dalam matematika, sains, bisnis, dan kehidupan sehari-hari merupakan tujuan pokok dalam belajar matematika. Demikian juga Suryadi (dalam Suherman, dkk, 2001) menyebutkan bahwa pemecahan masalah matematika merupakan salah satu kegiatan matematika yang dianggap penting baik oleh guru maupun siswa di semua tingkat, mulai dari SD sampai SMA bahkan perguruan tinggi.

Selanjutnya Charles dan O’Daffer (1997) menyatakan tujuan diajarkannya pemecahan masalah dalam belajar matematika adalah untuk: (1) mengembangkan keterampilan berpikir siswa, (2) mengembangkan kemampuan menyeleksi dan menggunakan strategi-strategi penyelesaian masalah, (3) mengembangkan sikap dan keyakinan dalam menyelesaikan masalah, (4) mengembangkan kemampuan siswa menggunakan pengetahuan yang saling berhubungan, (5) mengembangkan kemampuan siswa untuk memonitor dan mengevaluasi pemikirannya sendiri dan hasil pekerjaannya selama menyelesaikan masalah, (6) mengembangkan kemampuan siswa menyelesaikan masalah dalam suasana pembelajaran yang bersifat kooperatif, (7) mengembangkan kemampuan siswa menemukan jawaban yang benar pada masalah-masalah yang bervariasi.

Pemecahan masalah merupakan proses mental tingkat tinggi dan memerlukan proses berpikir yang lebih kompleks. Hal ini sesuai dengan pendapat Gagne (Bell, 1978) bahwa pemecahan masalah merupakan tahapan pemikiran yang berada pada tingkat tertinggi di antara 8 (delapan) tipe belajar. Kedelapan tipe belajar itu adalah belajar sinyal, belajar stimulus respon, belajar rangkaian, belajar asosiasi verbal, belajar diskriminasi, belajar konsep, belajar aturan, dan belajar pemecahan masalah. Sedangkan Johnson dan Rising (1972) menyatakan pemecahan masalah matematika merupakan suatu proses mental yang kompleks yang memerlukan visualisasi, imajinasi, manipulasi, analisis, abstraksi, dan penyatuan ide. Selanjutnya Stanick dan Killpatrick (Schoenfeld, 1992) mengatakan bahwa pemecahan masalah merupakan inti dari matematika karena memerlukan kemampuan berpikir kritis.

Berpikir kritis adalah suatu proses yang bertujuan untuk membuat keputusan rasional yang diarahkan untuk memutuskan apakah meyakini atau melakukan sesuatu. Berpikir kritis adalah proses yang *persistent*/terus-menerus, aktif, dan teliti. Kemampuan berpikir kritis yang dimiliki seseorang dapat dikenali dari indikator-indikator/karakteristik-karakteristik kemampuan berpikir kritis yang dimilikinya.

Dalam pembelajaran matematika dengan pemecahan masalah siswa dituntut untuk menggali dan menunjukkan kemampuan berpikir kritisnya mulai dari memahami masalah, merencanakan pemecahan, melaksanakan rencana pemecahan, dan melihat kembali/mengevaluasi kembali pemecahan masalah yang telah dilaksanakan. Dengan demikian dengan pembelajaran

matematika dengan pemecahan masalah siswa akan terlatih selalu menggunakan kemampuan berpikir kritisnya yang diharapkan akan dapat menumbuhkembangkan kemampuan berpikir kritisnya.

Adapun yang menjadi permasalahan dalam tulisan ini adalah: Bagaimana pembelajaran matematika dengan pemecahan masalah dapat menumbuhkembangkan kemampuan berpikir kritis siswa. Permasalahan ini penting untuk dibahas karena dengan “tumbuhkembangnya” kemampuan berpikir kritis siswa diharapkan siswa akan dapat menjadi seorang individu yang berpikir kritis dalam segala bidang kehidupan baik sekarang maupun di masa yang akan datang.

PEMBAHASAN

Pembelajaran Matematika dengan Pemecahan Masalah

Pemecahan masalah mempunyai keutamaan tertentu dalam belajar matematika. Tujuan utama dari mengajar dan belajar matematika adalah untuk mengembangkan kemampuan memecahkan berbagai jenis masalah matematika yang kompleks secara luas. Stanick dan Kilpatrick (1988, dalam NCTM, 1980) yang pertama mengemukakan peran pemecahan masalah dalam matematika sekolah dan memberikan ilustrasi dalam berbagai topik. Banyak orang secara literatur mengatakan matematika sinonim dengan pemecahan masalah – mengerjakan soal cerita, mengkreasikan pola-pola, menginterpretasikan bentuk-bentuk, pengembangan pembentukan geometri, membuktikan teorema-teorema, dan sebagainya.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics, 1980) merekomendasikan pemecahan masalah sebagai fokus matematika sekolah. Bahkan dikatakan pemecahan masalah adalah “jantung” matematika. Pembelajaran matematika harus dirancang sedemikian sehingga siswa mempunyai pengalaman matematika sebagai pemecahan masalah.

Mengapa NCTM menganggap penting pembelajaran matematika dengan pemecahan masalah? Ada lima alasan yang dikemukakan. Pertama, pemecahan masalah sebagai bagian utama dari matematika artinya dalam matematika terdapat fakta-fakta dan substansi dalam jumlah yang besar sehingga untuk mengurangi latihan dan untuk menghindari keterampilan-keterampilan yang salah mempresentasikan matematika diperlukan pemecahan masalah. Kedua, matematika mempunyai banyak aplikasi yang sering mempresentasikan masalah-masalah penting dalam berbagai bidang. Ketiga, sebagai pembangun motivasi intrinsik dalam memecahkan masalah-masalah matematika. Keempat, pemecahan masalah sebagai kegiatan rekreasi. Kelima, untuk mengembangkan seni pemecahan masalah.

Dalam kegiatan untuk memecahkan masalah banyak pendapat yang dikemukakan para ahli, salah satunya seperti yang dikemukakan Polya. Polya (1973) mendefinisikan pemecahan masalah sebagai usaha untuk mencari jalan keluar dari suatu kesulitan, mencapai suatu tujuan yang tidak segera dapat dicapai. Menurut Polya ada empat langkah dalam pemecahan masalah, yaitu :

(1) Memahami masalah

Dalam tahap ini, masalah harus benar-benar dipahami, seperti mengetahui apa yang tidak diketahui, apa yang sudah diketahui, apakah kondisi yang ada cukup atau tidak cukup untuk menentukan yang tidak diketahui, adakah yang berlebih-lebihan atau adakah yang bertentangan, menentukan suatu gambaran masalah, menggunakan notasi yang sesuai.

(2) Membuat rencana pemecahan masalah

Mencari hubungan antara informasi yang ada dengan yang tidak diketahui. Dalam membuat rencana ini seseorang dapat dibantu dengan memperhatikan masalah yang dapat membantu jika suatu hubungan tidak segera dapat diketahui sehingga akhirnya diperoleh suatu rencana dari pemecahan.

(3) Melaksanakan rencana

Pada tahap ini rencana dilaksanakan, periksa setiap langkah sehingga dapat diketahui bahwa setiap langkah itu benar dan dapat membuktikan setiap langkah benar.

(4) Memeriksa kembali pemecahan yang telah didapatkan

Pada tahap ini dapat diajukan pertanyaan seperti : dapatkah memeriksa hasil, dapatkah memeriksa alasan yang dikemukakan, apakah diperoleh hasil yang berbeda, dapatkah melihat sekilas pemecahannya, dapatkah menggunakan pemecahan yang telah diperoleh atau metode yang sudah digunakan untuk masalah lain yang sama.

Sedangkan beberapa strategi yang dapat dilakukan dalam pemecahan masalah (Krismanto, 2003) adalah sebagai berikut (Krismanto, 2003):

1. Membuat Diagram
2. Mencobakan pada soal yang lebih sederhana
3. Membuat tabel
4. Menemukan pola
5. Memecah tujuan
6. Memperhitungkan setiap kemungkinan
7. Berpikir logis
8. Bergerak dari belakang
9. Mengabaikan hal yang tidak mungkin
10. Mencoba-coba

Pembelajaran matematika dengan pemecahan masalah sebagai suatu metode pembelajaran dapat digunakan untuk melengkapi pengajaran fakta-fakta dasar, konsep-konsep, dan prosedur-prosedur. Pembelajaran matematika dengan pemecahan masalah dimulai dengan pengajuan masalah kepada siswa dan siswa diminta untuk menyelesaikannya. Untuk tingkat awal masalah yang diberikan dimulai dari masalah yang dikenal siswa dan dekat dengan lingkungan siswa. Masalah yang diberikan harus berada pada "*Zone of proximal development (ZPD)*" siswa, sehingga masalah tidak terlalu sulit bagi siswa dan siswa tidak frustrasi untuk menyelesaikannya. Selama dalam kegiatan pemecahan masalah guru sebaiknya tidak terlalu mengarahkan siswa dan hanya membantu dengan memberikan petunjuk-petunjuk yang tidak terlalu mengarahkan siswa. Dalam menyelesaikan masalah siswa dapat bekerja secara individu atau berkelompok.

Kemampuan Berpikir Kritis

Seperti telah dikatakan pada bahagian pendahuluan, berpikir kritis adalah suatu proses rasional yang bertujuan untuk membuat keputusan apakah meyakini atau melakukan sesuatu. Jadi berpikir kritis adalah berpikir dengan penuh perhitungan dan hati-hati.

Kemampuan seseorang dalam berpikir kritis dapat dikenali dari tingkah laku yang diperlihatkannya selama proses berpikir. Untuk mengetahui kemampuan berpikir kritis seseorang itu dapat kita hubungkan dengan indikator-indikator berpikir kritis yang dikemukakan beberapa ahli. Facione (dalam Filsaime, 2008:66-68) mengemukakan enam kemampuan berpikir kritis yaitu: (1) Interpretasi, yaitu kemampuan memahami, menjelaskan dan memberi makna data atau informasi, (2) Analisis, yaitu kemampuan untuk mengidentifikasi hubungan dari informasi-informasi yang dipergunakan untuk mengekspresikan pemikiran atau pendapat, (3) Evaluasi, yaitu kemampuan untuk menguji kebenaran dari informasi yang digunakan dalam mengekspresikan pemikiran atau pendapat, (4) Inferensi, yaitu kemampuan untuk mengidentifikasi dan memperoleh unsur-unsur yang diperlukan untuk membuat suatu kesimpulan yang masuk akal, (5) Eksplanasi, yaitu kemampuan untuk menjelaskan atau menyatakan hasil pemikiran berdasarkan bukti, metodologi, dan konteks. (6) Regulasi diri, yaitu kemampuan seseorang untuk mengatur berpikirnya.

Sedangkan Angelo (dalam Santoso, 2009) mengemukakan lima perilaku yang sistematis dalam berpikir kritis. Lima perilaku tersebut adalah sebagai berikut: (1) Keterampilan Menganalisis, yaitu keterampilan menguraikan sebuah struktur ke dalam komponen-komponen agar mengetahui pengorganisasian struktur tersebut, (2) Keterampilan Mensintesis, keterampilan menggabungkan bagian-bagian menjadi susunan yang baru, (3) Keterampilan Mengenal dan

Memecahkan Masalah, yaitu keterampilan aplikatif konsep kepada beberapa pengertian, (4) Keterampilan Menyimpulkan, yaitu kegiatan akal pikiran manusia berdasarkan pengertian/pengetahuan yang dimilikinya untuk mencapai pengertian baru, (5) Keterampilan Mengevaluasi/Menilai, yaitu kemampuan menentukan nilai sesuatu berdasarkan kriteria tertentu.

Hubungan Pembelajaran Pemecahan Masalah dengan Kemampuan Berpikir Kritis

Jika kita perhatikan langkah-langkah pemecahan masalah yang dikemukakan Polya, maka kita lihat sangat diperlukan keterampilan/kemampuan berpikir kritis mulai dari memahami masalah, merencanakan pemecahan, melaksanakan rencana, sampai melihat/memeriksa kembali pemecahan yang telah dilaksanakan.

Pada tahap memahami masalah agar siswa dapat memahami masalah dia harus mempunyai kemampuan interpretasi agar dia memahami secara tepat masalah matematika yang diajukan kepadanya. Selain itu dia juga harus mempunyai kemampuan evaluasi untuk mengevaluasi pemikirannya dalam memahami masalah. Kemampuan inferensi juga diperlukan untuk mengidentifikasi apa yang diketahui dan apa yang ditanya dalam masalah. Pada tahap merencanakan pemecahan masalah, keterampilan interpretasi, analisis, dan evaluasi juga diperlukan karena untuk dapat menentukan rencana apa yang akan dilaksanakan siswa harus mampu memaknai informasi yang ada pada masalah dan menghubungkan setiap unsur yang ada pada masalah. Bahkan Polya (1973) mengemukakan bahwa sesungguhnya kemampuan memecahkan masalah ada pada ide menyusun rencana pemecahan. Jadi pada tahap ini sangat diperlukan kemampuan berpikir kritis dari siswa.

Pada tahap melaksanakan rencana pemecahan siswa akan menggali semua konsep dan prosedur yang telah dipelajarinya sehingga dapat memecahkan masalah dengan benar. Semua keterampilan/kemampuan berpikir kritis diperlukan di sini terutama kemampuan eksplanasi. Pada tahap ini siswa mengorganisasikan semua pengetahuan dan konsep matematika yang telah dimilikinya agar dia berhasil memecahkan masalah. Pada tahap melihat/memeriksa kembali hasil pemecahan yang telah didapat semua kemampuan berpikir kritis juga sangat diperlukan untuk menguji apakah pemecahan masalah yang telah dilaksanakan sudah benar.

Terlihat bahwa pembelajaran matematika dengan pemecahan masalah akan melatih siswa berpikir kritis sehingga akan bertumbuh dan berkembang kemampuan berpikir kritis dalam kehidupannya. Juga dapat dilihat bahwa pembelajaran matematika dengan pemecahan masalah sekaligus akan dapat membelajarkan siswa berpikir kritis.

Ada beberapa hal lain yang didapat dari pembelajaran matematika dengan pemecahan masalah (Marcut, 2005):

1. Fokus pemecahan masalah adalah perhatian siswa yaitu pada ide-ide dan indera lebih mengingat fakta.
2. Pemecahan masalah mengembangkan keyakinan siswa bahwa mereka mampu memecahkan masalah matematika dan bahwa matematika masuk akal.
3. Melalui pembelajaran dengan pemecahan masalah yang menyenangkan siswa akan mengingat pelajaran dengan lebih baik.

PENUTUP

Kesimpulan

Dari uraian-uraian di atas dapat disimpulkan bahwa pembelajaran matematika dengan pemecahan masalah di samping akan melatih siswa menjadi pemecah masalah yang baik juga akan melatih atau akan “menumbuhkembangkan” kemampuan berpikir kritis siswa karena setiap tahapan dalam pemecahan masalah memerlukan kemampuan berpikir kritis dari siswa. Dengan terlatihnya siswa untuk menggali berpikir kritisnya dalam pembelajaran matematika dengan pemecahan masalah diharapkan siswa akan dapat mengimplementasikan berpikir kritis dalam berbagai bidang kehidupan baik pada masa sekarang maupun di masa yang akan datang.

Saran dan Rekomendasi

Dalam kesempatan ini dapat dikemukakan beberapa saran:

1. Agar guru-guru matematika dapat melaksanakan pembelajaran matematika dengan pemecahan masalah yang dimulai dengan masalah-masalah yang sudah dikenal siswa dan dekat dengan lingkungan siswa.
2. Dalam melaksanakan pembelajaran dengan pemecahan masalah diharapkan guru tidak terlalu mengarahkan siswa agar kemampuan siswa berpikir kritis benar-benar dapat digali.

DAFTAR PUSTAKA

- Bell, F.H. 1978. *Teaching and Learning Mathematics (in Secondary School)*. New York: WMC Brown Company Publishing Town.
- Charles, R & O'Daffer, P. 1997. *How to Evaluate Progress in Problem Solving*. NCTM. Reston, VA.
- Dewi, I. 2009. *Profil Komunikasi Mahasiswa Matematika Calon Guru Ditinjau dari Perbedaan Jenis Kelamin*. Disertasi. Surabaya : PPS UNESA.
- Filsaime, D.K. 2008. *Menguak Rahasia Berpikir Kritis dan Kreatif*. Jakarta : Prestasi Pustaka.
- Harsanto, R. 2005. *Melatih Anak Berpikir Kritis dan Kreatif*. Jakarta: Grasindo.
- Hudojo, H. 1988. *Belajar Mengajar Matematika*. Jakarta: Depdiknas, Proyek P2LPTK.
- Marcut, I. 2005. *Critical Thinking-Aplied to The Metodology of Teaching Mathematics*. University of Macedonia.
- NCTM. 1980. *Problem Solving in School Mathematics*. Yearbook: NCTM Inc.
- Polya, G. 1973. *How to Solve It (New of Mathematical Method)*. Second Edition. New Jersey: Prence University Press.
- Santoso, H. 2009. *Pengaruh Penggunaan Laboratorium Riil dan Laboratorium Virtuul pada Pembelajaran Fisika Ditinjau dari Kemampuan Berpikir Kritis Siswa*. Tesis. Solo: PPS UNS.
- Suharnan. 2005. *Psikologi Kognitif*. Edisi Revisi. Surabaya: Penerbit Srikandi. Suherman, E, dkk, 2001. *Strategi Pembelajaran Matematika Kontemporer*. Bandung: Jurusan Pendidikan Matematika FPMIPA UPI.

PEMBIASAAN BERPIKIR KRITIS DALAM BELAJAR MATEMATIKA SEBAGAI UPAYA PEMBENTUKAN INDIVIDU YANG KRITIS

Desti Haryani

Universitas Palangkaraya

Abstrak

Tujuan tulisan ini adalah untuk mendeskripsikan bagaimana pembiasaan berpikir kritis dalam belajar matematika akan dapat membentuk individu yang kritis. Metode yang digunakan dalam tulisan ini adalah mengkaji secara mendalam referensi-referensi yang berhubungan dengan tulisan ini. Berpikir kritis adalah suatu proses yang bertujuan membuat keputusan rasional yang diarahkan untuk memutuskan apakah meyakini atau melakukan sesuatu. Dengan berpikir kritis seseorang akan selalu mempertimbangkan secara rasional setiap tindakan yang dilakukannya dan akan selalu berpikir jauh ke depan tidak menggunakan emosi semata. Jika seseorang sejak usia dini dibiasakan berpikir kritis maka dia akan terbiasa untuk selalu berpikir kritis sepanjang hayatnya. Pembiasaan berpikir kritis dapat diajarkan melalui pendidikan di sekolah, salah satunya adalah melalui belajar matematika karena matematika berdasarkan logika maka matematika dapat digunakan sebagai sarana berlatih berpikir termasuk berpikir kritis. Agar melalui belajar matematika dapat dibentuk individu yang kritis maka dalam belajar matematika guru harus merancang pembelajaran matematika yang membiasakan siswa berpikir kritis. Banyak cara dan metode yang dapat digunakan untuk membiasakan siswa berpikir kritis dalam belajar matematika, antara lain melalui pembelajaran pemecahan masalah, diskusi, dan sebagainya.

Kata kunci: berpikir kritis, belajar matematika

PENDAHULUAN

Matematika merupakan mata pelajaran yang menduduki peranan penting yang diajarkan di semua jenjang pendidikan mulai dari Sekolah Dasar sampai SMA, bahkan sampai Perguruan Tinggi. Matematika yang dipelajari di sekolah disebut matematika sekolah. Menurut Soedjadi (2000 : 37), matematika sekolah adalah unsur atau bagian dari matematika yang dipilih untuk menumbuhkembangkan kemampuan-kemampuan pada kepentingan kependidikan dan perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi. Sedangkan Usodo (2010) mengatakan bahwa matematika sekolah adalah matematika yang dipilah-pilah dan disesuaikan dengan tahap perkembangan intelektual serta digunakan untuk mengembangkan kemampuan berpikir bagi siswa.

Matematika sekolah tetap memiliki ciri-ciri yang dimiliki matematika, yaitu memiliki kajian yang abstrak serta berpola pikir deduktif konsisten (Suherman, dkk, 2001:21). Matematika yang diajarkan di sekolah bukan hanya mengajarkan keterampilan, berhitung bukan hanya keterampilan mengerjakan soal, bukan hanya aspek praktis yang dikejar. Tapi matematika juga mengajarkan aspek-aspek lain berupa kecermatan, ketelitian, berpikir logis, kritis, praktis bersikap positif dan berjiwa kreatif serta bertanggungjawab, disiplin, hingga keimanan.

Fungsi mata pelajaran matematika adalah sebagai alat, pola pikir, dan ilmu pengetahuan. Sebagai alat, matematika digunakan sebagai alat untuk memahami atau menyampaikan suatu informasi misalnya melalui persamaan atau tabel-tabel dalam model matematika yang merupakan penyederhanaan dari soal cerita atau soal uraian matematika lainnya. Sebagai pola

pikir, matematika juga merupakan sarana pembentukan pola pikir dalam pemahaman suatu pengertian maupun dalam penalaran suatu hubungan di antara pengertian-pengertian. Sedangkan sebagai ilmu atau pengetahuan, dalam belajar guru harus selalu menunjukkan bahwa matematika selalu mencari kebenaran dan bersedia meralat kebenaran yang sementara diterima bila ditemukan kesempatan untuk mencoba mengembangkan penemuan-penemuan sepanjang mengikuti pola pikir yang sah. Sedangkan tujuan pembelajaran matematika di sekolah adalah mengacu kepada fungsi matematika serta kepada tujuan Pendidikan Nasional yang telah dirumuskan yaitu mengacu pada Standar Nasional Pendidikan (Peraturan Pemerintah Nomor 19 Tahun 2005) (dalam Cahyono, 2008).

Sebagai pembentuk pola pikir matematika dapat melatih dan membiasakan siswa melakukan aktivitas berpikir termasuk berpikir kritis. Menurut Ennis (1996) berpikir kritis adalah suatu proses yang bertujuan membuat keputusan rasional yang diarahkan untuk memutuskan apakah meyakini atau melakukan sesuatu. Dari definisi berpikir kritis ini dapat dikatakan bahwa seseorang yang berpikir kritis akan selalu berpikir dengan penuh pertimbangan sebelum meyakini atau melakukan sesuatu. Pertimbangan yang rasional tentu tidak terlepas dari peran logika dan penalaran yang merupakan unsur utama dari proses belajar matematika. Sehingga dengan demikian berpikir kritis dapat mulai dibiasakan pada siswa melalui belajar matematika. Dengan adanya pembiasaan berpikir kritis dalam belajar matematika diharapkan siswa akan dapat menjadi individu yang kritis.

Dalam tulisan ini yang menjadi permasalahan adalah: Belajar matematika dengan pembiasaan berpikir kritis yang bagaimana sehingga dapat menjadikan siswa seorang individu yang kritis? Permasalahan ini penulis rasa penting untuk dibahas karena pembentukan individu yang kritis merupakan salah satu tujuan pendidikan.

PEMBAHASAN

Berpikir Kritis

Di atas telah dikemukakan salah satu definisi berpikir kritis, definisi lain yang lebih terperinci dikemukakan oleh Chance (2008, dalam Martomidjojo, 2009) berpikir kritis adalah kemampuan menganalisis fakta, membangkitkan dan mengatur ide, mempertahankan pendapat, membuat perbandingan, menarik kesimpulan, mengevaluasi argumen, dan memecahkan masalah. Melalui berpikir kritis seseorang dapat memperoleh informasi dengan benar, mengevaluasinya, dan memproses informasi tersebut sehingga diperoleh kesimpulan yang terpercaya.

Berpikir kritis adalah merupakan bagian dari berpikir tingkat tinggi. Menurut Krulick dan Rudnick (1995) berpikir adalah hirarkis, artinya berpikir mempunyai tingkat-tingkat dari yang terendah ke yang tertinggi. Tingkat-tingkat berpikir tersebut adalah ingatan (recall), berpikir dasar (basic thinking), berpikir kritis (critical thinking), dan berpikir kreatif (creative thinking). Ingatan adalah sebuah fungsi dari kognisi yang melibatkan otak dalam pengambilan informasi (Wikipedia, 2009). Berpikir yang tingkatannya di atas ingatan (recall) dinamakan penalaran. Penalaran adalah proses berpikir yang bertolak dari pengamatan indera (observasi empirik) yang menghasilkan sejumlah konsep. Berdasarkan pengamatan yang sejenis akan terbentuk proposisi-proposisi yang sejenis, berdasarkan sejumlah proposisi yang diketahui atau dianggap benar orang menyimpulkan sebuah proposisi baru yang sebelumnya tidak diketahui (Wikipedia, <http://www.google.co.id/search?hl=id&source=hp&q->). Penalaran terdiri dari berpikir dasar, berpikir kritis, dan berpikir kreatif. Berpikir dasar adalah memahami konsep dan mengenal suatu konsep ketika konsep tersebut muncul pada suatu situasi tertentu. Sedangkan berpikir yang tingkatannya di atas berpikir dasar dinamakan berpikir tingkat tinggi (high order thinking). Berpikir kreatif merupakan tingkat berpikir yang paling tinggi, sedangkan berpikir kritis dalam hirarki ini berada di bawah berpikir kreatif.

Seperti yang telah dikemukakan di atas berpikir kritis sebagai bagian dari penalaran dan berpikir tingkat tinggi sangat diperlukan dalam kehidupan manusia, baik dalam kehidupan

pribadi, kehidupan sosial maupun dunia kerja. Sebelum melakukan suatu tindakan atau mengambil suatu keputusan seseorang harus berpikir secara kritis agar tindakan yang dilakukan atau keputusan yang diambil berdaya guna, tepat, dan efisien.

Secara umum berpikir kritis adalah penentuan secara hati-hati dan sengaja apakah menerima, menolak atau menunda keputusan tentang suatu klaim/ Pernyataan (Moore dan Parker, 1988:4). Kemampuan berpikir kritis sangat penting, karena dalam kehidupan sehari-hari cara seseorang mengarahkan hidupnya bergantung pada pernyataan yang dipercayainya, pernyataan yang diterimanya. Selanjutnya secara lebih berhati-hati mengevaluasi suatu pernyataan, kemudian membagi isu-isu yang ada apakah relevan atau tidak dengan pernyataan yang dievaluasi. Ketika seseorang mempertimbangkan suatu pernyataan dia telah mempunyai sejumlah informasi tertentu yang relevan dengan pernyataan tersebut dan secara umum dapat menggambarkan di mana mendapatkan informasi yang lebih banyak jika diperlukan. Keinginan dan kemampuan untuk memperoleh informasi yang menghasilkan suatu keputusan adalah bagian dari proses berpikir kritis. Berpikir kritis membutuhkan banyak keterampilan, termasuk keterampilan mendengar dan membaca dengan hati-hati, mencari dan mendapatkan asumsi-asumsi yang tersembunyi, dan menjajaki konsekuensi dari suatu pernyataan (Moore dan Parker. 1986: 5).

Pada saat ini para psikolog dan pendidik dalam dan luar negeri sangat tertarik mengembangkan kemampuan berpikir kritis, tidak hanya di bidang pendidikan, tetapi juga pada bidang-bidang lain seperti ekonomi, politik, kesehatan dan sebagainya (Syaban, 2010). Di Indonesia pengembangan berpikir kritis dilaksanakan terutama di bidang pendidikan. Di Amerika Serikat pengembangan berpikir kritis merupakan suatu prioritas nasional untuk kepentingan kewarganegaraan dan ekonomi (Brookfield, 1987:1). Untuk kepentingan kewarganegaraan, pengembangan berpikir kritis untuk membentuk warga negara yang berpartisipasi lebih baik pada aktivitas politik yang demokratis. Sedangkan untuk kepentingan ekonomi, untuk membangun angkatan kerja yang aktif dan kreatif secara kritis yang dipandang sebagai kunci kebangkitan ekonomi Amerika untuk menghadapi kompetisi perdagangan dengan negara lain.

Ada tiga perspektif utama dalam literatur terbaru mengenai pengajaran berpikir kritis (pada tingkat perguruan tinggi), yaitu kemampuan berargumen, proses kognitif, dan pengembangan intelektual (Lumsdaine, 1995 : 248; Kurfis, 1988:iii). Kemampuan berargumen, berpikir kritis sebagai keterampilan menganalisa dan mengkonstruksi argumen-argumen berdasarkan logika informal. Logika informal adalah cara penarikan kesimpulan yang benar (tepat), tetapi langkah-langkahnya tidak dirinci/terinci secara eksplisit/jelas. Perspektif ini memberikan perhatian pada keterampilan-keterampilan analitis yang meningkatkan kemampuan siswa memberikan alasan pada keyakinan-keyakinan yang telah mereka miliki. Tetapi sering ditemui siswa tidak sanggup melaksanakan hal ini dalam kehidupan sehari-hari. Contohnya siswa yang berpikir kritis jika menghadapi suatu masalah matematika sebelum menyelesaikan masalah tersebut akan mengemukakan argumen-argumen yang berhubungan dengan masalah tersebut, seperti argumen mengenai hal-hal yang diketahui, hal-hal yang ditanyakan, dan perkiraan langkah-langkah penyelesaian, dan sebagainya. Argumen-argumen yang dikemukakan pada tahap awal belum terstruktur dan hanya menggunakan logika informal.

Proses kognitif, berpikir kritis sebagai pengkonstruksian makna. Siswa menginterpretasikan masalah-masalah atau fenomena-fenomena berdasarkan apa yang telah mereka ketahui atau percayai, mereka mengkonstruksi suatu model mental dari masalah atau situasi di sekitar suatu pernyataan atau hipotesis yang didukung oleh penalaran dan fakta. Tiga jenis pengetahuan yang berinteraksi dalam pengembangan model mental adalah : (1) pengetahuan deklaratif, mengetahui fakta-fakta dan konsep-konsep dalam disiplin ilmu tertentu ; (2) pengetahuan prosedural, mengetahui bagaimana menalar, menyelidiki, dan mempresentasikan pengetahuan dalam disiplin ilmu tertentu; (3) metakognisi, strategi-strategi kontrol kognitif, seperti penentuan tujuan, mengetahui kapan informasi tambahan diperlukan, menilai kebermanfaatan suatu penyelidikan. Dengan begitu, pelajaran baru tidak disimpan siswa sebagai

suatu kumpulan fakta-fakta yang terisolasi, tetapi dikonstruksi secara bermakna dalam pola-pola atau tulisan-tulisan yang dipahami oleh siswa. Para pengajar jarang mengajarkan strategi-strategi, prosedur-prosedur, dan metakognisi secara eksplisit sehingga siswa jarang belajar bagaimana mengaplikasikan pengetahuan dan berpikir kritis dalam situasi yang tidak dikenal. Contohnya jika siswa menghadapi suatu masalah seperti masalah matematika dari perspektif ini siswa akan melakukan suatu proses mental yaitu menginterpretasikan masalah matematika yang harus diselesaikan dengan pengetahuan matematika yang telah diketahui atau dimilikinya baik pengetahuan konseptual/deklaratif matematika, pengetahuan prosedural matematika serta melakukan kegiatan metakognisi yaitu mempertanyakan apa saja informasi yang telah diketahui dan ada di pikirannya tentang masalah yang dihadapi.

Sedangkan dari perspektif pengembangan intelektual, berpikir kritis sebagai manifestasi dari suatu teori pengetahuan kontekstual. Perspektif ini menguji hubungan siswa dengan keyakinan dan pengetahuan. Perhatian yang serius pada kebenaran keyakinan membantu siswa memandang pengetahuan mempunyai kelebihan dan kekurangan dan kebermanfaatan pengetahuan dapat didiskusikan pada komunitas intelektual. Dari pandangan pengembangan intelektual, berpikir kritis menjadikan siswa bersikap rasional dan menjaga komitmen dalam dunia relativistik. Contohnya jika siswa selalu berpikir kritis, maka intelektual dan rasional siswa akan berkembang dengan baik terutama yang berhubungan dengan masalah-masalah yang dihadapi karena kemampuannya secara intelektual sering digunakan.

Mengingat peranan penting berpikir kritis dalam kehidupan seseorang baik dalam kehidupan pribadi maupun dalam bermasyarakat, maka berpikir kritis merupakan suatu karakteristik yang dianggap penting untuk diajarkan di sekolah pada setiap jenjang, tapi kenyataannya jarang diajarkan oleh guru di kelas. Salah satu mata pelajaran yang dianggap dapat mengembangkan kemampuan berpikir kritis adalah matematika (de Bono, 1990: 9). Hal ini sesuai dengan Syaban (2010), sikap dan cara berpikir kritis dapat dikembangkan melalui proses pembelajaran matematika karena matematika memiliki struktur dan keterkaitan yang kuat dan jelas antar konsepnya sehingga memungkinkan yang mempelajarinya terampil berpikir rasional, logis, dan kritis.

Belajar Matematika

Pengetahuan matematika terdiri dari fakta-fakta, konsep-konsep, prinsip-prinsip, dan aksioma-aksioma. Sedangkan pengetahuan matematis terdiri tiga level yaitu prosedur-prosedur dan operasi-operasi matematis, konsep-konsep matematis, dan “insights” matematika. Sebagian besar pengetahuan matematika bersifat abstrak yang kadang-kadang disebut juga sebagai “*benda pikiran*” yang memerlukan proses kognitif tingkat tinggi untuk mempelajarinya. Walaupun sebagian besar pengetahuan matematika bersifat tetapi sebagian besar juga dapat dirujuk dari benda-benda konkret.

Karena sifat pengetahuan matematika yang berbeda dari pengetahuan lain, maka cara dan metode belajar matematika juga berbeda dengan pengetahuan lain. Aktivitas belajar matematika adalah aktivitas membuat makna dari aspek-aspek pola dan hubungan melalui abstraksi. Pengetahuan matematika digeneralisasi dan dinilai dengan logika dan kreativitas melalui suatu siklus investigasi yang memperhatikan representasi, manipulasi, dan validasi.

Belajar matematika di tingkat dasar sebaiknya dimulai dari unsur-unsur konkret dan berasal dari benda-benda di sekitar lingkungan anak yang telah dikenal anak (realistik). Secara bertahap barulah di tingkatkan keabstrakannya yang juga disesuaikan dengan tingkat perkembangan anak. Kita telah mengenal bermacam-macam metode belajar matematika seperti metode ekspositori, tanya jawab, diskusi, inquiri, pemecahan masalah, dan sebagainya. Sedangkan metode terbaru yang banyak digalakkan di berbagai kursus dan bimbingan belajar adalah metode kumon, jarimatika, sempoa, dan sebagainya. Di antara metode-metode tersebut tidak ada metode yang paling sempurna tetapi masing-masing metode mempunyai kelebihan dan kekurangan.

Melalui setiap metode belajar matematika siswa dapat dibiasakan berpikir kritis. Misalnya

dari metode diskusi, siswa dapat dibiasakan berpikir kritis dari argumen-argumen yang dikemukakan pada saat diskusi. Dari interaksi di antara para siswa memainkan peran utama merangsang daya berpikir kritis. Dalam berdiskusi guru harus mengatur berlangsungnya diskusi sehingga setiap peserta diskusi dapat menggali berpikir kritisnya.

Dalam metode inquiri berpikir kritis sangat memungkinkan untuk siswa berpikir kritis yaitu dalam melakukan kegiatan penemuan, menentukan hasil penemuan, dan dalam melihat kembali apakah hasil penemuan yang telah diperoleh apakah sudah merupakan hasil yang diharapkan. Begitu juga dengan metode ekspositori dan tanya jawab pembiasaan berpikir kritis dapat dilakukan asalkan guru dapat mengeksplorasi suasana belajar dan pertanyaan yang diajukan dapat membangkitkan berpikir kritis siswa.

Metode belajar yang sangat berperan sekali dalam pembiasaan berpikir kritis adalah pemecahan masalah. Melalui setiap tahapan pemecahan masalah siswa akan terbiasa berpikir kritis, mulai dari tahap memahami masalah, membuat rencana, melaksanakan rencana sampai pada melihat kembali hasil pemecahan yang telah dilakukan.

Melalui proses belajar matematika secara kooperatif siswa juga dapat dibiasakan berpikir kritis. Dalam belajar secara kooperatif, siswa bisa mendengar perspektif-perspektif yang lain, menganalisis klaim-klaim, mengevaluasi bukti-bukti, menjelaskan, dan menjustifikasi penalaran mereka.

Selain dengan melalui penggunaan metode-metode belajar, pembiasaan berpikir dalam belajar matematika juga bisa dilakukan dengan strategi-strategi lain yaitu pengaturan tempat duduk siswa, mengalokasikan waktu untuk interaksi dan refleksi, dan dengan memulai pelajaran dengan sebuah masalah serta mengakhiri pelajaran dengan latihan evaluatif singkat.

KESIMPULAN

Individu yang kritis adalah individu yang dalam setiap perkataan maupun tindakannya selalu penuh pertimbangan dan hati-hati. Sebelum dia memutuskan sesuatu dia terlebih dahulu memahami suatu informasi yang diterimanya, memperhatikan, memahami, dan menjustifikasi fakta-fakta, memvalidasi fakta-fakta, menarik kesimpulan untuk memutuskan sesuatu. Karakteristik-karakteristik individu yang kritis ini akan dapat terbentuk dari pembiasaan dia berpikir kritis karena karakteristik ini juga merupakan komponen dari berpikir kritis.

Agar pembiasaan berpikir kritis ini dapat dilaksanakan melalui belajar matematika, maka guru harus menciptakan suasana belajar mengajar yang memungkinkan siswa untuk terbiasa berpikir kritis. Pembiasaan ini dapat dilakukan melalui metode belajar yang dilaksanakan atau strategi-strategi lain.

DAFTAR PUSTAKA

- de Bono, E. 1990. *Mengajar Berpikir (Terjemahan oleh Soemardjo)*. Jakarta: Erlangga.
- Brookfield, S.D. 1988. *Developing Critical Thinkers. Challenging Adults to Explore Alternative Ways of Thinking and Acting*. San Fransisco: Jossey-Bass Publishers.
- Ennis, R.H. 1995. *Critical Thinking*. University of Illinois.
- Krulick, S & Rudnick, J.A. 1995. *The New Sourcebook for Teaching and Problem Solving in Elementary School*. Needam Heights: Allyn & Bacon.
- Kurfiss, J.G. 1988. *Critical Thinking. Theory, Research, Practice, and Possibilities*. ASHE-ERIC Higher Education Reports, Volume 17 No. 2. Graduate School of Education and Human Development, The George Washington University.

Martomidjojo. (<http://www.ekodok.com/search.PEMBUDAYAAN+KETERAMPILAN+BERPIKIR+KRITIS>). Diunduh bulan Februari 2010.

Moore, B.N & Parker, R. 1986. *Critical Thinking Evaluating and Arguments in Everyday Life*. California State University. California: Mayfield Publishing Company.

Polya, G. 1973. *How to Solve It (New of Mathematical Method)*. Second Edition. New Jersey: Prence University Press.

Suherman, E, dkk, 2001. *Strategi Pembelajaran Matematika Kontemporer*. Bandung: Jurusan Pendidika Matematika FPMIPA UPI.

Syaban, M. (<http://educare.e-fkipunla.net/index2.php?option=com>). Diunduh bulan Maret 2010.

Wikipedia, Kamus Online (<http://wikimediafoundation.org/fundraising>). Diunduh bulan April 2010.

PENGEMBANGAN *SOFTSKILL* MAHASISWA CALON GURU MELALUI PERKULIAHAN DI JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

Endang Listyani

Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta
Email: listy_matuny@yahoo.co.id

Abstrak

Banyak survey yang telah dilakukan dan mengungkapkan bahwa lulusan universitas yang dibutuhkan di dunia kerja adalah lulusan yang tidak hanya memiliki *hardskill* namun juga yang memiliki *softskill*. Sebagai contoh, hampir semua lapangan pekerjaan membutuhkan kemampuan berkomunikasi dan bekerja dalam tim. Pada umumnya *softskills* didefinisikan sebagai kemampuan seseorang dalam berhubungan dengan orang lain (*interpersonal skill*) dan kemampuan dalam mengatur/mengelola dirinya sendiri (*intrapersonal skill*). *Softskill* merupakan kompetensi non akademik yang menjadi modal seorang sarjana agar dapat mencapai kesuksesan dalam karier serta lebih berhasil dan berfungsi dalam kehidupan bermasyarakat. Salah satu cara yang cukup baik untuk mengembangkan *softskills* mahasiswa adalah melalui perkuliahan dengan segala aktivitasnya.

Kata kunci: *softskill*.

PENDAHULUAN

Tuntutan yang harus dihadapi oleh para guru matematika di masa depan semakin tinggi. Tidak hanya kompetensi akademik saja yang diperlukan untuk memenuhi tuntutan sebagai guru matematika tetapi diperlukan juga *softskill* sebagai kemampuan non akademik. Dengan demikian Jurusan Pendidikan Matematika khususnya Program Studi matematika mempunyai kewajiban untuk menyiapkan lulusannya dalam kompetensi akademik maupun non akademik yaitu *softskill* agar dapat memenuhi tuntutan di dunia kerja.

Soft skill didefinisikan sebagai keterampilan dalam berpikir analitis yang membangun, berpikir logis, kritis, mampu berkomunikasi dan bekerjasama dalam team, serta bersikap dan berperilaku dalam berkarya sehingga dapat mandiri. *Soft skill* merupakan kompetensi non akademik yang menjadi modal seorang sarjana agar dapat mencapai kesuksesan dalam karier serta lebih berhasil dan berfungsi dalam kehidupan bermasyarakat.

Upaya untuk mengembangkan *softskill* mahasiswa telah banyak dilakukan. Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam UNY setiap tahun menyelenggarakan pelatihan *softskill* bagi mahasiswa baru. Demikian pula Program Studi Pendidikan Matematika melalui program I-MHERE UNY telah melaksanakan berbagai kegiatan yang dimaksudkan untuk membekali lulusan dengan *soft skill* yang memadai, misalnya kemampuan berfikir kritis, kemampuan pemecahan masalah, kemampuan komunikasi, kemampuan kepemimpinan, kemampuan kerja sama, kemampuan beretika, dan sebagainya, yang diintegrasikan dalam perkuliahan.

PEMBAHASAN

Berdasarkan tracer study yang telah dilakukan oleh program studi Pendidikan Matematika menunjukkan bahwa gaji pertama lulusan Program Studi Pendidikan Matematika relatif masih rendah. Banyak lulusan yang hanya sebagai guru privat dengan gaji rendah. Hanya sedikit dari lulusan yang mendapat pekerjaan yang menjanjikan seperti menjadi guru di sekolah bertaraf

internasional.

Untuk mendapatkan pekerjaan yang prestisius lulusan dituntut tidak hanya mempunyai kemampuan akademik (*hardskill*) yang tinggi, tetapi juga harus mempunyai kemampuan *softskill*. *Softskill* sangat diperlukan untuk mencapai kemampuan akademik sebagaimana dinyatakan dalam kurikulum. Untuk dapat mencapai prestasi akademik tinggi mahasiswa dituntut untuk mempunyai kemampuan *softskill* seperti kemampuan berfikir kritis, kemampuan pemecahan masalah, kemampuan komunikasi, kemampuan kepemimpinan, kemampuan kerja sama, kemampuan beretika.

Menurut Peraturan Pemerintah Nomor 19 Tahun 2005 Tentang Standar Nasional Pendidikan, pendidik harus memiliki kualifikasi akademik dan kompetensi sebagai agen pembelajaran, sehat jasmani dan rohani, serta memiliki kemampuan untuk mewujudkan tujuan pendidikan nasional. Di dalam penjelasan atas Peraturan Pemerintah Nomor 19 Tahun 2005 tersebut dinyatakan bahwa yang dimaksud dengan pendidik sebagai agen pembelajaran (*learning agent*) pada ketentuan tersebut adalah peran pendidik antara lain sebagai fasilitator, motivator, pemacu, dan pemberi inspirasi belajar bagi peserta didik.

Lebih lanjut, disebutkan dalam penjelasan Peraturan Pemerintah Nomor 19 Tahun 2005 tersebut bahwa yang dimaksud dengan kompetensi pedagogik adalah kemampuan mengelola pembelajaran peserta didik yang meliputi pemahaman terhadap peserta didik, perancangan dan pelaksanaan pembelajaran, evaluasi hasil belajar, dan pengembangan peserta didik untuk mengaktualisasikan berbagai potensi yang dimilikinya. Kompetensi kepribadian adalah kemampuan kepribadian yang mantap, stabil, dewasa, arif, dan berwibawa, menjadi teladan bagi peserta didik, dan berakhlak mulia. Kompetensi profesional adalah kemampuan penguasaan materi pembelajaran secara luas dan mendalam, yang memungkinkannya membimbing peserta didik memenuhi standar kompetensi yang ditetapkan dalam Standar Nasional Pendidikan. Sedangkan kompetensi sosial adalah kemampuan pendidik sebagai bagian masyarakat untuk berkomunikasi dan bergaul secara efektif dengan peserta didik, sesama pendidik, tenaga kependidikan, orangtua/wali peserta didik, dan masyarakat sekitar.

Berdasarkan penjelasan di atas, dapatlah dikatakan bahwa kompetensi pedagogik berkaitan dengan kemampuan menyelenggarakan pembelajaran, kompetensi profesional berkaitan dengan kemampuan melaksanakan fungsi dan tugas pokok berdasarkan keahlian, kompetensi kepribadian berkaitan dengan kemampuan mengendalikan diri sebagai pribadi dewasa, dan kompetensi sosial berkaitan dengan kemampuan berinteraksi dengan lingkungan dan masyarakat.

Tuntutan terhadap guru profesional yang demikian ini sungguh berat, jika mereka tidak dipersiapkan dari awal, yaitu sejak mereka mengikuti perkuliahan sebagai calon guru. Fungsi mediator dan fasilitator bagi guru, menurut Suparno (1996), dapat dijabarkan dalam beberapa tugas sebagai berikut: (1) Menyediakan pengalaman belajar yang memungkinkan siswa bertanggung jawab dalam membuat rancangan, proses, dan penelitian, (2) Menyediakan atau memberikan kegiatan-kegiatan yang merangsang keingintahuan siswa dan membantu mereka untuk mengekspresikan gagasan-gagasannya dan mengkomunikasikan ide ilmiah mereka, dan (3) Memonitor, mengevaluasi, dan menunjukkan apakah pemikiran seorang siswa itu benar ataukah tidak. Fungsi yang demikian ini akan dapat dilaksanakan dengan baik oleh seorang guru jika ia mempunyai sejumlah kompetensi sebagaimana disebutkan di atas.

Nussbaum (2009) menyebutkan *teamwork, attention to detail, energy/drive, work composure, initiative, and communication skill*, sebagai *soft skill* yang sangat penting dalam profesi yang terkait dengan jasa. Phani (2007) mendaftar 60 jenis *soft skill* yang paling “top” untuk berbagai profesi pada umumnya. Diantara temuan dalam penelitiannya menyebutkan bahwa *positive work ethics, good attitude, and desire to learn and be trained*, merupakan *soft skill* yang pada umumnya diperlukan seorang pekerja.

Di dalam Wikipedia (<http://en.wikipedia.org/wiki/Soft-skills>) disebutkan bahwa “*soft skills is a sociological term for a person’s “EQ” (Emotional Intelligence Quotient), which refers to the cluster of personality traits, social graces, communication, ability with language, personal*

habits, friendliness, and optimism that mark each of us in varying degrees". Beberapa contoh interpersonal skill yang merupakan bagian dari *softskill* yang sangat penting untuk menunjang karir seseorang, menurut Wikipedia, adalah ketrampilan: (1) berpartisipasi sebagai anggota tim, (2) mengajari orang lain, (3) melayani pelanggan, (4) memimpin, (5) bernegosiasi, (6) bekerja dalam keragaman budaya, (7) memotivasi orang lain, dan (8) bertukar pikiran/gagasan/pandangan dengan orang lain.

Secara garis besar *softskill* bisa digolongkan ke dalam dua kategori : intrapersonal dan interpersonal skill. Intrapersonal skill mencakup : self awareness (self confident, self assessment, trait & preference, emotional awareness) dan self skill (improvement, self control, trust, worthiness, time/source management, proactivity, conscience). Sedangkan interpersonal skill mencakup social awareness (political awareness, developing others, leveraging diversity, service orientation, empathy dan social skill (leadership,influence, communication, conflict management, cooperation, team work, synergy)_<http://www.ubb.ac.id> menulengkap php judul=antara hardskill dan softskill

Menurut Ilah Sailah (2009), 10 atribut soft skills yang banyak berperan di dunia kerja, yaitu

- a. Inisiatif
- b. Integritas
- c. Berfikir kritis
- d. Kemauan untuk belajar
- e. Komitmen
- f. Motivasi untuk meraih prestasi
- g. Antusias
- h. Kemampuan berkomunikasi
- i. Handal (reliable)
- j. Berkreasi

Langkah-langkah pengembangan *softskills* dapat dilakukan dengan berbagai cara (TNT Magazine, 2009), diantaranya adalah dengan program pengembangan:

(1) *written curriculum*, ini dilakukan dengan memasukkan *softskills* yang telah ditentukan ke dalam rancangan pembelajaran. dengan demikian penguasaan mahasiswa terhadap *softskills* tertentu harus dimasukkan dalam aspek penilaian mata kuliah tersebut. Sebagai contoh, melalui program I-MHERE sejak tahun 2008 sampai sekarang, Program Studi Pendidikan Matematika FMIPA UNY telah mengembangkan beberapa kemampuan *softskill* melalui beberapa mata kuliah, diantaranya adalah

(a) kemampuan komunikasi, dengan aspek-aspek Komunikasi lisan dan non lisan.

Komunikasi lisan dikembangkan dengan indikator:

- menyampaikan ide dengan jelas dan yakin
- keruntutan dalam menyampaikan ide
- penggunaan bahasa baku sesuai konteks
- komunikasi interpersonal sesuai dengan situasi

Sedangkan komunikasi non lisan dikembangkan dengan indikator mendengarkan dengan aktif dan memberikan tanggapan yang sesuai.

(b) Kemampuan penyelesaian Masalah (Problem Solving) dikembangkan dengan indikator:

- Mengenali masalah
- Menganalisis masalah
- Merancang strategi penyelesaian masalah
- Memberi justifikasi
- Kebenaran penyelesaian masalah

- (c) Kemampuan bekerja sama (Team Work) dikembangkan dengan indikator
- Interaksi dalam kelompok
 - Berperan dalam kelompok
 - Memberi sumbangan dalam kelompok
 - Menghargai pendapat orang lain
- (d) Kemampuan kepemimpinan (Leadership), dikembangkan dengan indikator
- Kemampuan merancang kegiatan yang akan dilakukan
 - Kemampuan mengorganisasi pelaksanaan suatu kegiatan
 - Kemampuan menerima pendapat orang lain
 - Kemampuan memotivasi anggota kelompok

Kemampuan-kemampuan tersebut di atas merupakan modal bagi calon guru agar dapat mengembangkan diri secara optimal di dunia kerjanya kelak.

- (2) *Hidden curriculum*, ini dilakukan secara informal yaitu melalui interaksi dosen-mahasiswa. dosen sebagai panutan (*role model*). dapat juga dilakukan dengan menciptakan atmosfir akademik di lingkungan jurusan atau program studi. Dosen dalam aktivitas perkuliahan dapat memberi teladan sekaligus melatih kedisiplinan, tanggungjawab, etika (sopan santun), kemandirian kepada mahasiswa
- (3) *Co-curriculum*, memanfaatkan kegiatan seperti Praktik Pengalaman lapangan (PPL), ataupun KKN (kuliah kerja nyata).
- (4) *Extra-curriculum*, melibatkan unit kegiatan mahasiswa sebagai wadah untuk melatih *softskills* mahasiswa tersebut.

Dari berbagai pendapat yang diajukan tentang pentingnya *softskill* untuk pengembangan karir termasuk juga karir sebagai guru matematika, Program Studi Pendidikan Matematika berkewajiban menyiapkan lulusan yang memiliki kompetensi *softskill* seperti yang telah disebutkan di atas.

PENUTUP

Beberapa hal yang perlu dilakukan oleh Jurusan Pendidikan Matematika khususnya Program Studi Pendidikan Matematika untuk menyiapkan lulusannya adalah:

- a. Program Studi membuat *soft skills statement* dari lulusan yang diintegrasikan dengan kompetensi lulusan, yang akan menjadi *brand image* lulusan.
- b. Program Studi mengidentifikasi kemampuan soft skills yang akan dikembangkan oleh mahasiswa baru
- c. Program Studi membuat perencanaan untuk masing-masing tingkat, sehingga tergambar proses pembangunan karakter yang dikehendaki sampai mahasiswa lulus
- d. Program membuat program terobosan yang khas dengan mempertimbangkan sumberdaya yang ada dalam pengembangan *soft skills*.

Beberapa hal yang perlu dilakukan mahasiswa

- a. Buat *goal* yang jelas dalam membentuk karakter (ingin dicitrakan sebagai guru yang seperti apa?)
- b. Aktif berinteraksi dan berpartisipasi dalam kegiatan kemahasiswaan yang berfokus pada pembentukan karakter
- c. Memiliki *role model* guru sukses, pelajari outobiografinya dan tiru kebiasaan menuju guru sukses

- d. Rajin membaca buku yang bermuatan pengembangan kepribadian dan menerapkannya dalam kehidupan sehari-hari (cara berkomunikasi, saling menghargai, disiplin, komitmen, bertanggungjawab dan senantiasa jujur)
- e. Aktif dalam proses pembelajaran sebagai pembelajar yang partisipatif dan dapat menggunakan sumber belajar multi dimensi

DAFTAR PUSTAKA

Bernadin, H. John & Russell, Joyce E.A.. 1993, *Human resource management*, International edition, Singapura : McGraw Hill, Inc.

Bustami Rahman. 2008. *Antara hardskill dan softskill*. Tersedia di <http://www.infocomcare/>. Diakses tanggal 6 Mei 2011

Illah Sailah, (2011). *Pengembangan Softskill di Perguruan Tinggi*. Tersedia di <http://mawa.uns.ac.id/>. Diakses tanggal 9 Maret 2011

Ramesh, Gopaldaswamy. 2010. *The Ace of Softskill, Attitude, Communication, and Etiquette for Succes*. India: Dorling Kundersley

BERPIKIR LATERAL DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA

R. Rosnawati

Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta

Email: rosnawati_uny@yahoo.com

Abstrak

Dalam praktek persekolahan keterampilan berpikir akan dipelajari siswa dalam pembelajaran melalui konten materi pada semua mata pelajaran, tidak terkecuali matematika. Salah satu keterampilan yang diperlukan adalah berpikir lateral. Pada pemikiran lateral tidak harus 'benar' pada setiap langkah dan tidak menggunakan kategori-kategori, klasifikasi atau label-label yang tetap dalam menyelesaikan masalah. Agar siswa dapat memiliki keterampilan berpikir lateral melalui pembelajaran matematika dilakukan melalui kegiatan pembelajaran yang dapat memberikan kesempatan pada siswa melakukan kebebasan berpikir, dan menciptakan koneksi.

Kata kunci: berpikir lateral, pembelajaran matematika

PENDAHULUAN

Seperti diamanatkan pasal 31 UUD Negara RI, melalui pendidikan akan dicapai tujuan nasional. Oleh karena ini pemerintah terus menerus berupaya untuk meningkatkan kualitas pendidikan nasional. Sejalan dengan hal itu, Pemerintah bersama Dewan Perwakilan Rakyat telah menetapkan Undang-Undang Nomor 20 Tahun 2003 Tentang Sistem Pendidikan Nasional. Undang-undang ini mengamanatkan pembaharuan yang besar dalam sistem pendidikan di Indonesia. Melalui pendidikan nasional setiap warga negara Indonesia diharapkan menjadi manusia yang bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa, berakhlak mulia, cerdas, produktif, berdaya saing tinggi, dan bermartabat di tengah pergaulan internasional. Dalam hubungan ini segala upaya perlu dilakukan agar pelaksanaan pendidikan nasional dapat berhasil sehingga tujuan pendidikan nasional dapat tercapai. Salah satu kompetensi yang ingin dicapai melalui pendidikan adalah kemampuan berpikir, seperti yang tertuang dalam SKL butir ke 7 yaitu kemampuan berpikir logis, kritis, kreatif, dan inovatif.

Berpikir adalah perkembangan dalam idea dan konsep (Bochenski, dalam Suryasumatri, 1995). Saat siswa menghadapi kegiatan pembelajaran, siswa melakukan kegiatan berpikir tentang obyek yang sudah diberikan (materi pelajaran) dan tugas siswa adalah membuka mata terhadap obyek tersebut. Kegiatan berpikir siswa akan terjadi apabila siswa sudah harus menyadari bahwa obyek atau dalam hal ini materi tertentu adalah tidak sederhana, siswa harus mengenal obyek tersebut, membanding-bandingkan apa yang dilihatnya, dan selalu melihat serta menganalisis obyek tersebut dari berbagai sudut pandang yang berbeda. Apabila saat mempelajari materi tertentu melakukan kegiatan menganalisis melalui berbagai sudut pandang siswa, artinya siswa tersebut telah melakukan kegiatan penalaran.

Matematika adalah salah satu mata pelajaran yang diberikan disekolah, ciri utama dari matematika adalah metode dalam penalaran (Moriss Kline, dalam Suryasumatri, 1995). Dalam matematika dikenal menalar secara induktif dan deduktif. Menalar secara induktif membutuhkan pengamatan dan bahkan percobaan untuk memperoleh fakta yang dapat dipakai sebagai dasar argumentasi. Untuk menghindari keterbatasan pada metode induktif digunakan metode deduktif yaitu menarik kesimpulan yang merupakan konsekuensi logis dari fakta-fakta yang sebelumnya telah diketahui. Persyaratan bahwa penalaran matematis haruslah bersifat deduktif diletakan oleh

bangsa Yunani. Mereka berpendapat bahwa metode deduksilah yang mampu menghasilkan kesimpulan yang dapat dipercaya. Dengan jalan mengeksplorasi setiap segi dari kebenaran yang telah diketahui, sehingga usaha dalam memperoleh kebenaran secara deduksi harus dilakukan pada beberapa pernyataan yang sebelumnya telah dianggap benar. Persoalan yang timbul adalah apakah dalam pembelajaran matematika keterampilan berpikir yang dapat dicapai adalah penalaran? Makalah ini mencoba memahami ketetampilan berpikir yang dikemukakan oleh Edward de Bono, dimana terbagi menjadi dua yaitu berpikir vertical dan berpikir lateral yang dapat dilatihkan melalui pembelajaran matematika.

PEMBAHASAN

Edward de Bono, membagi pola berpikir menjadi dua, yaitu **vertikal dan lateral**. **Pola berpikir vertikal** adalah pola berpikir logis konvensional yang selama ini kita kenal dan umum dipakai. Pola berpikir ini dilakukan secara tahap demi tahap berdasarkan fakta yang ada, untuk mencari berbagai alternatif pemecahan masalah, dan akhirnya memilih alternatif yang paling mungkin menurut logika normal. Pola berpikir vertical sangat erat dengan bernalar di matematika. Sehingga saat siswa belajar matematika, maka siswa tersebut, diharapkan memiliki keterampilan berpikir vertical. Bila dilihat dari fungsi otak, maka berpikir vertical lebih memfungsikan otak kiri yang bersifat logis, sekuensial, linier, dan rasional.

Berbeda dengan **pola berpikir lateral**, **pola berpikir ini** tetap menggunakan berbagai fakta yang ada, menentukan hasil akhir apa yang diinginkan, dan kemudian secara kreatif (seringkali tidak dengan cara berpikir tahap demi tahap) mencari alternatif pemecahan masalah dari berbagai sudut pandang yang paling mungkin mendukung hasil akhir tersebut. Bila dilihat dari fungsi otak maka berpikir lateral menggunakan otak belahan kanan yang bersifat acak, tidak teratur, intuitif, divergen, dan holistik. Tidak mengherankan jika pola berpikir lateral sering muncul dalam berbagai penemuan baru dan terobosan dalam ilmu pengetahuan. Termasuk para ahli matematika, proses penemuan tidak bersumber pada pola dan metode, namun diperoleh dari kegiatan kreatif.

Salah satu tujuan dalam pendidikan adalah membantu siswa belajar bagaimana untuk berpikir lebih efektif. Matematika adalah suatu alat untuk mencapai tujuan dimana salah satu tujuannya adalah berpikir lebih efektif. Dilihat dari pandangan konstruktivis pembelajaran matematika adalah memberikan kesempatan kepada siswa untuk mengkonstruksi konsep-konsep/prinsip-prinsip matematika dengan kemampuan sendiri melalui proses internalisasi. Guru dalam hal ini berperan sebagai fasilitator. Menurut pandangan konstruktivis dalam pembelajaran matematika berorientasi pada: (1) pengetahuan dibangun dalam pikiran melalui proses asimilasi atau akomodasi, (2) dalam pengerjaan matematika, setiap langkah siswa dihadapkan kepada **apa**, (3) informasi baru harus dikaitkan dengan pengalamannya tentang dunia melalui suatu kerangka logis yang mentransformasikan, mengorganisasikan, dan menginterpretasikan pengalamannya, dan (4) pusat pembelajaran adalah bagaimana siswa berpikir, bukan apa yang mereka katakan atau tulis.

Untuk dapat melihat apa yang siswa pikirkan, maka persoalan yang diberikan tidak hanya berfungsi untuk mengagai fakta saja, namun siswa dari persoalan yang diberikan siswa dapat melihat dari berbagai sudut pandang. Dengan demikian siswa memperoleh pengetahuan sebagai barang jadi, namun melalui kegiatan berpikir akan menjadikan obyek dari matematika tersebut menjadi pengetahuannya.

Konstruktivis ini dikritik oleh Vygotsky, yang menyatakan bahwa siswa dalam mengkonstruksi suatu konsep perlu memperhatikan lingkungan sosial. Konstruktivisme ini oleh Vygotsky disebut konstruktivisme sosial (Taylor, 1993; Bleicher & Cooper, 1998). Ada dua konsep penting dalam teori Vygotsky (Slavin, 1997), yaitu *Zone of Proximal Development* (ZPD) dan *scaffolding*. *Zone of Proximal Development* (ZPD) merupakan jarak antara tingkat perkembangan sesungguhnya yang didefinisikan sebagai kemampuan pemecahan masalah secara mandiri dan tingkat perkembangan potensial yang didefinisikan sebagai kemampuan pemecahan

masalah di bawah bimbingan orang dewasa atau melalui kerjasama dengan teman sejawat yang lebih mampu. *Scaffolding* merupakan pemberian sejumlah bantuan kepada siswa selama tahap-tahap awal pembelajaran, kemudian mengurangi bantuan dan memberikan kesempatan untuk mengambil alih tanggung jawab yang semakin besar setelah ia dapat melakukannya (Slavin, 1997). *Scaffolding* merupakan bantuan yang diberikan kepada siswa untuk belajar dan memecahkan masalah. Bantuan tersebut dapat berupa petunjuk, dorongan, peringatan, menguraikan masalah ke dalam langkah-langkah pemecahan, memberikan contoh, dan tindakan-tindakan lain yang memungkinkan siswa itu belajar mandiri.

Untuk dapat menciptakan ZPD maka kegiatan diskusi sangat disarankan dalam setiap kegiatan pembelajaran, melalui kegiatan secara berkelompok, siswa dapat bertukar pemikiran, serta sudut pandang yang berbed. Apa yang diperoleh melalui kegiatan diskusi dengan orang yang lebih dewasa, mewujudkan pemahaman bahwa apa yang diyakininya benar, belum tentu menurut yang lain akan benar, atau dengan kata lain siswa dapat membuka mata tentang pandangan suatu obyek dari sisi yang tidak dia pikirkan sebelumnya. Apabila hal ini terjadi, fungsi otak kanan siswa akan bekerja, atau dengan kata lain kemampuan berpikir lateral akan meningkat.

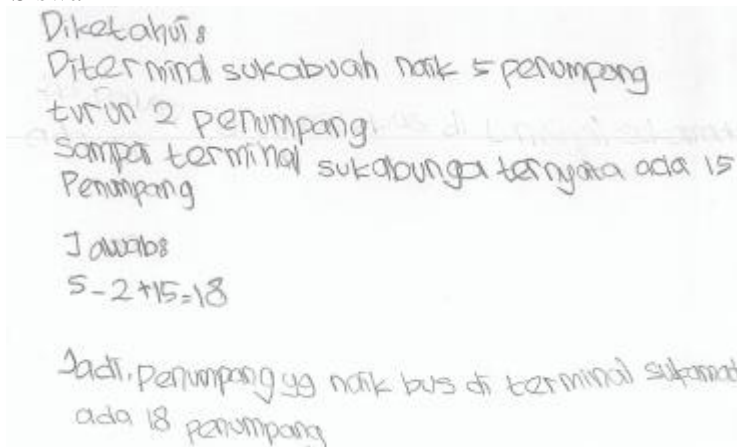
Sebagai contoh adalah kemampuan siswa pada usia 7-11 tahun, dimana menurut Piaget siswa tersebut telah memiliki kemampuan tingkat perkembangan operasional konkret. Pada tingkat perkembangan operasional konkret ini siswa sudah memiliki kemampuan reversible (berkebalikan), serta mengklasifikasikan dan mengurutkan.

Hasil observasi menunjukkan bahwa siswa kelas 3 SD Gambiranom Yogyakarta (dengan kemampuan penjumlahan dan pengurangan yang dimiliki dengan hasil tertinggi 100) diberi tugas memecahkan masalah yang sama sebagai berikut:

Suatu bus kota berangkat dari terminal Sukamadu menuju terminal Sukabungga. Di terminal Sukabungga naik 5 penumpang dan turun 2 penumpang. Setelah sampai terminal Sukabungga ternyata ada 15 penumpang dalam bus. Berapa penumpang yang naik bus di terminal Sukamadu?

Berikut adalah hasil beberapa jawaban siswa terhadap permasalahan di atas:

1. Siswa 1



Diketahui
Di terminal sukabungga naik 5 penumpang
turun 2 penumpang
Sampai terminal sukabungga ternyata ada 15
Penumpang

Jawab
 $5 - 2 + 15 = 18$

Jadi, penumpang yg naik bus di terminal sukamad
ada 18 penumpang

2. Siswa 2



3. Siswa 3

Jawab: jadi penumpang yang naik bus di terminal Sukamadu ada = 12

$$12 + 5 - 2 = 15$$

$$\text{dari } 15 - (5 - 2) = 15 - 3 = 12$$

Masalah yang dirumuskan sedemikian rupa sehingga menuntut siswa untuk melakukan investigasi konteks, sebab tidak semua informasi diberikan secara eksplisit, maka diperlukan produktivitas berpikir siswa untuk mengambil keputusan matematis yang *reasonable*. Apa yang dilakukan siswa 1 adalah mencoba menyelesaikan dari apa yang tampak dalam masalah. Penumpang yang naik dan berada dalam bus dimaknai dengan penjumlahan, sedangkan yang turun dimaknai dengan pengurangan, sehingga apa yang dipikirkan siswa berpikir logis, begitu pula dengan siswa 2 walaupun masih ditunjukkan dengan lambang, bukan dinyatakan melalui bilangan. Pola berpikir siswa 1 dan siswa 2 dilakukan secara tahap demi tahap berdasarkan fakta yang ada, berfikir secara vertikal melakukan analisa secara logis dan hati-hati dengan memaknai penumpang yang naik dengan operasi tambah dan penumpang yang turun dengan operasi pengurangan, analisa yang dilakukan berikutnya adalah penumpang yang berada di dalam bus artinya ada sehingga dimaknai positif dan kesimpulan ini sangat logis menurut pemikiran siswa 1. Namun siswa 2 gagal memaknai penumpang yang berada pada bus, sehingga gagal untuk pengambilan kesimpulan berikutnya.

Apa yang dilakukan siswa 1 dan siswa 2 adalah mencoba memproses persoalan dengan melakukan analisa, dengan memecah informasi, kemudian melakukan pengkategorian, atau mengumpulkan berbagai potongan informasi, yang dilakukan siswa tersebut adalah mengkategorikan naiknya penumpang dan adanya penumpang dalam bus dimaknai dengan penjumlahan dan turunnya penumpang dimaknai dengan pengurangan sebagai berikut:

Diketahui:
 Di terminal sukabungah naik = penumpang
 turun 2 penumpang
 sampai terminal sukabungah ternyata ada 15
 Penumpang

Kemudian informasi ini diuji melalui alat pengukur pengujian

$$5 - 2 + 15 = 18$$

Dan penarikan kesimpulan yang harus benar, karena berdasarkan data-data yang telah ada, tanpa melakukan evaluasi atas kebenaran jawaban. Ini ciri khas dari berpikir secara vertikal, yaitu sepanjang masa selalu dicari yang benar dan membuang sisanya yang dianggap salah.

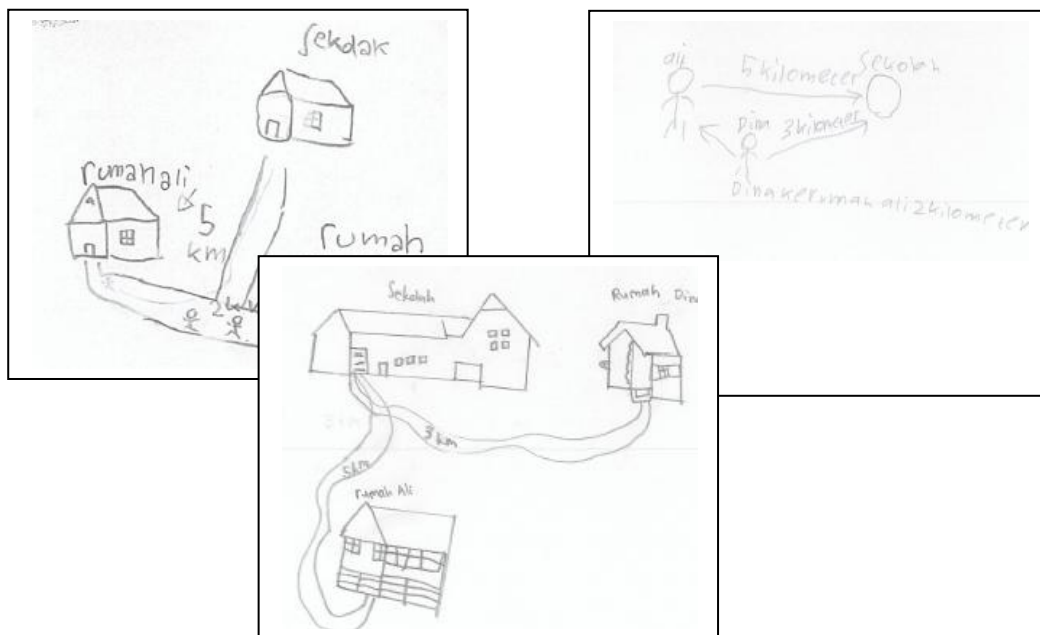
Jadi, penumpang yg naik bus di terminal sukamot
ada 18 penumpang

Apa yang dilakukan siswa 3 untuk memecahkan masalah ini secara kreatif, dengan pencapaian hasil maksimal yang lebih baik, menentukan hasil akhir apa yang diinginkan, dan kemudian secara kreatif (seringkali tidak dengan cara berpikir tahap demi tahap) mencari alternatif pemecahan masalah dari berbagai sudut pandang yang paling mungkin mendukung hasil akhir tersebut.

Contoh lain yang dapat menunjukkan kebebasan berpikir siswa adalah saat menyelesaikan persoalan berikut:

Jarak rumah Ali ke sekolah adalah 5 km dan jarak rumah Dina ke sekolah adalah 3 km.
Berapa jauhkah jika rumah Ali ke rumah Dina?

Berikut adalah hasil kebebasan berpikir siswa, yang memandang berbeda pada posisi rumah antara Ali dan Dina:



Hasil ketiga pandangan siswa berkaitan dengan permasalahan jarak antara dua rumah sangat beragam, sehingga siswa yang satu dengan yang lain dapat membuka mata bahwa banyak kemungkinan yang terjadi dari posisi dua rumah tersebut, sehingga jarak yang mungkin dijawab oleh siswa berkisar antara 2 km sampai dengan 8 km.

Proses berpikir lateral yang menantang dengan membolehkan 'kesalahan' akan menghasilkan sesuatu yang kreatif. Artinya setiap kemungkinan diperbolehkan hadir dengan tidak terburu-buru mengelompokkan pada kategori benar dan salah.

Apa yang tampak pada ketiga siswa tersebut menunjukkan bahwa dalam pembelajaran matematika keterampilan berpikir siswa tidak secara otomatis dapat dimiliki

iswa, meskipun ciri utama dari matematika adalah metode penalaran. Untuk dapat meningkatkan keterampilan berpikir baik itu keterampilan berpikir vertikal maupun lateral, maka siswa diberi kebebasan untuk melakukan penyelidikan sehingga dapat membuka mata dari berbagai sudut pandang.

Keterampilan berpikir umumnya tidak dapat diperoleh siswa melalui transfer, atau rekrfeksi sendiri tanpa bantuan atau stimulus dari luar, yang berupa obyek, orang yang lebih dewasa, dengan kata lain pembelajaran yang harus diciptakan adalah pembelajaran yang bpusat pada siswa. Seperti halnya keterampilan lainnya kemampua keterampilan berpikir siswa akan meningkat melalui kegiatan mengulang untuk melatihnya walaupun sebenarnya keterampilan ini sudah menjadi bagian dari cara berpikirnya. Latihan rutin yang dilakukan siswa akan berdampak pada efisiensi dan otomatisasi keterampilan berpikir yang telah dimiliki siswa. Dalam proses pembelajaran di kelas, guru harus selalu menambahkan keterampilan berpikir yang baru dan mengaplikasikannya dalam pelajaran lain sehingga jumlah atau macam keterampilan berpikir siswa bertambah banyak.

PENUTUP

Berpikir lateral adalah memecahkan masalah melalui langsung dan pendekatan kreatif, dengan menggunakan fakta-fakta yang ada dan melibatkan ide-ide yang mungkin tidak diperoleh dengan hanya menggunakan langkah-langkah berpikir vertical. Untuk melatih kemampuan berpikir lateral dalam pembelajaran matematika dilakukan dengan selalu memberi kebebasan berpikir pada siswa, sehingga siswa dapat menganalisa dari berbagai sudut pandang yang mungkin oleh guru tidak terpikirkan. Keterampilan berpikir tidak dapat diperoleh siswa begitu saja tanpa diupayakan oleh guru. Pemberian kebebasan berpikir yang disertai bimbingan akan mengupayakan terwujudnya keterampilan berpikir siswa. Kegiatan ini sangat baik dilakukan dalam seting kelompok, yang diharapkan siswa satu dengan lainnya memiliki keberagaman berpikir, sehingga membuka mata bagi seluruh siswa tentang cara berpikir atau cara memandang sebuah obyek. Dengan kata lain, jika kita ingin siswa menjadi pemikir yang handal, kita harus mengajarkan caranya

DAFTAR PUSTAKA

- Rosnawati. (2005). Pembelajaran Matematika Yang Mengembangkan Berpikir Tingkat Tinggi. *Makalah*. Disampaikan dalam Seminar Nasional.
- Slamet Suyanto. 2005. *Konsep Dasar Pendidikan Usia Dini*. Jakarta: Dikti.
- Standar Kompetensi Lulusan. 2006. Jakarta: Direktorat Pendidikan Nasional.
- Surriasumatri, 1995. *Ilmu dalam Perspektif*. Jakarta : Yayasan Obor Indonesia.
- Paul Suparno. 2004. *Teori Intelegensi Ganda*. Yogyakarta : Kanisius

MODEL TES DAN ANALISIS KOMPETENSI SISWA DI SEKOLAH DASAR

Zamsir

FKIP Universitas Haluoleo
Email: zam1307@gmail.com

Abstrak

Penelitian ini merupakan penelitian pengembangan yang bertujuan untuk mengembangkan model analisis kompetensi siswa yang hasilnya dapat dipakai untuk melakukan identifikasi level kemampuan dan menyusun profil pencapaian kompetensi siswa, khususnya di sekolah dasar. Model yang dikembangkan menyangkut dua hal, yaitu: (1) prosedur dan langkah-langkah penyusunan tes, identifikasi level kemampuan siswa, dan (2) pelaporan hasil tes. Kemampuan siswa dikelompokkan menjadi 4 (empat) level, yaitu: level I, level II, level III, dan level IV. Level I merupakan level terendah dan level IV merupakan level tertinggi.

Subjek uji coba produk adalah guru dan siswa SD kelas 3, kelas 4, dan kelas 5 di kota Kendari. Sampel siswa untuk uji coba produk secara terbatas sebanyak 722 orang yang berasal dari 6 SD Negeri dan dipilih dengan teknik *purposive sampling*. Sampel guru untuk uji coba produk sebanyak 12 orang yang dipilih dengan teknik *purposive sampling*. Instrumen penelitian adalah tes matematika, format validasi model, dan format telaah (kartu telaah soal). Analisis data uji coba instrumen tes dilakukan dengan menggunakan program *MicroCat ITEMAN*, sedangkan analisis data hasil penelitian menggunakan program *BIGSTEP*.

Hasil penelitian berupa produk yang terdiri dari: (1) manual prosedur dan langkah-langkah penyusunan tes dan identifikasi level kemampuan/kompetensi siswa, dan (2) format pelaporan hasil tes. Kedua produk tersebut telah teruji secara empiris dan telah mengalami proses validasi oleh guru, guru ahli, kepala sekolah, dan praktisi pendidikan (pakar) dan dinyatakan layak untuk digunakan. Hasil uji coba terbatas terhadap 722 orang siswa menunjukkan sebanyak 131 siswa (18,14%) mempunyai kemampuan pada level I, 284 siswa (39,34%) mempunyai kemampuan pada level II, 186 siswa (25,76%) mempunyai kemampuan pada level III, dan 121 siswa (16,76%) mempunyai kemampuan pada level IV.

Kata kunci: analisis; asesmen; kompetensi; model; tes

PENDAHULUAN

Model pembelajaran menurut DeCecco & Crawford (Ebel & Frisbie, 1986: 17), terdiri dari lima komponen pokok, yaitu: (1) tujuan pembelajaran, (2) perilaku awal, (3) proses belajar mengajar, (4) evaluasi hasil belajar, dan (5) umpan balik. Berdasarkan dari lima komponen tersebut, evaluasi hasil belajar dan umpan balik sangat menentukan perbaikan tiga komponen pertama, termasuk perbaikan proses pembelajaran. Oleh sebab itu di samping perbaikan, evaluasi juga memberi informasi tentang sejauhmana siswa telah menguasai kompetensi yang ingin dicapai sebagai hasil dari pembelajaran yang dilakukan.

Uraian di atas memberi indikasi bahwa penilaian hasil belajar yang selanjutnya disebut asesmen memiliki kedudukan yang sangat penting dalam proses pembelajaran. Asesmen tidak hanya dipakai sebagai alat pemantau dalam proses belajar mengajar, tetapi juga sebagai sarana untuk memperoleh informasi tentang kemajuan belajar siswa, proses belajar mengajar, dan perbaikan hasil belajar siswa.

Implementasi asesmen pada tingkat sekolah dasar dan menengah selalu mengalami perubahan seiring dengan perubahan kurikulum yang dilakukan oleh pemerintah dalam hal ini Depdiknas. Perubahan ini tidak hanya menyangkut tentang model dan sistem asesmen yang

diterapkan tetapi juga menyangkut kebijakan pengambilan keputusan terhadap hasil asesmen.

Perubahan kurikulum membawa konsekuensi logis secara khusus terhadap perubahan berbagai aspek dalam sistem pendidikan, mulai dari aspek implementasi kurikulum di sekolah, kemampuan dan kesiapan para guru bidang studi, proses belajar mengajar, penilaian hasil belajar atau asesmen, sampai dengan sarana dan prasarana pendidikan. Dari keseluruhan aspek tersebut, salah satu aspek yang perlu mendapat perhatian adalah adanya perubahan paradigma asesmen yang digunakan di sekolah, baik secara internal maupun eksternal.

Asesmen dengan paradigma lama, cenderung diarahkan untuk memberi “label” kepada peserta didik setinggi mungkin. Kecenderungan ini berimplikasi kepada kurangnya semua pihak terkait untuk mengindahkan makna asesmen. Penyelenggaraan asesmen, baik prestasi belajar siswa maupun kinerja sekolah seringkali lebih menekankan pada hasil asesmen eksternal (*at-large testing program*). Dampaknya, amanat agar hasil asesmen juga dipakai untuk perbaikan proses pembelajaran, yang tersurat dengan frase memantau proses, kemajuan, dan perbaikan hasil belajar peserta didik secara berkesinambungan [UU No. 20/2003, Pasal 58 ayat (1)], kurang mendapat perhatian yang memadai.

Asesmen dengan paradigma baru bertujuan agar asesmen lebih memberi makna, khususnya kebermaknaan yang terkait dengan perbaikan pembelajaran, pencapaian kompetensi peserta didik secara utuh, dan mampu menggambarkan kinerja sekolah secara lengkap. Penyelenggaraan asesmen ke depan, mestinya ditekankan pada penyeimbangan antara asesmen internal dan asesmen eksternal. Dampaknya, kualitas asesmen internal yang mengoptimalkan sumber daya sekolah dapat memanifes dalam kinerja sekolah ketika mengikuti asesmen eksternal.

Selama ini, asesmen internal maupun eksternal, keduanya cenderung lebih banyak menekankan pada pengukuran ranah kognitif peserta didik, padahal secara tegas sasaran pembelajaran mengamanatkan perlunya pengembangan tiga ranah hasil belajar, yaitu kognitif, afektif, dan psikomotorik. Sudah saatnya dipikirkan, pola pelaporan hasil asesmen yang menjelaskan semua ranah tersebut. Cara yang mungkin dipilih antara lain dengan mengurangi pemakaian berlebihan terhadap angka atau nilai kuantitatif dan mulai dikenalkannya pemakaian profil belajar siswa (Kumaidi, 2004).

Pemakaian profil hasil belajar untuk setiap siswa atau setiap kelas dapat dipakai untuk mengetahui keunggulan atau kelemahan masing-masing pembelajarannya, apalagi kalau dikaitkan dengan personil guru yang mengajar di kelas tersebut. Dengan mengetahui keunggulan dan kelemahan setiap kelas atau siswa, langkah-langkah pengembangan atau antisipasi dan intervensi pembelajaran akan lebih mudah dilaksanakan.

Salah satu masalah yang dijumpai di sekolah selama ini adalah asesmen yang diberikan kepada siswa lebih banyak mengungkap tingkat kemampuan siswa didasarkan kepada jumlah jawaban benar dari butir soal yang ada dalam suatu ujian (tes) tanpa mengungkapkan aspek-aspek yang teruji dalam tes tersebut. Padahal tanpa merinci kompetensi apa yang telah dikuasai oleh siswa pada setiap aspek yang diujikan, maka asesmen yang dilakukan hasilnya hanyalah sekedar berisi sederetan angka atau nilai yang kurang memberikan makna terhadap hasil pembelajaran yang dilakukan. Sebaliknya, dengan memerinci pencapaian tingkat kompetensi siswa dalam setiap aspek yang menjadi sasaran asesmen, hasil asesmen yang diperoleh akan mampu menggambarkan profil belajar siswa pada setiap aspek atau kompetensi dasar. Dengan demikian, keunggulan dan kelemahan penguasaan materi ajar oleh siswa untuk setiap aspek dapat diketahui dan dapat digunakan untuk perbaikan pembelajaran.

Di samping itu, model pelaporan hasil tes yang sekarang ini banyak digunakan nampaknya masih memiliki beberapa kelemahan. Kelemahan ini dapat dijumpai, misalnya dalam pelaporan hasil tes lebih cenderung hanya menggunakan label angka berupa nilai kuantitatif, padahal pemberian nilai dalam bentuk angka itu informasinya sangat terbatas. Oleh karena itu, perlu kiranya dikembangkan model asesmen yang dapat dipakai untuk mendeskripsikan tingkat kemampuan siswa dalam bentuk pemakaian profil dengan rincian pada level pokok bahasan atau kompetensi dasar. Model asesmen ini nantinya diharapkan dapat mengatasi kelemahan-kelemahan

asesmen yang digunakan selama ini, sebagaimana yang telah diuraikan sebelumnya.

Penelitian yang dilakukan ini bertujuan untuk mengembangkan model analisis kompetensi siswa yang hasilnya dapat dipakai untuk melakukan identifikasi level/tingkat kompetensi dan menyusun profil tingkat pencapaian kompetensi siswa, khususnya di Sekolah Dasar. Dengan penerapan model asesmen yang dikembangkan ini, diharapkan para guru tidak lagi hanya memberi skor atau nilai kuantitatif kepada siswa, tetapi pencapaian kompetensi siswa bisa dideskripsikan dan bermakna untuk mengetahui kelebihan dan kekurangannya.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan model penelitian dan pengembangan (*Reserach and Develompment*). Prosedur pengembangan model dalam penelitian ini mengacu pada prosedur penelitian dan pengembangan yang dikemukakan oleh Brog dan Gall (1989) dan Plomp (1997), namun tahapannya disesuaikan dengan tujuan dan kepentingan penelitian ini. Prosedur penelitian pengembangan yang dilakukan meliputi 5 (lima) tahap, yaitu: (1) analisis kebutuhan dan pengumpulan informasi awal; (2) perencanaan, (3) penyusunan model, (4) tes/uji coba, evaluasi, revisi, dan (5) implementasi.

Sampel uji coba instrumen sebanyak 180 orang siswa yang terdiri dari 60 orang siswa kelas III, 60 orang siswa kelas IV, dan 60 orang siswa kelas V. Sampel uji coba produk (uji coba terbatas) sebanyak 722 orang siswa dengan rincian sebanyak 238 siswa kelas III, 239 siswa kelas IV, dan 245 siswa kelas V. Jumlah sekolah yang dijadikan sampel uji coba terbatas sebanyak 6 SD. Pengumpulan data dilakukan dengan menggunakan teknik dokumentasi, wawancara, format validasi model, format telaah (kartu telaah soal), dan tes.

Untuk mengetahui kualitas instrumen tes yang dikembangkan dilakukan analisis baik secara kualitatif (*rational djugment*) dari segi aspek isi (materi), konstruksi, dan bahasa, maupun secara kuantitatif melalui proses uji coba (uji empiris). Data hasil uji coba instrumen tes dianalisis dengan menggunakan program MicroCat ITEMAN. Data hasil uji coba produk dianalisis dengan menggunakan program BIGSTEPS Versi 2.30. Selanjutnya, data lain yang diperoleh melalui observasi, wawancara, dan dokumentasi dianalisis dalam format deskriptif kualitatif dan kuantitatif, baik dalam bentuk narasi, tabel-tabel distribusi skor, grafik, diagram, persentase, dan rata-rata. Untuk keperluan tersebut digunakan statistik deskriptif.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil Pengembangan

Produk hasil pengembangan dalam penelitian ini terdiri dari: (1) manual prosedur dan langkah-langkah penyusunan tes, identifikasi level kemampuan dan (2) format pelaporan hasil tes.

a. Manual prosedur dan langkah-langkah penyusunan tes, identifikasi level kemampuan

Prosedur dan langkah-langkah penyusunan tes dikemas dalam satu paket, yang disertai dengan contoh penggunaannya. Paket manual prosedur dan langkah-langkah penyusunan tes ini sebelum digunakan, terlebih dahulu divalidasi oleh pakar (ahli pengukuran). Setelah manual prosedur dan langkah-langkah penyusunan tes dinyatakan valid digunakan, selanjutnya dilatihkan kepada sekelompok guru yang telah ditunjuk. Guru yang dipilih terdiri dari guru mata pelajaran dan guru kelas yang berjumlah 12 orang dengan kualifikasi pendidikan S1 dan Diploma dan mempunyai pengalaman mengajar sekurang-kurangnya lima tahun. Kelompok guru yang dibentuk sekaligus sebagai penulis naskah soal dan penelaah, dengan komposisi sebanyak 9 orang guru sebagai penulis naskah soal dan 3 orang guru sebagai penelaah. Kelompok guru yang dibentuk sekaligus mewakili guru kelas III, guru kelas IV dan guru kelas V.

Hasil dari kegiatan pelatihan yang diikuti 12 orang guru tersebut, sebanyak 12 orang guru yang dilatih menyatakan sangat puas dan sangat menyukai cara atau prosedur dan langkah-langkah penyusunan tes yang dilatihkan. Mereka menyatakan bahwa kegiatan penyusunan tes

seperti ini belum pernah dilakukan ketika akan menyusun tes. Mereka hanya terbiasa langsung mengambil buku paket atau buku yang berisi soal-soal apabila akan memberikan ujian atau tes kepada murid-muridnya. Bahkan ditemukan bahwa ada di antara guru-guru yang di wawancarai menyatakan bahwa mereka mengajar tanpa menggunakan kurikulum (silabus). Mereka hanya langsung menggunakan buku paket atau buku-buku yang beredar dipasaran. Selanjutnya, masing-masing kelompok guru sesuai dengan kelas yang diwakilinya ditugaskan menyusun tes matematika untuk semester I. Hasil dari kegiatan ini adalah diperolehnya draf awal tiga perangkat tes, yaitu (1) Tes Matematika Kelas III, (2) Tes Matematika Kelas IV, dan (3) Tes Matematika Kelas V.

Identifikasi level kemampuan memuat tentang prosedur dan langkah-langkah identifikasi level kemampuan siswa. Kemampuan siswa dikelompokkan ke dalam 4 level, yaitu: level I, level II, level III, dan level IV.

b. Format pelaporan hasil tes

Format pelaporan hasil tes terdiri dari 3 (tiga) komponen, yaitu: (1) format pelaporan hasil tes secara klasikal, (2) format pelaporan kepada orang tua, dan (3) format profil kemampuan individu siswa.

Model pelaporan hasil tes ini sebelum menjadi master untuk diuji cobakan dan diimplementasikan terlebih dahulu divalidasi oleh guru ahli, kepala sekolah, dan praktisi pendidikan (pakar). Hasil penilaian oleh guru ahli, kepala sekolah, dan pakar terhadap model pelaporan hasil tes, menunjukkan bahwa model pelaporan hasil tes yang dikembangkan dapat atau layak untuk digunakan.

Dekskripsi Data Hasil Uji Coba Terbatas

Model pelaporan hasil tes terdiri dari 3 (tiga) bagian, yaitu: (1) format pelaporan hasil tes secara klasikal, (2) format laporan kepada orang tua/wali, dan (3) format profil kemampuan individu siswa. Dalam implementasinya, disamping guru/sekolah, siswa dan orang tua/wali juga memperoleh informasi dari hasil tes. Kemampuan atau posisi siswa dalam suatu tes dapat diketahui, demikian pula kekuatan dan kelemahannya.

Pelaksanaan uji coba terbatas melibatkan sebanyak 722 siswa, dengan perincian 238 siswa kelas III, 239 siswa kelas IV, dan 245 siswa kelas V. Rangkuman hasil tes untuk masing-masing kelas dan posisi level/tingkat kemampuan siswa dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1.

Jumlah dan Persentase Siswa Menurut Kelas dan Level Kemampuan

| Kelas | Level I | | Level II | | Level III | | Level IV | |
|-----------|---------|-------|----------|-------|-----------|-------|----------|-------|
| | Jum | % | Jum | % | Jum | % | Jum | % |
| Kelas III | 5 | 2,10 | 29 | 12,18 | 133 | 55,88 | 71 | 29,83 |
| Kelas IV | 76 | 31,88 | 112 | 46,86 | 38 | 15,90 | 13 | 5,44 |
| Kelas V | 50 | 20,41 | 143 | 58,37 | 15 | 6,12 | 37 | 15,01 |
| Jumlah | 131 | | 284 | | 186 | | 121 | |
| % | 18,14 | | 39,34 | | 25,76 | | 16,76 | |

Berdasarkan tabel di atas, terlihat bahwa sebahagian besar siswa kelas III mempunyai tingkat kemampuan berada pada level III yaitu sebanyak 55,88%, hanya 2,10% siswa mempunyai kemampuan pada level I. Siswa kelas V mempunyai tingkat kemampuan sebahagian besar berada pada level I dan level II. Siswa kelas IV mempunyai penyebaran kemampuan yang lebih merata dari jenjang kelas lainnya, yaitu sebanyak 46,86% siswa mempunyai kemampuan pada level II dan sebanyak 31,88% siswa mempunyai kemampuan pada level II, hanya 5,44% siswa mempunyai kemampuan pada level I. Secara keseluruhan, kecenderungan tingkat kemampuan siswa berada pada level II dan III (65,09%). Dengan demikian, sebahagian besar siswa pada uji coba produk mempunyai kemampuan pada level II dan level III.

Kekuatan dan kelemahan siswa dapat diketahui setelah dilakukan identifikasi level kemampuan. Hasil dari kegiatan ini dapat diketahui pada materi/aspek/kompetensi dasar mana siswa berhasil atau gagal dalam tes itu. Identifikasi kekuatan dan kelemahan siswa dilakukan dengan cara mencatat semua butir-butir yang berhasil dijawab dengan benar dan pada butir-butir mana dia gagal memberikan jawaban benar. Butir-butir yang berhasil dijawab benar menunjukkan siswa kuat pada aspek tersebut, sebaliknya butir-butir yang dijawab salah menunjukkan bahwa siswa lemah pada aspek tersebut. Hasil tes siswa disamping dilaporkan kepada sekolah, juga dilaporkan kepada orang tua/wali. Hal ini berguna agar orang tua/wali dapat mengetahui hasil perkembangan belajar anaknya di sekolah.

Kegiatan terakhir dari pengisian format pelaporan hasil tes adalah penyajian profil kemampuan individu siswa. Profil kemampuan siswa disusun berdasarkan pada aspek-aspek kemampuan yang diujikan yang berhasil dijawab benar oleh siswa. Dengan demikian profil siswa mencerminkan tingkat kemampuan siswa dalam suatu mata pelajaran. Profil tingkat kemampuan siswa dapat ditampilkan secara grafik/diagram. Model grafik/diagram dapat dilihat pada lampiran produk hasil penelitian ini.

Berdasarkan hasil penelitian yang telah diuraikan di atas, dikemukakan kajian yang menyangkut hasil pengembangan model yang meliputi tahap pengembangan model, dan tahap penerapan model. Tahap pengembangan model meliputi tahap validasi model oleh guru ahli, kepala sekolah, dan pakar (ahli). Hasil penilaian model oleh para penilai tersebut menunjukkan bahwa model sudah baik dan layak digunakan setelah dilakukan sejumlah perbaikan/revisi. Validasi yang dilakukan menyangkut komponen/perangkat model yang terdiri dari instrumen tes, manual prosedur dan langkah-langkah penyusunan tes, identifikasi level kemampuan, dan format pelaporan hasil tes.

Tahap penerapan model, dalam hal ini uji coba terbatas diperoleh hasil yang menggambarkan profil tingkat kemampuan/kompetensi siswa. Kemampuan siswa ini dikelompokkan ke dalam 4 (empat) level, yaitu level I, level II, level III, dan level IV. Hasil penerapan model diperoleh hasil sebahagian besar siswa pada uji coba terbatas mempunyai kemampuan pada level II dan level III, yakni sebanyak 65,09%. Hal ini memberi indikasi bahwa perbaikan pembelajaran harus dilakukan oleh guru untuk meningkatkan kemampuan siswa memahami materi pelajaran. Perbaikan yang dimaksud antara lain meliputi teknik atau metode mengajar, strategi pembelajaran, penilaian atau evaluasi, dan remidi atau umpan balik, baik pada saat proses pembelajaran sedang berlangsung maupun pada akhir pembelajaran.

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis data yang dilakukan dari penelitian pengembangan ini, diperoleh simpulan sebagai berikut:

- (a) Produk hasil pengembangan yang terdiri dari: (1) manual prosedur dan langkah-langkah penyusunan tes, identifikasi level kemampuan, dan (2) pelaporan hasil tes, dilakukan melalui kegiatan pelatihan yang melibatkan kelompok guru SD, dan kelompok penilai/validator yang terdiri dari guru mata pelajaran dan guru kelas, guru ahli, kepala sekolah, pakar (ahli) dalam mata pelajaran matematika, dan ahli dalam pengukuran dan penilaian pendidikan.
- (b) Identifikasi level kemampuan siswa berdasarkan hasil uji coba terbatas yang dilakukan pada 722 orang siswa menunjukkan sebanyak 131 siswa (18,14%) mempunyai kemampuan pada level I, 284 siswa (39,34%) mempunyai kemampuan pada level II, 186 siswa (25,76%) mempunyai kemampuan pada level III, dan 121 siswa (16,76%) mempunyai kemampuan pada level IV.

Saran

Sebagai implikasi dari kesimpulan hasil penelitian di atas, dikemukakan beberapa saran untuk pemanfaatan, dan pengembangan produk lebih lanjut, sebagai berikut:

- (a) Hasil produk berupa manual prosedur dan langkah-langkah penyusunan tes serta identifikasi level kemampuan diharapkan digunakan oleh guru di sekolah dalam rangka penyusunan tes hasil belajar. Hal ini mengingat masih terdapat sejumlah guru yang tidak melakukan perencanaan tes yang baik ketika akan menyusun tes.
- (b) Model format pelaporan hasil tes diharapkan dapat digunakan agar pelaporan hasil tes yang dilakukan tidak hanya berisi skor atau nilai akhir, tetapi aspek-aspek kemampuan yang diteskan dapat diungkap dan pelaporan hasil tes juga disampaikan kepada orang tua/wali.
- (c) Mengingat produk berupa identifikasi level kemampuan siswa komputasinya masih bersifat manual, ke depan diharapkan ada penelitian lebih lanjut yang dapat menghasilkan *software* (program komputer) agar lebih mudah untuk digunakan.

DAFTAR PUSTAKA

Borg, W.R. & Gall, M.D. (1989). *Educational research: An introduction*. New York: Longman.

Ebel, R.L., & Frisbie, D.A.(1986). *Essentials of educational measurement*. New Jersey: Prentice Hall, Inc.

Kumaidi. (2004). Sistem asesmen untuk menunjang kualitas pembelajaran. *Jurnal Pembelajaran*, 27, 93-106.

Plomp, T. (1997). *Development research on/in educational development*. Netherlandas: Twente University.

**MENGEMBANGKAN KECAKAPAN MATEMATIS
MAHASISWA CALON GURU MATEMATIKA
MELALUI STRATEGI PERKULIAHAN KOLABORATIF BERBASIS MASALAH**

Djamilah Bondan Widjajanti

Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta

Abstrak

Minimal ada 5 kecakapan matematis (*mathematical proficiency*) yang perlu dipunyai seorang siswa agar sukses belajar matematika. Kelima kecakapan tersebut adalah: (1) pemahaman konseptual (*conceptual understanding*); (2) kelancaran prosedural (*procedural fluency*); (3) kompetensi strategis (*strategic competence*); (4) penalaran adaptif (*adaptive reasoning*); dan (5) disposisi produktif (*productive disposition*). Guru matematika berkewajiban memfasilitasi berkembangnya lima kecakapan matematis tersebut pada diri setiap siswa yang diajarnya. Untuk dapat menjadi seorang guru matematika yang mampu mengembangkan kecakapan matematis pada diri siswa maka setiap mahasiswa calon guru matematika terlebih dahulu harus menguasai lima kecakapan matematis tersebut. Strategi perkuliahan Kolaboratif Berbasis Masalah bagi mahasiswa calon guru matematika dapat menjadi pilihan untuk mengembangkan kecakapan matematis mahasiswa. Pada makalah ini akan dibahas apa yang dimaksud dengan pemahaman konseptual, kelancaran prosedural, kompetensi strategis, penalaran adaptif dan disposisi produktif, serta bagaimana cara mengembangkannya pada diri mahasiswa calon guru matematika melalui strategi perkuliahan kolaboratif berbasis masalah.

Kata kunci: kecakapan matematis (*mathematical proficiency*), mahasiswa, kolaboratif berbasis masalah

PENDAHULUAN

Siswa memerlukan banyak hal untuk dapat sukses belajar matematika. Guru matematika yang kompeten, kurikulum matematika yang menjanjikan kesempatan kepada siswa untuk mempelajari konsep-konsep dan prosedur-prosedur matematis yang penting dan bermakna, kelas matematika yang “berfikir”, dan yang memungkinkan setiap siswa untuk mendapatkan akses untuk mengikuti pembelajaran matematika yang menarik dan menantang, dan sejumlah kecakapan matematis yang mesti dikuasai, adalah beberapa dari banyak hal penting yang diperlukan siswa agar sukses belajar matematika.

Guru matematika yang kompeten diperlukan oleh siswa sebagai fasilitator dalam mencapai prestasi yang optimal. Kompetensi guru yang dimaksud meliputi baik kompetensi pedagogik, kompetensi professional, kompetensi kepribadian, maupun kompetensi sosial. Dengan memiliki keempat kompetensi ini seorang guru akan mampu menjamin hak setiap siswa untuk dapat belajar dan saling belajar dalam rangka mencapai prestasi optimal mereka.

Kurikulum merupakan unsur yang sangat penting dalam kegiatan belajar mengajar, namun suatu kurikulum haruslah lebih daripada hanya sekumpulan kegiatan. Kurikulum matematika mestilah koheren, berfokus pada matematika yang penting, serta diartikulasikan secara baik dari suatu tingkat kelas ke tingkat kelas berikutnya (NCTM, 2000). Ini berarti bahwa pemilihan materi, urutan dan pendekatan penyajian, serta instrumen untuk mengukur hasil belajar siswa haruslah sangat memperhatikan karakteristik, kebutuhan, dan tingkat perkembangan berfikir siswa.

Kelas matematika yang “berfikir” dan yang memungkinkan setiap siswa untuk mendapatkan akses untuk mengikuti pembelajaran matematika yang menarik dan menantang

pastilah kelas yang didambakan setiap siswa. Pada kelas yang demikian, setiap siswa akan terlibat pada seluruh proses belajar mengajar yang dirancang guru dengan semangat/antusiasme yang tinggi, dari menit pertama hingga menit terakhir. Tidak ada kebosanan, rasa malas, kurang percaya diri, atau menyerah sebelum berhasil.

Selain faktor-faktor dari luar diri siswa, seperti guru, kurikulum, dan lingkungan/kelas, terdapat juga faktor penting dari diri siswa sendiri yang sangat berperan dalam menunjang kesuksesannya belajar matematika. Faktor tersebut adalah kecakapan matematis (*mathematical proficiency*). Kecakapan matematis ini, menurut Kilpatrick (2001) terdiri dari (1) pemahaman konseptual (*conceptual understanding*); (2) kelancaran prosedural (*procedural fluency*); (3) kompetensi strategis (*strategic competence*); (4) penalaran adaptif (*adaptive reasoning*); dan (5) disposisi produktif (*productive disposition*). Kelima untaian (*strands*) kecakapan matematis ini bukan sesuatu yang terpisah-pisah, melainkan saling jalin-menjalin menjadi satu kecakapan yang mewakili aspek-aspek yang berbeda dalam sesuatu yang kompleks. Kecakapan matematis ini bukanlah sesuatu kecakapan “bawaan” dari siswa semata, tetapi merupakan suatu gabungan pengetahuan, keterampilan, kemampuan, dan keyakinan yang diperoleh siswa dengan bantuan/dukungan guru, kurikulum, dan lingkungan belajar (kelas) yang dapat diandalkan.

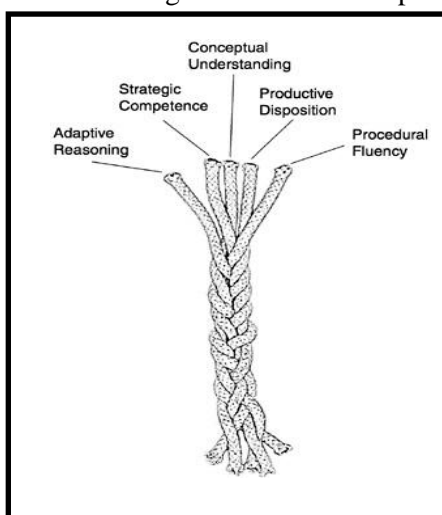
Oleh karena kecakapan matematis siswa berkembang antara lain melalui bantuan/dukungan guru matematika mereka, maka mahasiswa calon guru matematika juga harus mempunyai kecakapan matematis yang memadai agar kelak mampu membantu siswa mengembangkan kecakapan matematisnya. Strategi perkuliahan Kolaboratif Berbasis Masalah bagi mahasiswa calon guru matematika dapat menjadi pilihan untuk mengembangkan kecakapan matematis mahasiswa.

Makalah ini akan memfokuskan bahasan pada apa yang dimaksud dengan pemahaman konseptual, kelancaran prosedural, kompetensi strategis, penalaran adaptif dan disposisi produktif, serta bagaimana cara mengembangkannya pada diri mahasiswa calon guru matematika melalui strategi perkuliahan kolaboratif berbasis masalah.

PEMBAHASAN

Kecakapan Matematis

Kecakapan matematis (*mathematical proficiency*) yang mencakup lima komponen yaitu (1) pemahaman konseptual (*conceptual understanding*); (2) kelancaran prosedural (*procedural fluency*); (3) kompetensi strategis (*strategic competence*); (4) penalaran adaptif (*adaptive reasoning*); dan (5) disposisi produktif (*productive disposition*), seharusnya dikembangkan secara terpadu dan seimbang pada diri siswa yang belajar matematika (Kilpatrick, 2001). Kelima komponen kecakapan matematis tersebut tidak saling bebas dan terjalin menjadi satu. Pengembangan kelima pada diri siswa juga tidak dapat dilakukan secara terpisah-pisah. Gambaran jalinan kelima komponen tersebut digambarkan oleh Kilpatrick (2001) sebagai berikut.



Penjelasan untuk masing-masing komponen kecakapan matematis tersebut adalah sebagai berikut:

Pemahaman Konseptual (*conceptual understanding*) adalah pemahaman atau penguasaan siswa/mahasiswa terhadap konsep-konsep, operasi, dan relasi matematis. Indikator yang dapat digunakan untuk mengetahui apakah seorang siswa/mahasiswa telah mempunyai pemahaman konseptual antara lain adalah mampu: (1) menyatakan ulang konsep yang telah dipelajari; (2) mengklasifikasikan objek-objek berdasarkan dipenuhi tidaknya persyaratan membentuk konsep tersebut; (3) memberikan contoh atau non-contoh dari konsep yang dipelajari; (4) menyajikan konsep dalam berbagai macam bentuk representasi matematis; (5) mengaitkan berbagai konsep; dan (6) mengembangkan syarat perlu dan atau syarat cukup suatu konsep. Menurut Kilpatrick (2001) indikator signifikan dari pemahaman konseptual adalah kemampuan untuk menyajikan situasi matematika dengan cara yang berbeda dan mengetahui bagaimana representasi yang berbeda dapat bermanfaat untuk berbagai tujuan. Seseorang, untuk menemukan jalan di sekitar masalah matematika, penting untuk melihat bagaimana berbagai representasi terhubung satu sama lain, bagaimana mereka serupa, dan bagaimana mereka berbeda. Tingkat pemahaman konseptual siswa/mahasiswa berkaitan dengan kekayaan dan luasnya koneksi yang dapat mereka buat.

Kelancaran prosedural (*procedural fluency*) mengacu pada pengetahuan tentang prosedur, pengetahuan tentang kapan dan bagaimana menggunakannya secara tepat, dan ketrampilan melakukan prosedur secara fleksibel, akurat, dan efisien. Dengan demikian, indikator untuk kelancaran prosedur ini antara lain adalah siswa/mahasiswa mampu: (1) menggunakan prosedur; (2) memanfaatkan prosedur; (3) memilih prosedur; (4) memperkirakan hasil suatu prosedur; (5) memodifikasi atau memperhalus prosedur; dan (6) mengembangkan prosedur. Dengan mempelajari algoritma sebagai suatu "prosedur umum", siswa/mahasiswa dapat memperoleh informasi tentang fakta bahwa matematika itu terstruktur (sangat terorganisir, penuh dengan pola, dapat diprediksi) dan bahwa sebuah prosedur yang dikembangkan dengan hati-hati bisa menjadi alat yang ampuh untuk menyelesaikan tugas-tugas rutin.

Kompetensi strategis (*strategic competence*) mengacu pada kemampuan untuk merumuskan, menyajikan, dan menyelesaikan masalah matematika. Oleh karena itu, indikator untuk mengetahui apakah seorang siswa/mahasiswa mempunyai kompetensi strategis antara lain adalah jika ia mampu: (1) memahami masalah; (2) menyajikan suatu masalah secara matematik dalam berbagai bentuk (numerik, simbolis, verbal, atau grafis); (3) memilih rumus, pendekatan atau metode yang tepat untuk memecahkan masalah; dan (5) memeriksa kebenaran penyelesaian masalah yang telah diperoleh. Karakteristik mendasar yang diperlukan selama proses pemecahan masalah adalah fleksibilitas. Fleksibilitas seseorang dapat berkembang melalui perluasan pengetahuan yang diperlukan untuk memecahkan masalah-masalah yang tidak rutin.

Penalaran adaptif (*adaptive reasoning*) merujuk pada kapasitas untuk berfikir secara logis tentang hubungan antar konsep dan situasi, kemampuan untuk berfikir reflektif, kemampuan untuk menjelaskan, dan kemampuan untuk memberikan pembenaran. Indikator untuk kecakapan ini antara lain adalah jika siswa/mahasiswa mampu: (1) menyusun dugaan (*conjecture*); (2) memberikan alasan atau bukti terhadap kebenaran suatu pernyataan; (3) menarik kesimpulan dari suatu pernyataan; (4) memeriksa kesahihan suatu argumen; dan (5) menemukan pola pada suatu gejala matematis.

Disposisi produktif (*productive disposition*) berkaitan dengan kecenderungan untuk mempunyai kebiasaan yang produktif, untuk melihat matematika sebagai hal yang masuk akal, berguna, bermakna, dan berharga, dan memiliki kepercayaan diri dan ketekunan dalam belajar/bekerja dengan matematika. Oleh karena itu, indikator untuk disposisi produktif ini antara lain adalah siswa/mahasiswa dalam belajar matematika: (1) bersemangat; (2) tidak mudah menyerah; (3) percaya diri; (4) memiliki rasa ingin tahu yang tinggi; dan (5) mau berbagi. Seorang siswa/mahasiswa yang mempunyai disposisi produktif yang tinggi cenderung akan mampu mengembangkan kecakapan matematis mereka dalam hal pemahaman konseptual, kelancaran

prosedural, kompetensi strategis, dan penalaran adaptif. Sebaliknya, mereka yang mempunyai kecakapan dalam pemahaman konseptual, kelancaran prosedural, kompetensi strategis, dan penalaran adaptif cenderung akan berkembang disposisi produktifnya. Oleh karena itu, pengembangan kelima komponen kecakapan matematis ini sudah seharusnya dilakukan secara terpadu.

Strategi Perkuliahan Kolaboratif Berbasis Masalah

Untuk pengembangan kecakapan matematis mahasiswa calon guru matematika, pemilihan pendekatan dan model perkuliahan yang tepat menjadi hal yang perlu diperhatikan para dosen. Gabungan pendekatan perkuliahan berbasis masalah (*Problem-Based Learning*, PBL) dan model kolaboratif ditawarkan sebagai alternatif untuk diimplementasikan pada perkuliahan bagi mahasiswa calon guru matematika karena memiliki beberapa keunggulan. Berikut ini penjelasan untuk pengertian dan keunggulan PBL dan model kolaboratif, yang penggabungan keduanya selanjutnya disebut sebagai strategi perkuliahan kolaboratif berbasis masalah.

Perkuliahan Berbasis Masalah

Pendekatan perkuliahan/pembelajaran berbasis masalah, adalah pendekatan perkuliahan yang menjadikan masalah sebagai dasar atau basis bagi mahasiswa untuk belajar. Duch, *et.al.* (2000) menyatakan bahwa prinsip dasar yang mendukung konsep dari PBL sudah ada lebih dulu dari pendidikan formal itu sendiri, yaitu bahwa pembelajaran dimulai (diprakarsai) dengan mengajukan masalah, pertanyaan, atau teka-teki, yang menjadikan siswa/mahasiswa yang belajar ingin menyelesaikannya.

Dalam pendekatan berbasis masalah, masalah yang nyata dan kompleks memotivasi siswa/mahasiswa untuk mengidentifikasi dan meneliti konsep dan prinsip yang mereka perlu ketahui untuk berkembang melalui masalah tersebut. Siswa/mahasiswa bekerja dalam tim kecil, dan memperoleh, mengomunikasikan, serta memadukan informasi dalam proses yang menyerupai atau mirip dengan menemukan (*inquiry*).

Tan (2004) juga menyebutkan bahwa PBL telah diakui sebagai suatu pengembangan dari pembelajaran aktif dan pendekatan pembelajaran yang berpusat pada siswa, yang menggunakan masalah-masalah yang tidak terstruktur (masalah-masalah dunia nyata atau masalah-masalah simulasi yang kompleks) sebagai titik awal dan jangkar atau sauh untuk proses pembelajaran. Sedangkan Roh (2003) mengatakan bahwa pembelajaran berbasis masalah adalah strategi pembelajaran di kelas yang mengatur atau mengelola pembelajaran matematika di sekitar kegiatan pemecahan masalah dan memberikan kepada para siswa kesempatan untuk berfikir secara kritis, mengajukan ide kreatif mereka sendiri, dan mengomunikasikan dengan temannya secara matematis.

PBL menggambarkan suatu suasana pembelajaran yang menggunakan masalah untuk memandu, mengemudikan, menggerakkan, atau mengarahkan pembelajaran. Pembelajaran dalam PBL dimulai dengan suatu masalah yang harus diselesaikan, dan masalah tersebut diajukan dengan cara sedemikian hingga para siswa/mahasiswa memerlukan tambahan pengetahuan baru sebelum mereka dapat menyelesaikan masalah tersebut. Tidak sekedar mencoba atau mencari jawab tunggal yang benar, para siswa/mahasiswa akan menafsirkan masalah tersebut, mengumpulkan informasi yang diperlukan, mengenali penyelesaian yang mungkin, menilai beberapa pilihan, dan menampilkan kesimpulan (Roh, 2003).

Dari beberapa pengertian PBL seperti tersebut di atas dapatlah disimpulkan bahwa PBL adalah suatu pendekatan pembelajaran yang menggunakan masalah nyata atau masalah simulasi yang kompleks sebagai titik awal pembelajaran, dengan karakteristik: (1) Pembelajaran dipandu oleh masalah yang menantang; (2) Para siswa/mahasiswa bekerja dalam kelompok kecil; (3) Guru/dosen mengambil peran sebagai fasilitator dalam pembelajaran.

Model Kolaboratif

Pada dasarnya pembelajaran/perkuliah kolaboratif merujuk pada suatu metoda pembelajaran dengan siswa/mahasiswa dari tingkat performa yang berbeda belajar bersama dalam suatu kelompok kecil. Setiap siswa/mahasiswa bertanggung jawab terhadap pembelajaran siswa/mahasiswa yang lain, sehingga kesuksesan seorang siswa/mahasiswa dapat membantu siswa/mahasiswa lain untuk menjadi sukses.

Gokhale (1995) menyebutkan bahwa “*collaborative learning fosters development of critical thinking through discussion, clarification of ideas, and evaluation of other’s ideas*”. Wiersema (2000) menyatakan bahwa “*Collaborative Learning is philosophy: working together, building together, learning together, changing together, improving together*”. Sedangkan Lang & Evans (2006) menyatakan bahwa “*Collaborative learning is an approach to teaching and learning in which student interact to share ideas, explore a question, and complete a project*”.

Hampir sama dengan pengertian pembelajaran kolaboratif di atas, Sato (2007) menyebutkan pembelajaran kolaboratif adalah pembelajaran yang dilaksanakan dalam kelompok, namun tujuannya bukan untuk mencapai kesatuan yang didapat melalui kegiatan kelompok, namun, para siswa dalam kelompok didorong untuk menemukan beragam pendapat atau pemikiran yang dikeluarkan oleh tiap individu dalam kelompok. Pembelajaran tidak terjadi dalam kesatuan, namun pembelajaran merupakan hasil dari keragaman atau perbedaan. Pembelajaran haruslah “**melampaui batas dan melompat**” melalui kolaborasi.

Dari pengertian pembelajaran kolaboratif tersebut di atas dapatlah disimpulkan bahwa model pembelajaran kolaboratif adalah suatu model pembelajaran kelompok, dengan siswa/mahasiswa dalam kelompok didorong untuk saling berinteraksi dan belajar bersama untuk meningkatkan pemahaman masing-masing. Alat yang digunakan untuk mendorong adanya interaksi tersebut adalah materi atau masalah yang menantang. Bentuk interaksi yang dimaksud adalah diskusi, saling bertanya dan menyampaikan pendapat.

Jika dicermati pengertian pembelajaran kolaboratif sebagaimana tersebut di atas, maka ada kalimat kunci yang terkandung di dalamnya, yaitu pentingnya interaksi diantara para siswa/mahasiswa dalam kelompok untuk meningkatkan pemahaman masing-masing. Ini berarti bahwa pada prinsipnya pembelajaran kolaboratif didasarkan pada filsafat konstruktivisme, khususnya konstruktivisme sosial dari Vygotsky, yaitu bahwa interaksi sosial memainkan peranan penting dalam perkembangan kognitif anak. Interaksi sosial dengan orang yang ada di sekitar anak akan membangun ide baru dan mempercepat perkembangan intelektualnya. Dalam penelitiannya, Vygotsky lebih memfokuskan perhatian pada hubungan dialektika antara individu dan masyarakat, dimana interaksi sosial dapat mempengaruhi hasil belajar (Suparno, 1997). Secara umum, teori Vygotsky berfokus pada interaksi sosial atas tiga faktor, yakni budaya (*culture*), bahasa (*language*), dan *zone of proximal development (ZPD)* (Oakley, 2004). Teori tentang ZPD dari Vygotsky ini bermakna bahwa pembelajaran terjadi melalui interaksi sosial guru dan teman sejawat. Melalui tantangan dan bantuan dari guru atau dari teman yang lebih mampu, siswa bergerak ke dalam ZPD mereka dimana pembelajaran terjadi.

Pengembangan dari konsep ZPD Vygotsky ini adalah konsep *scaffolding* dari Bruner. Dengan teorinya tentang belajar penemuan, Bruner menekannya pentingnya membantu siswa memahami struktur dan ide kunci dari suatu disiplin ilmu, perlunya siswa aktif terlibat dalam proses pembelajaran, dan suatu keyakinan bahwa pembelajaran terjadi melalui penemuan pribadi. *Scaffolding* dapat diartikan sebagai suatu proses ketika seorang siswa dibantu menuntaskan masalah tertentu melampaui kapasitas perkembangannya melalui bantuan dari seorang guru, atau orang lain yang lebih mampu (Ibrahim dan Nur, 2000). Konsep tentang “melampaui kapasitas perkembangannya” ini mirip dengan konsep “melampaui batas dan melompat” dari Sato (2007).

Implementasi Strategi Perkuliahan Kolaboratif Berbasis Masalah

Memperhatikan pengertian pendekatan perkuliahan berbasis masalah dan model perkuliahan kolaboratif sebagaimana di atas, maka implementasi gabungan keduanya pada dasarnya dimulai dengan pemberian masalah kepada mahasiswa untuk diselesaikan. Masalah yang diberikan sudah dipilih sedemikian hingga akan dapat memunculkan kolaborasi dan “membimbing” mahasiswa untuk menemukan konsep, atau meningkatkan pemahaman, penalaran, koneksi, representasi, dan juga komunikasi.

Setelah setiap mahasiswa mendapatkan kesempatan beberapa saat untuk mengidentifikasi masalah dan merencanakan strategi penyelesaian secara individual, mahasiswa kemudian diminta untuk belajar dalam kelompok kecil (4 – 6 orang), hanya saja, ketika mahasiswa membuat kelompok dan belajar dalam kelompoknya, dosen tidak perlu terlalu mengatur atau terlalu ikut campur atas peran mereka dalam kelompok. Dosen hanya akan memfasilitasi jalannya diskusi kelompok dengan memberikan pertanyaan pancingan atau mendorong mahasiswa dalam kelompok untuk menyampaikan ide/gagasannya, saling bertanya, menjawab pertanyaan, dan beradu argumen.

Jika model kooperatif memberi penekanan pada siswa/mahasiswa untuk bekerja sama dalam kelompok dalam rangka menyelesaikan tugas kelompok, maka tidak demikian pada model kolaboratif. Pada model perkuliahan kolaboratif ketika mahasiswa diminta untuk mempresentasikan penyelesaian masalah yang didapatkannya, ia tidak dalam peran mewakili kelompok, tetapi menyampaikan hasil belajarnya sendiri, yang mungkin saja sebagian diantaranya ia dapatkan dari kelompoknya. Dengan model yang demikian, maka dapat diharapkan masing-masing mahasiswa akan berupaya lebih keras untuk belajar “sesuatu” dalam kelompoknya agar dapat menyelesaikan masalah yang diberikan.

Mengembangkan Kecakapan Matematis Mahasiswa Calon Guru Matematika melalui Strategi Perkuliahan Kolaboratif Berbasis Masalah

Hasil penelitian Juandi (2006) menyimpulkan bahwa “kualitas hasil belajar yang dicapai mahasiswa calon guru matematika yang belajar dengan pendekatan pembelajaran berbasis masalah di perguruan tinggi dengan peringkat baik maupun sedang, lebih baik daripada yang dicapai mahasiswa calon guru yang belajar dengan pendekatan pembelajaran konvensional”. Sedangkan hasil penelitian Dewanto (2007) dengan subyek mahasiswa matematika menyimpulkan bahwa “Pembelajaran dengan Belajar Berbasis-Masalah (BBM) meningkatkan kemampuan representasi multipel matematis mahasiswa lebih tinggi dibandingkan dengan mahasiswa yang diperlakukan dengan pembelajaran konvensional”. Dari dua hasil penelitian ini dapat disimpulkan bahwa PBL mempunyai keunggulan dibandingkan pendekatan pembelajaran yang konvensional, setidaknya dalam hal meningkatkan prestasi belajar dan kemampuan representasi multipel mahasiswa.

Berdasarkan hasil penelitian Juandi dan Dewanto tentang keunggulan PBL tersebut, dan didukung keunggulan model kolaboratif secara teoritis sebagaimana diuraikan di atas, Widjajanti melakukan penelitian untuk mengkaji keunggulan strategi perkuliahan kolaboratif berbasis masalah. Hasil penelitian Widjajanti (2010) menunjukkan bahwa strategi perkuliahan kolaboratif berbasis masalah lebih unggul dari strategi perkuliahan konvensional dalam hal mengembangkan kemampuan pemecahan masalah matematis, kemampuan komunikasi matematis, dan keyakinan mahasiswa calon guru matematika terhadap pembelajaran matematika.

Oleh karena keunggulan tersebut, maka strategi perkuliahan kolaboratif berbasis masalah direkomendasikan sebagai suatu alternatif strategi perkuliahan untuk mengembangkan kecakapan matematis mahasiswa calon guru matematika. Rekomendasi ini didasarkan pada fakta bahwa kemampuan pemecahan masalah, kemampuan komunikasi matematis, dan keyakinan terhadap pembelajaran matematika terkait erat dengan lima komponen kecakapan matematis yaitu pemahaman konseptual, kelancaran prosedural, kompetensi strategis, penalaran adaptif dan disposisi produktif.

Kemampuan pemecahan masalah terutama terkait dengan kecakapan dalam pemahaman konseptual, kelancaran prosedural, dan kompetensi strategis. Kemampuan komunikasi matematis terutama terkait erat dengan kecakapan penalaran adaptif, dan keyakinan terhadap pembelajaran

matematika terutama terkait erat dengan disposisi produktif. Dengan demikian, sangatlah beralasan direkomendasikannya strategi perkuliahan kolaboratif berbasis masalah untuk mengembangkan kecakapan matematis mahasiswa calon guru matematika.

KESIMPULAN

Strategi perkuliahan kolaboratif berbasis masalah direkomendasikan untuk diimplementasikan pada perkuliahan mahasiswa calon guru matematika karena secara teoritis, dan didukung penelitian yang relevan, diyakini akan dapat mengembangkan kecakapan matematis mahasiswa, baik pemahaman konseptual, kelancaran prosedural, kompetensi strategis, penalaran adaptif, maupun disposisi produktif. Pengembangan kelima komponen kecakapan matematis tersebut dapat dilakukan secara terpadu pada perkuliahan yang menggunakan strategi kolaboratif berbasis masalah, karena dalam setiap langkah pada strategi tersebut memberi peluang untuk berkembangnya kelima kecakapan matematis tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

- Dewanto, S. P. (2007). *Meningkatkan Kemampuan Representasi Multipel Matematis Mahasiswa melalui Belajar Berbasis-Masalah*. Disertasi doktor pada FPS UPI. Bandung: tidak diterbitkan.
- Duch, Barbara J., Allen, Deborah E., and White, Harold B. (2000). *Problem-Based Learning: Preparing Students to Succeed in the 21st Century*. [Online]. Tersedia <http://www.hku.hk/caut/homepage/tdg/5/TeachingMatter/Dec.98.pdf> [15 Januari 2008].
- Gokhale, A (1995). *Collaborative learning enhances critical thinking*. Journal of Technology Education, (7) 1. [Online]. Tersedia: <http://solar.lib.vt.edu/ejournals/JTE/jte-v7n1/gokhale,jt-v7n1.html> [6 Mei 2008].
- Ibrahim, M. & Nur, M. (2000). *Pengajaran Berdasarkan Masalah*. Surabaya: UNESA-University Press.
- Juandi, D. (2006). *Meningkatkan Daya Matematik Mahasiswa Calon Guru Matematika Melalui Pembelajaran Berbasis Masalah*. Disertasi doktor pada FPS UPI. Bandung: tidak diterbitkan.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Prinsiples and Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.
- Oakley, Lisa. 2004. *Cognitive Development*. London: Routledge-Taylor & Francis Group.
- Roh, Kyeong Ha. (2003). *Problem-Based Learning in Mathematics*. Dalam ERIC Digest. ERIC Identifier: EDO-SE-03-07. [Online]. Tersedia: <http://www.ericdigest.org/> [4 Desember 2007].
- Sato, Manabu. (2007). *Tantangan yang Harus Dihadapi Sekolah*, makalah dalam Bacaan Rujukan untuk Lesson Study – Berdasarkan Pengalaman Jepang dan IMSTEP. Jakarta: Sisttems.

- Suparno, Paul. (1996). *Filsafat Konstruktivisme dalam Pendidikan*. Yogyakarta: Penerbit Kanisius.
- Tan, Oon-Seng. (2004). Cognition, Metacognition, and Problem-Based Learning, in *Enhancing Thinking through Problem-based Learning Approaches*. Singapore: Thomson Learning.
- Widjajanti, D.B. (2010). *Analisis Implementasi Strategi Perkuliahan Kolaboratif Berbasis Masalah dalam Mengembangkan Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis, Kemampuan Komunikasi Matematis, dan Keyakinan terhadap Pembelajaran Matematika*. Disertasi doktor pada FPS UPI. Bandung: tidak diterbitkan.
- Wiersema, N. (2000). *How Does Collaborative Learning Actually Work in A Classroom and How Do Students React to It?*. [Online]. Tersedia:
<http://www.city.londonmet.ac.uk/deliberations/collab.learning/wiersema.html/> [1 September 2007].

PEMBELAJARAN MATEMATIKA DENGAN MEDIA BERBASIS KOMPUTER DITINJAU DARI AKTIVITAS BELAJAR SISWA

Masduki, Arif Ganda Nugroho

*Prodi Pendidikan Matematika
FKIP Universitas Muhammadiyah Surakarta*

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui: (1) Pengaruh penggunaan media pembelajaran berbasis komputer terhadap prestasi belajar siswa, (2) Pengaruh prestasi belajar ditinjau dari aktivitas siswa. Populasi dalam penelitian ini adalah siswa kelas VII SMP Muhammadiyah 4 Surakarta tahun ajaran 2008/2009. Sampel dalam penelitian ini sebanyak 75 siswa yang terbagi dalam dua kelas, yaitu 38 siswa kelas VII E sebagai kelas eksperimen dan 37 siswa kelas VII F sebagai kelas kontrol. Metode pengumpulan data yang digunakan adalah metode test, metode angket dan metode dokumentasi. Dari hasil penelitian diperoleh kesimpulan: (1) Terdapat pengaruh yang signifikan penggunaan media pembelajaran berbasis komputer terhadap prestasi belajar siswa. Siswa yang diberikan pembelajaran dengan media pembelajaran berbasis komputer mendapatkan prestasi belajar yang lebih baik dibandingkan dengan yang diberikan pembelajaran dengan metode konvensional, (2) Pada siswa yang mempunyai aktivitas belajar kategori tinggi mempunyai prestasi belajar yang lebih tinggi dibandingkan dengan siswa yang mempunyai aktivitas belajar sedang atau rendah.

Kata kunci: Pembelajaran Matematika, Media Berbasis Komputer, Aktivitas Belajar

PENDAHULUAN

Latar Belakang

Teknologi telah berkembang dengan sangat pesat dan merambah dalam semua aspek kehidupan manusia, tak terkecuali dalam bidang pendidikan. Pemanfaatan teknologi dalam pendidikan harus dipandang sebagai salah satu cara untuk mendorong peningkatan kualitas pendidikan. Begitu pula dalam pembelajaran matematika. Menurut Cheah (2008) pengintegrasian teknologi dalam pembelajaran matematika tidak boleh diabaikan oleh para pendidik. Dalam *Principles and Standards for School Mathematics*, NCTM (2000) menyatakan bahwa teknologi mempunyai peran yang sangat penting dalam pembelajaran matematika.

Sudah menjadi gejala umum bahwa mata pelajaran matematika kurang disukai oleh kebanyakan siswa. Matematika merupakan mata pelajaran yang sukar dipahami, sehingga kurang diminati oleh sebagian siswa. Ketidaksenangan terhadap matematika ini dapat berpengaruh terhadap aktifitas belajar siswa dalam proses belajar mengajar serta berpengaruh terhadap hasil belajar siswa. Pembelajaran yang terjadi selama ini mempunyai kecenderungan tidak sesuai dengan karakteristik anak. Pembelajaran hanya menekankan pada pencapaian efek instruksional. Sistem evaluasi berorientasi testing dengan menekankan reproduksi informasi dan kurang memperhatikan perkembangan anak. Menurut Wardhani (2004), sebagian besar guru di Indonesia masih menggunakan metode ceramah dalam pembelajaran di kelas. Mereka lebih fokus untuk menyelesaikan silabus daripada membantu siswa untuk memahami materi. Kondisi ini mengakibatkan siswa menjadi kehilangan motivasi belajar dan mudah melupakan materi yang diberikan.

Aktivitas belajar siswa merupakan salah satu faktor penting dalam kegiatan belajar mengajar. Hal ini mengingat bahwa :

1. Kegiatan belajar mengajar diadakan dalam rangka memberi pengalaman – pengalaman belajar kepada siswa. Jika siswa aktif dalam kegiatan tersebut kemungkinan besar mereka dapat mengambil manfaat pengalaman – pengalaman tersebut dan memilikinya.

2. Kegiatan belajar mengajar dipandang sebagai suatu kegiatan komunikasi antar pendidik (guru) dan anak didik (siswa). Kegiatan komunikasi ini tidak akan mencapai tujuan yang diharapkan bila siswanya sendiri tidak aktif.

Menurut Sudjana dan Rivai (2001), media pembelajaran dapat mempertinggi proses belajar siswa dalam pembelajaran yang pada gilirannya diharapkan dapat mempertinggi hasil belajar yang dicapainya. Ada beberapa alasan, mengapa media pembelajaran dapat mempertinggi proses belajar siswa. Alasan pertama berkenaan dengan manfaat media pembelajaran dalam proses belajar siswa antara lain : (a) Pembelajaran akan lebih menarik perhatian siswa sehingga dapat menumbuhkan motivasi belajar, (b) Bahan pembelajaran akan lebih jelas maknanya sehingga akan lebih dipahami oleh para siswa dan memungkinkan siswa menguasai tujuan pembelajaran lebih baik, (c) Metode mengajar akan lebih bervariasi, tidak semata-mata komunikasi verbal melalui penuturan kata-kata oleh guru, sehingga siswa tidak bosan dan guru tidak kehabisan tenaga, apalagi bila guru mengajar untuk setiap jam pelajaran, (d) Siswa lebih banyak melakukan kegiatan belajar sebab tidak hanya mendengarkan uraian guru, tetapi juga aktivitas lain seperti mengamati, melakukan, mendemonstrasikan dan lain-lain.

Studi Literatur

Istilah Teknologi Informasi dan Komunikasi (TIK) mengacu pada berbagai bentuk teknologi yang digunakan untuk mengirim, memproses, menyimpan, membuat, menampilkan, atau membagi informasi secara elektronik. Menurut UNESCO (2007), termasuk dalam kategori TIK antara lain radio, televisi, video, komputer, software serta layanan yang berkaitan dengan teknologi seperti videoconference, email dan blog. Sehan, Tiwari, dan Ocak dalam studinya terhadap penggunaan kalkulator grafis dan program grafis menemukan bahwa penggunaan media tersebut mampu meningkatkan kemampuan grafis siswa (Sehan, 2006; Tiwari, 2007; Ocak, 2008). Demikian juga, studi tentang penggunaan e-learning seperti website, e-exercise dan internet telah mampu meningkatkan kemampuan matematika siswa (Ruthven dkk, 2004; Cazes dkk, 2006; Hasibuan, 2008).

Metode Penelitian

Pada kelas eksperimen, pembelajaran diberikan dengan media berbasis komputer sedangkan pada kelas kontrol menggunakan metode konvensional. Penelitian dilakukan di SMP Muhammadiyah Surakarta Tahun 2008/2009 dengan mengambil populasi siswa kelas VII. Untuk mengetahui prestasi belajar siswa digunakan metode tes. Sedangkan untuk mengetahui aktivitas belajar siswa digunakan metode angket.

PEMBAHASAN

Dalam makalah ini disajikan hasil penelitian eksperimentasi pemanfaatan media pembelajaran berbasis komputer, dalam hal ini penggunaan software aplikasi macromedia flash, untuk mengetahui pengaruh pemanfaatan media pembelajaran komputer terhadap prestasi belajar siswa ditinjau dari aktivitas belajar.

Uji Keseimbangan

Uji keseimbangan yang dilakukan adalah uji F untuk mengetahui bahwa kelas eksperimen dan kelas kontrol memiliki kemampuan yang sama. Hasil uji keseimbangan disajikan pada tabel 1 berikut :

Tabel 1
Uji Keseimbangan

Group Statistics

| Metode | | N | Mean | Std. Deviation | Std. Error Mean |
|----------------|------------------|----|-------|----------------|-----------------|
| Kemampuan awal | Kelas Eksperimen | 38 | 63.74 | 4.58 | .74 |
| | Kelas Kontrol | 37 | 61.73 | 4.51 | .74 |

| | | Levene's Test for Equality of Variances | | t-test for Equality of Means | | | | | | |
|----------------|-----------------------------|---|------|------------------------------|--------|-----------------|-----------------|-----------------------|---|-------|
| | | F | Sig. | t | df | Sig. (2-tailed) | Mean Difference | Std. Error Difference | 95% Confidence Interval of the Difference | |
| | | | | | | | | | Lower | Upper |
| Kemampuan awal | Equal variances assumed | .350 | .556 | 1.912 | 73 | .060 | 2.01 | 1.05 | -8.55E-02 | 4.10 |
| | Equal variances not assumed | | | 1.912 | 72.992 | .060 | 2.01 | 1.05 | -8.50E-02 | 4.10 |

Dari data pada Tabel 1 tampak bahwa, hasil uji kesamaan rata-rata yang menggunakan uji F diperoleh $F_{hitung} = 0,350$ dengan $F_{tabel(1;73)} = 0,972$. Karena $F_{hitung} = 0,350 < F_{tabel(1;73)} = 3,972$ berarti H_0 diterima. Dengan demikian ada kesamaan variansi antara kedua kelompok, sehingga dapat dikatakan bahwa kedua kelompok memiliki kemampuan awal yang sama.

Uji Normalitas

Untuk menguji data berasal dari distribusi normal atau tidak digunakan uji *Lilliefors* pada taraf signifikansi 5%. Hasil uji normalitas disajikan dalam tabel 2. Dari tabel 2 tampak bahwa $L_{hitung} < L_{tabel}$ pada taraf signifikansi 5%. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa sampel tersebut berasal dari populasi yang berdistribusi normal.

Tabel 2
Uji Normalitas

| Sumber | Kelas | L_{hitung} | L_{tabel} | Keputusan |
|-------------------|------------|--------------|-------------|-----------|
| Aktivitas Belajar | Eksperimen | 0,090 | 0,3972 | Normal |
| | Kontrol | 0,144 | 0,3972 | Normal |
| Prestasi Belajar | Eksperimen | 0,139 | 0,3972 | Normal |
| | Kontrol | 0,144 | 0,3972 | Normal |

Uji Homogenitas

Uji homogenitas adalah suatu pengujian untuk mengetahui apakah antara dua variabel bebasnya mempunyai variansi yang sama atau tidak. Uji homogenitas yang digunakan dalam penelitian ini adalah uji *Levene Statistic*. Dari perhitungan untuk homogenitas menggunakan SPSS versi 11.5 didapat bahwa nilai probabilitas *Levene Statistic* tes prestasi belajar $F_{hitung} = 0,023 < F_{tabel} = 3,972$ dan probabilitas = $0,880 > 0,05$, maka H_0 diterima yang berarti bahwa kedua sampel mempunyai varian yang homogen.

Uji Anava

Hasil perhitungan analisis variansi dua jalan dengan sel tidak sama dengan taraf signifikansi $\alpha = 5\%$ menggunakan SPSS versi 11.5 disajikan Tabel 3 berikut:

Tabel 3
Hasil Analisis Anava Dua Jalan dengan Sel Tidak sama

| Sumber Variansi | Jk | df | Rk | F_{hitung} | F_{tabel} | Sig | Keputusan |
|-----------------|------------|----|---------|--------------|-------------|-------|-----------|
| Metode | 597,305 | 1 | 597,305 | 8,833 | 3,980 | 0,004 | Ditolak |
| Aktivitas | 955,290 | 2 | 477,645 | 7,063 | 3,130 | 0,002 | Ditolak |
| Error | 4666,042 | 69 | 67,624 | - | - | - | |
| Total | 316250,000 | 75 | - | - | - | - | |

Dari Tabel 3 tampak bahwa $F_{hitung} = 8,833 > F_{tabel(1;69)} = 3,980$ dan probabilitas = $0,004 < 0,05$ dengan $\alpha = 5\%$. Dengan demikian H_{0A} ditolak sehingga H_{1A} diterima. Hal ini berarti ada

pengaruh prestasi belajar matematika antara siswa yang diberikan pembelajaran dengan menggunakan media pembelajaran berbasis komputer dengan siswa yang diberikan pembelajaran dengan metode konvensional. Lebih lanjut, dari hasil nilai rata-rata prestasi belajar untuk kelompok kontrol adalah 61,49 sedangkan kelompok eksperimen adalah 66,97. Dengan demikian jelas bahwa pembelajaran dengan menggunakan media pembelajaran lebih baik prestasi belajarnya dari pada pembelajaran dengan metode konvensional. Selain itu, pada pembelajaran dengan menggunakan media berbasis komputer, siswa lebih antusias dalam mengikuti pembelajaran. Hal ini ditunjukkan dengan respon siswa yang lebih aktif bertanya kepada guru dan lebih memperhatikan pada proses pembelajaran.

Selanjutnya, dari Tabel 3 juga tampak bahwa $F_{hitung} = 7,063 > F_{tabel (2;69)} = 3,130$ dan probabilitas $= 0,002 < 0,05$. Dengan demikian H_{0B} ditolak. Ini berarti ada pengaruh prestasi belajar siswa yang signifikan ditinjau dari aktivitas belajar siswa yang tinggi, sedang, dan rendah. Dapat dinyatakan bahwa siswa yang memiliki aktivitas belajar yang tinggi memiliki pengaruh yang lebih baik terhadap pencapaian prestasi belajar dibanding dengan siswa yang memiliki aktivitas belajar sedang. Selain itu, siswa yang memiliki aktivitas belajar yang sedang memiliki pengaruh yang lebih baik terhadap pencapaian prestasi belajar dibanding dengan siswa yang memiliki aktivitas belajar yang rendah. Hal ini disebabkan penggunaan media pembelajaran berbasis komputer dapat menimbulkan daya tarik tersendiri untuk siswa, baik dari kategori aktivitas belajar tinggi, sedang maupun rendah untuk memperhatikan dan memahami materi pelajaran yang diberikan. Dengan siswa tertarik terhadap pelajaran matematika maka siswa akan berperan aktif dalam proses belajar mengajar.

KESIMPULAN

Dari hasil penelitian diperoleh kesimpulan bahwa:

1. Terdapat pengaruh yang signifikan siswa yang diberikan pembelajaran dengan media pembelajaran berbasis komputer dengan siswa yang diberikan pembelajaran dengan metode konvensional terhadap prestasi belajar siswa. Siswa yang diberikan pembelajaran dengan media pembelajaran berbasis komputer mempunyai prestasi belajar lebih baik dibandingkan dengan siswa yang diberikan pembelajaran dengan metode konvensional.
2. Terdapat pengaruh aktivitas belajar terhadap prestasi belajar siswa. Pada siswa yang mempunyai aktivitas belajar kategori tinggi mempunyai prestasi belajar yang lebih tinggi dibandingkan dengan siswa yang mempunyai aktivitas belajar sedang atau rendah. Demikian juga siswa yang mempunyai aktivitas kategori sedang memperoleh prestasi belajar yang lebih baik dibandingkan dengan siswa yang mempunyai aktivitas kategori rendah.

DAFTAR PUSTAKA

- Cazes, Claire et. al. Using E-exercise Bases in Mathematics: Cases Studies at University. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 11:327–350. 2006.
- Cheah, Ui Hock, A Practical Framework for Technology Integration in Mathematics Education, *Makalah dipresentasikan dalam SEAMEO-RECSAM*, Penang, Malaysia, 2008.
- Hasibuan, A. Zainal. Best Practice and Successful ICT Usage in Teaching and Learning. *Makalah dipresentasikan dalam ICT Conference and Exhibition*, Kuala Lumpur, March 11-12, 2008.
- National Council of Teachers of Mathematics. 2000. *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author
- Ocak, Mehmet Akif. The Effect of Using Graphing Calculators in Complex Function Graphs. *Eurasia journal of Mathematics, Science, and Technology Education*, 4(4): 337 – 346. 2008
- Ruthven, K., Hennessy, Sara., and Deaney, Rosemary. Incorporating Internet Resources into Classroom Practice: Pedagogical Perspectives and Strategies of Secondary-School Subject Teachers. *Computers and Education*, 44(1). 2004.

- Sehan, Derar. The Effect of Graphing Calculator Use. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, May 8. 2006.
- Sudjana dan Rivai. 2001. *Media Pengajaran*. Jakarta: Sinar Baru Algesindo.
- Tiwari, Tapan Kumar. Computer Graphics As An Instructional Aid In An Introductory Differential Calculus Course. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, **2**(1), 2007.
- UNESCO, The UNESCO ICT in education programme. United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization (UNESCO): Bangkok, Thailand. www.unescobkk.org/education/ict. 2007.
- Wardhani. Pembelajaran Matematika Kontekstual di SMP. *Makalah dipresentasikan dalam Pelatihan Nasional Guru Inti Matematika Sekolah Menengah Pertama*, Oktober 10-23, Yogyakarta. 2004.

PROSEP-PROSEP DALAM MATEMATIKA SEKOLAH

Sugiman

Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta

Abstrak

Simbol-simbol matematika digunakan untuk merepresentasikan suatu konsep atau suatu proses. Adapun sebuah simbol yang digunakan sekaligus untuk menyatakan keduanya disebut sebagai prosep. Makalah ini membahas pengertian prosep dan contoh prosep matematika yang diajarkan di sekolah.

Kata kunci: simbol, konsep, proses, prosep

PENDAHULUAN

Gagne (Bell, 1978, Ruseffendi, 2006) menyebutkan adanya dua objek belajar dalam matematika; yaitu objek tak langsung dan objek langsung. Objek tak langsung dari belajar matematika meliputi kemampuan-kemampuan yang membentuk karakter siswa, seperti halnya: kemandirian, sikap positif, dan belajar tentang tata cara belajar yang baik (*learning to learn*). Objek langsung yang dimaksud Gagne terdiri dari fakta, konsep, aturan/prinsip, dan keterampilan. Fakta berkaitan dengan kesepakatan-kesepakatan matematik, konsep berkenaan dengan objek abstrak dalam matematika yang didefinisikan secara tegas, aturan/prinsip matematik berkenaan dengan hal-hal yang harus diikuti ketika menyelesaikan suatu masalah matematik, dan keterampilan berkenaan dengan ketepatan dan kelancaran dalam menggunakan prosedur.

Gray dan Tall (1994) mengemukakan adanya objek lain dalam belajar matematika yakni yang disebutnya dengan istilah prosep. Prosep berkenaan dengan penggunaan sebuah simbol guna merepresentasikan suatu dualitas antara konsep dan proses. Pengertian konsep sama seperti yang digagas oleh Gagne, yakni merupakan objek abstrak dari matematika. Dalam belajar, siswa membangun konsep sebagai suatu skema dalam kognisinya. Pengertian proses berkenaan dengan proses kognisi atau proses matematik, seperti misalnya “proses perkalian” dan “proses menyelesaikan sebuah persamaan”. Pengertian proses berbeda dengan prosedur. Menurut Davis (Gray and Tall, 1994), prosedur merujuk pada algoritma khusus dalam mengimplementasikan suatu proses, sebagai contoh prosedur dalam “membilang” dan “menjumlah” guna melakukan proses pembilangan dan penjumlahan. Anak melakukan prosedur ini bisa secara mental dengan cara menggunakan kemampuan kognisinya maupun secara fisik dengan menggunakan bantuan jejari tangannya.

Matematikawan seringkali menggunakan satu simbol untuk menyatakan proses dan produk dari proses tersebut sekaligus, sebagai misal simbol a/b atau a dibagi dengan b menyatakan suatu proses dan sekaligus produk. Dalam hal ini simbol $\frac{3}{4}$ merepresentasikan suatu proses pembagian, yakni 3 dibagi 4, dan sekaligus konsep pecahan. Dalam konteks lain, simbol 3×4 menyatakan suatu konsep “kali” dan proses penjumlahan berulang (yakni $4 + 4 + 4$) dalam satu simbol yang sama. Penjumlahan berulang tersebut menghasilkan 12. Digunakannya satu simbol yang sama untuk menyatakan suatu konsep dan proses maupun suatu proses dan produk berpotensi menimbulkan keambiguan yang membingungkan siswa. Kenyataannya banyak siswa yang mengalami kesulitan dalam memahami bilangan pecahan. Untuk itu agar berhasil dalam belajar matematika, siswa harus fleksibel dalam memandang setiap simbol matematika.

Matematika menjadi lebih menarik dan lebih efisien karena digunakannya satu simbol yang sama guna menyajikan suatu konsep matematika dan suatu proses dan selanjutnya dikenal dengan prosep. Bilamana konsep berdiri sendiri tanpa dikoneksikan dengan suatu proses maka

konsep akan menjadi suatu objek abstrak yang kurang berdayaguna dan sebaliknya suatu proses tidak mungkin dikerjakan tanpa didasari konsep. Dengan demikian prosep berperan guna mempermudah siswa dalam menuliskan proses berfikir dan bernalarnya ketika menyelesaikan persoalan-persoalan matematika.

PENGERTIAN PROSEP DALAM MATEMATIKA

Tiga dunia dalam matematika, menurut Tall (2004), terdiri dari perwujudan konseptual (*conceptual embodiment*), simbol proseptual (*proceptual symbol*), dan formal aksiomatik (*axiomatic formal*). Pertama, perwujudan konseptual dapat terjadi secara fisik maupun mental. Secara fisik dilakukan melalui kegiatan-kegiatan enaktif yang berupa aktivitas fisik (*hand-on activity*), misalkan dalam melakukan penjumlahan siswa menggunakan batang lidi ataupun jemari tangan. Aktivitas secara mental (*mind-on activity*) dilakukan dengan menggunakan pikirannya, misalkan menghitung 3×4 dengan membayangkan 12 gelas yang ditata dengan struktur 3 baris dan 4 kolom. Kedua, simbol proseptual berkenaan dengan pemakaian lambang-lambang matematika yang mana dalam satu lambang menandai suatu konsep dan suatu proses secara simultan. Proses tersebut menghasilkan suatu produk yang mungkin berupa konsep serupa maupun konsep baru; sebagai contoh proses pada $3 + 4$ menghasilkan bilangan 7 yang serupa dengan konsep bilangan 3 dan 4 sedangkan proses 3 dibagi 4 menghasilkan bilangan pecahan $\frac{3}{4}$ yang merupakan konsep baru. Ketiga, formal aksiomatik digunakan dalam matematika tingkat lanjut yang terkait dengan berfikir matematik tingkat tinggi (*advanced mathematical thinking*) yang terjadi pada aljabar. Di dunia ketiga ini, penyelesaian problem matematika hanya dengan menggunakan simbol-simbol matematika formal yang kosong dari arti (*meaningless*).

Berbeda acuan dengan yang digunakan Tall seperti diuraikan di atas, Bruner membagi matematika berdasarkan aktivitas yang dilakukan yakni menjadi aktivitas enaktif, ikonik, dan simbolik (Ruseffendi, 2006). Ketiga aktivitas ini bisa terjadi pada dunia perwujudan konseptual dan simbol proseptual sedangkan aktivitas simbolik dapat terjadi pada dunia simbol proseptual maupun aksiomatik formal. Sedangkan Gravemeijer (1994) membagi dunia matematika berdasarkan tingkat keformalannya menjadi empat tingkatan, yakni: situasional/kontekstual, referensial yang disebut juga dengan *model of situation*, general yang disebut juga *model for mathematics*, dan formal matematika.

Kembali ke pembahasan proseptual sebagaimana yang diuraikan di atas. Secara eksplisit, Gray dan Tall (1992-a) mendefinisikan "... a procept to be a combined mental object consisting of both process and concept in which the same symbolization is used to denote both the process and the object which is produced by the process". Terdapat empat istilah kunci dalam definisi prosep di atas, yakni simbol, proses, produk, dan objek. Objek yang dimaksud berupa konsep serupa atau konsep baru. Sebagai contoh penjumlahan enam suku pertama pada deret aritmetika dapat disimbulkan dengan notasi sigma $\sum_{i=1}^6(3i + 1)$. Dalam notasi tersebut memuat konsep variabel dan konsep penjumlahan dari suku-suku yang berpola, yakni untuk $i = 1$ diperoleh suku pertama $3 \times 1 + 1 = 4$, untuk $i = 2$ diperoleh suku kedua $3 \times 2 + 1 = 7$, hingga untuk $i = 6$ diperoleh suku keenam $3 \times 6 + 1 = 19$. Selanjutnya dengan melakukan proses mensubstitusi variabel dan menjumlahkan didapatkan hasil:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^6(3i + 1) &= (3 \times 1 + 1) + (3 \times 2 + 1) + (3 \times 3 + 1) + (3 \times 4 + 1) + (3 \times 5 + 1) + (3 \times 6 + 1) \\ &= 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 \\ &= 69.\end{aligned}$$

Dengan demikian notasi sigma $\sum_{i=1}^6(3i + 1)$ dipandang sebagai sebuah prosep sebab notasi ini merepresentasikan konsep dan sekaligus proses; konsep yang termuat adalah konsep jumlah suku-suku berpola dan konsep variabel sedangkan proses yang termuat adalah proses substitusi dan proses menjumlahkan.

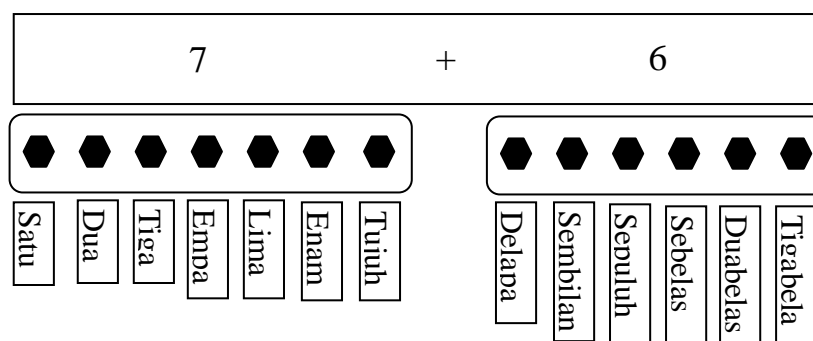
PROSEP-PROSEP DALAM MATEMATIKA SEKOLAH

Prosep terbagi menjadi tiga tingkatan, yaitu prosep dasar (*elementary procept*), prosep antara yang berupa pengkaitan antar prosep dasar, dan prosep formal (Gray dan Tall, 2002b, Chin, 2003). Dengan kata lain, tingkatan proses tersebut secara berturut-turut dapat diberi istilah prosep informal, prosep antara, dan prosep formal. Prosep informal berkaitan dengan bahasa nonformal matematik yang memungkinkan siswa menggunakan bahasa atau notasinya sendiri dimana kekentalan konteks dari prosep masih kuat. Pada tahap prosep antara, siswa mengkoneksikan antara prosep dengan prosep lainnya, prosep dengan konsep, dan prosep dengan proses dengan menggunakan bahasa informal maupun semi-formal matematik. Tahapan yang paling tinggi dari prosep adalah tahapan formal matematik yang mana siswa sudah mencapai daya abstraksi yang tertinggi dari prosep yang bersangkutan yang ditandai dengan telah mampunya siswa memahami serta menggunakan notasi-notasi matematika secara benar.

Prosep matematik dapat ditemui di semua level sekolah, baik itu sekolah dasar, sekolah menengah pertama, maupun sekolah menengah atas. Gray dan Tall (2002-a) memberikan contoh-contoh prosep yang diajarkan di sekolah dasar, misalnya: prosep bilangan bulat (*whole number*), prosep penjumlahan (*addition*), prosep pengurangan (*subtraction*), prosep perkalian (*multiplication*), prosep pembagian (*division*), dan prosep nilai tempat (*place value*). Sebagai ilustrasi, berikut ini diuraikan secara singkat berkenaan dengan prosep jumlah dan prosep nilai tempat.

Notasi jumlah adalah “+” dan notasi ini merupakan suatu prosep karena notasi tersebut sekaligus merepresentasikan proses jumlah dan konsep jumlah. Proses penjumlahan melibatkan konsep dua bilangan yang hendak dijumlahkan. Sebagai contoh proses penjumlahan $7 + 6$ dapat dilakukan dengan berbagai cara seperti berikut.

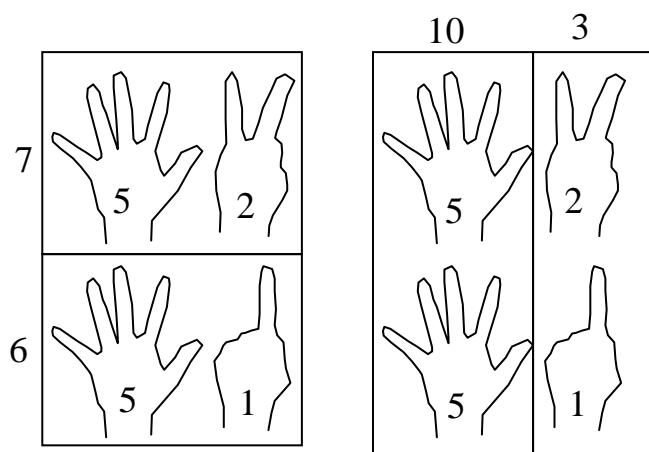
1. Siswa melakukan aktivitas enaktif yakni membilang “satu, dua, tiga, hingga tujuh” dengan menunjuk ketujuh benda satu-persatu dan kemudian dilanjutkannya dengan membilang “delapan, sembilan, sepuluh, sebelas, dua belas, tiga belas” sembari menunjuk keenam benda satu persatu-persatu. Perhatikan ilustrasinya pada Gambar 1 berikut.



Gambar 1. Proses Penjumlahan dengan Cara Hitung Berkelanjutan dalam Prosep Jumlah

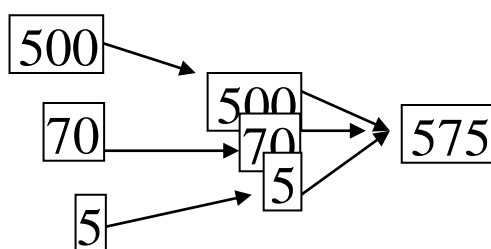
2. Siswa melakukan aktivitas enaktif dengan menggunakan jari-jari tangan miliknya dan milik temannya. Ia melakukan penggabungan dua telapak tangan sehingga jumlahnya $5 + 5 = 10$ dan sisanya yang berjumlah $2 + 1 = 3$. Dengan demikian didapatkan bahwa $7 + 6 = 10 + 3$, penjumlahan setelah tanda sama dengan ini lebih familiar bagi siswa. Perhatikan proses yang dikerjakan siswa pada Gambar 2. Secara matematik yang dilakukan siswa adalah $7 + 6 = (5 + 2) + (5 + 1) = 5 + 2 + 5 + 1 = 5 + 5 + 2 + 1 = (5 + 5) + (2 + 1) = 10 + 3 = 13$. Siswa tersebut secara tidak sadar telah menggunakan sifat komutatif dan asosiatif dari operasi penjumlahan.
3. Kedua proses enaktif pada prosep jumlah di atas bisa juga dengan menggunakan aktivitas ikonik dengan menggunakan gambar piktorial atau goresan batang lidi; misalnya $\text{|||||} \text{||}$ dan $\text{|||||} \text{|}$.

4. Siswa juga dapat melakukan proses dalam prosep jumlah secara simbolik dengan menggunakan notasi-notasi matematika atau hanya dengan menggunakan pikirannya saja.



Gambar 2. Proses Penjumlahan dengan Cara Pengelompokan Lima-Lima dalam Prosep Jumlah

Nilai tempat menggunakan notasi yang sangat kuat (*powerful*). Dalam bilangan 575 memuat dua angka lima yang benar-benar berbeda maknanya, angka lima yang pertama menyatakan 5 ratusan sedangkan angka lima kedua menyatakan 5 satuan. Dengan menggunakan nilai tempat bilangan 575 dapat dijabarkan menjadi $500 + 70 + 5$. Peluruhan dua angka nol pada 500 dan satu angka nol pada 70, serta struktur penulisannya menjadi 575 merupakan hal yang rumit. Beberapa guru memandang peluruhan angka nol tersebut sebagai suatu kesepakatan belaka sehingga menjadi kurang bermakna bagi siswa. Proses peluruhan tiga angka nol dalam penulisan bilangan 575 dapat diperjelas dengan menggunakan media kartu yang digunakan secara dinamis sebagaimana diilustrasikan pada gambar berikut.



Gambar 3. Proses Dinamis atas Prosep Nilai Tempat

Gambar 3 terdiri dari tiga bagian. Bagian paling kiri menggambarkan tiga kartu bilangan yang berturut-turut bertuliskan lambang bilangan 500, 70, dan 5. Gambar bagian tengah adalah gambar tumpukan ketiga kartu tersebut manakala kartu diurutkan dari paling bawah dengan urutan kartu 500, 70, dan 5. Gambar paling kanan diperoleh setelah ketiga kartu ditumpuk sehingga diperoleh bilangan 575. Proses pembentukan prosep seperti ini dilakukan melalui aktivitas *hand-on* yakni dengan memakai kartu-kartu secara dinamis dan aktivitas *mind-on* dengan memaknai penggabungan ketiga kartu yang menandai $500 + 70 + 5$.

Gray dan Tall (1992-a) menguraikan contoh-contoh prosep pada materi pelajaran

matematika di sekolah dasar. Prosep-prosep yang dimaksud di atas diantaranya adalah:

1. Simbol +3 merupakan representasi dari proses “menambah tiga” atau geser ke arah kanan sejauh “tiga langkah” pada garis bilangan dan konsep bilangan bulat positif +3.
2. Simbol -4 merupakan representasi dari suatu proses “mengurangi empat” atau geser ke arah kiri sejauh “empat langkah” pada garis bilangan dan konsep bilangan bulat negatif -4.

Selain pada level sekolah dasar, Gray dan Tall (2002-b) juga memberikan contoh-contoh prosep yang terkait dengan materi matematika di sekolah menengah. Prosep-prosep tersebut antara lain:

1. Gagasan pecahan, misalkan $\frac{19}{3}$ yang merepresentasikan proses pembagian 19 oleh 3 dan hasil dari proses pembagiannya yang berupa konsep pecahan campuran $6\frac{1}{3}$.
2. Simbol aljabar dengan memakai variabel, seperti $2x + 1$ yang menyatakan proses “menambahkan dua kali x dan satu” dan sekaligus menyatakan hasil dari proses tersebut yakni “ $2x + 1$ ”. Misalkan makala $x = 3$ maka melalui proses algoritma $2 \times 3 + 1$ diperoleh hasil 7. Dengan demikian “ $2 \times 3 + 1$ ” merupakan suatu contoh proses sekaligus konsep dari bentuk aljabar tersebut.
3. Perbandingan trigonometri, misalnya sinus = oposit : hipotenusa, merepresentasikan baik proses kalkulasi sinus suatu besar sudut tertentu dan hasil dari perhitungan tersebut. Misalkan pada segitiga ABC yang siku-siku di C dengan BC = 3 cm dan BA = 6 cm, diperoleh $\sin A = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Dalam hal ini siswa melakukan proses perbandingan sinus dan mendapatkan konsep nilai dari sinus itu sendiri.
4. Limit fungsi yang dinotasikan dengan $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ juga merupakan suatu prosep. Dalam prosep ini ada proses nilai x mendekati 2 yang menghasilkan nilai $f(x)$ yang menuju suatu nilai tertentu. Jadi dalam dalam prosep limit terdapat proses “mendekati” dan konsep nilai dari limit itu sendiri. Misalkan bila $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ dengan $x \rightarrow 1$, maka proses pencarian nilai $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1}$ dapat dilakukan dengan beberapa cara, misalnya cara pola intuitif, cara grafik, cara substitusi, dan yang paling sulit adalah dengan memakai definisi limit secara formal. Cara pola intuitif disajikan pada tabel berikut.

| | | | | | | | | | |
|---------------------|-----|------|-------|---------------|---|--------------|-------|------|-----|
| x | 0,9 | 0,99 | 0,999 | \rightarrow | 1 | \leftarrow | 1,001 | 1,01 | 1,1 |
| $\frac{x^2-1}{x-1}$ | 1,8 | 1,98 | 1,998 | \rightarrow | 2 | \leftarrow | 2,002 | 2,02 | 2,2 |

Pada tabel di atas, tampak adanya hubungan bila nilai x menuju 1 maka dan nilai $\frac{x^2-1}{x-1}$ menuju 2.

5. Turunan dari fungsi f di a yang dinotasikan dengan $f'(a)$ adalah prosep turunan fungsi f di $x = a$. Prosep tersebut memuat konsep nilai turunan fungsi dan proses menurunkannya. Misalkan $f(x) = x^2$. Proses yang terjadi pada prosep $f'(3)$ adalah menurunkan turunan dengan menggunakan rumus seperti berikut.

$$\begin{aligned}
 f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3^2 + 6h - 3^2}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} 6 \\
 &= 6.
 \end{aligned}$$

Dengan demikian dalam prosep $f'(3)$ memuat proses pencarian limit dan konsep nilai limit yang diperolehnya.

KESIMPULAN

Setiap prosep matematika dinotasikan dengan memakai satu simbol yang mana simbol tunggal tersebut sekaligus merepresentasikan suatu konsep dan proses. Proses yang terjadi pada suatu prosep dapat memunculkan konsep yang termuat dan dalam kasus ini dapat dikatakan “konsep diperoleh melalui proses”. Terkadang proses yang dilalui itu sendiri yang menjadi konsep yang dimaksud.

Prosep-prosep matematika muncul dalam pelajaran matematika di semua level sekolah mulai dari SD hingga SMA. Contoh dari prosep adalah penjumlahan, nilai tempat, bilangan positif, bilangan negatif, perbandingan trigonometri, bentuk aljabar, fungsi, limit fungsi, dan turunan fungsi. Bahkan Kidron (2008) mengemukakan bahwa prosep matematika juga diajarkan kepada mahasiswa di level perguruan tinggi.

DAFTAR PUSTAKA

- Bell, F.H. 1978. *Teaching and Learning Mathematics in Secondary Schools*. Second Printing. Dubuque, Iowa: Wm. C. Brown. Company.
- Chin, Erh-Tsung. 2003. *Mathematical Proof as Formal Procept in Advanced Mathematical Thinking*. Taipei: Departement of Mathematics, National Taiwan Normal University.
- Gravemeijer, Koeno. 1994. *Developing Realistics Mathematics Education*. Utrecht: CD β Press.
- Gray, E and Tall, D. 1992-a. *Success and Failure in Mathematics: Procept and Prosedur in Primary Mathematics*. Paper in Workshop on Mathematics Education and Computer, Taipei National University, April 1992.
- Gray, E and Tall, D. 1992-b. *Success and Failure in Mathematics: Procept and Prosedur in Secondary Mathematics*. Paper in Workshop on Mathematics Education and Computer, Taipei National University, April 1992.
- Gray, E. and Tall, D. 1994. Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetics. *The Journal for Research in Mathematics Education*. Vol 26(2) page 115-141.
- Kidron, Ivy. 2008. Abstraction and Consolidation of The Limit Procept by Means of Instrumented Schemes: The Complementary Role of Three Different Frameworks. *Educational Study in Mathematics*, 69, 197-216. DOI: 10.1007/s10649-008-9132-6.
- Ruseffendi, E.T. 2006. *Pengantar Kepada Membantu Guru Mengembangkan Kompetensinya dalam Pengajaran Matematika untuk Meningkatkan CBSA*. Bandung: Tarsito.
- Tall, D. 2004. *Introducing Three Worlds of Mathematics*. Mathematics Education Research Centre, University of Warwick, UK. Downloaded on 1 February 2011 at <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/>

**PENGARUH PEMBELAJARAN BERBASIS MASALAH DENGAN
SETTING KOOPERATIF JIGSAW TERHADAP
KEMAMPUAN PEMECAHAN MASALAH DAN KOMUNIKASI MATEMATIS
SERTA KEMANDIRIAN BELAJAR SISWA SMA**

Asep Ikin Sugandi

STKIP Siliwangi

Email: Asepikinsugandi@yahoo.co.id

Abstrak

Artikel ini melaporkan hasil temuan suatu kuasi eksperimen dengan disain tes akhir kelompok kontrol untuk menelaah pengaruh pembelajaran berbasis masalah dengan *setting* kooperatif JIGSAW, level sekolah, dan kemampuan awal matematika siswa terhadap kemampuan pemecahan masalah dan komunikasi matematis serta kemandirian belajar siswa. Studi ini melibatkan 359 siswa dari tiga SMA level rendah, menengah, dan tinggi di kota Cimahi. Instrumen penelitian terdiri dari dua set tes pemecahan masalah dan komunikasi matematis serta satu set skala kemandirian belajar siswa. Penelitian menemukan bahwa pembelajaran berbasis masalah dalam setting belajar kooperatif JIGSAW memberikan pengaruh terbesar dibandingkan dengan pengaruh pembelajaran konvensional, level sekolah, dan kemampuan awal matematika siswa terhadap pencapaian kemampuan pemecahan masalah dan komunikasi matematis serta kemandirian belajar siswa. Ditemukan pula terdapat interaksi antara pembelajaran dengan level sekolah dan antara pembelajaran dengan level kemampuan awal matematika siswa terhadap kemampuan komunikasi matematis. Namun tidak terdapat interaksi antara pembelajaran dengan level sekolah dan antara pembelajaran dengan level kemampuan awal matematika terhadap kemampuan pemecahan masalah matematis dan kemandirian belajar. Temuan lainnya adalah terdapat asosiasi yang tinggi antara kemampuan pemecahan masalah dengan kemampuan komunikasi matematis, dan antara kemampuan komunikasi matematis dengan kemandirian belajar. Namun terdapat asosiasi yang cukup antara kemampuan pemecahan masalah dengan kemandirian belajar.

Kata kunci : pemecahan masalah matematis, komunikasi matematis pembelajaran berbasis masalah, belajar kooperatif tipe Jigsaw, kemandirian belajar, *probing, scaffolding, self -concept*

PENDAHULUAN

Kemampuan pemecahan masalah dan komunikasi matematis merupakan dua kemampuan matematis yang esensial untuk siswa SM, seperti tercantum dalam Kurikulum 2004 dan Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan (KTSP) serta Badan Standar Nasional Pendidikan (2006). Pentingnya kepemilikan kemampuan pemecahan masalah matematis sejak lama telah dikemukakan Branca (Sumarmo, 1994) yaitu sebagai berikut: 1) kemampuan pemecahan masalah merupakan tujuan umum pengajaran matematika, bahkan sebagai jantungnya matematika, 2) penyelesaian masalah meliputi metode, prosedur, strategi dalam pemecahan masalah merupakan proses inti dan utama dalam kurikulum matematika, dan 3) pemecahan masalah merupakan kemampuan dasar dalam belajar matematika.

Memperhatikan tuntutan kognitif yang termuat dalam kemampuan pemecahan masalah matematis, kemampuan tersebut tergolong pada kemampuan matematis tingkat tinggi yang memerlukan pembelajaran yang sesuai. Namun, beberapa penelitian (Henningsen dan Stein, 1997,

Mullis, dkk dalam Suryadi, 2004, Peterson, 1988) melaporkan pada umumnya pembelajaran matematika masih berfokus pada pengembangan kemampuan berpikir tahap rendah dan bersifat prosedural.

Demikian pula laporan TIMSS menunjukkan bahwa pembelajaran yang lebih menekankan pada aktivitas penalaran dan pemecahan masalah seperti di Jepang dan Korea mampu menghasilkan siswa berprestasi tinggi dalam matematika. Dua studi Sumarmo (1993, 1994) terhadap siswa dan guru SMP, dan SMU di Bandung menemukan bahwa pembelajaran matematika kurang melibatkan aktivitas siswa secara optimal sehingga siswa kurang aktif dalam belajar. Demikian juga hasil penelitian Mullis, dkk (Suryadi, 2004) menunjukkan bahwa soal-soal matematika tidak rutin pada umumnya tidak berhasil dijawab dengan benar oleh siswa Indonesia.

Berkenaan dengan kemampuan komunikasi matematik, Sumarmo (2002) merinci kemampuan tersebut ke dalam kegiatan: 1) menghubungkan benda nyata, gambar, dan diagram ke dalam ide matematika; 2) menjelaskan ide, situasi dan relasi matematik, secara lisan dan tulisan dengan benda nyata, gambar, grafik dan aljabar; 3) menyatakan peristiwa sehari-hari dalam bahasa atau simbol matematika; 4) mendengarkan, berdiskusi, dan menulis tentang matematika; 5) membaca dengan pemahaman suatu presentasi matematika tertulis; 6) membuat konjektur, menyusun argumen, merumuskan definisi dan generalisasi; 7) menjelaskan dan membuat pertanyaan tentang matematika yang dipelajari.

Di antara beberapa aspek yang berada dalam ranah kognitif dan afektif, kemandirian belajar diprediksi memberi peran terhadap pencapaian hasil belajar matematis siswa. Sumarmo (2004) mengemukakan kemandirian belajar merupakan proses perancangan dan pemantauan diri yang seksama terhadap proses kognitif dan afektif dalam menyelesaikan suatu tugas akademik. Selanjutnya Sumarmo (2004) merinci indikator kemandirian belajar sebagai berikut : 1) inisiatif belajar, 2). mendiagnosa kebutuhan belajar, 3) menetapkan target dan tujuan belajar, 4) mmemonitor, mengatur dan mengontrol kemajuan belajar, 5) memandang kesulitan sebagai tantangan, 6) memanfaatkan dan mencari sumber yang relevan, 7) memilih dan menerapkan strategi belajar, 8) mengevaluasi proses dan hasil belajar dan 9) memiliki *self -concept* (konsep diri).

Memperhatikan karakteristik matematika sebagai ilmu yang terstruktur dan sistimatis, secara rasional dapat diprediksi bahwa kemampuan awal matematika siswa akan memberikan pengaruh terhadap pencapaian hasil belajar selanjutnya. Selain dari itu, klasifikasi sekolah ke dalam level tinggi, sedang, dan rendah oleh Dinas Pendidikan secara umum juga menggambarkan kemampuan umum siswa dalam matematika pada sekolah yang bersangkutan.

Uraian, rasional, dan temuan penelitian di atas, mendorong peneliti melaksanakan penelitian mengenai pengaruh pembelajaran berbasis masalah dalam *setting* belajar kooperatif JIGSAW, kemampuan awal matematika, dan level sekolah terhadap pencapaian kemampuan pemecahan masalah dan komunikasi matematis siswa SMA.

METODE DAN DISAIN PENELITIAN

Penelitian ini merupakan suatu kuasi eksperimen dengan disain tes akhir dan kelompok kontrol seperti terlukis dalam gambar di bawah ini.

X_1 O

X_2 O

O

Keterangan: X_1 : Pembelajaran Berbasis Masalah (PBM) dengan setting Koperatif tipe Jigsaw

X_2 : Pembelajaran Baebasis Masalah (PBM)

O : Tes Kemampuan Pemecahan Masalah dan Komunikasi Matematis

Subyek penelitian ini adalah 359 siswa kelas XI Program IPA yang berasal dari tiga SMA yang mewakili sekolah level tinggi, sedang dan rendah. Instrumen penelitian ini terdiri dari satu set tes bentuk uraian yang meliputi kemampuan pemecahan masalah dan komunikasi matematis.

TEMUAN DAN PEMBAHASAN

Kemampuan pemecahan masalah dan komunikasi matematis, kemandirian belajar siswa terlukis pada Tabel 1 dan Tabel 2, dan Tabel 3. Dengan menggunakan uji Anova dua jalur untuk kemampuan pemecahan masalah matematis dengan faktor level sekolah dan pendekatan pembelajaran dan Anova dua jalur untuk kemampuan pemecahan masalah matematis dengan faktor kemampuan awal matematis siswa dan pendekatan pembelajaran diperoleh temuan sebagai berikut.

- 1) Ditinjau secara keseluruhan, dan pada level sekolah tinggi, kemampuan pemecahan masalah matematis siswa dengan pembelajaran BMJ sedikit lebih baik dari siswa dengan pembelajaran BM dan keduanya lebih baik dari siswa dengan pembelajaran KV. Namun pada sekolah level rendah dan level sedang, kemampuan pemecahan masalah matematis siswa dengan pembelajaran BMJ dan BM tidak berbeda, dan keduanya lebih baik dari kemampuan siswa dengan pembelajaran KV.

Tabel 1
Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis Berdasarkan
Pendekatan Pembelajaran, Peringkat Sekolah, dan TKAS

| Level sekolah | TKAS | Pendekatan Pembelajaran | | | | | | | | |
|---------------|-----------|-------------------------|-------------|------------|--------------|-------------|------------|--------------|-------------|------------|
| | | BMJ | | | BM | | | KV | | |
| | | \bar{X} | SD | N | \bar{X} | SD | n | \bar{X} | SD | N |
| Tinggi | Tinggi | 14,79 | 0,97 | 14 | 13,83 | 1,11 | 12 | 12,18 | 1,08 | 11 |
| | Sedang | 13,60 | 0,60 | 20 | 12,40 | 1,50 | 20 | 11,74 | 1,66 | 23 |
| | Rendah | 11,83 | 1,47 | 6 | 11,89 | 2,03 | 9 | 12,00 | 2,51 | 8 |
| | Sub Total | 13,75 | 1,32 | 40 | 12,71 | 1,68 | 41 | 11,90 | 1,69 | 42 |
| Sedang | Tinggi | 12,60 | 1,35 | 10 | 12,83 | 0,75 | 6 | 11,00 | 1,00 | 7 |
| | Sedang | 11,50 | 1,24 | 20 | 12,72 | 7,04 | 25 | 11,08 | 1,29 | 26 |
| | Rendah | 11,75 | 1,67 | 8 | 11,86 | 1,12 | 8 | 11,71 | 1,60 | 7 |
| | Sub Total | 11,84 | 1,40 | 38 | 12,56 | 5,63 | 39 | 11,18 | 1,30 | 40 |
| Rendah | Tinggi | 12,12 | 0,35 | 8 | 12,00 | 0,50 | 9 | 10,29 | 0,49 | 7 |
| | Sedang | 10,71 | 0,69 | 24 | 10,71 | 0,46 | 21 | 9,17 | 0,56 | 24 |
| | Rendah | 9,57 | 1,72 | 7 | 9,50 | 1,08 | 10 | 8,00 | 0,00 | 9 |
| | Sub Total | 10,79 | 1,20 | 39 | 10,70 | 1,09 | 40 | 9,10 | 0,87 | 40 |
| Total | Tinggi | 13,44 | 1,56 | 32 | 13,00 | 1,18 | 27 | 11,32 | 1,22 | 25 |
| | Sedang | 11,86 | 1,50 | 64 | 11,98 | 4,45 | 66 | 10,66 | 1,64 | 73 |
| | Rendah | 11,05 | 1,88 | 21 | 11,00 | 1,84 | 27 | 10,42 | 2,50 | 24 |
| | Total | 12,14 | 1,79 | 117 | 11,99 | 3,51 | 120 | 10,74 | 1,78 | 122 |

Catatan: Skor ideal 16; BMJ (berbasis masalah dengan JIGSAW, BM (berbasis masalah), KV (konvensional)

- 2) Makin tinggi level sekolah, pada semua jenis pembelajaran, kemampuan pemecahan masalah matematis siswa juga makin tinggi. Hal ini menunjukkan bahwa level sekolah berpengaruh terhadap pencapaian kemampuan pemecahan masalah matematis siswa.
- 3) Ditinjau secara keseluruhan dan pada tiap level sekolah, makin tinggi kemampuan awal matematika siswa, sedikit makin tinggi pula kemampuan pemecahan masalah matematis

- siswa. Temuan ini menunjukkan bahwa kemampuan awal matematika siswa memberi pengaruh terhadap pencapaian kemampuan pemecahan masalah matematis siswa.
- 4) Tidak terdapat interaksi antara pendekatan pembelajaran dan level sekolah terhadap kemampuan pemecahan masalah matematis siswa.
 - 5) Tidak terdapat interaksi antara pendekatan pembelajaran dengan tingkat kemampuan awal siswa (TKAS) terhadap kemampuan pemecahan masalah matematis siswa.

Dengan menggunakan uji Anova dua jalur untuk kemampuan komunikasi matematis dengan faktor level sekolah dan pendekatan pembelajaran dan Anova dua jalur untuk kemampuan komunikasi matematis dengan faktor kemampuan awal matematis siswa dan pendekatan pembelajaran diperoleh temuan sebagai berikut.

Tabel 2
Kemampuan Komunikasi Matematis Berdasarkan
Pendekatan Pembelajaran, Peringkat Sekolah, dan TKAS

| Level sekolah | TKAS | Pendekatan Pembelajaran | | | | | | | | |
|---------------|-----------|-------------------------|-------------|------------|--------------|-------------|------------|--------------|-------------|------------|
| | | BMJ | | | BM | | | KV | | |
| | | \bar{X} | SD | N | \bar{X} | SD | N | \bar{X} | SD | N |
| Tinggi | Tinggi | 14,28 | 0,91 | 14 | 12,75 | 1,48 | 12 | 11,73 | 1,27 | 11 |
| | Sedang | 13,15 | 0,67 | 20 | 11,95 | 1,57 | 20 | 11,17 | 1,58 | 23 |
| | Rendah | 11,83 | 0,98 | 6 | 11,11 | 2,09 | 9 | 11,00 | 2,14 | 8 |
| | Sub Total | 13,35 | 1,14 | 40 | 12,00 | 1,73 | 41 | 11,29 | 1,61 | 42 |
| Sedang | Tinggi | 12,50 | 0,97 | 10 | 12,67 | 0,82 | 6 | 10,86 | 1,21 | 7 |
| | Sedang | 11,15 | 1,27 | 20 | 11,00 | 1,50 | 25 | 10,54 | 1,27 | 26 |
| | Rendah | 10,38 | 2,06 | 8 | 11,00 | 0,92 | 8 | 10,71 | 1,60 | 7 |
| | SubTotal | 11,34 | 1,56 | 38 | 11,26 | 1,43 | 39 | 10,62 | 1,29 | 40 |
| Rendah | Tinggi | 11,86 | 0,99 | 8 | 11,22 | 0,44 | 9 | 9,57 | 0,53 | 7 |
| | Sedang | 10,21 | 0,66 | 24 | 10,24 | 0,44 | 21 | 8,67 | 0,56 | 24 |
| | Rendah | 9,00 | 1,41 | 7 | 8,70 | 0,95 | 10 | 7,22 | 0,44 | 9 |
| | Sub Total | 10,33 | 1,26 | 39 | 10,08 | 1,07 | 40 | 8,50 | 0,93 | 40 |
| Total | Tinggi | 13,12 | 1,41 | 32 | 12,22 | 1,28 | 27 | 10,88 | 1,39 | 25 |
| | Sedang | 11,42 | 1,52 | 64 | 10,04 | 1,44 | 66 | 10,12 | 1,60 | 73 |
| | Rendah | 10,33 | 1,91 | 21 | 10,18 | 1,80 | 27 | 9,50 | 2,32 | 24 |
| | Total | 11,69 | 1,83 | 117 | 11,12 | 1,64 | 120 | 10,16 | 1,77 | 122 |

Catatan: Skor ideal 16; BMJ (berbasis masalah dengan JIGSAW, BM (berbasis masalah), KV (konvensional)

- 1) Ditinjau secara keseluruhan, pada tiap level sekolah, dan level kemampuan awal matematika siswa, kemampuan komunikasi matematis siswa dengan pembelajaran BMJ lebih baik dari siswa dengan pembelajaran BM dan keduanya lebih baik dari siswa dengan pembelajaran KV
- 2) Makin tinggi level sekolah, pada semua jenis pembelajaran, kemampuan komunikasi matematis siswa juga makin tinggi. Hal ini menunjukkan bahwa level sekolah berpengaruh terhadap pencapaian kemampuan komunikasi matematis siswa.
- 3) Ditinjau secara keseluruhan dan pada tiap level sekolah, makin tinggi kemampuan awal matematika siswa, makin tinggi pula kemampuan komunikasi matematis siswa. Temuan ini

menunjukkan bahwa kemampuan awal matematika siswa memberi pengaruh terhadap pencapaian kemampuan komunikasi matematis siswa.

- 4) Terdapat interaksi antara pendekatan pembelajaran dan level sekolah terhadap kemampuan komunikasi matematis siswa.
- 5) Tidak terdapat interaksi antara pendekatan pembelajaran dengan tingkat kemampuan awal siswa (TKAS) terhadap kemampuan komunikasi matematis siswa.

Kemandirian belajar siswa diukur dengan menggunakan skala model Likert dan meliputi komponen: berinisiatif belajar; mendiagnosis kebutuhan belajar; menetapkan tujuan belajar; memonitor, mengatur dan mengontrol kinerja atau belajar; memandang kesulitan sebagai tantangan; mencari dan memanfaatkan sumber belajar yang relevan; memilih dan menerapkan strategi belajar; mengevaluasi proses dan hasil belajar; serta *self-concept* (konsep diri). Kemudian dengan menggunakan uji Anova dua jalur untuk kemandirian belajar dengan faktor level sekolah dan pendekatan pembelajaran dan Anova dua jalur untuk kemandirian belajar dengan faktor kemampuan awal matematika siswa dan pendekatan pembelajaran diperoleh temuan sebagai berikut.

Tabel 3
Kemandirian Belajar Siswa dalam Matematika Berdasarkan
Pendekatan Pembelajaran, Peringkat Sekolah, dan TKAS

| Level sekolah | TKAS | Pendekatan Pembelajaran | | | | | | | | |
|---------------|--------------|-------------------------|--------------|------------|---------------|--------------|------------|---------------|--------------|------------|
| | | BMJ | | | BM | | | KV | | |
| | | \bar{X} | Sd | N | \bar{X} | Sd | n | \bar{X} | sd | n |
| Tinggi | Tinggi | 143,07 | 25,98 | 15 | 137,67 | 11,26 | 12 | 133,27 | 10,63 | 11 |
| | Sedang | 138,30 | 6,87 | 20 | 126,75 | 14,34 | 20 | 116,78 | 7,64 | 23 |
| | Rendah | 141,20 | 9,42 | 5 | 130,33 | 6,46 | 9 | 126,75 | 12,61 | 8 |
| | Total | 140,45 | 11,35 | 40 | 130,73 | 12,78 | 41 | 123,00 | 11,78 | 42 |
| Sedang | Tinggi | 136,36 | 15,99 | 11 | 129,29 | 8,22 | 7 | 116,50 | 15,10 | 8 |
| | Sedang | 134,15 | 7,70 | 20 | 123,73 | 8,89 | 26 | 107,72 | 9,76 | 25 |
| | Rendah | 131,43 | 7,78 | 7 | 116,29 | 10,55 | 7 | 99,25 | 2,91 | 8 |
| | Total | 134,29 | 10,60 | 38 | 123,40 | 9,67 | 40 | 107,78 | 11,33 | 41 |
| Rendah | Tinggi | 127,00 | 7,01 | 8 | 119,00 | 7,62 | 7 | 100,20 | 3,27 | 5 |
| | Sedang | 127,25 | 10,57 | 24 | 119,43 | 9,61 | 21 | 102,40 | 9,35 | 24 |
| | Rendah | 108,71 | 11,04 | 7 | 112,91 | 15,29 | 11 | 94,10 | 3,78 | 10 |
| | Total | 123,87 | 12,14 | 39 | 117,51 | 11,31 | 39 | 99,77 | 8,32 | 39 |
| Total | Tinggi | 137,12 | 15,40 | 34 | 130,38 | 12,17 | 26 | 120,79 | 17,13 | 24 |
| | Sedang | 132,86 | 9,74 | 64 | 123,28 | 11,21 | 67 | 108,72 | 10,73 | 72 |
| | Rendah | 125,63 | 16,50 | 19 | 119,59 | 13,79 | 27 | 105,73 | 16,15 | 26 |
| | Total | 132,92 | 13,23 | 117 | 123,99 | 12,48 | 120 | 110,46 | 14,32 | 122 |

Skor ideal 180; BMJ (berbasis masalah dengan JIGSAW, BM (berbasis masalah) , KV(konvensional)

- 1) Ditinjau secara keseluruhan, pada tiap level sekolah, kemandirian belajar siswa dengan pembelajaran BMJ lebih baik dari siswa dengan pembelajaran BM dan keduanya lebih baik dari siswa dengan pembelajaran KV

- 2) Makin tinggi level sekolah, pada semua jenis pembelajaran, kemandirian belajar siswa juga makin tinggi. Hal ini menunjukkan bahwa level sekolah berpengaruh terhadap pencapaian kemandirian belajar siswa.
- 3) Ditinjau secara keseluruhan dan pada tiap jenis pembelajaran makin tinggi kemampuan awal matematika siswa, makin tinggi pula kemandirian belajar siswa. Namun pada tiap level sekolah, dan level kemampuan awal matematika pencapaian kemandirian belajar siswa tidak konsisten. Temuan ini menunjukkan bahwa pengaruh kemampuan awal matematika siswa terhadap pencapaian kemandirian belajar siswa tidak konsisten.
- 4) Terdapat interaksi antara pendekatan pembelajaran dan level sekolah terhadap kemandirian belajar siswa.
- 5) Tidak terdapat interaksi antara pendekatan pembelajaran dengan tingkat kemampuan awal siswa (TKAS) terhadap kemandirian belajar siswa.

Selain temuan yang telah disajikan di atas, diperoleh pula hasil analisis rasional sebagai berikut.

- 1) Dari faktor peringkat sekolah dan pendekatan pembelajaran, ternyata pembelajaran BMJ berperan lebih besar daripada peran faktor peringkat sekolah terhadap pencapaian kemandirian belajar siswa. Rasional tersebut tergambar dari kemandirian belajar siswa pada sekolah peringkat sedang dengan pembelajaran BMJ lebih baik daripada kemandirian belajar siswa dengan pembelajaran BM dan KV pada sekolah level tinggi. Demikian pula kemandirian belajar siswa pada sekolah level rendah dengan pembelajaran BMJ lebih baik daripada kemandirian belajar siswa pada sekolah peringkat sedang dengan pembelajaran BM dan KV.
- 2) Dari faktor TKAS dan pendekatan pembelajaran, ternyata pembelajaran BMJ berperan lebih besar daripada peran TKAS terhadap pencapaian kemandirian belajar siswa. Hal ini dapat dilihat dari kemandirian belajar siswa dengan TKAS sedang dengan pembelajaran BMJ lebih baik dari kemandirian belajar siswa dengan TKAS baik dengan pembelajaran BM dan KV. Demikian pula kemandirian belajar siswa dengan TKAS rendah dengan pembelajaran BMJ lebih baik dari kemandirian belajar siswa dengan TKAS sedang dengan pembelajaran BM dan KV.
- 3) Dengan demikian dari ketiga faktor yaitu peringkat sekolah, pembelajaran dan TKAS maka pembelajaran BMJ yang paling berperan terhadap pencapaian kemandirian belajar siswa.

Selanjutnya melalui analisis asosiasi dengan menggunakan tabel kontigensi dan statistik χ^2 diperoleh temuan adanya asosiasi yang tinggi antara kemampuan pemecahan masalah dan kemampuan komunikasi matematis, dan terdapat asosiasi yang cukup antara kemampuan pemecahan masalah dengan kemandirian belajar dan antara kemampuan komunikasi matematis dengan kemandirian belajar

KESIMPULAN

Berdasarkan analisis data dan pembahasan yang telah dikemukakan pada Bagian C, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

Secara keseluruhan faktor level sekolah, level kemampuan awal matematika siswa, pembelajaran berbasis masalah dengan setting kooperatif tipe Jigsaw (BMJ), pembelajaran berbasis masalah (BM) dan pembelajaran konvensional memberikan peranan berarti terhadap pencapaian kemampuan pemecahan masalah dan komunikasi matematik serta kemandirian belajar siswa. Namun demikian peranan pembelajaran BMJ paling unggul dibandingkan dengan peran faktor lainnya terhadap pencapaian kemampuan pemecahan masalah dan komunikasi matematis serta kemandirian belajar siswa. Selain itu, terhadap pencapaian kemampuan pemecahan masalah dan komunikasi matematis serta kemandirian belajar siswa, peran level sekolah lebih konsisten dibandingkan dengan peran level kemampuan awal matematika.

Selain itu diperoleh kesimpulan pula bahwa terdapat interaksi antara pembelajaran dengan level sekolah dan antara pembelajaran dengan level kemampuan awal matematika siswa terhadap

kemampuan komunikasi matematis. Namun tidak terdapat interaksi antara pembelajaran dengan level sekolah dan antara pembelajaran dengan level kemampuan awal matematika siswa terhadap kemampuan pemecahan masalah matematis dan terhadap kemandirian belajar.

Kesimpulan lainnya adalah terdapat asosiasi yang tinggi antara kemampuan pemecahan masalah dengan kemampuan komunikasi matematis, dan antara kemampuan komunikasi matematis dengan kemandirian belajar. Namun terdapat asosiasi yang cukup antara kemampuan pemecahan masalah dengan kemandirian belajar.

SARAN

1. Pembelajaran dengan pendekatan Berbasis Masalah dengan *setting* kooperatif tipe Jigsaw hendaknya dijadikan alternatif pendekatan pembelajaran di sekolah terutama untuk siswa sekolah peringkat tinggi dan sedang dalam pembelajaran topik-topik tertentu terutama topik-topik baru yang berkaitan dengan topik-topik sebelumnya yang sudah dipelajari siswa, sehingga pembelajaran matematika menjadi lebih bermakna.
2. Pembelajaran dengan pendekatan Berbasis Masalah dengan *setting* kooperatif tipe Jigsaw hendaknya dijadikan alternatif pendekatan pembelajaran di sekolah terutama untuk siswa dengan tingkat kemampuan awal (TKAS) sedang dan level sekolah sedang, sedangkan untuk level sekolah dan TKAS-nya rendah lebih baik digunakan pendekatan berbasis masalah (BM).
3. Agar siswa dengan tingkat kemampuan awal (TKAS) rendah dapat mengikuti pembelajaran dengan menggunakan pendekatan Berbasis Masalah dengan *setting* kooperatif Tipe Jigsaw, maka hendaknya guru menurunkan tingkat kesukaran materi matematika yang akan disajikan sehingga secara bertahap siswa dapat mengikuti pembelajaran dengan baik.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdi, A. (2004). *Senyum Guru Matematika dan Upaya Bangkitkan Gairah Siswa*. [Online]. Tersedia: http://www.waspada.co.id/serba_serbi/pendidikan/artikel.php?article_id=6722 [28 Maret 2005]
- Ansyari. B. (2004), *Menumbuhkembangkan kemampuan pemahaman dan komunikasi matematik siswa SMU melalui strategi Think-talk-write*. Disertasi pada Sekolah Pascasarjana Universitas Pendidikan Indonesia . Tidak dipublikasi.
- Asikin, M. (2002). *Menumbuhkan Kemampuan Komunikasi Matematika melalui Pembelajaran Matematika Realistik*. Jurnal Matematika atau Pembelajarannya, ISSN : 0852-7792 Tahun VIII, Edisi Khusus, Juli 2002.
- Astuty, W. W. (2000). *Penerapan Strategi Belajar Kooperatif Tipe Student Teams-Achievment Divisions (STAD) Pada Pembelajaran Matematika Kelas II di MAN Magelang*. Tesis. UPI Bandung : Tidak Dipublikasikan.
- Badan Standar Nasional Pendidikan (2006). *Standar Kompetensi dan Kompetensi Dasar Matematika SMA/MA*. Jakarta: Departemen Pendidikan Nasional.
- Dahar, R.W. (1996). *Teori-teori Belajar*. Jakarta : Erlangga
- Darta (2003). "Kesulitan Mahasiswa dalam Menyelesaikan Masalah Matematika". *Metalogika* , Vol.6, no. 2. Juli 2003.

- Departemen Pendidikan dan Kebudayaan (1995). *Kurikulum Sekolah Menengah Umum*. GBPP Mata Pelajaran Matematika. Jakarta : Depdikbud.
- Depdiknas (2001). *Standar Nasional*. Silabus Matematika SLTP/MTs. Jakarta : Depdiknas
- Dewanto, S. P. (2007). *Meningkatkan Kemampuan Representasi Multipel Matematis Mahasiswa Melalui Belajar Berbasis-Masalah*. Disertasi UPI. Bandung : Tidak Dipublikasikan.
- Dwijanto. (2007). *Pengaruh Pembelajaran Berbasis Masalah Berbantuan Komputer Terhadap Pencapaian Kemampuan Pemecahan Masalah dan Berpikir Kreatif Matematik Mahasiswa*. Disertasi. UPI Bandung : Tidak Dipublikasikan.
- Effendy. O. U. (1993). *Dinamika Komunikasi*. Bandung : PT Remaja Rosdakarya.
- Hamzah, (2003). *Kemampuan pengajuan masalah dan pemecahan masalah siswa SMU melalui teknik probing*. Disertasi pada Sekolah Pascasarjana Universitas Pendidikan Indonesia . Tidak dipublikasi.
- Hasanah, A. (2005). *Mengembangkan Kemampuan Pemahaman dan Penalaran Matematik Siswa Sekolah Menengah Pertama Melalui Pembelajaran Berbasis Masalah yang Menekankan pada Representasi Matematik*. Tesis UPI. Bandung : Tidak Dipublikasikan.
- Hendriana, H. (2002) *Kemampuan Pengajuan dan Pemecahan Masalah Matematika siswa melalui Pembelajaran Terbalik*. Tesis pada Sekolah Pascasarjana Universitas Pendidikan Indonesia . Tidak dipublikasi.
- Herman, T. (2006). *Pembelajaran Berbasis Masalah untuk Meningkatkan Kemampuan Berpikir Tingkat Tinggi Siswa SMP*. Disertasi UPI. Bandung : Tidak dipublikasikan.
- Hulukati, E. (2005). *Mengembangkan Kemampuan Komunikasi dan Pemecahan Masalah Matematika Siswa SMP melalui Model Pembelajaran Generatif*. Disertasi UPI. Bandung : Tidak dipublikasikan.
- NCTM. (1989). *Curriculum and Evaluation Standard for School Mathematics*. Virginia : The NCTM Inc.
- NCTM. (2000). *Principles and Standards for Schools Mathematics*. USA : Reston. V.A
- Polya, G. (1985). *How to Solve I. A New Aspect Mathematical Methods*. New Jersey: Pearson Education. Inc.
- Ratnaningsih, N. and Herman, T. (2006): "Developing the Mathematical Reasoning of High School Students through Problem Based Learning". *Transaction of Mathematical Education for College and university Vol.9 No.2 Japan Society of Mathematics Education, Division for College and University*
- Ratnaningsih, N. (2007). *Pengaruh Pembelajaran Kontektual terhadap Kemampuan Berpikir Kritis dan Kreatif Matematik serta Kemandirian Belajar Siswa Sekolah Menengah Atas*. Disertasi. UPI Bandung : Tidak Dipublikasikan.

- Rohaeti, E.E. (2005). *Mengembangkan Kemampuan Penalaran dan Komunikasi Matematik melalui Penerapan Metode Improve*. Tesis UPI. Bandung : Tidak Dipublikasikan.
- Ruseffendi, E. T. (1988). *Pengantar kepada Membantu Guru Mengembangkan Kompetensinya dalam Pengajaran Matematika untuk Meningkatkan CBSA*. Bandung : Tarsito.
- Ruseffendi, E.T. (1994). *Dasar-dasar Penelitian Pendidikan dan Bidang Non-Eksakta Lainnya*. Semarang : IKIP Semarang Press.
- Slavin, R. E. (1995). *Cooperative Learning, Theory, Research and Practise*. Massachusetts : Allyn & Boccon.
- Stepien, W.J. (1997). *Design Problem-based Learning Unit*. Journal for the Education of the Gifted, 20(4), 380-400.
- Sudrajat (2002). *Penerapan SQ3R pada Pembelajaran Tindak Lanjut untuk Peningkatan Kemampuan Komunikasi dalam Matematika Siswa SMU*. Tesis UPI. Bandung : Tidak Dipublikasikan.
- Sugandi, A.I. (2001). *Pembelajaran Pemecahan Masalah Matematika melalui Model Belajar Kooperatif Tipe Team Assisted Individualization (TAI) pada Siswa Sekolah Menengah Umum*. Tesis UPI. Bandung : Tidak dipublikasikan.
- Suherman,E. dan Sukjaya, Y.(1990). *Petunjuk Praktis untuk Melaksanakan Evaluasi Pendidikan Matematika*. Bandung : Wijaya Kusumah.
- Sumarmo, U. (1987). *Kemampuan Pemahaman dan Penalaran Matematika Siswa SMA dikaitkan dengan Kemampuan Penalaran Logik Siswa dan Beberapa Unsur Proses Belajar Mengajar*. Disertasi. IKIP Bandung : Tidak Dipublikasikan.
- Sumarmo, U. (1993). *Peranan Kemampuan Logik dan Kegiatan Belajar terhadap Kemampuan Pemecahan Masalah Matematika pada Siswa SMA di Kodya Bandung*. Laporan Penelitian. IKIP Bandung : Tidak Dipublikasikan.
- Sumarmo, U. (1994). *Suatu Alternatif Pengajaran untuk Meningkatkan Kemampuan Pemecahan Masalah pada Guru dan Siswa SMA di Kodya Bandung*. Laporan Penelitian. IKIP Bandung : Tidak Dipublikasikan.
- Sumarmo, U. (1999). *Implementasi Kurikulum Matematika 1993 pada Sekolah Dasar dan Sekolah Menengah*. Laporan Penelitian. IKIP Bandung : Tidak Dipublikasikan.
- Sumarmo, U. dkk. (2002). *Alternatif Pembelajaran Matematika dalam Menerapkan Kurikulum Berbasis Kompetensi*. Makalah pada Seminar Tingkat Nasional FPMIPA UPI. Bandung : Tidak Dipublikasikan.
- Sumarmo, U. (2003). *Pengembangan Berpikir Matematik Tingkat Tinggi pada Siswa SLTP dan SMU serta Mahasiswa Strata Satu (SI) melalui berbagai Pendekatan Pembelajaran*. Bandung, Laporan Penelitian Pascasarjana UPI. Bandung : Tidak dipublikasikan.

- Sumarmo, U. (2004). *Kemandirian Belajar: Apa, Mengapa, dan Bagaimana Dikembangkan pada Peserta Didik*. Makalah disajikan pada Seminar Nasional Pendidikan Matematika di UNY
- Sumarmo, U. (2005). *Pengembangan Berpikir Matematik Tingkat Tinggi Siswa SLTP dan SMU serta Mahasiswa Strata Satu melalui Berbagai Pendekatan Pembelajaran*. LPPM UPI : Laporan Penelitian Hibah Pascasarjana.
- Suparno, P. (1997). *Filsafat Konstruktivisme dalam Pendidikan*. Yogyakarta : Penerbit Kanisius.
- Suryadi, D. (2004). *Penggunaan Pendekatan Pembelajaran Tidak Langsung serta Pendekatan Gabungan Langsung dan Tidak Langsung dalam Rangkaian Meningkatkan Kemampuan Berpikir Matematik Tingkat Tinggi Siswa SLTP*. Disertasi. UPI Bandung : Tidak dipublikasikan.
- Sudrajat (2002) *Penerapan SQ3R pada Pembelajaran Tindak Lanjut untuk Penigkatan Kemamuan Komunkasi dalam Matematika Siswa SMU*. Tesis pada Sekolah Pascasarjana Universitas Pendidikan Indonesia . Tidak dipublikasi.
- Sugandi, A.I. (2001) *Pembelajaran Pemecahan Masalah Matematika melalui Model Belajar Kooperatif Tipe Team Assisted Individualization (TAI) pada Siswa Sekolah Menengah Umum* Tesis pada Sekolah Pascasarjana Universitas Pendidikan Indonesia . Tidak dipublikasi.
- Wahyudin. (1999). *Kemampuan Guru Matematika, Calon Guru Matematika dan Siswa dalam Mata Pelajaran Matematika*. Disertasi UPI. Bandung : Tidak dipublikasikan.
- Wardani, S. (2002). *Pembelajaran Pemecahan Masalah Matematika melalui Model Kooperatif Tipe Jigsaw*. Tesis UPI. Bandung : Tidak dipublikasikan.
- Webb, N.L. dan Coxford, A.F. (1993). *Assesment in Mathematics Classroom*. Yearbook. NCTM : Reston, Virginia.

**PENERAPAN METODE PEMBELAJARAN PROBLEM SOLVING
MODEL POLYA UNTUK MENINGKATKAN
KEMAMPUAN MEMECAHKAN MASALAH BAGI SISWA KELAS IX J
DI SMPN 3 CIMAHI**

Kokom Komariah

*SMPN 3 Cimahi
Email: Komaryah@gmail.com*

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui penerapan metode pembelajaran *problem solving* model Polya serta peningkatan hasil belajar siswa setelah mengikuti kegiatan pembelajaran. Secara khusus penelitian ini bertujuan untuk: (1) mendeskripsikan pelaksanaan metode pembelajaran *problem solving* model polya pada program pembelajaran intensif siap menghadapi UN 2011 pada mata pelajaran matematika yang mengacu pada SKL, (2) mengetahui peningkatan kemampuan memecahkan masalah matematika siswa kelas IX J SMPN 3 Cimahi dengan metode pembelajaran *problem solving* model polya. Penelitian ini dilaksanakan di Kelas IX J SMPN 3 Cimahi yang terdiri dari 40 siswa pada tanggal 14 Maret sampai 26 maret 2011. Rancangan penelitian yang digunakan adalah penelitian tindakan kelas. Penelitian ini terdiri dari dua siklus. Siklus I membahas tentang menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan perbandingan. Siklus II membahas tentang menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan jual-beli dan perbankan atau koperasi. Instrumen yang digunakan untuk mengukur kemampuan memecahkan masalah adalah hasil belajar siswa melalui tes pada akhir masing-masing siklus. Hasil penelitian menunjukkan bahwa metode pembelajaran *problem solving* model Polya dapat meningkatkan kemampuan siswa dalam memecahkan masalah matematika. Hal ini ditunjukkan dengan adanya peningkatan rata-rata nilai hasil belajar siswa seperti berikut ini. Rata-rata hasil belajar siswa pada siklus I meningkat sebesar 3,7 yaitu dari 52,4 menjadi 56,1. Sedangkan pada siklus II meningkat sebesar 8,9 yaitu dari 56,1 menjadi 65. Dengan pembelajaran ini siswa lebih teliti dalam mengerjakan suatu soal, sehingga tingkat kesalahan dalam mengerjakan soal juga berkurang. Kendala yang masih dihadapi adalah kurangnya kemampuan siswa dalam materi apersepsi yang mendukung penyelesaian masalah.

Kata kunci: *problem solving* model Polya

PENDAHULUAN

Latar Belakang Masalah

Perubahan paradigma dalam proses pembelajaran yang tadinya berpusat pada guru (teacher centered) menjadi pembelajaran yang berpusat pada siswa (learner centered) diharapkan dapat mendorong siswa untuk terlibat secara aktif dalam membangun pengetahuan, sikap dan perilaku. Dalam proses pembelajaran yang berpusat pada siswa, siswa memperoleh kesempatan dan fasilitas untuk membangun sendiri pengetahuannya sehingga mereka akan memperoleh pemahaman yang mendalam (deep learning) dan pada akhirnya dapat meningkatkan kualitas hasil belajar siswa.

Pembelajaran yang inovatif dengan pendekatan berpusat pada siswa (student centered learning) memiliki keragaman metode pembelajaran yang menuntut partisipasi aktif dari siswa. Metode- metode tersebut antara lain adalah: a) berbagi informasi ; (b) belajar dari pengalaman

(experience Based); (c) pembelajaran melalui pemecahan masalah (problem solving based).

Problem Solving dapat diartikan sebagai rangkaian aktivitas pembelajaran yang menekankan kepada proses penyelesaian masalah yang dihadapi secara ilmiah. Terdapat 3 ciri utama dari *problem solving*.

1. *problem solving* merupakan rangkaian aktivitas pembelajaran, artinya dalam implementasi Problem Solving ada sejumlah kegiatan yang harus dilakukan siswa. Problem Solving tidak mengharapkan siswa hanya sekedar mendengarkan, mencatat, kemudian menghafal materi pelajaran, akan tetapi melalui *problem solving* siswa aktif berpikir, berkomunikasi, mencari dan mengolah data, dan akhirnya menyimpulkan.
2. Aktivitas pembelajaran diarahkan untuk menyelesaikan masalah. *problem solving* menempatkan masalah sebagai kata kunci dari proses pembelajaran. Artinya, tanpa masalah maka tidak mungkin ada proses pembelajaran.
3. Pemecahan masalah dilakukan dengan menggunakan pendekatan berpikir secara ilmiah. Berpikir dengan menggunakan metode ilmiah adalah proses berpikir deduktif dan induktif. Proses berpikir ini dilakukan secara sistematis dan empiris. Sistematis artinya berpikir ilmiah dilakukan melalui tahapan-tahapan tertentu; sedangkan empiris artinya proses penyelesaian masalah didasarkan pada data dan fakta yang jelas.

Salah satu model pemecahan masalah adalah model Polya. Langkah-langkah dalam pembelajaran *problem solving* menurut Polya ada 4, yaitu : (1) memahami masalah, (2) menentukan rencana strategi penyelesaian masalah, (3) menyelesaikan strategi penyelesaian masalah, dan (4) memeriksa kembali jawaban yang diperoleh. Pembelajaran ini dimulai dengan pemberian masalah, kemudian siswa berlatih memahami, menyusun strategi dan melaksanakan strategi sampai dengan menarik kesimpulan. Guru membimbing siswa pada setiap langkah *problem solving* dengan memberikan pertanyaan yang mengarah pada konsep.

Dalam implementasinya di lapangan sampai saat ini proses pembelajaran yang berpusat pada siswa masih mengalami banyak kendala. Salah satu kendalanya adalah rendahnya kemampuan siswa dalam memecahkan masalah yang ditandai dengan (1) rendahnya kemampuan siswa dalam menganalisis masalah, (2) rendahnya kemampuan siswa dalam merancang rencana penyelesaian masalah, dan (3) rendahnya kemampuan siswa dalam melaksanakan perhitungan terutama yang berkaitan dengan materi apersepsi yang mendukung proses pemecahan masalah.

Mengacu pada berbagai teori diatas maka metode *problem solving* model Polya sangat tepat untuk diterapkan sebagai solusi untuk meningkatkan kemampuan siswa dalam menyelesaikan masalah matematika.

Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah di atas, masalah penelitian ini dirumuskan, apakah penerapan metode *problem solving* model Polya dapat meningkatkan kemampuan siswa dalam menyelesaikan masalah matematika ?

Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah : “Untuk mengetahui apakah penerapan metode *problem solving* model Polya dapat meningkatkan kemampuan siswa dalam menyelesaikan masalah matematika.”

Manfaat Penelitian

Menyimak uraian pada tujuan penelitian tersebut di atas, dan dengan tercapainya tujuan tersebut dapat dipetik manfaat penelitian, yaitu:

1. Bagi guru; jika penerapan metode *problem solving* model Polya dapat meningkatkan kemampuan siswa dalam menyelesaikan masalah, maka dalam menentukan metode pembelajaran, metode *problem solving* model Polya tepat untuk digunakan.
2. Bagi siswa; akan tumbuh kesadaran pentingnya mengembangkan kemampuan dalam

memecahkan masalah matematika, sehingga masalah akan dengan mudah terselesaikan.

3. Bagi dunia pendidikan; bahwa paradigma pendidikan sekarang berubah ke arah student centre yang berarti bahwa proses pembelajaran lebih ditekankan pada aktivitas siswa sebagai konsekuensinya siswa dituntut untuk memiliki kemampuan dalam menyelesaikan masalah.

METODE PENELITIAN

Rancangan Penelitian

Desain penelitian ini adalah penelitian tindakan kelas, dilaksanakan pada program pembelajaran intensip siap UN 2011 yang dilaksanakan mulai tanggal 14 Maret sampai 26 maret 2011. Penelitian tindakan kelas ini terdiri dari 2 siklus, setiap siklus dilaksanakan dalam 3 pertemuan yang masing- masing berdurasi 2 x 40 menit.

Subjek Penelitian

Subjek penelitian ini adalah seluruh siswa kelas IX J tahun pelajaran 2010-2011, di lingkungan SMP Negeri 3 Cimahi Kota Cimahi. sebanyak 40 orang terdiri dari 23 orang siswa perempuan dan 17 orang siswa laki- laki.

Prosedur Penelitian

Secara garis besar penelitian yang dilakukan ini dapat dibagi menjadi empat tahap, yaitu

1. Tahap Persiapan

Tahap persiapan ini meliputi :(a) Menentukan Subyek Penelitian, (b) Menentukan banyak siklus dan (c) Membuat Alat Pengumpul Data

2. Tahap Pelaksanaan

- a. Melaksanakan siklus I berdasarkan rencana tindakan 1.
- b. Melakukan analisis terhadap informasi pada instrumen penelitian pada siklus I, serta merefleksi kekurangan dan kelebihan dalam pembelajaran pada siklus I.
- c. Merencanakan tindakan 2 untuk memperbaiki kekurangan pada siklus I
- d. Melaksanakan siklus II berdasarkan rencana tindakan 2
- e. Melakukan analisis terhadap informasi pada instrumen penelitian pada siklus II, serta merefleksi kekurangan dan kelebihan dalam pembelajaran pada siklus II.
- f. Data-data yang diperoleh pada setiap siklus tindakan diolah untuk mengetahui sejauh mana peningkatan kemampuan siswa dalam memecahkan masalah dengan menerapkan metode *problem solving model Polya*.

3. Tahap Evaluasi dan refleksi

Evaluasi:

Menganalisis hasil belajar siswa untuk mengetahui keberhasilan penerapan metode problem solving yang telah dilaksanakan pada tiap siklus.

Refleksi:

Mereview proses pembelajaran yang sudah dilaksanakan untuk mengetahui factor-faktor pendukung dan kendala yang dihadapi.

4. Tahap pelaporan

Pelaporan direalisasikan dalam bentuk makalah.

Instrumen dan Teknik Analisis Data

Instrumen yang digunakan dalam penelitian ini adalah instrumen pengumpul data hasil penelitian yaitu berupa Instrumen kinerja siswa berkenaan dengan kemampuan siswa dalam strategi pemecahan masalah. Instrumen ini memuat penilaian terhadap komponen indikator kemampuan pemecahan masalah matematika yang mengacu pada langkah- langkah pemecahan masalah model Polya yang meliputi kemampuan memahami masalah (*understanding the*

problem), merencanakan penyelesaian (*devising a plan*), melaksanakan perhitungan (*carrying out the plan*), dan memeriksa kembali proses atau hasil (*looking back*).

Teknik analisis data dilakukan dengan menganalisis kinerja siswa dalam menyelesaikan masalah matematika melalui penskoran. Skor penilaian yang digunakan adalah cara yang lazim dilakukan, yaitu skala 10 –100. Sehingga untuk mengetahui peningkatan kemampuan siswa dalam menyelesaikan masalah dilakukan dengan melihat peningkatan rata-rata hasil belajar.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Setelah data terkumpul melalui observasi dan analisis instrument pengumpul data mengenai kinerja siswa dalam menyelesaikan masalah ternyata menunjukkan bahwa metode *problem solving* model polya dapat meningkatkan kemampuan siswa dalam memecahkan masalah matematika dengan rincian sebagai berikut:

1. Kemampuan pada aspek menganalisis masalah, ditunjukkan dengan kemampuan siswa dalam menentukan apa yang diketahui, apa yang ditanyakan, dan apa yang diperlukan.
2. Kemampuan dalam merencanakan penyelesaian masalah, ditunjukkan dengan kemampuan mengkonsepsikan atau menentukan konsep-konsep yang terkait yang mendukung proses pemecahan masalah.
3. Kemampuan melakukan perhitungan sesuai dengan yang direncanakan, hal ini ditunjukkan dengan kemampuan siswa menyelesaikan perhitungan secara sistematis sesuai dengan tahap-tahap yang direncanakan.
4. Kemampuan mengoreksi langkah-langkah penyelesaian yang sudah dilakukan, hal ini ditunjukkan dengan sikap siswa yang meragukan hasil akhir setelah proses perhitungan dan tertuntut untuk mengoreksi kembali langkah-langkah penyelesaian yang saling terkait.

Pada siklus 1 siswa melakukan pemecahan masalah sesuai dengan model Polya. Pada proses menganalisis masalah siswa sudah terampil menentukan factor yang diketahui, dan factor yang ditanyakan. Namun masih ditemukan kendala dalam menyusun rencana penyelesaian masalah dikarenakan hal-hal seperti berikut ini:

1. Sempitnya wawasan siswa terhadap konsep-konsep yang terkait dengan suatu masalah.
2. Kurangnya kemampuan siswa dalam materi apersepsi.

Karena keterbatasan tersebut maka kemampuan siswa dalam memecahkan masalah belum ada peningkatan yang signifikan yaitu baru terjadi kenaikan rata-rata nilai sebesar 3,7 yaitu dari 52,4 menjadi 56,1. Berdasarkan hasil refleksi pada siklus 1 maka disusun rencana untuk pelaksanaan siklus 2 yaitu dengan penugasan terstruktur mengenai keterampilan siswa dalam menyusun rencana penyelesaian masalah dengan menekankan pada keterampilan siswa menganalisis konsep-konsep yang terkait dari suatu masalah matematika yang diberikan dan mengingatkan kembali penguasaan materi apersepsi yang terkait tersebut.

Dengan diterapkannya rencana tersebut pada siklus ke-2 terdapat peningkatan kemampuan siswa dalam memecahkan masalah, hal ini bisa dilihat dari adanya peningkatan rata-rata nilai sebesar 8,9 yaitu dari 56,1 menjadi 65,0.

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan pembahasan terhadap masalah dalam tulisan ini maka dapat disimpulkan bahwa, metode *problem solving* model polya dapat meningkatkan kemampuan siswa dalam memecahkan masalah matematika. Langkah-langkah pemecahan masalah model polya dapat membimbing kreativitas siswa dalam menyelesaikan masalah secara ilmiah. Hal ini memotivasi siswa untuk dapat belajar secara mandiri dan melatih siswa untuk berpikir logis dan teliti sehingga kesalahan siswa dalam proses menyelesaikan masalah terkontrol dengan dilakukannya *looking back* terhadap langkah-langkah yang telah dilakukan.

Berdasarkan hasil analisis data, kendala yang dihadapi oleh siswa kelas IX dalam memecahkan masalah matematika yang terkait dengan SKL adalah:

1. Sempitnya wawasan siswa tentang keterkaitan antar konsep dalam matematika, sehingga siswa kesulitan dalam menyusun strategi pemecahan masalah.
2. Rendahnya kemampuan siswa pada materi apersepsi yang terkait sehingga siswa perlu diingatkan lagi, akibatnya pembelajaran menjadi tidak efektif dan efisien karena dalam kenyataannya banyak ditemukan siswa yang sama sekali tidak mengetahui tentang materi apersepsi tersebut dan hal ini menuntut guru untuk kembali memberikan pembelajaran ulang (remedial).

Untuk mengatasi kedua kendala tersebut, maka penulis menyarankan, agar pembelajaran matematika dibuat seperti pesan berangkai. Hal ini sesuai dengan karakteristik mata pelajaran matematika yang salah satunya adalah bersifat spiral artinya konsep sebelumnya merupakan fondasi bagi keberhasilan penguasaan materi selanjutnya. Untuk mewujudkannya sepanjang perjalanan jenjang kelas siswa harus ditantang dengan masalah- masalah matematika yang dalam penyelesaiannya mengaitkan beberapa konsep terdahulu yang sudah dipelajari sehingga imforcement atau penguatan konsep yang telah dikuasai siswa dapat dipertahankan.

DAFTAR PUSTAKA

- Adjie, N. dan Maulana. (2006). Pemecahan Masalah Matematika. Bandung : UPI Press
- Trianto. 2009. *Mendesain Model Pembelajaran Inovatif-Progresif: Konsep, Landasan, dan Implementasinya pada Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan (KTSP)*. Jakarta: Kencana
- Ahmadi, A. & Prasetya, J.T. (1997). *Strategi Belajar Mengajar*. Bandung: Pustaka Setia.
- Dahar, R.W.(1996). *Teori-Teori Belajar*, Jakarta; Erlangga.
- Jones, T. (2000). Instructional Approaches to Teaching Problem Solving in Mathematics : Integrating Theories of Learning and Technology. Final Paper, EDUC6100
- Suharsimi Arikunto (2002). *Prosedur Penelitian; Suatu Pendekatan Praktek*. J Jakarta: Rineka Cipta.
- Wahyudin. (2007). Strategi Belajar Mengajar Matematika. Bandung : Sekolah Pascasarjana UPI Bandung.

LAMPIRAN

Contoh masalah untuk menguji kemampuan menyelesaikan masalah berkaitan dengan skala dan perbandingan.

Sebuah gedung direncanakan selesai dibangun selama 20 hari oleh 28 pekerja. Setelah dikerjakan 8 hari, pekerjaan dihentikan seama 4 hari. Jika kemampuan bekerja setiap orang sama dan supaya pembangunan gedung selesai tepat waktu, banyak pekerja tambahan yang diperlukan adalah ...

Alternatif cara penyelesaian ke-1:

Langkah- langkah Penyelesaian:

1. Analisis masalah

Berdasarkan konteks cerita, masalah termasuk perbandingan berbalik nilai
Diketahui:

Banyak pekerja 28 orang kesanggupan waktu 20 hari

Waktu yang sudah dilaksanakan 8 hari maka sisa waktu tinggal $20-8 = 12$ hari.

Dari 12hari sisa waktu, pekerjaan diistirahatkan selama 4 hari, maka sisa waktu yang masih tersedia adalah $12-4 = 8$ hari

Artinya yang seharusnya diselesaikan selama 12 hari lagi oleh 28 pekerja harus diselesaikan dalam waktu 8 hari. Karena hal tersebut maka diperlukan penambahan pekerja.

2. **Rencana penyelesaian Masalah**

Menerapkan pola penyelesaian perbandingan berbalik nilai

$$\frac{\text{Waktu ideal}}{\text{waktu yang tersedia}} = \frac{\text{Banyak pekerja yang diharapkan}}{\text{Banyak pekerja yang sudah tersedia}}$$

3. **Melakukan perhitungan sesuai yang direncanakan**

Misal banyak pekerja yang diharapkan adalah x

$$\frac{12}{8} = \frac{x}{28}$$

Penyelesaian soal dilanjutkan dengan mengaitkan pada materi system persamaan linier satu variable dalam bentuk pecahan

Siswa diarahkan untuk berpikir logis,

Fokus masalah: menentukan berapa nilai x (satu x)

Ruas kiri dan ruas kanan dikalikan dengan 28, sehingga diperoleh:

$$\Leftrightarrow 28 \times \frac{12}{8} = 28 \times \frac{x}{28}$$

$$\Leftrightarrow \frac{12 \times 28}{8} = x$$

$$\Leftrightarrow x = 42$$

Artinya pekerjaan akan selesai tepat waktu jika dikerjakan oleh 42 orang pekerja.

Kesimpulan: Dengan demikian diperlukan penambahan pekerja sebanyak

42 orang – 28 orang = 14 Orang.

4. **Looking back**

Proses konfirmasi dengan mensubstitusikan 42 terhadap x pada persamaan

$$\frac{12}{8} = \frac{x}{28}$$

$$\Leftrightarrow \frac{12}{8} = \frac{42}{28}$$

$$\Leftrightarrow$$

12 x 28 = 42 x 8 Menghasilkan pernyataan benar

Alternatif penyelesaian ke- 2:

1. **Analisis masalah sama dengan di atas.**

2. **Rencana pemecahan masalah**

Dengan mengkomunikasikan masalah ke dalam diagram.

Misal perkalian jumlah pekerja dengan waktu didefinisikan sebagai volume pekerjaan. Maka:

Rencana awal didefinisikan sebagai berikut: Total Volum pekj= 28 orang x 20 hari = 560

Volum pekj dalam 8 hari pertama yang sudah dilaksanakan = 28 orang x 8 hari = 224

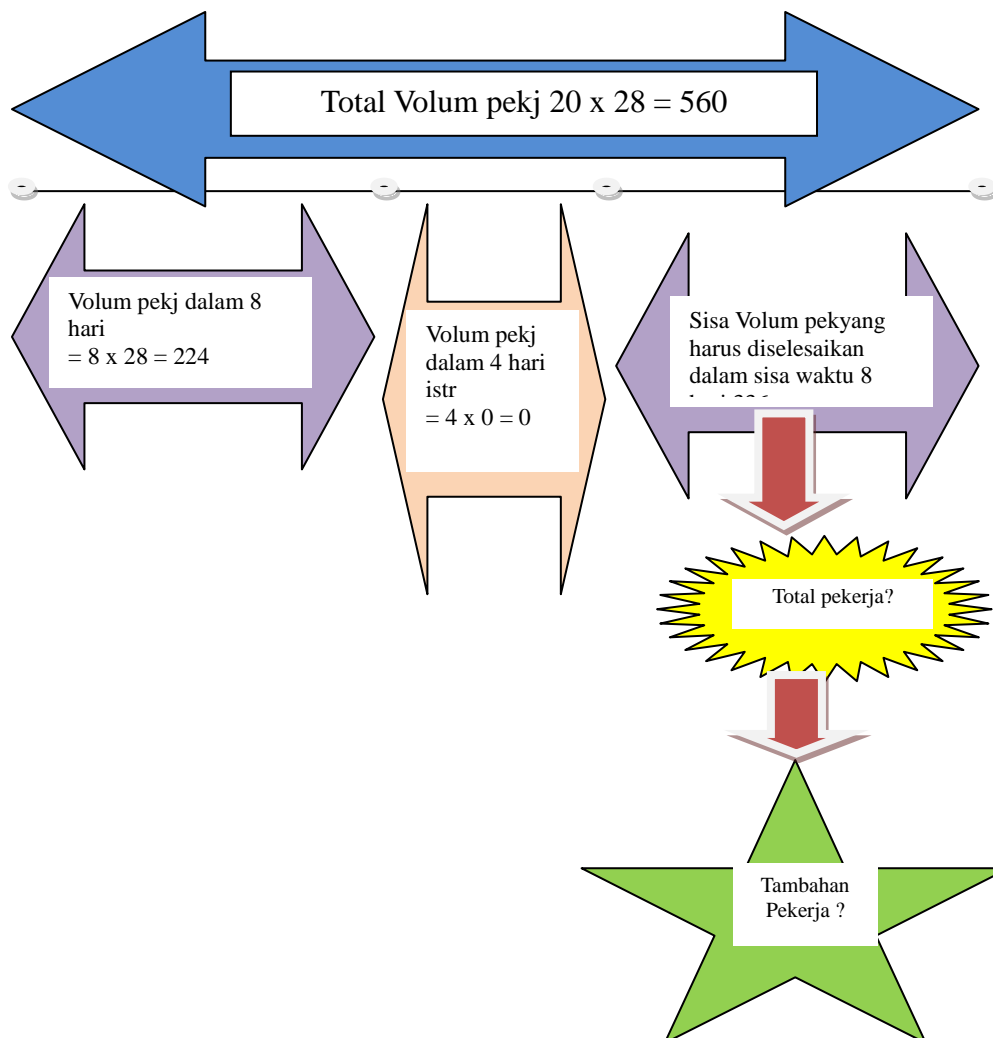
Volum pekj selama diberhentikan 4 hari $0 \text{ orang} \times 4 \text{ hari} = 0$ (0 orang artinya tidak ada satu orangpun yang bekerja)

Jadi sisa volum pekj $560 - 224 = 336$

Sehingga formula yang dipergunakan untuk mengetahui **total pekerja yang diperlukan** adalah **sisa volum pekj : sisa waktu yang tersedia, yaitu:** $336 : 8 = 42$

Dengan demikian diperlukan tambahan pekerja sebanyak $42 - 28 = 14$ orang.

Jika dikomunikasikan dalam diagram seperti berikut ini,



Contoh masalah untuk menguji kemampuan menyelesaikan masalah berkaitan dengan jual-beli dan perbankan atau koperasi.

Sebuah pedagang menjual jam tangan dengan harga Rp. 660.000,00. Pedagang tersebut mendapat untung 32%. Harga pembelian jam tangan tersebut adalah.....

Alternatif cara penyelesaian:

1. Analisis soal

Diketahui: Harga jual = Rp. 660.000,00.

Besar keuntungan = 32%.

Ditanyakan: Harga beli

2. **Rencana pemecahan masalah**

Landasan :

Definisi: besar keuntungan adalah prosentase keuntungan dikali harga pembelian

Konsep “untung”, adalah Harga jual > harga beli

maka masalah dirumuskan dengan: Harga jual = harga beli + keuntungan

3. **Proses perhitungan**

Misal harga beli = b dan harga jual = j

Maka: Harga jual = harga beli + keuntungan

$$\Leftrightarrow j = b + 32\% \times b$$

$$\Leftrightarrow j = \frac{132}{100}b \text{ (dikaitkan dengan operasi bilangan pecahan)}$$

$$\Leftrightarrow b = j : \frac{132}{100}$$

$$\Leftrightarrow b = 660.000 : \frac{132}{100}$$

$$\Leftrightarrow b = 500.000$$

4. **Looking Back**

Mengkonfirmasi kebenaran penyelesaian dengan dua konsep tentang keuntungan.

Harga beli = Rp. 500.000,00

Harga jual = Rp. 660.000,00

Konsep 1

$$\begin{aligned} \text{Besar keuntungan} &= \text{Harga jual} - \text{Harga beli} \\ &= \text{Rp. 660.000,00} - \text{Rp. 500.000,00} \\ &= \text{Rp.160.000,00} \end{aligned}$$

Konfirmasi dengan konsep 2.

Besar keuntungan = prosentasi keuntungan x harga beli

Besar keuntungan = 32% x Rp. 500.000,00 = Rp.160.000,00

Berdasarkan uraian di atas maka disimpulkan bahwa harga beli jam tangan adalah Rp.160.000,00

PENGARUH FAKTOR PERTUMBUHAN POPULASI TERHADAP EPIDEMI DEMAM BERDARAH DENGUE

Kusbudiono dan Basuki Widodo

Jurusan Matematika ITS Surabaya

Abstrak

Demam Berdarah Dengue telah menjadi salah satu penyakit yang tergolong epidemik dan endemik serta belum ditemukan obatnya. Pada daerah dengan tingkat kepadatan penduduk tinggi tingkat penyebaran juga akan semakin tinggi. Salah satu model pertumbuhan penduduk adalah model pertumbuhan populasi logistik akan dapat meramalkan tingkat kepadatan penduduk. Selama ini antara pertumbuhan penduduk dengan epidemik suatu penyakit dianggap sebagai sesuatu yang terpisah. Oleh karena itu, pada kesempatan kali ini penulis akan mencoba mengaitkan antara laju pertumbuhan populasi dari model pertumbuhan populasi logistik dengan epidemik penyakit demam berdarah Dengue. Metode penelitian pada tesis ini adalah studi pustaka dan simulasi model, nantinya akan dikaji model pertumbuhan populasi logistik. Selain itu juga akan dibahas kaitan antara pertumbuhan populasi dengan epidemik penyakit demam berdarah Dengue. Hasil dari penelitian ini adalah penyelesaian dan simulasi model pertumbuhan logistik dan model epidemik penyakit demam berdarah Dengue. Selain itu juga dihasilkan bahwa laju pertumbuhan populasi berpengaruh dalam epidemik penyakit demam berdarah Dengue.

Kata kunci: laju pertumbuhan populasi, model pertumbuhan populasi logistik

PENDAHULUAN

Perubahan jumlah populasi populasi setiap waktu merupakan salah satu penanda terjadinya pertumbuhan populasi yang dipengaruhi oleh jumlah kelahiran, kematian dan migrasi. Salah satu model pertumbuhan adalah model pertumbuhan kontinu khususnya model logistik. Dimana model pertumbuhan logistik tersebut tentunya mempunyai kelebihan dan kekurangan. Dengan diketahuinya banyaknya kelahiran, kematian dan migrasi maka laju perubahan populasi dapat dihitung. Kembali pada model pertumbuhan logistik, model ini merupakan pengembangan dari model pertumbuhan eksponensial yang pertama kali dicetuskan oleh Maltus. Model pertumbuhan logistik ini pertama kali dicetuskan oleh Pierre Velhust pada tahun 1838.(Muchyidin, 2009)

Salah satu contoh terapan model matematika yang diambil dalam penelitian ini adalah bidang kesehatan, yaitu terjadinya penyebaran penyakit demam berdarah. Penyakit demam berdarah Dengue merupakan salah satu penyakit menular yang dapat menimbulkan Kejadian Luar Biasa / wabah. Nyamuk penularnya (*Aedes aegypti*) dan virus Dengue tersebar luas, sehingga penularan penyakit demam berdarah dengue terjadi di semua tempat / wilayah yang terdapat nyamuk penular penyakit tersebut. (Agushybana, 2005)

Untuk itu perlu dikembangkan suatu sistem surveilans yang didukung oleh sistem komputer dan teknologi informasi. Sebelum digunakan, diberikan pelatihan kepada para tenaga yang akan mengoperasikannya.(Agushybana, 2005). Salah satu alat untuk menunjang sistem tersebut adalah model matematika yang berbentuk sistem persamaan differensial biasa order satu. Dalam penelitian ini akan dilakukan simulasi dan analisa dengan menyelesaikan model tersebut secara numerik dengan metode Runge-Kutta.

Pada daerah dengan tingkat kepadatan penduduk tinggi maka akan meningkatkan angka kejadian. (Djallaluddin dkk, 2004). Laju kelahiran dan kematian tidak hanya berpengaruh terhadap perubahan jumlah populasi. Akan tetapi keduanya juga berpengaruh terhadap epidemik penyakit.

Salah satunya adalah penyakit demam berdarah Dengue. Selama ini antara pertumbuhan penduduk dengan epidemik suatu penyakit dianggap sebagai sesuatu yang terpisah. Oleh karena itu, pada kesempatan kali ini penulis akan mencoba mengaitkan antara laju pertumbuhan populasi dari model pertumbuhan populasi logistik dengan epidemi penyakit demam berdarah Dengue.

Pada bagian awal akan dikaji macam-macam model pertumbuhan populasi. Selanjutnya dari bahasan mengenai pertumbuhan populasi penduduk ini diperoleh permasalahan sebagai berikut

- a. Bagaimana pengaruh laju pertumbuhan logistik terhadap dinamika penyebaran penyakit demam berdarah Dengue?
- b. Bagaimana penyelesaian dan simulasi model pertumbuhan logistik dan model penyebaran penyakit demam berdarah?

Tujuan utama dari penulisan tugas akhir ini adalah untuk menganalisa model pertumbuhan populasi dan kaitannya dengan epidemi penyakit demam berdarah. Untuk mencapai tujuan tersebut, terlebih dahulu akan dikaji model pertumbuhan populasi kontinu yang didalamnya membahas model pertumbuhan eksponensial dan logistik kemudian dikaji juga model penyebaran demam berdarah. Tujuan berikutnya adalah dari data-data yang diperoleh dilakukan simulasi dengan terlebih dahulu membuat program penyelesaian dari model logistik dan model penyebaran demam berdarah tersebut.

Manfaat yang dapat diperoleh dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

- a. bagi peneliti akan diperoleh tambahan informasi mengenai pengaruh dari laju pertumbuhan penduduk terhadap penyebaran penyakit demam berdarah dengue,
- b. bagi Dinas Kesehatan Kabupaten khususnya puskesmas puskesmas dengan menggunakan metode pada penelitian ini akan diperoleh taksiran jumlah penderita demam berdarah Dengue.

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini yaitu metode kajian pustaka dengan melakukan studi literature dan pengumpulan referensi mengenai teori-teori yang mendukung penyelesaian penelitian ini, antara lain :

- a. penyakit demam berdarah dengue,
- b. model matematika dari pertumbuhan logistik,
- c. model matematika dari penyebaran penyakit demam berdarah dengue,
- d. penyelesaian dari model matematika penyebaran penyakit demam berdarah.

ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Model Pertumbuhan Populasi Logistik

Model pertumbuhan populasi logistik ini merupakan penyempurnaan dari model pertumbuhan eksponensial diatas. Pada model ini jumlah populasi dipengaruhi oleh besar kecilnya daya dukung lingkungan seperti suplai makanan, tempat tinggal, kualitas bangunan dan lain sebagainya. Dengan hal tersebut diharapkan model ini mempunyai penyimpangan data populasi yang sangat kecil atau mempunyai kemiripan dengan data yang sebenarnya.

Untuk mengkonstruksi model pertumbuhan ini diasumsikan bahwa besarnya perubahan populasi (Δt) dalam selang waktu Δt sebanding dengan:

(1) banyaknya populasi pada saat t , $y(t)$

(2) selang waktu Δt

(3) proporsi “sisa” banyaknya individu dalam populasi yang belum digunakan $(1 - \frac{y}{K})$. Dengan K adalah jumlah maksimum banyaknya individu dalam suatu populasi.

Sehingga dari asumsi-asumsi diatas diperoleh hubungan $\Delta y(t) \propto y(t) \left(1 - \frac{y(t)}{K}\right) \Delta t$ yang berarti

$$\Delta y(t) = ry(t) \left(1 - \frac{y}{K} \right) \Delta t \quad (3.1)$$

dengan r merupakan konstanta kesebandingan. Hasil tersebut memberikan laju pertumbuhan populasi logistik sebagai berikut

$$\frac{dy}{dt} = ry(t) \left(1 - \frac{y(t)}{K} \right) \quad (3.2)$$

Dengan cara yang sama pada persamaan pertumbuhan eksponensial didapat solusi khusus persamaan (3.2)

$$y(t) = \frac{Ky_0}{K - y_0 e^{-rt} + y_0} \quad (3.3)$$

dari persamaan (3.3) untuk $t \rightarrow \infty$ didapat

$$y_{t \rightarrow \infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Ky_0}{K - y_0 e^{-rt} + y_0} = K \quad (3.4)$$

Hal tersebut berarti untuk jangka waktu yang sangat lama terdapat jumlah maksimum dari populasi tersebut yang membatasi pertumbuhan populasinya.

Sebagai ilustrasi akan dilakukan simulasi model dengan menggunakan data penduduk Indonesia antara tahun 1961 -2010 yang ditunjukkan oleh tabel 1.

Tabel 1. Daftar Jumlah Penduduk Indonesia

| Tahun | Jumlah Penduduk Indonesia |
|-------|---------------------------|
| 1961 | 97.100.000 |
| 1971 | 119.208.229 |
| 1980 | 147.490.298 |
| 1990 | 179.378.946 |
| 2000 | 205.132.458 |
| 2010 | 237.556.363 |

Dari tabel 1. terlihat bahwa dari mulai tahun 1961-2010 jumlah penduduk Indonesia mengalami kenaikan. Secara umum terlihat dari awal tahun pada tabel bila dibandingkan dengan akhir tahun pada tabel telah terjadi kenaikan jumlah penduduk.

Untuk menentukan model logistik dengan data jumlah penduduk Indonesia pada tabel 1, terlebih dahulu harus diketahui nilai K dan r . Salah satu caranya adalah melakukan pelinieran solusi persamaan logistik pada persamaan (3.3). Pelinieran solusi tersebut dapat menggunakan metode *nonlinier least squares estimation* yang memenuhi persamaan berikut:

$$y_i = \frac{\beta_1}{1 + e^{\beta_2 + \beta_3 t}} + \varepsilon_i \quad (3.5)$$

dengan y_i merupakan jumlah populasi pada saat t , β_1 adalah nilai asimtotik pertumbuhan populasi, β_2 jumlah populasi pada saat $t = 0$ dan β_3 kontrol laju pertumbuhan populasi. Pada tabel 1, jumlah penduduk Indonesia masih berada dibawah 400.000.000, dengan demikian dapat dipilih nilai $\beta_1 = 400.000.000$. Selanjutnya dimisalkan $t = 0$ adalah tahun 1961 dengan satuan waktu 10 tahun kemudian substitusikan kedalam persamaan (3.5) dan menggunakan nilai $y_0 = 97.100.000$ dari data tabel 1 serta diasumsikan error adalah 0, maka diperoleh

$$\beta_2 = 1,137 \quad (3.6)$$

dengan cara yang sama, untuk $t_1 = 1$ pada tahun 1971 diperoleh $\beta_3 = -0,281$. Dan dengan memadankan persamaan (3.3) dengan persamaan (3.5) diperoleh

$$K = 400.000.000$$

$$r = 0,281$$
(3.7)

Selanjutnya dengan mensubstitusikan nilai pada persamaan (3.7) kedalam persamaan (3.3) serta mensubstitusikan persamaan (3.6) dan (3.7) kedalam persamaan (3.5), diperoleh

$$y(t) = \frac{400.000.000 * 97.100.000}{250.000.000 - 97.100.000 e^{-0,281t} + 97.100.000}$$
(3.8)

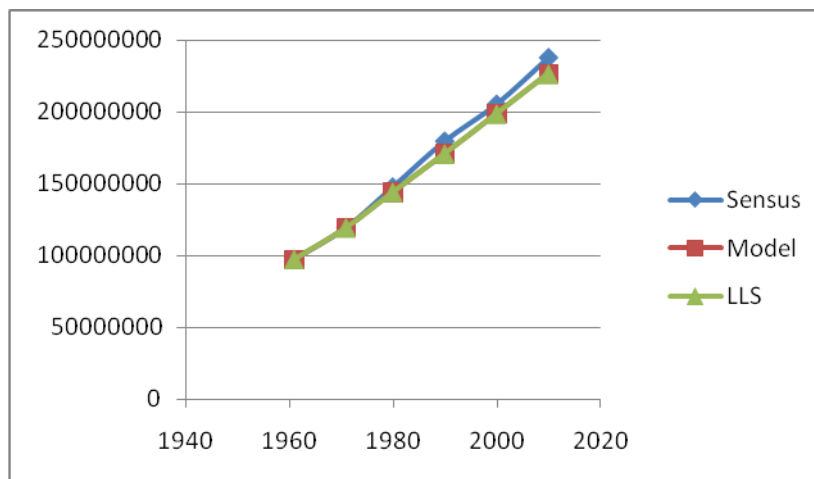
untuk persamaan logistik dan

$$y(t) = \frac{400.000.000}{1 + e^{0,454 - 0,0361t}}$$
(3.9)

untuk persamaan logistic least square.

Tabel 2. Daftar Perbandingan Jumlah Penduduk Indonesia Hasil Sensus dan Hasil Model

| Tahun | Sensus | Model | LLS |
|-------|-------------|-------------|-------------|
| 1961 | 97.100.000 | 97.100.000 | 97.100.000 |
| 1971 | 119.208.229 | 119.189.020 | 119.191.686 |
| 1980 | 147.490.298 | 141.647.836 | 141.650.460 |
| 1990 | 179.378.946 | 163.063.247 | 163.065.670 |
| 2000 | 205.132.458 | 182.269.870 | 182.271.981 |
| 2010 | 237.556.363 | 198.571.521 | 198.573.267 |



Gambar 1. Grafik Perbandingan Jumlah Penduduk Indonesia Hasil Sensus dan Hasil Model

Dari persamaan (3.8) dan (3.9) diatas diperoleh jumlah taksiran model pertumbuhan logistik seperti pada tabel diatas. Dari tabel (2) maupun seperti terlihat dari gambar (1) diatas, model pertumbuhan logistik dan metode LLS cukup signifikan untuk menaksir pertumbuhan populasi antara tahun 1961-2010.

Kajian Model Penyebaran Demam Berdarah Dengue Model Matematika

Model transmisi demam berdarah Dengue yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} S^h &= \alpha N_T - \frac{b\beta_h}{N_T} S^h I^v - \mu_h S^h \\
 \frac{d}{dt} I^h &= \frac{b\beta_h}{N_T} S^h I^v - \mu_h + r I^h \\
 \frac{d}{dt} R^h &= r I^h - \mu_h R^h \\
 \frac{d}{dt} S^v &= D - \frac{b\beta_v}{N_T} S^v I^h - \mu_v S^v \\
 \frac{d}{dt} I^v &= \frac{b\beta_v}{N_T} S^v I^h - \mu_v I^v
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Dengan kondisi-kondisi:

$$N_T = S^h + I^h + R^h \text{ dan } N_v = S^v + I^v \tag{3.11}$$

dimana:

- S^h : sub populasi sehat yang dapat terinfeksi demam berdarah Dengue,
- I^h : sub populasi individu yang terinfeksi oleh virus demam berdarah Dengue,
- R^h : sub populasi individu yang sembuh dari penyakit demam berdarah Dengue,
- S^v : sub populasi nyamuk sehat yang rentan terinfeksi,
- I^v : sub populasi nyamuk yang terinfeksi.

Jumlah total populasi diasumsikan konstan untuk kedua populasi manusia dan vektor. Jadi tingkat perubahan bagi manusia total dan populasi vektor sama dengan nol. Untuk populasi manusia diperoleh $\lambda = \mu_h$. Sedangkan jumlah populasi vektor adalah $N_v = \frac{D}{\mu_v}$. Kemudian dengan

memisalkan $S = \frac{S^h}{N_T}, I = \frac{I^h}{N_T}, R = \frac{R^h}{N_T}, S_v = \frac{S^v}{N_v}$ dan $I_v = \frac{I^v}{N_v}$ persamaan (3.10) dinormalkan menjadi

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \lambda - \gamma_h S I_v - \mu_h S \\
 \frac{dI}{dt} &= \gamma_h S I_v - \mu_h + r I \\
 \frac{dI_v}{dt} &= \gamma_v (1 - I_v) I - \mu_v I_v
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

dengan $\gamma_v = b\beta_v$ dan $\gamma_h = b\beta_h n$ untuk $n = \frac{D}{\mu_v}$ dan semuanya memenuhi kondisi $S + I + R = 1$

dan $S_v + I_v = 1$.

Hubungan Pertumbuhan Populasi dengan Epidemologi Demam Berdarah Dengue. Menentukan Laju Pertumbuhan Penduduk

Laju pertumbuhan penduduk berhubungan erat dengan dengan jumlah kelahiran dan kematian pada suatu populasi. Untuk menentukan laju pertumbuhan penduduk yang dapat

digunakan sebagai acuan memprediksi dinamika penduduk dimasa yang akan datang memerlukan data relatif homogen. Selanjutnya dari data laju pertumbuhan ini akan diolah sebagai informasi

pada model epidemi penyakit demam berdarah Dengue. Misalkan $r(t) = \frac{dN/dt}{N}$ merupakan laju pertumbuhan yang bergantung pada waktu. Untuk mengestimasi laju pertumbuhan populasi $r(t)$ dengan interpolasi linier dari data suatu populasi dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut:

- a) Misalkan N_i dan N_{i+1} adalah ukuran sensus yang berurutan dari jumlah populasi saat t_i dan t_{i+1} . Dengan $\Delta N = N_{i+1} - N_i$, $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ dan $\delta N = N(t + \delta t) - N(t)$,
- b) jika $\Delta t = t_i - t_{i+1}$, $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{\delta N}{\delta t}$, maka diperoleh estimasi $r(t) \cong \frac{\Delta N}{\Delta t N(t)}$,
- c) aproksimasi yang baik diperoleh dengan mengganti $N(t)$ dengan $N\left(t + \frac{\delta t}{2}\right)$.

Selanjutnya persamaan pada pernyataan ke-2 diatas dapat ditulis dalam bentuk $r(t) \cong \left(\frac{\Delta t}{\Delta N} N(t)\right)^{-1}$ dan dengan menggunakan deret Taylor diperoleh $N\left(t + \frac{\delta t}{2}\right) = N(t) + \frac{\delta t}{2} \frac{dN}{dt}$.

Dan berdasarkan persamaan diatas, laju pertumbuhan penduduk dapat diaproksimasi dengan persamaan berikut:

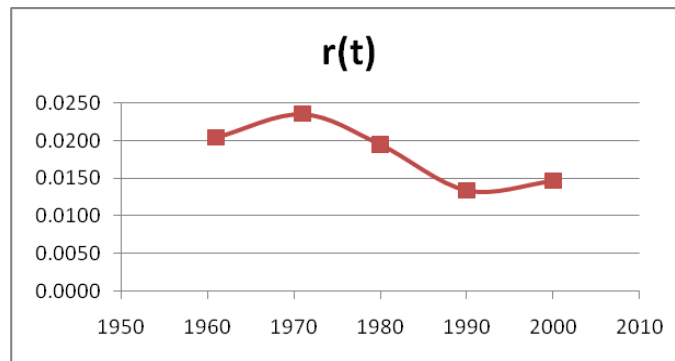
$$r(t) \cong \left(\frac{\delta t}{2} + \frac{N(t)\Delta t}{\Delta N}\right)^{-1} \tag{3.13}$$

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (3.13) dan data pada tabel (1) didapat data $r(t)$ pada tabel 3. Dari tabel (3) terlihat bahwa laju pertumbuhan penduduk Indonesia antara tahun 1961-2010 bernilai positif. Hal tersebut berarti bahwa pada kurun waktu tersebut telah terjadi kenaikan jumlah penduduk. Sedangkan dari gambar (2) tampak bahwa laju pertumbuhan memiliki kecenderungan turun dengan laju pertumbuhan tertinggi terjadi pada tahun 1971 dan terendah terjadi pada tahun 1990. Turunnya laju pertumbuhan ini menggambarkan jumlah penduduk Indonesia meskipun semakin bertambah tetapi pertumbuhannya semakin sedikit.

Selanjutnya apabila dilihat lebih teliti terlihat laju pertumbuhan penduduk pada tahun 1961 - 1971 memiliki kecenderungan naik. Sedangkan tahun 1971 -1990 memiliki kecenderungan turun. Penurunan laju pertumbuhan penduduk ini dipengaruhi oleh berbagai faktor salah satunya adalah kesadaran dalam merencanakan kelahiran anak. Selain itu juga penundaan usia perkawinan dengan alasan pendidikan dan tentu saja jumlah kematian dan kelahiran juga ikut berkontribusi terhadap penurunan laju pertumbuhan penduduk ini. Akan tetapi mulai tahun 1990 mulai terjadi kenaikan laju pertumbuhan.

Tabel 3. Laju Pertumbuhan Penduduk Indonesia Tahun 1961 – 2010

| Tahun | Jumlah Penduduk | Nilai $r(t)$ |
|-------|-----------------|--------------|
| 1961 | 97.100.000 | 0,0204 |
| 1971 | 119.208.229 | 0,0236 |
| 1980 | 147.490.298 | 0,0195 |
| 1990 | 179.378.946 | 0,0134 |
| 2000 | 205.132.458 | 0,0134 |
| 2010 | 237.556.363 | |



Gambar 2. Grafik Laju Pertumbuhan Penduduk Indonesia

Simulasi Numerik Kaitan Laju Pertumbuhan Penduduk dan Epidemi Demam Berdara Dengue.

Berikut ini disajikan simulasi numerik berikut hasilnya untuk beberapa kondisi parameter tertentu.

Keterangan:

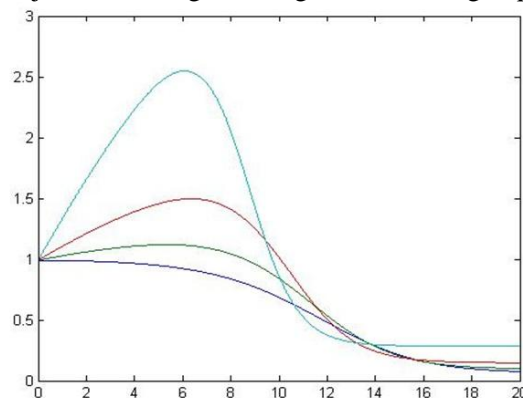
- (1) Garis warna ungu, ketika kelahiran dianggap masih normal.
- (2) Garis warna hijau, ketika kelahiran naik dua kali dari keadaan normal.
- (3) Garis warna merah, ketika kelahiran naik empat kali dari keadaan normal.
- (4) Garis biru, ketika kelahiran naik sepuluh kali dari keadaan normal.

dari gambar (3), dengan menggunakan parameter data saat angka kelahiran dan kematian sama, kemudian sejalan dengan waktu populasi S turun menuju ke titik kesetimbangan. Pada saat kelahiran dinaikkan menjadi dua kali lipat, jumlah I dan I_v tidak mengalami kenaikan yang signifikan seperti yang terlihat pada gambar (4) dan gambar (5). Juga terlihat seiring dengan berjalannya waktu jumlah I dan I_v cenderung mengalami kenaikan yang cukup signifikan jika dibandingkan dengan saat kelahiran berada dalam keadaan normal. Begitu pula saat kelahiran dinaikkan menjadi sepuluh kali lipat.

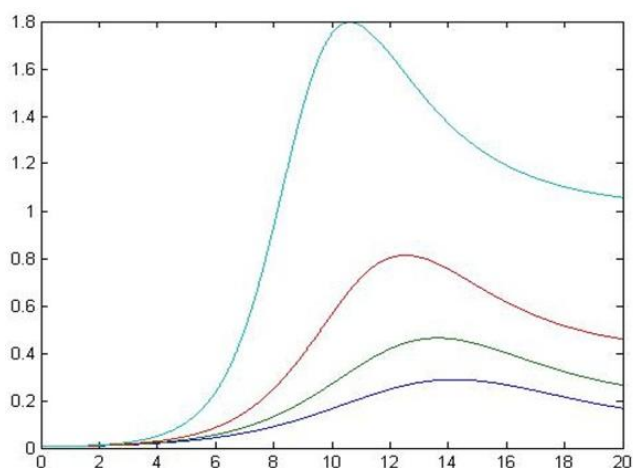
KESIMPULAN

Model pertumbuhan logistik merupakan penyempurnaan dari model ekponensial. Hasil estimasi dengan model ini mempunyai penyimpangan tidak sebesar model ekponensial. Jumlah populasi menurut model ini akan selalu menuju ke suatu nilai yang disebut carrying capacity.

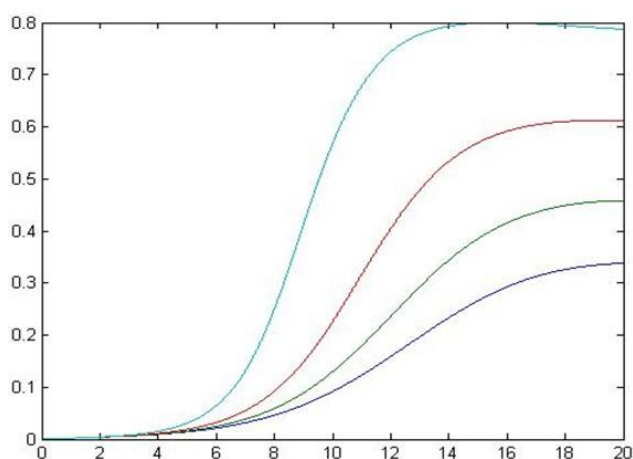
Pada model epidemi demam berdarah dapat disimpulkan bahwa jika laju pertumbuhan membesar, maka peluang jumlah penduduk yang terindikasi terinfeksi demam berdarah juga akan membesar. Namun jika laju pertumbuhan penduduk tinggi, individu menjadi sehat mempunyai peluang yang lebih besar jika dibandingkan dengan model dengan peluang terinfeksi konstan.



Gambar 3. Grafik Simulasi Epidemi Demam Berdarah Untuk S



Gambar 4. Grafik Simulasi Epidemii Demam Berdarah Untuk I



Gambar 4. Grafik Simulasi Epidemii Demam Berdarah Untuk I_v

SARAN

Untuk menghasilkan estimasi suatu populasi dengan menggunakan model pertumbuhan populasi logistik harus dipilih data jumlah populasi dengan jumlah migrasi yang tidak terlalu besar. Untuk mengkaitkan laju pertumbuhan dengan epidemi demam berdarah, diperlukan data yang lebih lengkap dari data sekarang.

DAFTAR PUSTAKA

Agushybana, F. dan Purnami, C. T. (2007), Sistem Surveilans Demam Berdarah Dengue (DBD) Berbasis Komputer untuk Perencanaan, Pencegahan dan Pemberantasan DBD di Kota Semarang, INOVASI, Vol. 4, hal. 55-60

Dinata, A., (2006), Pengendalian Terpadu Nyamuk Demam Berdarah., <http://www.litbang.depkes.go.id/lokaciamis/artikel/demamberdaraharda.htm>. 21 Nopember 2006

Djallalluddin, Hasni, H.B., Riana, W. dan Lisda, H. (2004), Gambaran Penderita Pada Kejadian Luar Biasa Demam Berdarah Dengue Di Kabupaten Banjar Dan Kota Banjarbaru Tahun 2001., DEXA MEDIA., No. 2, Vol. 17, hal. 8591

Graham, R.R., Juffrie, M., Tan, R., Hayes, C.G., Laksono, I., Ma'roef, C., Sutaryo, Erlin, Porter,

- K.R. dan Halstead, S.B. (1999), A prospective Seroepidemiologic Study on Dengue in Children Four to Nine Years of Age in Yogyakarta, Indonesia. *Studies in 1995-1996*, Am. J. Trop. Med. Hyg., Vol. 61, No. 3, hal. 412-419.
- Guzman, M.G. dan Kouri, G. (2002), Dengue: an update, *The Lancet Infectious Diseases.*, Januari 2, 2002.
- Kristina, Isminah dan Wulandari, L. (2004), *Kajian Masalah Kesehatan: Demam Berdarah Dengue, Badan Penelitian dan Pengembangan Kesehatan, Departemen Kesehatan, Jakarta.*
- Muchyidin, A. (2009), *Model Pertumbuhan Populasi dan Kaitannya dengan Epidemi Penyakit Tuberkolosis*, Tesis Magister, Institut Teknologi Bandung, Bandung.
- Nuraini, N., Soewono, E. dan Sidarto, K.A. (2007), *Mathematical Model of Dengue Disease Transmission with Severe DHF Compartment*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc, Vol. 30, No. 2. hal. 143-157
- Pongsumpun, P. (2006), *Transmission Model for Dengue Disease With and Without The Effect of Extrinsic Incubation Period* , KMITL sci. Tech. J., Vol. 6, No. 2. hal. 74-82
- Purnomo, K.D. (2001), *Model Pertumbuhan Populasi dengan Memodifikasi Model Pertumbuhan Logistik*, *Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika*, Vol. 1, No. 1, hal. 21-29
- Santoso, W. (1994), *Persamaan Differensial Biasa dengan Penerapan Modern*, Erlangga, Jakarta.
- Timuneno, H.M., Utomo, R.H.S. dan Widowati (2007), *Model Pertumbuhan Logistik dengan Waktu Tunda*, *Jurnal Matematika*, Vol. 11, No. 1, hal. 4351
- Utama, A., (2004), *Dengue, Permasalahan dan Solusinya*, Lembaga Ilmu Pengetahuan Indonesia. World Health Organizaton (1997), *Dengue Haemorrhagic Fever: Diagnosis, Treatment, Prevention and Control*, Geneva.

PEMAHAMAN PEMECAHAN MASALAH PEMBUKTIAN SEBAGAI SARANA BERPIKIR KREATIF

Herry Agus Susanto

*Universitas Veteran Bangun Nusantara Sukoharjo
Email : herrysanto_62@yahoo.co.id*

Abstrak

Standar kompetensi pada kurikulum KTSP 2006, disebutkan bahwa matematika perlu diberikan kepada semua peserta didik dari mulai sekolah dasar untuk membekali peserta didik dengan kemampuan berpikir logis, analitis, sistematis, kritis, kreatif serta kemampuan kerjasama. Disamping itu tujuan pembelajaran matematika diantaranya adalah (1) mengembangkan kemampuan memecahkan masalah, (2) mengembangkan kemampuan berpikir, (3) mengembangkan sikap positif, (4) mengembangkan pemahaman konsep dan (5) mengembangkan kemampuan kerjasama dan berkomunikasi. Dalam tulisan ini akan sedikit dibahas tentang pemahaman pemecahan masalah pembuktian sebagai sarana berpikir kreatif. Pemahaman merupakan kemampuan mengaitkan antara informasi tentang suatu obyek dengan skemata yang dimiliki individu. Masalah adalah suatu situasi yang memerlukan penyelesaian, tetapi jalan atau cara yang digunakan untuk menyelesaikan tidak secara langsung dapat ditemukan. Pemecahan masalah pembuktian adalah langkah-langkah yang dilakukan untuk menunjukkan kebenaran suatu pernyataan. Berpikir kreatif merupakan pemikiran yang bersifat keaslian dan reflektif serta menghasilkan sesuatu yang kompleks dan baru. Dengan pemecahan masalah pembuktian dengan jalan mengaitkan antara konsep satu dengan konsep lainnya, akan menimbulkan pola pikir kreatif.

Kata kunci: pemahaman, pemecahan masalah pembuktian, kreatif.

PENDAHULUAN

Dalam pembelajaran, pemahaman terhadap obyek yang dipelajari merupakan hal yang sangat penting dalam rangka pencapaian tujuan pembelajaran. Ini berarti bahwa tanpa pemahaman, tidak akan tercapai dengan baik tujuan pembelajaran yang telah ditetapkan. Berkaitan dengan pembelajaran matematika, tidak akan terlepas dari pemahaman terhadap obyek matematika itu sendiri.

Obyek matematika, menurut Bell dibedakan menjadi obyek langsung dan obyek tidak langsung. Obyek langsung yang dimaksud, salah satunya adalah konsep yaitu ide abstrak yang memungkinkan kita dapat mengklasifikasikan atau menggolongkan apakah suatu obyek termasuk dalam ide atau bukan ide yang dimaksud (disamping fakta, operasi dan prinsip). Sedangkan obyek tidak langsung merupakan hal yang mengiringi perolehan belajar obyek langsung, misalnya pemecahan masalah, kreatifitas. Obyek matematika yang lain adalah pemecahan masalah pembuktian, yang menurut Polya (1981: 156) masalah pembuktian nampak lebih penting pada matematika tingkat perguruan tinggi dibandingkan pada tingkat-tingkat sebelumnya. Disamping itu, dengan pemecahan masalah, dapat mengembangkan keterampilan, mendorong kreativitas, memotivasi peserta didik untuk belajar matematika Pehkonen (1997).

Berdasarkan latar belakang tersebut, dengan mempertimbangkan kemampuan yang harus dimiliki peserta didik (yaitu kemampuan pemecahan masalah dan kreatifitas), maka perlu kiranya untuk dikaji apakah kemampuan memecahkan masalah pembuktian dapat meningkatkan kreatifitas.

PEMBAHASAN

Pemahaman Dalam Pemecahan Masalah Pembuktian

Untuk menguraikan pemahaman dalam pemecahan masalah pembuktian, dapat dikaji melalui beberapa bagian yaitu pemahaman, pemecahan masalah pembuktian dan kemudian baru pada pemahaman dalam pemecahan masalah pembuktian. Skemp menyatakan *"to understand something means to assimilate it into an appropriate schema"*. Jadi disini dibedakan antara pemahaman dan memahami sesuatu. Pemahaman dikaitkan dengan kemampuan (*ability*) dan memahami sesuatu dikaitkan dengan "asimilasi" dan suatu skema yang cocok (*an appropriate schema*). Skema diartikan sebagai kelompok konsep yang saling terhubung.

Pemahaman merupakan suatu fase dalam kegiatan belajar, seperti yang dinyatakan oleh Hudoyo (1988:24). Pada fase ini peserta didik pertama kali menerima stimulus. Stimulus ini masuk kedalam peristiwa belajar dan akhirnya informasi (stimulus) itu disimpan dalam memorinya. Peserta didik harus memperhatikan bagian-bagian dan keseluruhan stimulus-stimulus yang relevan dengan tujuan belajarnya. Proses perhatian itu berlangsung di dalam bagian internal yang disebut sekumpulan kegiatan mental (*mental set*). Sekumpulan kegiatan mental itu berfungsi sebagai suatu proses pengaturan, seperti dalam teori pemrosesan informasi. Suatu konsep, prinsip-prinsip, prosedur serta fakta dapat dipahami jika objek matematika tersebut menjadi bagian dari suatu jaringan internal. Lebih rinci, matematika dapat dipahami jika gambar mental menjadi bagian dari suatu jaringan informasi. James Hiebert (1992 : 67) menyatakan bahwa "pemahaman konsep adalah pengaitan antara informasi yang terkandung pada konsep yang dipahami dengan skemata yang telah dimiliki sebelumnya". Berarti tingkat pemahaman ditentukan oleh banyaknya jaringan informasi yang dimiliki individu dan kuatnya hubungan antar subjaringan. Suatu ide (konsep) matematika, prosedur atau fakta dipahami secara menyeluruh jika objek matematika dihubungkan kedalam jaringan yang ada dengan lebih kuat atau lebih banyaknya keterkaitan.

Teori pemahaman yang dikemukakan Hiebert dan Carpenter didasari atas tiga asumsi, yaitu pertama, pengetahuan direpresentasikan secara internal, Kedua terdapat relasi antara representasi internal dan representasi eksternal dan ketiga representasi internal saling terkait. Lebih lanjut dinyatakan oleh Hiebert dan Carpenter (1992) *"A mathematical idea or procedure or facts is understood if it is part of an internal network. More specially, the mathematics is understood if its mental representation is part of network of representations"*. Selanjutnya dinyatakan juga bahwa *"the degree of understanding is determined by the number and strength of the connection"*. Ini berarti bahwa ide (konsep), prosedur dan fakta matematika dipahami jika ide (konsep), prosedur dan fakta matematika tersebut terkait dalam jaringan yang telah ada dengan lebih kuat atau lebih banyak keterkaitannya. Dengan kata lain bahwa ide, fakta atau prosedur dipahami jika merupakan bagian dari jaringan internal. Tingkat pemahaman ditentukan oleh banyaknya hubungan antara objek dengan skema yang ada dan kekuatan dari hubungan tersebut.

Pemahaman sangat penting untuk menjamin pebelajar dapat memecahkan masalah secara sempurna. *Efforts to solve problem must be preceded by efforts to understand it* (Simon, 1996 : 94). Upaya menyelesaikan masalah harus diawali dengan memahami masalah. Perkin & Unger (Regeluth,1999 : 95) menyatakan bahwa *understanding is knowledge in thoughtful action*. Pemahaman merupakan landasan keterampilan pemecahan masalah, karena keterampilan pemecahan masalah tidak lepas dari tindakan yang didasari oleh berpikir secara mendalam. Pemahaman merupakan pengalaman mental, seperti yang dinyatakan oleh Sierpinska (Juan D. Godino, 1994: 4) *"understanding as the mental experience of a subject by she/he relates an object (sign) to another object (meaning)"*. Pemahaman merupakan pengalaman mental yang menghubungkan antara objek satu dengan objek lainnya. Bahkan dalam pembelajaran istilah pemahaman dipakai ketika siswa dapat menunjukkan atau membuat hubungan antar istilah, ungkapan matematika dan konsep dalam matematika.

Dari beberapa pengertian pemahaman seperti tersebut di atas, maka pemahaman yang dimaksud dalam penelitian ini adalah kemampuan meengaitkan antara informasi tentang objek dengan skemata yang telah dimiliki sebelumnya. Berikutnya akan diuraikan sedikit tentang

masalah pembuktian.

Seseorang dikatakan menghadapi masalah apabila ingin mencapai suatu tujuan tetapi tidak segera dapat mencapai atau tidak tersedia langkah-langkah yang jelas untuk mencapai tujuan itu. Tujuan yang ingin dicapai dapat berupa penyesuaian diri terhadap situasi baru atau penyelesaian tugas. Masalah tersebut perlu untuk dipecahkan. Oleh karena itu, tidak berlebihan bahwa pemecahan masalah merupakan strategi belajar mengajar dalam rangka untuk menyelesaikan. Sebelum membahas tentang masalah dalam matematika, terlebih dahulu diuraikan tentang pengertian masalah. Stanic dan Kilpatrick (1989) mendefinisikan masalah sebagai suatu keadaan dimana seseorang melakukan tugasnya yang tidak ditemukan di waktu sebelumnya. Ini berarti, suatu tugas merupakan masalah bergantung kepada individu dan waktu. Artinya, suatu tugas merupakan masalah bagi seseorang, tetapi mungkin bukan merupakan masalah bagi orang lain. Demikian pula suatu tugas merupakan masalah bagi seseorang pada suatu saat, tetapi bukan merupakan masalah lagi bagi orang itu pada saat berikutnya, bila orang itu telah mengetahui cara atau proses mendapatkan pemecahan masalah tersebut.

Hudoyo (1990) lebih tertarik melihat masalah dalam kaitannya dengan prosedur yang digunakan seseorang untuk menyelesaikannya berdasarkan kapasitas kemampuan yang dimilikinya. Selanjutnya Hudoyo (1979) mengemukakan dua syarat agar pertanyaan merupakan masalah bagi siswa adalah (a) pertanyaan tersebut harus dapat dimengerti oleh siswa, namun merupakan tantangan baginya untuk menjawabnya, dan (b) pertanyaan tersebut tak dapat dijawab dengan prosedur rutin yang telah diketahui siswa. Polya (1981 : 117) menyatakan bahwa: *... to have a problem means: to search consciously for some action appropriate to attain a clearly conceived, but not immediately attainable, aim. To solve a problem means to find such action.* Artinya: Mempunyai masalah berarti mencari dengan sadar suatu tindakan yang tepat untuk mencapai suatu tujuan yang jelas, tetapi tindakan tersebut tidak dengan segera dapat dicapai. Memecahkan masalah berarti mencari tindakan.

Berdasarkan beberapa pengertian tentang masalah (*problem*) yang telah dikemukakan di atas, maka dapat dikatakan bahwa suatu pertanyaan/soal matematika tertentu dapat merupakan masalah bagi orang tertentu, tetapi belum tentu merupakan masalah bagi orang lain. Dengan kata lain, suatu pertanyaan atau soal matematika mungkin merupakan masalah bagi seseorang pada waktu tertentu, akan tetapi belum tentu merupakan masalah baginya pada saat yang berbeda. Masalah merupakan suatu situasi yang memerlukan penyelesaian, tetapi jalan atau cara yang digunakan untuk menyelesaikan tidak secara langsung dapat ditemukan. Menurut Polya (1973 : 154) terdapat dua jenis masalah yaitu masalah untuk menemukan dan masalah untuk membuktikan. Masalah untuk menemukan dapat berupa teoritis atau praktis, abstrak atau konkret, termasuk teka-teki. Kita harus mencari variabel masalah tersebut. Kita mencoba untuk mendapatkan, menghasilkan atau memahami semua jenis objek yang dapat dipergunakan untuk menyelesaikan masalah itu. Bagian utama dari masalah itu adalah: (1) apakah yang dicari, (2) bagaimana data yang diketahui, dan (3) bagaimana syaratnya. Ketiganya merupakan landasan untuk menyelesaikan masalah menemukan.

Pembuktian merupakan sekumpulan argum logis untuk menunjukkan kebenaran suatu pernyataan. Pada umumnya pernyataan dinyatakan dalam bentuk implikasi. Pembuktian suatu implikasi "jika p maka q" dapat dilakukan dengan bukti langsung atau tidak langsung. Suatu bukti dikatakan bukti langsung dari implikasi "jika p maka q" adalah: jika p diberi, dengan sekumpulan definisi dan argumen yang telah dibuktikan kebenaran sebelumnya, kemudian disimpulkan q. Sedangkan bukti tak langsung implikasi "jika p maka q" adalah: andaikan tidak q dan p diberi, dengan sekumpulan definisi dan argumen yang telah dibuktikan kebenaran sebelumnya, akan didapatkan suatu kontradiksi. Menurut Polya (1973: 156) masalah pembuktian nampak lebih penting pada matematika tingkat perguruan tinggi dibandingkan pada tingkat-tingkat sebelumnya. Hal ini sebagaimana dikatakannya: *"problems to find are more important in elementary mathematics problems to solve important in advanced mathematics."* (artinya: masalah-masalah menemukan lebih penting dalam matematika dasar, pemecahan masalah penting dalam matematika

lanjut). Masalah pembuktian terdapat dua bagian utama yaitu permintaan atau suruhan dan pernyataan yang harus dibuktikan kebenarannya.

Pemahaman dalam pemecahan masalah pembuktian merupakan pengaitan antara skemata yang telah dimiliki oleh seseorang dengan langkah-langkah pemecahan masalah pembuktian. Pemahaman merupakan keterkaitan antara informasi tentang objek dengan skemata yang telah dimiliki sebelumnya. Langkah-langkah Polya dalam pemecahan masalah meliputi: (1) memahami masalah, (2) membuat rencana, (3) melaksanakan rencana, (4) melihat kembali. Pemahaman dalam memahami masalah merupakan aktivitas mental yang mengkaitkan antara informasi yang terdapat pada permasalahan dengan skema yang ada. Apakah yang dimaksud dengan istilah memahami di dalam matematika? Hiebert dan Carpenter (1992) menyatakan bahwa *“A mathematical idea or procedure or fact is understood if it is part of an internal network. More specically, the mathematics is understood if its mental representation is part of a network of representations.”* Selanjutnya dikatakan bahwa *“The degree of understanding is determined by the number and the strength of the connections.”* Ini berarti bahwa ide (konsep), prosedur dan fakta matematika dipahami jika ia merupakan bagian dari struktur atau kerangka jaringan yang telah ada. Tingkat pemahaman ditentukan oleh banyaknya keterkaitan atau kekuatan keterkaitan dengan struktur ide, prosedur, dan fakta yang lain dalam jaringan internal tersebut. Tidak mungkin dapat memecahkan masalah yang tidak dipahami. Peserta didik seharusnya memahami masalah terlebih dahulu. Bagaimana peserta didik dapat memahami suatu masalah? Dalam bukunya, *The Psychology of Learning Mathematics*, Skemp (1987:44) menulis *“To understand something means to assimilate it into an appropriate schema.”* Berdasarkan kutipan ini diperoleh bahwa memahami sesuatu ide (konsep), prosedur dan fakta matematika berarti mengasimilasiannya ke dalam suatu skema yang cocok. Jadi terkait dengan *“assimilasi”* dan *“suatu skema yang cocok (an appropriate schema).”* Bagaimana jika struktur informasi tidak cocok dengan skema yang telah ada? Bila hal ini terjadi maka individu harus mengatur skemanya untuk dapat menyesuaikan dengan informasi yang baru. Proses pengaturan skema kembali untuk menyesuaikan dengan informasi baru disebut akomodasi.

Pemahaman dalam pemecahan masalah merupakan keterkaitan antara pengetahuan yang dimiliki seseorang dengan langkah-langkah pemecahan masalah menurut Polya. Pemahaman tersebut meliputi: pemahaman dalam memahami masalah, pemahaman dalam perencanaan pemecahan masalah, pemahaman dalam pelaksanaan perencanaan pemecahan masalah dan pemahaman dalam pengecekan kembali pemecahan masalah.

Pada langkah Polya dalam memahami masalah meliputi: apa yang diketahui, apa yang ditanyakan, data apa saja yang ada, notasi atau simbol apa yang cocok, pengetahuan matematika apa saja yang ada pada permasalahan dan syarat-syarat apa saja yang ada pada permasalahan. Pemahaman dalam perencanaan pemecahan masalah adalah aktivitas mental mengkaitkan antara pengetahuan yang ada dengan rencana yang akan dilakukan dalam pemecahan masalah. Pada langkah Polya dalam perencanaan pemecahan masalah meliputi: rencana apa saja yang akan dilakukan untuk memecahkan masalah. Teorema atau konsep apa yang akan digunakan dalam memecahkan masalah. Apakah ada cara yang berbeda dalam memecahkan masalah. Bagaimana menghubungkan antar data yang ada serta menggunakan data untuk memecahkan masalah. Mencari hubungan antara informasi yang diberikan dengan yang tidak diketahui, dan memungkinkan untuk dihitung variabel yang tidak diketahui tersebut. Sangat berguna untuk membuat pertanyaan, bagaimana hal yang diketahui akan saling dihubungkan untuk mendapatkan hal yang tidak diketahui.

Pemahaman dalam pelaksanaan rencana pemecahan masalah adalah aktivitas mental mengkaitkan antara pengetahuan yang ada dengan hasil pemecahan masalah. Pada langkah Polya dalam pelaksanaan rencana pemecahan masalah meliputi: apakah rencana pemecahan dilaksanakan secara runtut, teliti dan benar. Apakah bila ada rencana yang tidak dapat dilaksanakan, mahasiswa dapat menggunakan cara lain sebagai bentuk penyelesaian. Dalam melaksanakan rencana yang tertuang pada langkah kedua, maka harus diperiksa tiap langkah dalam rencana dan menuliskannya secara detail untuk memastikan bahwa tiap langkah sudah benar.

Pemahaman dalam pengecekan kembali pemecahan masalah adalah aktivitas mental mengkaitkan antara pengetahuan yang ada terhadap langkah-langkah pemecahan masalah. Pada langkah Polya berkaitan dengan pengecekan kembali meliputi: pengecekan apakah langkah yang dilakukan sudah benar. Termasuk juga pengecekan terhadap hasil atau metode yang digunakan dalam penyelesaian. Termasuk juga mengecek alasan atau argumen yang digunakan dalam memecahkan masalah. Langkah berikutnya setelah menjawab masalah adalah memeriksa kembali jawaban yang telah ditemukan. Dengan mengkritisi hasilnya dan melihat kelemahan solusi yang didapatkan (seperti : ketidak konsistenan atau ambiguitas atau langkah yang tidak benar).

Berpikir Kreatif

Matematika perlu diberikan kepada semua peserta didik mulai dari sekolah dasar untuk membekali peserta didik dengan kemampuan berpikir logis, analitis, sistematis, kritis dan kreatif serta kemampuan bekerjasama, demikian disebutkan dalam kurikulum 2006. Selanjutnya, disebutkan bahwa salah satu tujuan pembelajaran matematika adalah mengembangkan aktivitas kreatif yang melibatkan imajinasi, intuisi dan penemuan, dengan mengembangkan pemikoiran divergen, orisinal, rasa ingin tahu dan membuat prediksi. Dalam kurikulum tersebut juga disebutkan bahwa salah satu prinsip kegiatan belajar mengajar adalah mengembangkan kreativitas siswa. Dari pengertian ini jelas bahwa berpikir kreatif yang selanjutnya dapat dikatakan kreativitas merupakan suatu hal yang penting dalam pembelajaran matematika.

Sebelum menguraikan berpikir kreatif, perlu dikenalkan lebih dahulu pengertian berpikir. Berpikir merupakan proses menghasilkan representasi mental yang baru melalui transformasi informasi yang melibatkan interaksi secara kompleks antara atribut-atribut mental seperti penilaian, abstraksi, penalaran, imajinasi, dan pemecahan masalah (Glass dan Holyak, 1986; Solso, 1988). Di dalam proses belajar matematika, terjadi juga proses berpikir, sebab seseorang dikatakan berpikir bila orang tersebut melakukan kegiatan mental dan orang yang belajar matematika dapat dipastikan melakukan kegiatan mental.

Proses berpikir meliputi tiga komponen pokok, yaitu: (1) berpikir adalah aktivitas kognitif yang terjadi di dalam mental atau pikiran seseorang, tidak tampak, tidak dapat disimpulkan berdasarkan perilaku yang tampak, (2) berpikir merupakan suatu proses yang melibatkan beberapa manipulasi pengetahuan di dalam sistem kognitif . Pengetahuan yang tersimpan di dalam ingatan digabungkan dengan informasi sekarang sehingga mengubah pengetahuan seseorang mengenai situasi yang sedang dihadapi, dan (3) aktivitas berpikir diarahkan untuk menghasilkan pemecahan masalah (Mayer, dalam Solso, 1988). McKellar (The Liang Gie, 2003) menjelaskan berpikir (*thinking*) ke dalam dua pengertian, yaitu: (a). *A-thinking* adalah pemikiran yang dikuasai oleh berbagai proses fantasi, khayalan, atau lamunan. Contohnya adalah halusinasi. (b). *R-thinking* adalah pemikiran yang dibatsi oleh pertimbangan mengenai fakta-fakta yang dapat diamati dan ditandai oleh hubungan-hubungan logis dari pada penyatuan-penyatuan semata. Contohnya adalah berpikir ilmiah dan penalaran logis.

Proses berpikir itu merupakan suatu rangkaian proses mulai saat informasi masuk, pemrosesan sehingga terbentuk skema berpikir merupakan suatu proses yang dinamis yang dapat dilukiskan menurut proses atau jalannya. Proses atau jalannya berpikir itu disebut proses berpikir. Proses berpikir pada pokoknya ada tiga langkah, yaitu pembentukan pengertian, pembentukan pendapat, dan penarikan kesimpulan (Suryabrata .1990). Proses berpikir merupakan proses penerimaan informasi sampai pada pemanggilan kembali informasi itu dari ingatan (Marpaung, 1986). Menurut Dienes (1963), berpikir matematis berkenaan dengan penyeleksian himpunan-himpunan unsur matematika, dan himpunan-himpunan ini menjadi unsur-unsur dari himpunan-himpunan baru membentuk himpunan-himpunan baru yang lebih rumit. Befikir matematis berhubungan dengan struktur-struktur super yang secara tetap terbentuk dari apa yang sudah terbentuk sebelumnya. Karena itu berpikir matematis berarti merumuskan suatu himpunan langsung dari unsur-unsur. Proses demikian disebut abstraksi. Sehingga dari himpunan yang terbentuk itu dapat ditentukan

apakah suatu unsur menjadi anggota suatu himpunan ataukah tidak.

Dari beberapa pengertian berpikir di atas, dapat ditarik suatu pengertian bahwa berpikir merupakan proses yang dimulai dari penerimaan informasi (dari dunia luar atau diri siswa), pengolahan, penyimpanan dan pemanggilan informasi itu dari dalam ingatan serta pengubahan-pengubahan struktur yang meliputi konsep-konsep atau pengetahuan-pengetahuan itu.

Kreativitas siswa dan kemampuan berpikir kreatif dapat dilihat melalui aktivitas kreatif dalam pembelajaran matematika. Kreativitas merupakan produk dari berpikir kreatif, sedangkan aktivitas kreatif merupakan kegiatan dalam pembelajaran yang diarahkan untuk mendorong atau memunculkan kreativitas siswa. Kemampuan berpikir kreatif siswa dapat digunakan sebagai petunjuk untuk mengetahui kualitas kemampuan siswa dalam berpikir kreatif dan perkembangannya selama proses pembelajaran. Sehingga terdapat tingkatan-tingkatan dalam berpikir kreatif. Ide tentang tingkat kemampuan berpikir kreatif telah diungkapkan oleh beberapa ahli. De Bono (dalam Barak & Doppelt, 2000) mendefinisikan 4 tingkat perkembangan keterampilan berpikir kreatif, yaitu kesadaran berpikir, observasi berpikir, strategi berpikir dan refleksi berpikir. Tingkat berpikir kreatif ini menggambarkan secara umum strategi berpikir yang tidak hanya dalam matematika. Tingkat yang dikembangkan ini memberikan bukti adanya tingkat yang hierarkhis (berurutan) dalam berpikir kreatif.

Berpikir kreatif dalam matematika merupakan kombinasi berpikir logis dan berpikir divergen yang didasarkan intuisi tetapi dalam kesadaran yang memperhatikan fleksibilitas, kefasihan dan kebaruan (Pehkonen, 1999). Gotoh (2004) mengungkapkan bahwa berpikir matematis dalam memecahkan masalah terdiri atas 3 tingkat yang dinamakan aktivitas empiris (informal), algoritmis (formal) dan konstruktif (kreatif). Tingkatan yang dikembangkan ini menunjukkan klasifikasi cara siswa memecahkan masalah matematika dengan memanfaatkan konsep-konsep matematika yang sudah diketahui. Tingkat pertama, siswa memecahkan masalah dengan coba-coba. Tingkat kedua, ia menggunakan langkah matematis yang sudah diketahui dan tingkat ketiga, ia mampu menciptakan langkah matematis sendiri. Berpikir kreatif merupakan pemikiran yang bersifat keaslian dan reflektif serta menghasilkan sesuatu yang kompleks dan "baru". Penjenjangan kemampuan berpikir kreatif dalam memecahkan dan mengajukan masalah matematika didasarkan pada produk berpikir kreatif siswa yang terdiri dari 3 aspek yaitu kefasihan, fleksibilitas dan kebaruan. Tahap berpikir kreatif siswa mengacu pada tahap-tahap mensintesis ide, membangun ide-ide, merencanakan penerapan ide, dan menerapkan ide-ide tersebut.

Perkins (dalam Starko: 2010) menyatakan kreativitas sebagai: "(a) hasil kreatif merupakan hasil baik yang asli dan tepat. (b) orang kreatif dengan kreativitas-adalah orang yang cukup secara rutin menghasilkan hasil yang kreatif. Kebaruan dan orisinalitas mungkin merupakan karakteristik yang paling berhubungan langsung dengan kreativitas. Untuk menjadi kreatif, ide atau produk harus baru. Ini merupakan dilema, baru untuk siapa? Untuk dianggap kreatif, produk atau ide harus asli atau baru kepada individu yang bersangkutan. Munandar (1999a) juga menyebutkan "kreativitas merupakan kemampuan untuk menghasilkan/menciptakan sesuatu yang *baru*. Kreativitas merupakan kemampuan seseorang untuk menghasilkan komposisi, produk atau gagasan apa saja yang pada dasarnya *baru* dan sebelumnya tidak dikenal. Solso (1995) menyatakan kreativitas diartikan sebagai suatu aktivitas kognitif yang menghasilkan suatu cara atau sesuatu yang baru dalam memandang suatu masalah atau situasi. Baru yang dimaksud disini, tidak berarti sebelumnya tidak ada, tetapi dapat berupa sesuatu yang belum dikenal sebelumnya oleh yang bersangkutan.

Karakteristik kreativitas menurut Guilford, yaitu kelancaran (*fluency*), keluwesan (*flexibility*), keaslian (*originality*), penguraian (*elaboration*) dan perumusan kembali (*redefinition*). Kelancaran pada umumnya berkaitan dengan kemampuan melahirkan alternatif-alternatif pada saat diperlukan. Keluwesan adalah kemampuan untuk mengemukakan bermacam-macam pemecahan atau pendekatan terhadap masalah. Keluwesan berkaitan dengan kemampuan untuk membuat variasi terhadap satu ide dan kemampuan memperoleh cara baru. Keaslian merupakan kemampuan untuk mencetuskan gagasan dengan cara-cara yang asli, tidak klise. Penguraian adalah kemampuan

untuk menguraikan sesuatu secara lebih terinci. Redefinisi merupakan kemampuan untuk meninjau suatu persoalan berdasarkan perspektif yang berbeda dengan apa yang sudah diketahui oleh banyak orang.

Dari beberapa karakteristik di atas nampak adanya kesamaan pandangan tentang unsur unsur kreativitas yang dapat dipandang sebagai indikator kreativitas, yaitu kelancaran, keluwesan dan kebaruan.

Pemahaman dalam pemecahan masalah pembuktian meningkatkan berpikir kreatif

Seperti yang diuraikan pada bagian terdahulu, bahwa pemahaman merupakan aktivitas mental yaitu kemampuan mengaitkan antara informasi tentang obyek tertentu dengan skema yang dimiliki. Apabila obyek tersebut adalah sebuah masalah tertentu, maka seseorang (siswa) yang akan menyelesaikan masalah tersebut, harus mengaitkan antara informasi yang ada pada masalah dengan skema yang telah dimiliki. Skema yang dimaksud adalah pengetahuan-pengetahuan yang berkaitan dengan soal yang diberikan. Disini siswa dituntut untuk dapat memilih dan memilah pengetahuan mana yang diperlukan dalam rangka untuk menyelesaikan masalah tersebut. Siswa harus berpikir secara kreatif apakah pengetahuan yang akan dipilih sesuai dengan kebutuhan untuk menyelesaikannya.

Sedangkan pemecahan masalah merupakan langkah untuk menyelesaikan situasi yang dihadapi oleh siswa, dan siswa tersebut belum memiliki cara atau strategi yang digunakan untuk menyelesaikannya. Langkah-langkah yang digunakan dalam menyelesaikan adalah langkah Polya. Langkah penyelesaian menurut Polya ada empat langkah yaitu: memahami masalah, merencanakan penyelesaian, melaksanakan rencana penyelesaian dan mengecek kembali.

Dari keempat langkah di atas, dalam menyelesaikan masalah pembuktian, siswa harus mengaitkan dan menentukan pengetahuan atau informasi apa saja yang diperlukan dalam membuktikan. Bagaimana siswa merencanakan strategi, cara atau langkah apa saja yang akan dilakukan dalam penyelesaian. Dalam merencanakan penyelesaian siswa juga harus memikirkan, memperhitungkan dan memperhatikan secara kreatif dalam menentukan langkah tersebut. Apakah rencana tersebut dapat digunakan sesuai dengan konsep-konsep yang diketahui. Apabila dalam perencanaan penyelesaian ini dilakukan secara berulang, dapat menimbulkan pola pikir kreatif pada diri siswa, yaitu memilih dan mengaitkan konsep-konsep yang telah dipelajari dan dapat digunakan untuk menyelesaikan.

Pada pelaksanaan rencana penyelesaian, siswa tidak harus hanya menggunakan rencana yang telah ditetapkan sebelumnya, tetapi tidak menutup kemungkinan muncul ide kreatif baru pada saat menyelesaikan masalah. Pemilihan konsep atau materi yang berkaitan, sangatlah diperlukan dalam rangka untuk penyelesaian yang efektif.

PENUTUP

Kreativitas dan kemampuan berpikir kreatif pada dasarnya merupakan upaya menyelesaikan permasalahan lebih efektif, efisien dan produktif. Guru dalam kegiatan keseharian dihadapkan pada sejumlah permasalahan yang dihadapi oleh siswa atau pihak sekolah. Sesuai dengan tugas pokok dan fungsinya seorang guru, ia dituntut untuk dapat menjadi fasilitator agar siswa dapat mencapai tujuan pembelajaran. Dengan sering memberikan permasalahan terhadap siswa, maka siswa akan terpacu dan terdorong untuk berpikir dan berkreasi dalam menyelesaikan permasalahan yang diberikan. Sehingga dengan pemberian masalah ini dapat memunculkan ide-ide kreatif agar dalam menyelesaikan masalah dapat efektif dan efisien.

DAFTAR PUSTAKA

Bell, H. Fredrick, 1978. *Teaching and Learning Mathematics (in Secondary Schools)*. Wm C Brown. Company Publishing. Dubuque.

- De Bono E, 1997. *Berpikir Praktis*. Binarupa Aksara. Jakarta.
- Glass, A.L. and Holyoak, K.J. 1986. *Cognition*. 2nd ed. Singapura: McGraw-Hill Book Company.
- Goldin, G. A., & Mc Clintock, C. E. (Eds.). (1979). *Task variables in mathematical problem solving*. Columbus, Ohio:ERIC/SMEAC.
- Haylock, Derek. 1997. *Recognising Mathematical Creativity in Schoolchildren*. <http://www.fiz.karlsruhe.de/fiz/publications/zdm> ZDM Volum 29 (June 1997) Number 3. Electronic Edition ISSN 1615-679X. Download 26 Nopember 2008.
- Hiebert, J. & Carpenter, T. P, (1992). *Learning and Teaching with Understanding*. In D. Grouws, (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65–97). New York: MacMillan.
- Marpaung, 1986. *Proses Berpikir Siswa dalam Pembentukan Konsep Algoritma Matematis*. Makalah Pidato Dies Natalis XXXI IKIP Sanata Dharma Salatiga. 25 Oktober.
- Matlin, Margaret W. 1998. *Cognition*. Fort Worth: Harcourt Brace College Publishers.
- Meador, Karen S. 1997. *Creative Thinking and Problem Solving for Young Learners*. Englewood: Teacher Ideas Press.
- Miles & Huberman. 1992. *Analisis Data Kualitatif*. Terjemahan oleh Tjetjep Rohendi Rohidi. Jakarta: UI Press.
- Munandar, S.C. Utami. 1999a. *Kreativitas & Keberbakatan. Strategi mewujudkan potensi kreatif & Bakat*. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama.
- Munandar, S.C. Utami. 1999b. *Mengembangkan Bakat dan Kreativitas Anak Sekolah. Petunjuk Bagi Para Guru dan Orang Tua*. Jakarta: PT Gramedia.
- Polya, G. (1973) *How to Solve It*. Second Edition. Princeton University Press.
- Polya, George. 1981. *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving*, Combined Edition. New York : John Willey & Sons, Inc.
- Setiawan, Boenjamin. 2001. *Peran Kreativitas dan Inovasi untuk Meningkatkan Kesejahteraan Hidup Masyarakat*. Dalam Munandar, S.C. Utami. *Pengalaman Hidup 10 Tokoh Kreativitas Indonesia: Mengembangkan Kreativitas*. Jakarta: Yayasan Obor Indonesia.
- Skemp, R. (1987). *The Psychology of Learning Mathematics*. New Jersey: Expanded American Edition. Lawrence Elbaum Associates, Publishers
- Solso, Robert L. 1995. *Cognitive Psychology*. Needham Heights, MA: Allyn & Bacon
- Stanic & Kilpatrick, 1988. *Historical Perspective on Problem Solving in Mathematics Curriculum*. [http://tlsilveus.com/Portfolio/Documents/EDCI327_Problem Solving](http://tlsilveus.com/Portfolio/Documents/EDCI327_Problem_Solving). Diakses 12 Februari 2011
- The liang Gie. (2003). *Teknik Berpikir Kreatif*. PUBIB Yogyakarta: Yogyakarta dan Sabda Persada

PENDIDIKAN KARAKTER PADA PEMBELAJARAN MATEMATIKA

Jailani

Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta

Abstrak

Indonesia sudah banyak memiliki orang-orang yang hebat di bidang pengetahuan matematika, sains, dan teknologi. Hal itu nampak pada orang-orang Indonesia yang berkiprah di negara-negara maju, prestasi dan penghargaan pelajar dan mahasiswa Indonesia diberbagai olimpiade atau kontes di bidang sains, teknologi, dan matematika. Namun demikian, akhir-akhir ini juga dijumpai orang-orang (tak terkecuali di kalangan akademisi) yang menampakkan karakter atau perbuatan yang kurang terpuji. Tulisan ini bertujuan untuk memaparkan bagaimana pendidikan karakter dapat dikembangkan dalam pembelajaran matematika, terutama di sekolah. Untuk mengembangkan pendidikan karakter pada pembelajaran matematika dapat dilakukan melalui pengembangan isi (*content*) pelajaran matematika, pemilihan pendekatan, metode, atau strategi pembelajaran yang akan digunakan, serta melalui proses pembelajaran matematika.

Kata kunci: pendidikan karakter, pembelajaran matematika

PENDAHULUAN

Indonesia memerlukan sumberdaya manusia dalam jumlah dan mutu yang memadai sebagai pendukung utama dalam pembangunan. Untuk memenuhi sumberdaya manusia tersebut, pendidikan memiliki peran yang sangat penting. Sudah banyak sumber daya manusia yang hebat di bidang pengetahuan: dari bidang teknologi, matematika, sains, hingga seni. Hal itu tampak dari prestasi orang-orang Indonesia yang berkiprah di negara-negara maju, seperti Jepang, Perancis, Malaysia, Amerika, dan sebagainya (Kisah Orang Cerdas Indonesia di Luar Negeri, *Republika*, 21-27 Desember 2010), dan juga seniman Indonesia seperti Amri Yahya dan Afandi. Dari beberapa mahasiswa dan pelajar Indonesia juga telah memperoleh beberapa penghargaan pada beberapa olimpiade di bidang sains dan matematika, dan juga pada kontes robot.

Namun demikian, dibalik keberhasilan itu tidak sedikit orang-orang Indonesia baik yang duduk di pemerintahan atau birokrasi, pengusaha, partai politik, bahkan di kalangan penegak hukum, dan tak terkecuali di kalangan pelajar yang menampakkan perbuatan yang kurang terpuji, baik ditinjau dari hukum formal, norma sosial, atau norma agama. Hal sangat menampar muka kalangan akademisi pada akhir-akhir ini adalah keluhan/informasi dari Direktur ketenagaan direktorat ketenagaan Dikti mengenai beberapa dosen “busuk.” Yang dimaksud dengan dosen “busuk” dalam konteks ini adalah dosen yang secara sengaja melakukan berbagai cara yang tidak terpuji dalam usaha meraih jabatan tertinggi di kalangan akademisi, yakni guru besar (profesor). Berbagai tanggapan baik yang keras, biasa-biasa saja, permisif atau reflektif dapat dilihat di beberapa *mailinglist*. Terlepas dari berbagai tanggapan tersebut, jika kita tanyakan pada hati nurani kita, maka akan memperoleh jawaban bahwa kegiatan/perilaku tersebut tidak bisa dibenarkan. Kata hati nurani seperti itu merupakan contoh karakter.

Pendidikan karakter mejadi populer di negara Indonesia akhir-akhir ini, terutama setelah reformasi. Dalam salah satu harian nasional (*Kompas*, 3 Mei 2011) disebutkan pada

topik pendidikan karakter, bahwa pendidikan karakter dan penanaman nilai-nilai nasionalisme di sekolah tidak berjalan efektif karena siswa tidak menemukan sosok teladan. Pengalaman yang mereka lihat kurang mencerminkan pendidikan karakter, bahkan malah berlawanan. Mereka hanya mendengar karakter baik, kejujuran, pengorbanan kepada sesama, patriotisme, jarang menemukan hal itu dalam kehidupan sehari-hari. Ada yang menyebut hal ini, disebabkan antara lain karena Pendidikan Pancasila dihapus (Kompas, 6 Mei 2011). Oleh karena itu ada yang mengusulkan agar ajaran Pancasila direvitalisasi (Kompas, 7 Mei 2011).

Mensikapi hal tersebut, kementerian pendidikan nasional republik Indonesia telah mencanangkan pengembangan budaya dan karakter bangsa, yang lebih populer dengan sebutan pendidikan berkarakter. Pendidikan karakter sejatinya sudah lama terkandung secara implisit dalam pendidikan kita sejak jaman dahulu. Namun akhir-akhir ini semakin perlu dan memperoleh perhatian yang besar, mengingat nilai-nilai, moral, estetika, dan karakter semakin kurang atau bahkan jarang dijumpai.

Bagi guru hal ini, mungkin menjadi tantangan baru, selain pencapaian tujuan-tujuan pembelajaran yang bersifat kognitif yang sampai sekarang masih menjadi tugas yang cukup berat, terutama bagi guru-guru mata pelajaran umum, seperti matematika. Perguruan tinggi, khususnya lembaga pendidikan tenaga kependidikan yang bertugas menyiapkan guru-guru, tentunya mempunyai kewajiban moral untuk membantu guru dalam masalah yang dijumpai di sekolah, tak terkecuali membantu guru dalam menyiapkan pembelajaran yang menunjang ke pendidikan karakter, termasuk masalah yang dihadapi oleh guru matematika. Tulisan ini akan memberikan gambaran bagaimana pendidikan karakter dapat dikembangkan dalam pembelajaran matematika.

PENDIDIKAN KARAKTER DALAM PEMBELAJARAN MATEMATIKA

Pendidikan karakter sebenarnya sudah menjadi orientasi dalam sistem pendidikan kita. Hal ini terlihat pada pasal 3 UU RI Tahun 2003 tentang Sistem Pendidikan Nasional yang menyebutkan bahwa pendidikan nasional berfungsi untuk mengembangkan kemampuan dan membentuk watak serta peradaban bangsa yang bermartabat dalam rangka mencerdaskan kehidupan bangsa, bertujuan untuk berkembangnya potensi peserta didik agar menjadi manusia yang beriman dan bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa, berakhlak mulia, sehat, berilmu, cakap, kreatif, mandiri, dan menjadi warga negara yang demokratis serta bertanggungjawab. Hal itu diperkuat dalam tujuan pendidikan di tingkat satuan pendidikan pada Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 23 tahun 2006 tentang Standar Kompetensi Lulusan. Dalam peraturan itu, disebutkan bahwa tujuan pendidikan dasar adalah meletakkan dasar kecerdasan, pengetahuan, kepribadian, akhlak mulia, serta keterampilan hidup mandiri dan mengikuti pendidikan lanjut. Adapun tujuan pendidikan menengah adalah untuk meningkatkan kecerdasan, pengetahuan, kepribadian, akhlak mulia, serta keterampilan hidup mandiri dan mengikuti pendidikan lanjut. Sementara itu, tujuan pendidikan menengah kejuruan adalah untuk meningkatkan kecerdasan, pengetahuan, kepribadian, akhlak mulia, serta keterampilan hidup mandiri dan mengikuti pendidikan lanjut sesuai dengan kejurumannya. Dari tujuan-tujuan itu terlihat bahwa pada semua tingkat satuan pendidikan, peningkatan kepribadian, akhlak mulia, serta keterampilan hidup mandiri merupakan merupakan tujuan yang penting. Sementara itu dalam peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 22 tahun 2006 tentang Standar Isi: Pendidikan dasar dan menengah disebutkn bahwa akhlak mulia mencakup etika, budi

pekerti, atau moral sebagai perwujudan dari pendidikan agama. Dari rumusan itu, nampak bahwa secara implisit pendidikan karakter sudah menjadi arah dalam tujuan pendidikan kita.

Pendidikan karakter

Pendidikan karakter sebenarnya sudah lama, setua pendidikan itu sendiri. Pendidikan mempunyai tujuan membantu orang menjadi cerdas dan menjadi baik. Pendidikan karakter pada mulanya dilaksanakan melalui disiplin, keteladanan dari guru, dan kurikulum sekolah sehari-hari (Lickona, 2010: 1). Pada tahun 1990an, pendidikan karakter menjadi berkembang pesat, yang ditandai dengan terbit dan dipublikasinya buku yang terkait dengan pendidikan karakter, serta publikasi jurnal tentang pendidikan karakter secara periodik.

Secara mudah karakter didefinisikan sebagai kombinasi dari kualitas emosi, kecerdasan, dan moral yang membedakan seseorang (Klann, 2007: 6). Menurut Lickona (2010: 5) pendidikan karakter mencakup aspek kognitif, afektif, dan perilaku dari moralitas. Karakter yang baik terdiri dari pengetahuan yang baik, keinginan yang baik, dan perbuatan yang baik. Untuk itu, dalam upaya mengembangkan pendidikan karakter, sekolah atau guru perlu memfasilitasi dan membantu siswa agar mereka memahami nilai-nilai, mengambil atau komit terhadap nilai-nilai, dan kemudian melakukannya hal itu dalam kehidupan sehari-harinya (Lickona, 2010: 5). Nilai adalah keyakinan yang membuat seseorang bertindak atas dasar pilihannya (Allport dalam Gable, 1986: 10). Tyler (Gable, 1986:11) mengemukakan bahwa nilai merupakan objek, kegiatan atau gagasan yang dijaga oleh seseorang yang diturunkan dari pengaruh pendidikannya yang memberikan arah terhadap minat, sikap, dan perasaan puas pada dirinya.

Dari aspek kognitif karakter paling tidak mencakup 6 kualitas moral: (1) kepedulian dimensi moral dari situasi nyata, (2) mengetahui nilai moral dan apa yang mereka perlukan dari kita dalam kasus-kasus konkret, (3) *perspective-taking*, (4) *moral reasoning*, (5) *thoughtful decision-making*, dan (6) *moral self-knowledge* (Lickona, 2010: 6). Moral merupakan hal yang mendorong manusia untuk melakukan tindakan yang baik sebagai kewajiban atau norma (Sjarkawi, 2006: 27). Orang yang sangat tahu tentang sesuatu hal yang benar dan salah, namun boleh jadi mereka masih mungkin memilih yang salah. Oleh karena itu, dengan pengetahuan mengenai benar dan salah belum cukup menyentuh aspek afektif dari karakter, yang berperan sebagai jembatan antara keputusan dan tindakan. Aspek afektif dari karakter paling tidak meliputi: (1) *conscience* (perasaan mengenai sesuatu yang harus diputuskan benar atau salah), (2) *self-respect*, (3) empati, (4) cinta kebaikan, (5) *self control*, dan (6) *humility* (kemauan untuk mengenali dan mengoreksi kegagalan moralnya). Ketika seseorang tahu apa yang harus dikerjakan dan perasaan yang kuat untuk mengerjakannya, namun seseorang mungkin belum mampu mengerjakannya. Tindakan moral merupakan bagian ketiga dari karakter, yakni (1) kompetensi (keterampilan seperti mendengarkan, berkomunikasi, dan bekerja sama), (2) kemauan (yang memobilisasi antara keputusan dan tenaganya), (3) kebiasaan moral (kecenderungan dari dalam diri seseorang yang tetap untuk merespons situasi dalam jalan/cara yang baik secara moral) (Lickona, 2010: 6). Sementara ada yang menyebutkan bahwa ada 7 karakter yang perlu dibudayakan, namun dari hasil penelitian ditemukan ada 20 karakter yang dipilih oleh responden (Darmiyati Zuhdi, 2010: 44), yakni: jujur, berpandangan jauh, kompeten, bisa memberi inspirasi, cerdas, adil, berpandangan luas, mendukung, terus

terang, bisa diandalkan, kerja sama, tegas, berdaya imajinasi, berambisi, berani, perhatian, matang, loyal, penguasaan diri, dan independen. Terkait dengan pendidikan karakter ini, dalam program Lions Quest (www.lions-quest.org), disebutkan bahwa dalam program pendidikan karakter yang efektif ada sebelas prinsip (standar kualitas). Dalam kurikulumnya antara lain dikembangkan nilai-nilai: disiplin diri, tanggung jawab, hormat terhadap diri sendiri dan orang lain, kebajikan (peduli dan perhatian terhadap orang lain), kejujuran, keberanian/keteguhan hati, terhindar dari obat terlarang dan gaya hidup bebas, dan komitmen terhadap keluarga.

Dari beberapa pendapat di atas, nampaknya beberapa karakter yang baik seperti: berpandangan jauh, kompeten, bisa memberi inspirasi, cerdas, adil, berpandangan luas, terus terang, bisa diandalkan, kerja sama, tegas, berdaya imajinasi, berambisi, berani, perhatian, penguasaan diri, dan independen, disiplin, tanggung jawab, hormat terhadap diri sendiri dan orang lain (sopan santun), kebajikan (peduli dan perhatian terhadap orang lain), kejujuran, keberanian/keteguhan hati, terhindar dari obat terlarang dan gaya hidup bebas, dan komitmen terhadap keluarga dapat dikembangkan secara kognitif, afektif, dan pembiasaan/perilaku dalam pembelajaran matematika.

Pembelajaran matematika

Salah satu prinsip pengembangan kurikulum tingkat satuan pendidikan adalah bahwa kurikulum dikembangkan berdasarkan prinsip: peserta didik memiliki posisi sentral untuk mengembangkan kompetensinya agar menjadi manusia yang beriman dan bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa, berakhlak mulia, sehat, berilmu, cakap, kreatif, mandiri dan menjadi warga negara yang demokratis serta bertanggung jawab. Acuan dalam pengembangannya kurikulum disusun agar sejauh mungkin semua mata pelajaran dapat menunjang peningkatan iman dan takwa serta akhlak mulia (BSNP, 2006: 6-8). Dari rumusan itu jelas bahwa mengingat matematika merupakan salah satu mata pelajaran dalam kurikulum tingkat satuan pendidikan, maka dalam pembelajarannya sejauh mungkin dapat menunjang peningkatan iman dan takwa serta akhlak mulia atau dalam istilah lain menunjang pendidikan karakter.

Untuk dapat merancang pembelajaran matematika yang dapat menunjang atau mengembangkan pendidikan karakter, maka perlu identifikasi unsur-unsur atau komponen-komponen yang ada dalam pembelajaran. Dalam pembelajaran matematika terdapat komponen-komponen antara lain: bahan atau materi pelajaran (matematika), metode, media, dan kegiatan pembelajaran (proses pelaksanaan pembelajaran). Oleh karena itu pengembangan pendidikan karakter bisa dimasukkan ke dalam materi pelajaran, metode yang dipilih untuk digunakan, dan dalam pelaksanaan proses pembelajaran.

Matematika merupakan suatu studi yang dimulai dari pengkajian bagian-bagian yang sangat dikenal (sederhana) menuju ke arah yang tak dikenal. Arah yang lebih dikenal itu tersusun baik, secara bertahap menuju ke arah yang rumit (kompleks): dari bilangan bulat ke bilangan pecahan, dari bilangan real ke bilangan kompleks; dari penjumlahan dan perkalian ke diferensial dan integral, serta menuju ke matematika yang lebih tinggi (Russel, 1967:1). Definisi lain yang lebih menekankan ke pengertian matematika dari segi kegunaannya diberikan oleh Cockcroft. Dari laporan Cockcroft (Liebeck, 1984: 14) menjawab pertanyaan: mengapa mengajarkan matematika? Diperoleh jawaban bahwa karena matematika berguna untuk kehidupan sehari-hari, bagi sains, perdagangan, dan industri. Karena itu, ia (matematika) memberikan suatu daya, alat komunikasi yang singkat dan tidak ambigu dan alat untuk mendeskripsikan dan memprediksi. Matematika

mencapai kekuatannya melalui simbol-simbolnya, yang mempunyai “tata bahasa” dan kaidah bahasa (*syntax*) pada dirinya. Laporan juga mengklaim bahwa matematika mengembangkan berpikir logis, dan matematika mempunyai daya tarik seni *aesthetic*. Pendefinisian matematika di sini dari segi kegunaannya, yang cakupannya lebih luas dari sekedar matematika sekolah. Gambaran tentang matematika yang lebih luas diberikan oleh Watson. Watson (1976: 123-124) mengutip beberapa pengertian matematika sebagai berikut: matematika adalah “aritmetika (komputasi) – uang, berat, pengukuran, desimal, penerimaan pajak, ...;” “bahasa sains;” “inferensi logik, bukti,” “sains dari ruang dan bilangan,” “kajian semua pola yang mungkin;” “kajian dari struktur abstrak;” “ratu dan pelayan dari sains.” Di Inggris (*United Kingdom*), pengajaran matematika, berimplikasi ke pengenalan nilai-nilai matematika sebagai suatu: (1) alat pengkomunikasian ide-ide yang dapat dikuantifikasi, (2) pelatihan untuk disiplin berpikir dan untuk penalaran logik, (3) alat dalam aktivitas yang muncul dari pengembangan kebutuhan rekayasa, teknologi, sains, organisasi, ekonomi, sosiologi, dan sebagainya, serta (4) studi dalam matematika sendiri, di mana pengembangan teknik dan konsep baru dapat mempunyai konsekuensi ekonomi sama dengan yang menggantungkan dari riset dan pengembangan saintifik (ilmiah) (Bishop, 1991: 197).

Tahun 1989 *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) menyajikan standard kurikulum dan evaluasi untuk matematika sekolah (dari TK sampai kelas 12). Standard merupakan suatu dokumen yang dirancang untuk memaparkan kerangka kerja yang luas untuk membantu reformasi matematika sekolah tahun 1990-an. Standard kurikulum tersebut mencakup empat standard bersama yang ditujukan untuk semua siswa (dari taman kanak-kanak hingga siswa SMU), standard itu adalah: (1) standard kurikulum untuk taman kanak-kanak sampai kelas 4, standard kurikulum untuk kelas 5 sampai kelas 8, standard kurikulum kelas 9 sampai kelas 12, dan standard evaluasi. Isi standard kurikulum kelas 9-12 (SMU): (1) matematika sebagai pemecahan masalah, (2) matematika sebagai komunikasi, (3) matematika sebagai penalaran, dan (4) keterkaitan matematik, (5) aljabar, (6) fungsi, (7) geometri dari perspektif sintetik, (8) geometri dari perspektif aljabarik, (9) trigonometri, (10) statistik, (11) teori kemungkinan, (12) matematika diskrit, (13) pendukung konsep kalkulus, dan (14) struktur matematik (Romberg, et al, 1989: 127-176, Souviney, 1994: 8-9).

Menurut Bell (1981: 167) untuk menghasilkan pembelajaran matematika yang efektif dan efisien diperlukan pemahaman tentang materi matematika, tujuan kognitif, dan afektif dari matematika, dan macam-macam strategi yang dapat digunakan. Lebih lanjut Bell (1981: 108) menyatakan bahwa objek yang dipelajari dalam matematika terbagi menjadi dua yaitu objek langsung (*direct*) dan objek tidak langsung (*indirect*). Berdasarkan objek matematika tersebut ditentukan model pembelajaran yang tepat. Objek langsung dibagi lagi menjadi empat macam, yaitu: (1) Fakta, merupakan sebarang kesepakatan dalam matematika misalnya “2” adalah fakta yang digunakan untuk kata “dua”, “+” adalah fakta yang digunakan sebagai symbol operasi “penjumlahan”; (2) Keterampilan, merupakan prosedur-prosedur atau operasi-operasi yang diharapkan dapat digunakan dengan cepat dan akurat, misalnya algoritma; (3) Konsep, merupakan ide abstrak yang memungkinkan seseorang untuk mengklasifikasi suatu objek atau kejadian dan kemudian menentukan apakah objek atau kejadian itu merupakan contoh atau bukan contoh dari ide abstrak tersebut, dan (4) Prinsip, merupakan rangkaian konsep disertai dengan keterkaitan antar konsep-konsep itu. Menurut Bell (1981: 223), objek tidak langsung dari matematika

adalah: (1) pembuktian teorema, (2) penyelesaian masalah, (3) transfer pembelajaran, (4) belajar tentang bagaimana seharusnya belajar, (5) pengembangan intelektual (*intellectual development*), (6) bekerja secara mandiri, (7) bekerja dalam kelompok, dan (8) sikap positif.

Terkait dengan pembelajaran matematika, Bell (1981: 223) membagi model pembelajaran matematika yang terkait dengan objek langsung adalah: model ekspositori, penemuan, permainan, individu, dan spiral; sementara untuk pembelajaran objek tak langsung, model pembelajaran yang bisa digunakan antara lain: pembuktian teorema, pemecahan masalah, laboratorium, penemuan terbimbing, dan model pembelajaran kooperatif (kelompok).

Dengan memperhatikan beberapa definisi matematika, objek matematika, dan pembelajaran matematika, serta pendidikan karakter di atas, nampaknya sangat dimungkinkan memasukkan nilai-nilai karakter yang baik dalam pembelajaran matematika. Sebagai contoh dalam pemilihan metode, model, atau strategi pembelajaran, pada pembelajaran konsep, prinsip, dan skill model, metode, atau strategi penemuan terbimbing dapat mengembangkan pendidikan karakter: kompeten, bisa memberi inspirasi, cerdas, dan berdaya imajinasi. Sementara itu, dengan pemilihan metode, model, atau strategi pembelajaran kooperatif dengan objek tak langsung bisa dikembangkan karakter: kompeten, bisa memberi inspirasi, cerdas, adil, terus terang, kerja sama, tegas, berdaya imajinasi, berani, perhatian, penguasaan diri, disiplin, tanggung jawab, hormat terhadap diri sendiri dan orang lain (sopan santun), kebajikan (peduli dan perhatian terhadap orang lain), dan keberanian.

Pendidikan Karakter dalam Pembelajaran Matematika

Menurut Lickona (2010: 7), pengembangan pendidikan karakter di kelas dapat dilakukan dengan:

- a. Guru secara individu untuk: bertindak sebagai pemberi perhatian, model, dan mentor, memperlakukan siswa dengan kasih sayang, memberi contoh yang baik, mendukung perilaku sosial yang positif, dst.
- b. Menciptakan suatu komunitas moral, membantu siswa mengenali satu sama lain, hormat dan peduli satu sama lain, merasa satu kebersamaan, dan tanggungjawab ke kelompok;
- c. Melatih/latihan disiplin moral, menggunakan kreasi dan penegakan aturan sebagai kesempatan untuk membantu mengembangkan menumbuhkan, peduli, penalaran moral, sukarela menaati aturan, dan saling mengormati;
- d. Mencitakan lingkungan kelas yang demokratis, mencakup siswa dalam membuat keputusan dan tanggungjawab untuk membuat keberadaan kelas sebagai tempat yang bagus untuk belajar;
- e. Mengajarkan nilai-nilai melalui kurikulum, menggunakan *ethically rich* konten dari mata pelajaran
- f. Menggunakan pembelajaran kooperatif I untuk mengembangkan apresiasi siswa terhadap siswa yang lain, *perspective taking*, dan kemampuan untuk bekerja dengan yang lain untuk mencapai tujuan bersama;
- g. Mengembangkan "*consciousness of craft*" dengan menumbuhkembangkan/kepedulian apresiasi terhadap belajar siswa, kapasitas untuk bekerja keras, komitmen keunggulan, dan *sense* bekerja sebagai mempengaruhi hidup lainnya;

- h. Menguatkan refleksi moral melalui membaca, meneliti, menulis esai, diskusi, dan berdebat;
- i. Mengajarkan penyelesaian konflik sehingga siswa memperoleh kemampuan sendiri moral penting keterampilan untuk mengatasi konflik secara adil dan tanpa kekerasan.

Dengan memadukan uraian materi matematika (baik itu objek langsung atau objek tak langsung), pemilihan model, metode, atau pembelajaran yang tepat, yang sesuai dengan nilai karakter yang akan dikembangkan, serta melaksanakan pembelajaran matematika sesuai dengan saran dari Lickona tersebut, maka pendidikan karakter akan bisa terlaksana dalam proses pembelajaran matematika. Berapa karakter yang baik, yang belum bisa tertuang dalam proses pembelajaran matematika secara langsung, seperti: berpandangan jauh/luas, terus terang, berambisi, terhindar dari obat terlarang dan gaya hidup bebas, dan komitmen terhadap keluarga dapat disisipkan dalam pelaksanaan pembelajaran matematika di kelas, ketika menghadapi situasi real yang terjadi di kelas, misalnya: guru/dosen terlambat karena ada keperluan keluarga (seperti: mendadak mengantarkan ke rumah sakit; melayat tetangga yang meninggal karena korban obat terlarang, membantu tetangga karena menjadi korban/keluarga yang broken home karena gaya hidup bebas, dan sebagainya).

PENUTUP

Sesuai dengan amanat Permen Diknas No. 22 dan 23 tahun 2006, serta prinsip dan acuan dalam pengembangan kurikulum tingkat satuan pendidikan, pengembangan kepribadian dan akhlak mulia, yang di dalamnya terkandung nilai-nilai karakter, maka dalam pembelajaran matematika juga memikul tanggung jawab dalam mengembangkan pendidikan karakter. Pendidikan karakter dalam pembelajaran matematika dapat dilakukan dengan melalui materi matematika (seperti: menyampaikan atau menuliskan alasan/argumentasi pada setiap langkah dalam pengerjaan/penyelesaian soal matematika), melalui model, metode, atau strategi yang digunakan dalam pembelajaran matematika (misalnya: metode penemuan untuk pembelajaran konsep, prinsip, atau skill, metode kooperatif dalam pembelajaran pemecahan masalah), dan melalui pelaksanaan proses pembelajaran matematika (misalnya: dilakukan dengan memberikan contoh tindakan dari pendidik yang positif atau contoh-contoh nyata yang dialami pendidik atau peserta didik, penegakan disiplin, penguatan-penguatan kebiasaan yang baik, dan pengingatan akan kebiasaan-kebiasaan yang buruk, seperti kesantunan dalam duduk, berpakaian, berbicara, dan sebagainya).

DAFTAR PUSTAKA

- Bell, F. H. (1981). *Teaching and Learning Mathematics (In secondary school)*. Dubuque, Iowa: Wm, C. Brown Company Publisher.
- Bishop, A. J., Stieg Mellin-Olsen, and Joop van Dormolen. (1991). *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers,
- Darmiyati Zuchdi, dkk. (2009). *Pendidikan Karakter Grand Design dan Nilai-nilai Target*. Yogyakarta: UNY Press.

- Departemen Pendidikan Nasional. (2003), *Undang-Undang No. 20 Tahun 2003 tentang Sistem Pendidikan Nasional*.
- Gable, R. K. (1986). *Instrument Development in The Affective Domain*. Boston: Kluwer-Nijhoff Publishing.
- Kennedy, L.M. & Tipps, S. (1991). *Guiding Children's Learning of Mathematics*. Belmont, California: Wadworth Publishing Company.
- Klann, G. (2007). *Building Character: Strengthening the Heart of Good Leadership*. San Francisco, CA: John Wiley & Sons. Inc.
- Liebeck, P. (1984). *How Children Learn Mathematics: A Guide for Parent and Teachers* London: Penguin Books.
- Lickona, T. (2010). Character Education: The Return of Character Education. Dalam: *A Set of Articles about Character Education*. Yogyakarta: Character Education Program. Yogyakarta state University.
- Mendiknas R.I. (2006). *Peraturan Menteri Pendidikan Nasional No. 22 tahun 2006 tentang Standar Isi untuk satuan pendidikan dasar dan menengah*.
- Russell, B. (1967). *Introduction to Mathematical Philosophy*. London: George Allen and Unwin, Ltd.
- Romberg, T.A., et al. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Schwartz, M.J. (2008). Teacher Education for Moral and Character Education, *Character Education Partnership. Dalam Nucci, L.P. dan Narvaez, D. Handbook of Moral and Character Education*. New York and London: Routledge.
- Sjarkawi. (2006). *Pembentukan Kepribadian Anak Peran Moral Intelektual, Emosional, dan Sosial sebagai Wujud Integritas Membangun Jatidiri*. Jakarta: Bumi Aksara
- Souviney, R.J. (1994). *Learning to Teach Mathematics*. New York: Macmillan Publishing Company.
- Watson, F. R. (1976). *Developments in Mathematics Teaching*. London: Opens Books,

PEMAHAMAN MAHASISWA *FIELD DEPENDENT* DALAM PEMECAHAN MASALAH PEMBUKTIAN

Herry Agus Susanto

Universitas Veteran Bangun Nusantara Sukoharjo
Email: herrysanto_62@yahoo.co.id

Abstrak

Tujuan penelitian ini untuk mendeskripsikan pemahaman mahasiswa *field dependent* dalam pemecahan masalah pembuktian pada konsep grup. Penelitian dilakukan di Universitas Veteran Bangun Nusantara Sukoharjo. Subjek penelitian sebanyak 1 mahasiswa *field dependent*. Metode pengumpulan data dengan wawancara, lembar tugas. Pemahaman mahasiswa *field dependent* dalam memecahkan masalah pembuktian pada konsep grup sebagai berikut: (i) dalam memahami masalah, mahasiswa *field dependent* memberkan respon yang kurang lengkap, konsep yang diungkap hanya yang ada pada teks soal. Subjek menyebutkan data apa yang diketahui, menentukan apa yang dibuktikan. (ii) dalam merencanakan penyelesaian, subjek menggunakan definisi grup, (iii) dalam melaksanakan penyelesaian, subjek hanya melaksanakan beberapa indikator penyelesaian secara lengkap, yaitu dalam melaksanakan rencana pemecahan dilakukan secara runtut namun kurang terperinci. (iv) pengecekan kembali dilakukan pada langkah yang dilakukan dan hasil yang diperoleh. Pengecekan hasil hanya dilakukan pada sifat tertutupan. Pada akhir pekerjaan, subjek dapat menyimpulkan hasil pekerjaannya. Penelitian masih terbatas pada pemahaman dalam pemecahan masalah pembuktian bagi mahasiswa *field dependent* pada konsep grup. Dapat dilanjutkan dengan kegiatan lain misalnya (1) penelitian tentang pemahaman dalam pembentukan atau konstruksi konsep, (2) digunakan sebagai dasar untuk mendesain pembelajaran yang mempertimbangkan gaya kognitif mahasiswa, (3) pemahaman dosen terhadap gaya kognitif mahasiswa, diharapkan dalam pembelajaran dapat menyesuaikan dengan karakteristik mahasiswa.

Kata kunci: Pemahaman, Pemecahan Masalah Pembuktian, Gaya Kognitif

PENDAHULUAN

Pembuktian dalam bidang matematika merupakan suatu hal yang penting. Seperti yang dinyatakan oleh Martin (1989 : 41) bahwa konsep pembuktian sangat penting dalam pelajaran matematika. Selanjutnya Henderson dalam Martin menyatakan bahwa pemikiran pembuktian adalah salah satu gagasan penting dari matematika. Pembuktian penting disebabkan dapat meningkatkan daya kritis siswa. Seperti yang dinyatakan oleh Fawcett (dalam Hart, 1986: 2) bahwa belajar pembuktian matematika (*mathematical proof*) dapat meningkatkan daya kritis dan reflektif. Selanjutnya beliau berpendapat bahwa ‘pemikiran reflektif perlu ditingkatkan melalui pengalaman dalam menganalisis situasi yang berkaitan pembuktian.

Baylis (1983: 3) dalam sebuah artikelnya menuliskan bahwa “*Proof is the essence of mathematics.*” Selanjutnya Driscoll dalam Hart (1986: 3) berpendapat bahwa pada suatu tingkat pembelajaran, peran pembuktian jelas, pembuktian merupakan alat mendasar untuk memperluas bidang matematika. Hasil temuan Baylis di atas ternyata lebih memantapkan pendapat Fraleigh (1966: iii) yang menyatakan bahwa rata-rata siswa sama sekali tidak tahu saat didapati dengan sekumpulan latihan yang semua berawal dengan kata buktikan atau tunjukkan.

Temuan Baylis maupun Fraleigh ternyata didukung pula oleh pendapat Clement (1992: 441) bahwa: telah banyak usaha untuk memperbaiki ketrampilan pembuktian para siswa dengan mengajarkan pembuktian formal yang hampir semuanya gagal. Clement juga menyebutkan bahwa (1)

kemampuan mahasiswa dalam pembuktian masih kurang, (2) perlu penelitian tentang bagaimana upaya untuk mengembangkan kemampuan tersebut, (3) banyak yang telah mencoba berupaya mengajarkan pembuktian secara formal, tetapi hasilnya belum memuaskan.

Berdasarkan beberapa pendapat tersebut di atas, dapat disimpulkan bahwa masalah pembuktian dalam matematika, khususnya pada tingkat perguruan tinggi merupakan hal yang sangat esensial dan perlu ditingkatkan.

Pembuktian merupakan salah satu masalah dalam matematika. Seperti yang dinyatakan Polya (1981: 118) masalah dalam matematika dikelompokkan menjadi dua jenis, yaitu masalah untuk menemukan (*problem to find*) dan masalah untuk membuktikan (*problem to prove*). Menurut Polya masalah membuktikan adalah *to decide whether a certain assertion is true or false, to prove it or disprove it*. (artinya : memutuskan apakah pernyataan tertentu itu benar atau salah membuktikannya benar atau membuktikannya salah).

Pemecahan masalah merupakan metoda yang tepat untuk mempelajari dan mengerjakan matematika. Siswa yang terampil dalam memecahkan masalah akan memiliki beberapa keuntungan, diantaranya mengembangkan kemampuan berpikir kritis, memperkuat ketrampilan matematika dan kemampuannya untuk memecahkan masalah. Sementara itu, Pehkonen (1997) membagi menjadi 4 kategori, alasan untuk mengajarkan pemecahan masalah, yaitu: pemecahan masalah mengembangkan keterampilan kognitif secara umum, pemecahan masalah mendorong kreativitas, pemecahan masalah merupakan bagian dari proses aplikasi matematika, dan pemecahan masalah memotivasi peserta didik untuk belajar matematika.

Dengan kemampuan pemecahan masalah yang didapat dari pelajaran matematika, diharapkan peserta didik dapat membawanya untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-harinya, hal itu diungkap oleh Cooney (dalam Hudojo, 2003) yaitu mengajar peserta didik untuk menyelesaikan masalah-masalah, memungkinkan peserta didik itu menjadi lebih analitis di dalam mengambil keputusan di dalam kehidupannya.

Setiap individu memiliki karakteristik yang khas, yang tidak dimiliki oleh individu lain. Oleh karena itu dapat dikatakan bahwa setiap individu berbeda satu dengan yang lain. Karakteristik yang unik tersebut dikenal sebagai gaya kognitif (*cognitive style*). Siswa akan mencapai hasil yang optimal apabila belajar sesuai dengan gaya belajar siswa. Gaya kognitif terbagi atas dua bagian, yakni *Field Independent* (FI) dan *Field Dependent* (FD). Witkin menyatakan bahwa individu yang bersifat analitik adalah individu yang memisahkan lingkungan ke dalam komponen-komponennya, kurang bergantung pada lingkungan atau kurang dipengaruhi oleh lingkungan. Individu ini dikatakan termasuk gaya kognitif *Field Independent* (FI). Sedangkan individu yang bersifat global adalah individu yang memfokuskan pada lingkungan secara keseluruhan, didominasi atau dipengaruhi lingkungan. Individu tersebut dikatakan termasuk gaya kognitif *Field Dependent* (FD).

Agar diketahui pemahaman mahasiswa dalam pemecahan masalah pembuktian pada konsep grup, maka perlu dilakukan suatu kajian atau penelitian. Oleh karena itu, diperlukan informasi dan pengkajian lebih lanjut pemahaman mahasiswa dengan gaya kognitif yang berbeda dalam pemecahan masalah pembuktian. Meskipun gaya kognitif terdapat dua macam, yaitu *field independent* dan *field dependent*, untuk keperluan kajian dalam penulisan ini hanya akan ditinjau subjek bergaya kognitif *field dependent*. Sehingga tujuan penelitian ini adalah mendeskripsikan pemahaman mahasiswa *field dependent* dalam pemecahan masalah pembuktian pada konsep grup

Manfaat hasil penelitian adalah dapat memberi sumbangan pemikiran bagi pengembangan ilmu pengetahuan terhadap dunia pendidikan. Khususnya dalam bidang psikologi kognitif berupa deskripsi pemahaman pemecahan masalah bagi mahasiswa gaya kognitif *field dependent*. Dapat memberi manfaat bagi mahasiswa maupun dosen matematika dalam upaya meningkatkan kualitas pembelajaran matematika. Dapat memberi manfaat bagi dosen untuk menyusun model-model pembelajaran

METODE PENELITIAN

Penelitian ini mengungkap pemahaman mahasiswa dalam pemecahan masalah pembuktian pada konsep grup. Dalam penelitian ini yang lebih dipentingkan adalah bagaimana pemahaman

mahasiswa dalam pemecahan masalah pembuktian. Subyek dalam penelitian ini adalah mahasiswa Universitas Veteran Bangun Nusantara Sukoharjo yang sedang menempuh mata kuliah struktur aljabar I dan telah memperoleh materi grup.

Instrumen dalam penelitian ini, dibedakan menjadi dua bagian, yaitu: instrument utama dan instrument bantu. Instrumen utama dalam penelitian ini adalah peneliti sendiri. Instrumen bantu dalam penelitian ini terdiri dari 3 macam, yaitu: Instrumen *Group Embedded Figures Test* (GEFT), instrumen soal pemecahan masalah pembuktian dan pedoman wawancara.

Pengumpulan data menggunakan metode wawancara yang dilakukan oleh peneliti sebagai instrumen utama. Wawancara dilakukan untuk menggali pemahaman subyek tentang pemecahan masalah pembuktian pada konsep grup. Pemecahan masalah menggunakan empat langkah yang dikemukakan oleh Polya, yaitu: memahami masalah, rencana pemecahan, melaksanakan rencana pemecahan, dan mengecek kembali.

Analisis data penelitian kualitatif, menurut Miles & Huberman (1984) menyatakan terdapat tiga komponen utama dalam analisis yaitu reduksi data, sajian data dan penarikan kesimpulan serta verifikasi. Dari ketiga komponen utama dapat dikembangkan menjadi analisis data dimulai dari : (1) mentranskrip jawaban mahasiswa, (2) menelaah data dari berbagai sumber, yaitu wawancara, observasi berdasarkan catatan kejadian di lapangan, (3) reduksi data (4) membuat kode (5) menganalisis pemahaman subyek, (6) menarik kesimpulan.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Pembahasan pemahaman dalam pemecahan masalah pembuktian, menggunakan langkah-langkah pemecahan masalah Polya yaitu: memahami masalah, merencanakan penyelesaian masalah pembuktian, melaksanakan rencana penyelesaian dan memeriksa kembali proses dan hasil pemecahan masalah membuktikan. Ke-empat langkah tersebut, ditulis M1, M2, M3 dan M4. Dalam paparan penelitian untuk kepentingan penulisan ini hanya akan dipaparkan hasil penelitian mahasiswa FD untuk soal ke-1

Data pemahaman berupa respon subjek secara lisan yang diperoleh melalui wawancara. Respon-respon tersebut merupakan pemahaman subjek dalam memecahkan soal pertama. Subjek *field dependent* dalam pembahasan berikut disimbulkan dengan S2FD. Analisis pemahaman dalam memahami masalah, terdapat empat aspek yang diungkap, yaitu: (1) data atau informasi yang diketahui dalam tugas, (2) apa yang ditanyakan, (3) kecukupan syarat yang diberikan, (4) pengetahuan matematika yang diperlukan untuk membuktikan. Berdasarkan empat aspek tersebut, dibawah ini dipaparkan data hasil wawancara yang berkaitan dengan memahami masalah masing-masing untuk soal-1 S2FD. Hasil wawancara pada soal pertama sebagai berikut.

| No | Kode | Pertanyaan – Jawaban |
|----|---------|--|
| 1 | PD11001 | <i>Coba kamu lihat, kamu baca dan cermati ya.?</i> |
| 2 | JD11002 | <i>Ya, pak.</i> |
| 3 | PD11003 | <i>Setelah kamu mencermati soal itu, data atau informasi apa saja yang ada soal itu?</i> |
| 4 | JD11004 | <i>Dalam soal itu, terdapat A himpunan bilangan bulat, terus operasinya penjumlahan</i> |
| 5 | PD11005 | <i>A itu himpunan apa?</i> |
| 6 | JD11006 | <i>Himpunan bilangan bulat</i> |
| 7 | PD11007 | <i>Adakah yang kamu ketahui lagi?</i> |
| 8 | JD11008 | <i>Ya itu tadi, operasinya juga ada.</i> |
| 9 | PD11009 | <i>Operasinya apa?</i> |
| 10 | JD11010 | <i>Operasinya ada penjumlahan bilangan bulat</i> |
| 11 | PD11011 | <i>bagaimana kamu dapat menyatakan bahwa data atau informasi seperti yang kamu sampaikan tadi?</i> |

- 12 JD11012 Saya mengetahui dari membaca soal yang diberikan
13 PD11013 apa yang ditanyakan?
14 JD11014 Disini yang ditanyakan, kita disuruh untuk menyelidiki apakah himpunan A disini itu beserta operasinya merupakan grup
15 PD11015 bagaimana kamu mengetahui bahwa yang ditanyakan itu?
16 JD11016 Dari apa yang ada pada soal
17 PD11017 apa saja syarat yang diperlukan untuk membuktikan soal itu?
18 JD11018 Persyaratan untuk menyelidiki soal ini, sepengetahuan saya kita menggunakan definisi grup, itu ada 4 syarat.
19 PD11019 bagaiman kamu dapat menyebutkan syarat yang itu?
20 JD11020 Berdasarkan definisi grup yang ada
21 PD11021 Masih adakah syarat lain yang kamu ketahui
22 JD11023 Yang saya ketahui itu pak, memenuhi 4 aksioma grup.
23 PD11023 pengetahuan matematika apa saja yang diperlukan untuk membuktikan?
24 JD11024 Pengetahuannya adalah himpunan A dengan operasi penjumlahan
25 PD11025 Mengapa kamu menyebutkan pengetahuan matematika itu?
26 JD11026 Karena pengetahuan matematika tersebut terdapat pada soal

Berdasarkan hasil wawancara seperti tersebut di atas, keempat aspek sudah sudah dikenali oleh subjek. Ini berarti terdapat keterkaitan antara informasi yang diberikan dengan skema yang telah ada (Hiebert dan Carpenter). Pada aspek data atau informasi yang diketahui dalam tugas dapat dilihat pada JD11004. Respon subjek adalah menyebutkan bahwa yang diketahui adalah terdapat A himpunan bilangan bulat, terus operasinya penjumlahan.

Setelah subjek menerima soal dan membacanya (*berarti menerima informasi*), subjek menangkap maknanya. Ini berarti terdapat keterkaitan antara informasi yang diterima dengan skema yang ada. Skema atau pengetahuan yang ada pada diri subjek meliputi himpunan, operasi penjumlahan. Sehingga ketika subjek menerima informasi yang ada pada lembar tugas, maka subjek langsung mengkaitkan antara informasi tersebut dengan skema yang telah ada. Hal ini ditunjukkan dari hasil pekerjaan subjek dapat menuliskan “diketahui: A himpunan bilangan bulat dengan operasi penjumlahan bilangan bulat” dan “ditanyakan: Selidikilah apakah himpunan. beserta operasi tersebut merupakan suatu grup”. Ini berarti ada keterkaitan antara skema tentang himpunan bilangan bulat, operasi penjumlahan bulat dengan permasalahan. Bila dikaitkan dengan proses informasi, maka ada kesesuaian antara skema yang ada dengan informasi yang diterima atau terjadi asimilasi

Aspek apa yang ditanyakan, dapat dilihat pada JD11014. Respon subjek adalah apakah himpunan A beserta operasi penjumlahan merupakan grup, termasuk juga penjumlahannya. Hal ini ditunjukkan dari hasil pekerjaan subjek dapat menuliskan “*ditanyakan*: Disini yang ditanyakan, kita disuruh untuk menyelidiki apakah himpunan A disini itu beserta operasinya merupakan grup”. Ini berarti ada keterkaitan antara skema tentang himpunan bilangan bulat, operasi penjumlahan bulat dengan permasalahan. Bila dikaitkan dengan proses informasi, maka ada kesesuaian antara skema yang ada dengan informasi yang diterima atau terjadi asimilasi.

Aspek kecukupan syarat yang harus dipenuhi agar tugas dapat dipecahkan adalah himpunan A bukan himpunan kosong dan diketahui operasinya. Aspek kecukupan syarat yang diberikan, dapat dilihat pada JD11018 yaitu persyaratan untuk menyelidiki soal ini, menggunakan definisi grup, itu ada 4 syarat yang harus dipenuhi. Berdasarkan hasil wawancara, subjek tidak menunjukkan bahwa $A \neq \emptyset$.

Aspek keempat yaitu pengetahuan matematika yang diperlukan untuk membuktikan, subjek tidak menunjukkan secara rinci, meskipun pengetahuan tersebut tidak terdapat pada tugas. Ini berarti subjek telah memiliki skema pengetahuan yang dimaksud. Secara lengkap petikan wawancara dapat dilihat pada PD11023 dan JD11023. Respon subjek memperlihatkan pengetahuan tersebut misalnya himpunan B dengan operasinya.

Dari hasil wawancara seperti di atas, menunjukkan bahwa skema tentang grup juga sudah dimiliki oleh subjek. Subjek tidak secara rinci menyebutkan aksioma pada grup. Pemahaman subjek

dalam memahami masalah ini kurang baik, hal ini ditunjukkan keempat aspek tidak dapat dikemukakan secara lengkap melalui wawancara. Subjek hanya dapat mengungkapkan pengetahuan yang tertulis pada soal. Pengetahuan yang disebutkan oleh subjek, merupakan pengetahuan yang berkaitan dengan permasalahan. Pengetahuan yang disebutnya hanya terbatas pada himpunan B beserta operasi penjumlahan. Subjek tidak dapat memisahkan obyek-obyek yang ada pada permasalahan secara terpisah dalam konteks aslinya.

Untuk keperluan analisis pemahaman dalam perencanaan pemecahan masalah, terdapat empat aspek yang diungkap, yaitu: (1) cara yang akan digunakan untuk membuktikan, (2) konsep apa saja yang akan digunakan untuk membuktikan, (3) tugas lain yang serupa, (4) langkah-langkah apa saja yang akan dilakukan dalam memecahkan masalah. Berdasarkan empat aspek tersebut, dibawah ini dipaparkan data hasil wawancara, yang berkaitan dengan perencanaan pemecahan masalah masing-masing untuk soal-1 bagi S2FD.

Hasil wawancara pada tugas pertama sebagai berikut

- | | | |
|----|---------|---|
| 27 | PD11027 | <i>Bagaimana cara atau strategi yang dapat digunakan untuk membuktikan?</i> |
| 28 | JD11028 | <i>Cara atau strategi yang akan digunakan untuk membuktikan adalah dengan jalan menunjukkan definisi grup</i> |
| 29 | PD11029 | <i>mengapa kamu menggunakan cara atau strategi itu?</i> |
| 30 | JD11030 | <i>Ya untuk membuktikan grup itu sendiri dengan menggunakan aksioma.</i> |
| 31 | PD11031 | <i>teorema atau konsep apa saja yang dapat digunakan untuk membuktikan?</i> |
| 32 | JD11032 | <i>Konsep yang digunakan membuktikan grup adalah sifat tertutup, assosiatif, identitas dan invers.</i> |
| 33 | PD11033 | <i>Apa maksud dari konsep-konsep itu?</i> |
| 34 | JD11034 | <i>Disitu ada tertutup, maksudnya hasil operasinya ada disitu.</i> |
| 35 | PD11035 | <i>Apakah hanya itu saja?</i> |
| 36 | JD11036 | <i>Ya, masih ada yang lain misalnya elemen identitas yaitu elemen yang tetap.</i> |
| 37 | PD11037 | <i>mengapa kamu memilih teorema atau konsep tersebut?</i> |
| 38 | JD11038 | <i>Karena konsep tersebut merupakan konsep yang bersesuaian</i> |
| 39 | PD11039 | <i>Apakah kamu pernah mengetahui tugas lain yang serupa?</i> |
| 40 | JD11040 | <i>Ya Pak, Pernah mengetahui dari tugas yang lain</i> |
| 41 | PD11041 | <i>Bagaimana kamu dapat mengetahuinya?</i> |
| 42 | JD11042 | <i>Berdasarkan tulisan yang ada pada soal, misalnya apa yang diketahui dan apa yang ditanyakan</i> |
| 43 | PD11043 | <i>langkah-langkah apa yang digunakan untuk membuktikan?</i> |
| 44 | JD11044 | <i>Langkah yang saya rencanakan adalah menunjukkan aksioma tersebut</i> |
| 45 | PD11045 | <i>mengapa menggunakan langkah tersebut?</i> |
| 46 | JD11046 | <i>Karena berdasarkan definisi grup</i> |

Dari hasil wawancara tersebut di atas, dapat dilihat dari empat aspek sebagai berikut. Aspek yang pertama, yaitu aspek cara yang akan digunakan untuk membuktikan. Berdasarkan respon terhadap perencanaan pemecahan masalah, S2FD merencanakan untuk memecahkan masalah dengan menggunakan definisi grup. Hal ini dapat dilihat petikan wawancara pada JD11028. Alasan menggunakan definisi karena sesuai dengan pengetahuan yang dimiliki subjek, lihat JD11030. Pengetahuan yang dimaksud meliputi sifat tertutup, assosiatif, identitas dan invers. Berdasarkan respon ini, menunjukkan bahwa pemahaman S2FD telah mengaitkan antara pengetahuan yang dimiliki dengan obyek matematika yaitu konsep grup.

Aspek kedua, yaitu konsep apa saja yang akan digunakan untuk membuktikan, dapat dilihat pada JD11032. Subjek memberikan penjelasan untuk masing-masing aksioma, seperti JD11034 dan JD11036. Subjek mengkaitkan antara sifat tertutup dengan penjumlahan elemen pada himpunan. Sifat

operasi penjumlahan dua elemen pada himpunan dan hasilnya berada pada himpunan tersebut, dinamakan sifat tertutup, hal ini dapat dilihat pada *JD11034*.

Aspek ketiga, yaitu tugas lain yang serupa, dapat dilihat pada *JD11040 dan JD11042*. Subjek dapat mengetahui bahwa tugas yang diberikan pernah dijumpai sebelumnya dapat dilihat pada *JD11040*. Subjek mengetahui bahwa masalah yang diberikan sudah pernah diketahui sebelumnya. Permasalahan tersebut diketahui oleh subjek dari “apa yang diketahui dan apa yang ditanyakan”.

Aspek ke-empat yaitu langkah-langkah apa saja yang akan dilakukan dalam memecahkan masalah dapat dilihat pada *JD11044* beserta maksud dari *JD11044* terlihat pada *JD11044*. Langkah yang ditempuh subjek dalam memecahkan masalah ini dilakukan secara berurutan, maksudnya menunjukkan berlakunya sifat tertutup, asosiatif, identitas dan invers.

Berdasarkan hasil wawancara seperti tersebut di atas, keempat aspek sudah sudah dikenali oleh subjek, meskipun kurang sempurna. Ini berarti terdapat keterkaitan antara informasi yang diberikan dengan skema yang telah ada. Skema atau pengetahuan yang ada pada diri subjek meliputi definisi grup, sifat tertutup, asosiatif, identitas dan invers. Sehingga ketika subjek menerima informasi yang ada pada lembar tugas, maka subjek langsung mengkaitkan antara informasi tersebut dengan skema yang telah ada. Ini berarti ada keterkaitan antara skema tentang himpunan bilangan bulat, operasi penjumlahan bulat dengan permasalahan. Bila dikaitkan dengan proses informasi, maka ada kesesuaian antara skema yang ada dengan informasi yang diterima atau terjadi asimilasi.

Untuk keperluan analisis pemahaman dalam pelaksanaan perencanaan pemecahan masalah, terdapat empat aspek yang diungkap, yaitu: (1) cara yang digunakan untuk membuktikan, (2) alasan penggunaan cara membuktikan, (3) langkah yang dilakukan dalam membuktikan adalah benar, (4) cara lain yang digunakan dalam membuktikan. Berdasarkan empat aspek tersebut, dibawah ini dipaparkan data hasil wawancara, yang berkaitan dengan pelaksanaan perencanaan pemecahan masalah masing-masing untuk soal-1 S2FD.

Data wawancara dalam pelaksanaan perencanaan pemecahan masalah tugas-1

- | | | |
|----|----------------|--|
| 47 | <i>PD11047</i> | <i>Bagaimana cara atau strategi yang digunakan untuk membuktikan?</i> |
| 48 | <i>JD11048</i> | <i>Caranya yaitu tadi, membuktikan bahwa himpunan itu merupakan grup</i> |
| 49 | <i>PD11049</i> | <i>Bagaimana kamu mengetahui bahwa itu sesuai rencana?</i> |
| 50 | <i>JD11050</i> | <i>Ya, dari saya mengerjakan, mulai dari sifat tertutup, asosiatif sampai invers</i> |
| 51 | <i>PD11051</i> | <i>Mengapa yang kamu gunakan langkah tersebut?</i> |
| 52 | <i>JD11052</i> | <i>Karena langkah itu yang saya ketahui.</i> |
| 53 | <i>PD11053</i> | <i>Apakah langkah yang kamu lakukan sudah benar?</i> |
| 54 | <i>JD11054</i> | <i>Langkahnya benar karena sesuai yang saya ketahui</i> |
| 55 | <i>PD11055</i> | <i>Apakah ada cara lain yang dapat dilakukan?</i> |
| 56 | <i>JD11056</i> | <i>Tidak mengetahui secara persis, sepertinya tidak ada</i> |

Terdapat empat aspek yang diungkap adalah pelaksanaan perencanaan pemecahan masalah yaitu mengenai: (1) cara yang digunakan untuk membuktikan, (2) alasan penggunaan cara membuktikan, (3) langkah yang dilakukan dalam membuktikan adalah benar, (4) cara lain yang digunakan dalam membuktikan. Hasil wawancara, pekerjaan dan yang berkaitan dengan pelaksanaan perencanaan pemecahan masalah, dapat merupakan gambaran pemahaman tentang pelaksanaan perencanaan pemecahan masalah pembuktian subjek S2FD adalah seperti berikut ini.

Langkah yang dilakukan dalam membuktikan juga sesuai dengan perencanaan pemecahan masalah. Subjek memulai dengan menunjukkan sifat tertutup operasi penjumlahan bilangan bulat. Pada langkah yang pertama ini subjek dalam menunjukkan sifat ketertutupan dengan mengambil beberapa contoh bilangan.

Pada langkah kedua, yaitu melaksanakan pembuktian berlakunya sifat asosiatif, subjek menunjukkan dengan ruas kiri yaitu $(a+b)+c = a+b+c$. Jika diperhatikan hasil pekerjaan subjek, yang dimaksud dengan ruas kiri adalah menguraikan bentuk $(a+b)+c = a+b+c$. Sedangkan untuk ruas kanan, subjek tidak menguraikan, tetapi menyimpulkan bahwa $(a+b)+c = a+(b+c)$.

Respon subjek pada langkah ketiga, yaitu menunjukkan adanya elemen identitas. Pada langkah ini, subjek menunjukkan elemen identitas dengan memisalkan elemen identitas tersebut dengan e . Kemudian menggunakan pengertian elemen identitas, subjek menguraikan bentuk $a+e = a$, sehingga didapat elemen identitas $e = 0$. Kemudian dengan hasil $e = 0$ ini, subjek menyimpulkan bahwa $e = 0$ merupakan elemen identitas.

Pada langkah keempat yaitu menentukan invers suatu elemen. Pada langkah ini, subjek dalam menentukan invers suatu elemen, dengan menggunakan pengertian elemen identitas. Subjek memisalkan invers elemen a adalah a^{-1} , sehingga diperoleh $a + a^{-1} = 0$, didapat $a^{-1} = -a$.

Untuk keperluan analisis pemahaman pengecekan kembali dalam pemecahan masalah, terdapat empat aspek yang diungkap, yaitu: (1) mengecek jawaban akhir, (2) mengecek kebenaran jawaban, (3) cara yang digunakan untuk membuktikan, (4) langkah-langkah pembuktian yang dilakukan. Berdasarkan empat aspek tersebut, dibawah ini dipaparkan data hasil wawancara, yang berkaitan dengan pengecekan kembali pemecahan masalah masing-masing untuk tugas-1 bagi S2FD.

Data hasil wawancara subjek berkaitan dengan tugas-1 sebagai berikut:

- | | | |
|----|---------|--|
| 57 | PD11057 | <i>bagaimana kamu mengecek jawaban akhir seperti pekerjaanmu?</i> |
| 58 | JD11058 | <i>Untuk mengecek dari jawaban akhir, saya melakukan dengan membaca ulang pekerjaan saya. Mengeceknnya dengan membaca ulang</i> |
| 59 | PD11059 | <i>bagaimana mengecek jawaban benar?</i> |
| 60 | JD11060 | <i>Dalam melakukan pengecekan, jikalau memungkinkan mengambil contoh.</i> |
| 61 | PD11061 | <i>bagaimana kamu mengecek cara/strategi yang digunakan?</i> |
| 62 | JD11062 | <i>Mengeceknnya dengan jalan mencocokkan kembali langkah demi langkah sudah benar atau belum dan apakah sesuai dengan yang saya rencanakan</i> |
| 63 | PD11063 | <i>Mencocokkannya bagaimana?</i> |
| 64 | JD11064 | <i>Ya,.. melihat dengan rencana, apakah sesuai.</i> |
| 65 | PD11065 | <i>bagaimana kamu mengecek langkah-langkah yang ditempuh?</i> |
| 66 | JD11066 | <i>Untuk mengecek langkah-langkah yang dilakukan ya..seperti tadi, dengan melihat langkah per langkah</i> |

Terdapat empat aspek yang diungkap dalam pengecekan kembali pemecahan masalah yaitu mengenai: (1) mengecek jawaban akhir, (2) mengecek kebenaran jawaban, (3) cara yang digunakan untuk membuktikan, (4) langkah-langkah pembuktian yang dilakukan. Hasil wawancara dan pekerjaan yang berkaitan dengan pengecekan kembali pemecahan masalah, dapat merupakan gambaran pemahaman tentang pengecekan kembali pemecahan masalah pembuktian subjek S2FD.

Dari hasil wawancara, tampak bahwa pengecekan kembali dilakukan subjek dengan jalan membaca mengulangi langkah yang dilakukan bagian demi bagian, seperti respon subjek pada JD11058 dan JD11066. Untuk mengecek kebenaran suatu aksioma, subjek mengeceknya dengan mengambil beberapa contoh elemen pada himpunan A . Misalnya pada sifat tertutup, subjek mengambil elemen 2 dan 3 kemudian dioperasikan didapat $2 + 3 = 5$ merupakan anggota A jadi operasi penjumlahan pada A bersifat tertutup. Pengecekan sifat asosiatif, elemen identitas dan invers suatu elemen tidak dilakukan oleh subjek.

Pada langkah pengecekan kembali, terdapat dua aspek penting yaitu pemecahan masalah menurut Polya yaitu: proses pemecahan dan hasil akhir. Berdasarkan hasil wawancara, pengecekan kembali terhadap setiap langkah pemecahan masalah, tidak dilakukan secara rinci oleh subjek. Meskipun subjek menyatakan bahwa pengecekan dilakukan pada setiap langkah, seperti respon subjek pada JD11062 dan JD11066, namun tidak secara mendetail. Pengecekan kembali terhadap hal yang berkaitan dengan memahami masalah, tidak dilakukan. Sehingga pemahaman subjek terhadap pengecekan kembali langkah-langkah pengerjaan, kurang sempurna. Pada pengecekan hasil pekerjaan,

untuk setiap aksioma tidak seluruhnya dicek kembali. Misalnya pada hasil pengecekan sifat tertutup, asosiatif, elemen identitas dan elemen invers.

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan pembahasan hasil penelitian, dapat disimpulkan sebagai berikut :

Pemahaman mahasiswa *field dependent* dalam pemecahan masalah pembuktian pada konsep grup sebagai berikut: (i) dalam memahami masalah, subjek *field dependent* dapat menyebutkan beberapa kriteria dalam memahami masalah yang terdiri dari: menentukan data apa yang diketahui, menentukan apa yang dibuktikan, (ii) dalam merencanakan penyelesaian, subjek memilih strategi yang akan digunakan dengan menggunakan definisi grup, (iii) dalam melaksanakan penyelesaian, subjek melaksanakan hanya beberapa indikator penyelesaian secara lengkap, yaitu dalam melaksanakan rencana pemecahan dilakukan secara runtut namun kurang terperinci. Ini sesuai dengan individu yang *field dependent* tidak mudah memisahkan item dari konteksnya. Individu yang *field dependent* dalam menanggapi sesuatu stimulus mempunyai kecenderungan menggunakan isyarat lingkungan sebagai dasar dalam persepsinya dan cenderung memandang suatu pola sebagai suatu keseluruhan, tidak memisahkan bagian-bagiannya. (iv) pengecekan kembali dilakukan pada langkah yang dilakukan dan hasil yang diperoleh. Pengecekan hasil hanya dilakukan pada sifat ketertutupan. Pada akhir pekerjaan, subjek dapat menyimpulkan hasil pekerjaannya.

Berdasarkan kesimpulan, dapat disarankan sebagai berikut: (1) dalam mengajar matematika, dosen hendaknya menekankan tahap-tahap pemecahan masalah yang dikemukakan oleh Polya, (2) dalam mengajar matematika, dosen sebaiknya memperhatikan gaya kognitif mahasiswanya dengan jalan mendesain pembelajaran yang mempertimbangkan gaya kognitif mahasiswa, (3) kepada para dosen pada program studi pendidikan matematika, hendaknya menggunakan hasil penelitian ini untuk kajian dalam pembelajaran. Kajian pembelajaran tidak terbatas hanya pada pemahaman masalah pembuktian, (4) kepada para dosen dapat mengembangkan penelitian lanjutan, misalnya tent pembentukan atau konstruksi konsep.

DAFTAR PUSTAKA

- Baylis, John, 1983. Proof the essence of mathematics. *Intenational Journal of Mathematics Education and Science Technology*. Volume 14
- Birkhoff, G and Mc Lane,S. 1968. *Algebra*. New York: The Macmillan Company
- Boverman, DM, 1960. Dimension of Cognitive Style. *Journal of Personality*. Vol. 28. 165-185.
- Clements, DH. 1992. *Geometry and Spatial Reasoning. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York
- Fraleight J.B, 1966. *A First Course in Abstract Algebra*. Mass: Addison-Wesley Publishing Company
- Hart, E.W. 1986. *An Exploratory Study of The Proof Writing Performance of Collegge Students In Elementary Grup Theory*. The University of Iowa.
- Herman Hudoyo, 2003. *Pengembangan Kurikulum Dan Pembelajaran Matemátika*. Malang: Universitas Negeri Malang.
- Herstein, I.N. 1964. *Topics in Algebra*. New York: John Wiley & Sons.
- Hiebert, J. & Carpenter, T. P, (1992). *Learning and Teaching with Understanding*. In D. Grouws, (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65–97). New York: MacMillan

- Martin, Gary. 1989. Proof Frames of Preservice Elementary Teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol 20 No.1 New York
- Miles. B. dan Huberman, M, 1992. Analisis Data Kualitatif, Buku Sumber tentang Metode-metode Baru. Jakarta: Universitas Indonesia.
- Polya, George. 1973. *How To Solve It*. New Jersey: Printeton University Press. Princeton,
- Solso, RL. 1995. *Cognitive Psychology*. Boston: Allyn and Bacon.
- Thomas, L. 1990. *Educational Psychology: a Realistic Approach*. London: Longman.
- Witkin, H.A, Oltman, P.K Raskin, E. 1971. *Manual Embedded Figures Test, Children Embedded Figures Test, Grup Embedded Figures Test*. California: Consulting Psychology Press, Inc
- Witkin, H.A, Moore, C.A, Goodnough D.R, dan Cox, P.W. 1977. *Field Dependent and Field Independent Cognitive Style and Their Educational Implication*. Review of Educational Research Winter. Vol 47. No.1

PENINGKATAN KEMAMPUAN PEMECAHAN MASALAH MATEMATIS MELALUI PENDEKATAN MATEMATIKA REALISTIK

Syaiful, Yaya S. Kusumah, Yozua Sabandar, dan Darhim

*Sekolah Pascasarjana Universitas Pendidikan Indonesia Bandung
Email: pak_bakri@yahoo.com*

Abstrak

Pembelajaran matematika di SMP sampai saat ini masih dengan gaya konvensional, umumnya siswa masih kurang diberi kesempatan untuk aktif membangun pengetahuannya. Hal ini berakibat pada rendahnya kemampuan pemecahan masalah matematis siswa. Salah satu alternatif pendekatan pembelajaran yang dapat meningkatkan kemampuan pemecahan masalah matematis siswa adalah melalui pendekatan Pendidikan Matematika Realistik (PMR). PMR berpandangan bahwa belajar matematika harus mengarahkan siswa kepada penggunaan berbagai situasi (konteks), yang dirasakan bermakna sehingga menjadi sumber belajar. Permasalahan utama dalam penelitian ini adalah: Apakah pembelajaran matematika yang menggunakan PMR dapat meningkatkan kemampuan pemecahan masalah matematis siswa? Penelitian ini adalah penelitian eksperimen, yang menggunakan desain eksperimen kelompok kontrol pretes-postes. Populasi penelitian adalah seluruh siswa kelas VII SMP di Kota Bekasi, sedangkan sampel diambil dari dua sekolah level sedang, yang masing-masing sekolah diambil dua kelas dengan teknik purposive sampling. Kelompok eksperimen diberi perlakuan pembelajaran dengan PMR sedangkan kelompok kontrol tidak diberi perlakuan, pembelajarannya dengan PMB. Instrumen yang digunakan adalah: (1) tes kemampuan pemecahan masalah matematis; (2) lembar observasi; (3) angket respon siswa; dan (4) lembar pedoman wawancara. Untuk keperluan pengujian hipotesis, data dianalisis dengan uji-t, uji ANOVA, dan dilengkapi dengan analisis deskriptif dan kualitatif. Berdasarkan hasil analisis data diperoleh kesimpulan: Kemampuan pemecahan masalah matematis siswa yang pembelajaran menggunakan PMR lebih baik daripada siswa yang pembelajarannya menggunakan PMB, untuk seluruh siswa maupun berdasarkan kelompok kemampuan matematis siswa (tinggi, sedang, rendah). Ada pengaruh secara bersama yang signifikan antara pembelajaran PMR dan PMB dengan kelompok kemampuan matematis siswa (tinggi, sedang, rendah) dalam kemampuan pemecahan masalah matematis siswa. Peningkatan kemampuan pemecahan masalah matematis siswa yang pembelajarannya menggunakan PMR, pada siswa kemampuan tinggi lebih baik daripada siswa kemampuan sedang dan rendah. Aktivitas siswa dalam proses pembelajaran yang menggunakan PMR, sangat aktif. Respon siswa terhadap pembelajaran yang menggunakan PMR, positif.

Kata kunci: Kemampuan pemecahan masalah matematis, pendekatan pendidikan matematika realistik.

PENDAHULUAN

Latar Belakang Pemikiran

Salah satu keluhan para guru di SMP akhir-akhir ini adalah tentang kesulitan siswa dalam menyelesaikan soal-soal matematika non rutin. Kesulitan yang dialami siswa ini, tentu disebabkan oleh beberapa faktor, antara lain; (1) faktor pendekatan pembelajaran, pendekatan yang digunakan dalam proses pembelajaran kurang membangun kemampuan pemecahan masalah matematis. Menurut Hadi (2005), bahwa beberapa hal yang menjadi ciri praktek pendidikan di Indonesia selama ini antara lain adalah pembelajaran yang berpusat pada guru; (2) faktor kebiasaan belajar, siswa hanya terbiasa belajar dengan cara menghafal, cara ini tidak melatih kemampuan pemecahan masalah

matematis, cara ini merupakan akibat dari pembelajaran konvensional (pembelajaran matematika biasa), karena guru mengajarkan matematika dengan menerapkan konsep dan operasi matematika, memberikan contoh mengerjakan soal, serta meminta siswa untuk mengerjakan soal yang sejenis dengan soal yang sudah diterangkan guru. Model pembelajaran seperti menekankan pada menghafal konsep dan prosedur matematika guna menyelesaikan soal. Model pembelajaran ini disebut model mekanistik (Fruehdental, 1973). Akibat penggunaan pendekatan pembelajaran dan cara belajar sebagaimana tersebut di atas, sehingga berdampak pada prestasi belajar matematika siswa kita rendah.

Rendahnya prestasi belajar matematika siswa, antara lain dilaporkan dari hasil survei yang dilaksanakan Depdikbud tahun 1996, yaitu tentang evaluasi pengaruh proyek PKG terhadap pengajaran matematika di SMP, mengungkapkan bahwa prestasi belajar matematika siswa rendah (Suryanto, 1996; Somerset, 1997; dalam Lambertus, 2010). Laporan *The Third International Mathematics Science Study TIMSS* tahun 1999 (Herman, 2006) menunjukkan bahwa kemampuan siswa kelas dua SMP (*eighth grade*) Indonesia relatif lebih baik dalam menyelesaikan soal-soal tentang fakta dan prosedur, akan tetapi sangat lemah dalam menyelesaikan soal-soal tidak rutin yang berkaitan dengan jastifikasi atau pembuktian, pemecahan masalah yang memerlukan penalaran matematis, menemukan generalisasi atau konjektur, dan menemukan hubungan antara data-data atau fakta yang diberikan. Akibatnya, posisi prestasi belajar anak-anak Indonesia berada pada urutan 34 dari 38 Negara peserta. Indonesia masih kalah jauh dari negara Singapura yang menempati peringkat pertama dan Malaysia yang berada pada posisi 16 (Darhim, 2004). Selanjutnya dari TIMSS tahun 2003, dikemukakan bahwa dari 40 negara, Indonesia berada pada ranking 34, Korea berada di ranking nomor dua, di bawah Singapura (Lew, 2004).

Pentingnya pemilikan kemampuan pemecahan masalah oleh siswa dalam matematika dikemukakan oleh Branca (1980) sebagai berikut: (1) kemampuan pemecahan masalah merupakan tujuan umum pengajaran matematika, bahkan sebagai jantungnya matematika; (2) pemecahan masalah meliputi metode, prosedur, dan strategi merupakan proses inti dan utama dalam kurikulum matematika; dan (3) pemecahan masalah merupakan kemampuan dasar dalam belajar matematika. Sebagai implikasi dari pendapat di atas, maka kemampuan pemecahan masalah hendaknya dimiliki oleh semua anak yang belajar matematika mulai dari tingkat Sekolah Dasar (SD) sampai Perguruan Tinggi. Polya(1985) dalam bukunya "*How To Solve It*" menguraikan secara rinci empat langkah pemecahan masalah disertai dengan ilustrasi masalah, pertanyaan yang membimbing pemahaman tiap langkah, soal latihan, dan menyelesaikannya dalam matematika. Keempat langkah itu adalah; (1) memahami masalah; (2) merencanakan pemecahan atau mencari alternatif pemecan; (3) melaksanakan rencana atau perhitungan; dan (4) memeriksa atau menguji kebenaran perhitungan atau penyelesaian. Sejalan dengan Polya (1985), Novak (1979) mengemukakan lima urutan kegiatan dalam pemecahan masalah sebagai berikut; (1) memahami masalah; (2) memilih atau mencari pengetahuan yang relevan; (3) menyeleksi kemungkinan penyelesaian; (4) mengolah data; dan (5) menilai kembali permasalahan.

Permasalahan terkait dengan kemampuan pemecahan masalah matematis yang bukan hanya terjadi di Indonesia, penelitian Kuoba *et al.*, (1988) yang melibatkan soal-soal yang menguji kemampuan penalaran logis, identifikasi langkah-langkah, dan penggunaan strategi pemecahan masalah, menunjukkan bahwa hampir 66% siswa kelas 3 dan hampir 50% siswa kelas 7 menghadapi kesulitan dalam menyelesaikan soal-soal pemecahan masalah matematis.

Swoboda dan Tocki (2002) mengatakan bahwa siswa pendidikan dasar di Negara Polandia juga mengalami kesulitan dalam penerapan matematika antara lain konsep perbandingan. Selanjutnya Nunes, de Boeck *et.al.*, dan van den Valk *et.al.* (Swaboda dan Tocki, 2002), menyatakan bahwa pada konferensi-konferensi internasional aspek-aspek baru pemahaman tentang konsep perbandingan masih dirujuk. Cooper dan Harries (2002) melaporkan hasil penelitian terhadap 121 anak-anak usia 11-12 tahun pada akhir tahun pertama mereka di sekolah menengah yang berasal dari dua sekolah menengah di Inggris Utara. Hasilnya menunjukkan ketidakmampuan mereka memperkenalkan pertimbangan-pertimbangan realistik ketika memecahkan masalah-masalah realistik.

Dari kondisi dan permasalahan sebagaimana uraian di atas serta penemuan-penemuan dari penelitian terdahulu mendorong Peneliti untuk melihat upaya yang dapat digunakan dalam proses

pengajaran matematika sehingga dapat meningkatkan kemampuan siswa untuk memperdalam, memperkaya dan memperluas kemampuan pemecahan masalah matematis.

Salah satu pendekatan yang dipandang sebagai pendekatan pembelajaran matematika yang berpeluang besar bagi peningkatan hasil belajar matematika dan diharapkan dapat meningkatkan kemampuan siswa dalam pemecahan masalah matematis adalah pendekatan Pendidikan Matematika Realistik (PMR) (Darhim, 2004). Hal ini dimungkinkan karena dalam pendekatan PMR pembelajaran dimulai dari sesuatu yang riil sehingga siswa dapat terlibat dalam proses pembelajaran secara bermakna. Peran guru hanya sebagai pembimbing dan fasilitator bagi siswa. Siswa tidak dapat dipandang sebagai botol kosong yang harus diisi dengan air. Siswa adalah individu yang punya potensi untuk mengembangkan pengetahuan dalam dirinya. Siswa diharapkan aktif mengkonstruksi pengetahuannya. Bahkan di dalam pendekatan PMR diharapkan siswa tidak sekedar aktif sendiri, tetapi ada aktivitas bersama diantara mereka (interaktivitas). Proses pembelajaran seperti ini, diharapkan dapat meningkatkan kemampuan berpikir siswa secara optimal, terutama kemampuan pemecahan masalah matematis.

Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang dan permasalahan yang telah dikemukakan di atas, maka masalah dalam penelitian ini dirumuskan seperti berikut:

1. Apakah peningkatan kemampuan pemecahan masalah matematis siswa yang mendapat pembelajaran dengan pendekatan PMR lebih baik daripada siswa yang mendapat pembelajaran dengan PMB ditinjau dari: (a) keseluruhan siswa, dan (b) kelompok kemampuan matematis siswa (tinggi, sedang, rendah)?
2. Apakah terdapat interaksi antara pendekatan pembelajaran (PMR dan PMB) dengan kelompok kemampuan matematis siswa (tinggi, sedang, rendah) terhadap kemampuan pemecahan masalah matematis?
3. Bagaimanakah aktivitas siswa dalam proses pembelajaran, terutama kinerja dan pola jawaban yang dibuat siswa dalam menyelesaikan permasalahan matematis yang diberikan, pada kelompok siswa yang mendapat pembelajaran dengan pendekatan PMR?
4. Bagaimanakah respon siswa yang mendapat pembelajaran dengan pendekatan PMR?

METODE PENELITIAN

Populasi penelitian ini adalah seluruh siswa kelas VII Sekolah Menengah Pertama Sekolah Berstandar Nasional (SMP SSN) di Kota Bekasi, sedangkan sampel diambil secara acak dua sekolah dari 18 SMP SSN. Penelitian ini adalah penelitian eksperimen, oleh karena itu, pelaksanaannya menggunakan kelompok eksperimen dan kelompok kontrol. Kelompok eksperimen diberi perlakuan, pembelajarannya menggunakan pendekatan PMR sedangkan kelompok kontrol tidak diberi perlakuan, pembelajarannya menggunakan PMB. Pengelompokan siswa ditentukan berdasarkan kategori kelompok kemampuan matematis siswa (tinggi, sedang, rendah). Selanjutnya untuk mengetahui peningkatan kemampuan pemecahan masalah matematis, antara pembelajaran yang menggunakan pendekatan PMR dengan PMB digunakan desain eksperimen kelompok control pretes-postes sebagai berikut:

A : O X O
A : O O

Keterangan:

X = Pembelajaran dengan Pendekatan Pendidikan Matematika Realistik (PMR)

A = Pengambilan sampel secara acak kelas

O = pretes = postes

Pada desain ini, kelompok eksperimen diberi perlakuan dengan pendekatan PMR (X), dan kelompok kontrol pembelajarannya dengan pendekatan PMB, kemudian masing-masing kelompok diberi pretes dan postes (O). Tidak ada perlakuan khusus yang diberikan pada kelompok kontrol.

Selanjutnya, untuk melihat pengaruh penggunaan kedua pendekatan tersebut terhadap kemampuan pemecahan masalah matematis, maka dalam penelitian ini melibatkan kelompok kemampuan matematis siswa (tinggi, sedang, rendah).

TEKNIK ANALISIS DATA

Data yang akan dianalisis dalam penelitian ini, diperoleh dari tes kemampuan pemecahan masalah matematis siswa, tes dilakukan pada awal pembelajaran (sebelum perlakuan), yang disebut sebagai pretes dan pada akhir pembelajaran (setelah perlakuan), yang disebut postes. Dari skor pretes dan postes tersebut, dihitung N-Gain (gain ternormalisasi). Perhitungan N-Gain ini dilakukan dengan maksud untuk menghilangkan faktor tebakan siswa dan efek nilai tertinggi sehingga terhindar dari kesimpulan yang bias (Hake, 1999; Heckler, 2004). Rentang nilai N-Gain adalah 0 sampai dengan 1. Selanjutnya, nilai N-Gain inilah yang diolah, dan pengolahannya disesuaikan dengan permasalahan dan hipotesis yang diajukan.

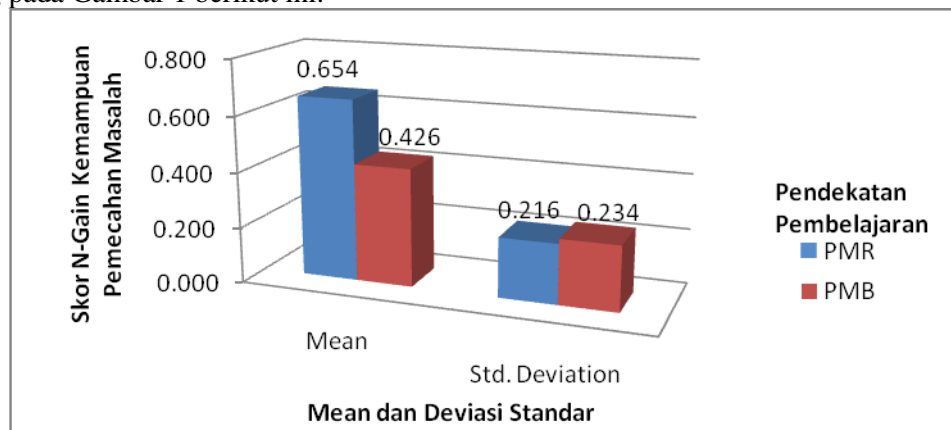
Pengolahan data dalam penelitian ini dilakukan seperti berikut: (1) Menguji persyaratan statistik yang diperlukan sebagai dasar dalam pengujian hipotesis yaitu menguji normalitas dan homogenitas data baik terhadap bagian-bagiannya maupun secara keseluruhan. Uji normalitas dan homogenitas ini menggunakan uji Kolmogorov-Smirnov dan uji Levene, karena uji ini cukup baik untuk kelompok data sampel kecil dibandingkan uji normalitas dan homogenitas data lainnya, (2) Uji -t, dan ANOVA dua jalur yang disesuaikan dengan permasalahan dan hipotesisnya. Seluruh perhitungan statistik menggunakan bantuan komputer program SPSS 17,00.

Selain dilakukan analisis secara kuantitatif, Peneliti juga melakukan analisis secara kualitatif terhadap jawaban setiap butir soal, data hasil observasi, data hasil wawancara, dan data respon siswa hal ini bertujuan untuk mengkaji lebih jauh tentang kemampuan pemecahan masalah matematis, serta untuk mengetahui apakah pelaksanaan pembelajaran sesuai dengan ketentuan-ketentuan pembelajaran yang ditetapkan.

ANALISIS DATA KEMAMPUAN PEMECAHAN MASALAH MATEMATIS

1. Deskripsi Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis

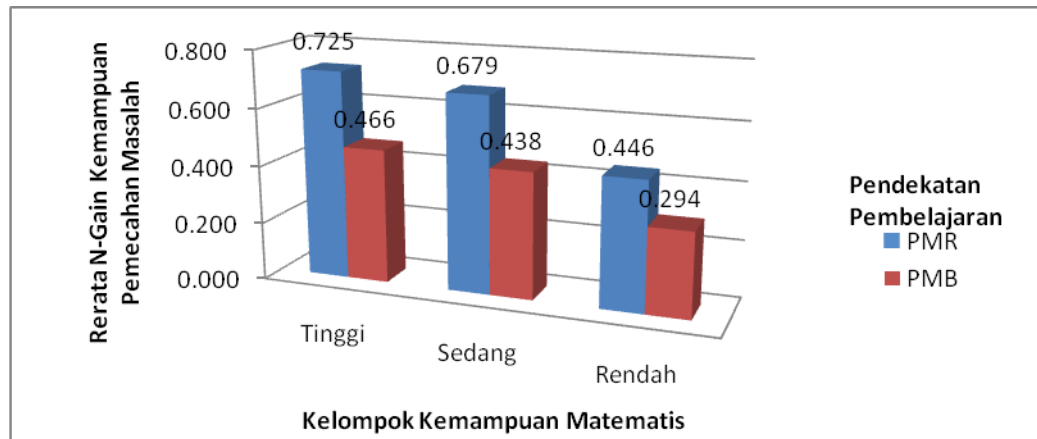
Perbandingan rata-rata N-Gain dan deviasi standar kemampuan pemecahan masalah matematis antara kelompok siswa yang mendapat pembelajaran dengan PMR dan PMB disajikan dalam diagram batang pada Gambar 1 berikut ini.



Gambar 1
Rata-rata dan Deviasi Standar N-Gain Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis Berdasarkan Pendekatan Pembelajaran

Pada Gambar 1 terlihat bahwa kemampuan pemecahan masalah matematis siswa pada kelompok siswa yang mendapat pembelajaran dengan PMR lebih baik daripada kelompok siswa yang mendapat pembelajaran dengan PMB. Selanjutnya dalam penelitian ini dianalisis pula kemampuan

siswa berdasarkan kelompok kemampuan matematis siswa (tinggi, sedang, rendah). Deskripsi N-Gain kemampuan pemecahan masalah matematis dari ketiga kemampuan di atas dapat dilihat pada Gambar 2 berikut.



Gambar 2

Rata-rata N-Gain Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis Berdasarkan Pendekatan Pembelajaran dan Kelompok Kemampuan Matematis Siswa

Pada Gambar 2 terlihat bahwa nilai rata-rata N-Gain berdasar kelompok kemampuan matematis siswa (tinggi, sedang, rendah) sebagai berikut: (1) kelompok siswa kemampuan tinggi, setelah mendapat pembelajaran dengan pendekatan PMR memiliki rata-rata N-Gain kemampuan pemecahan masalah matematis lebih tinggi daripada kelompok siswa yang mendapat pembelajaran dengan PMB; (2) kelompok siswa kemampuan sedang, setelah mendapat pembelajaran dengan pendekatan PMR memiliki rata-rata N-Gain kemampuan pemecahan masalah matematis lebih tinggi daripada kelompok siswa yang mendapat pembelajaran dengan PMB; (3) kelompok siswa kemampuan rendah, setelah mendapat pembelajaran dengan pendekatan PMR memiliki rata-rata N-Gain kemampuan pemecahan masalah matematis lebih tinggi daripada kelompok siswa yang mendapat pembelajaran dengan PMB.

2. Analisis Data Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis Berdasarkan Pendekatan Pembelajaran

Tabel 1
 Hasil Analisis Uji-t Data Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis (secara keseluruhan)

| Pendekatan Pembelajaran | Skor Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis | | | |
|-------------------------|--|--------|-------|----------------|
| | Perb. Rata-rata N-Gain | t | p | H ₀ |
| PMR dengan PMB | 0,654 > 0,426 | -6,462 | 0,000 | Tolak |

Dari hasil analisis pada Tabel 1 di atas, terlihat bahwa nilai rata-rata N-Gain siswa yang mendapat pembelajaran dengan PMR lebih besar daripada nilai rata-rata N-Gain siswa yang mendapat pembelajaran dengan PMB. Demikian pula nilai t sebesar -6,462 dan nilai p adalah 0,000. Nilai ini lebih kecil dari taraf signifikansi 0,05 yang ditetapkan, sehingga hipotesis nol ditolak. Hasil ini menunjukkan bahwa siswa yang mendapat pembelajaran dengan pendekatan PMR memiliki kemampuan pemecahan masalah matematis lebih baik daripada siswa yang mendapat pembelajaran dengan PMB. Dengan memperhatikan nilai rata-rata N-Gain kedua kelompok pendekatan pembelajaran (PMR, PMB) yaitu 0,654 > 0,426, dapat disimpulkan bahwa peningkatan kemampuan pemecahan masalah matematis siswa yang mendapat pembelajaran dengan PMR lebih baik daripada siswa yang mendapat pembelajaran dengan PMB, pada keseluruhan siswa.

3. Analisis Data Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis Berdasarkan Kelompok Kemampuan Matematis Siswa

Berikut ini disajikan hasil uji perbedaan kemampuan pemecahan masalah matematis siswa antara siswa yang mendapat pembelajaran dengan PMR dan PMB berdasarkan kelompok kemampuan matematis siswa (tinggi, sedang, rendah).

Tabel 2
Hasil Uji-t Data Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis Berdasarkan Pendekatan Pembelajaran

| Kelompok Kemampuan Matematis Siswa | Pendekatan Pembelajaran | N-Gain Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis | | | |
|------------------------------------|-------------------------|--|-------|-------|----------------|
| | | Perb. Rata-rata | t | p | H ₀ |
| Tinggi | PMR dengan PMB | 0,725 > 0,466 | 2,683 | 0,012 | Tolak |
| Sedang | PMR dengan PMB | 0,679 > 0,438 | 6,022 | 0,000 | Tolak |
| Rendah | PMR dengan PMB | 0,434 > 0,294 | 1,730 | 0,101 | Terima |

Dari Tabel 2 di atas dapat dilihat bahwa hasil perhitungan nilai t untuk kelompok kemampuan matematis siswa (tinggi, sedang, rendah) berturut-turut sebesar 2,683 dan 6,022 dengan nilai p masing-masing sebesar 0,012; 0,000. Nilai p ini lebih kecil dari taraf signifikan 0,05, sehingga dapat disimpulkan bahwa hipotesis nol yang menyatakan tidak terdapat perbedaan peningkatan kemampuan pemecahan masalah matematis antar pendekatan pembelajaran yang digunakan berdasarkan kelompok kemampuan matematis siswa ditolak. Dengan kata lain pendekatan PMR secara signifikan lebih baik dalam meningkatkan kemampuan pemecahan masalah matematis siswa daripada PMB bagi siswa kelompok kemampuan matematis siswa tinggi dan sedang. Sedangkan bagi siswa berkemampuan matematis rendah diperoleh nilai t sebesar 1,730 dengan nilai p sebesar 0,101. Nilai p ini lebih besar dari taraf signifikan 0,05, sehingga dapat disimpulkan bahwa hipotesis nol yang menyatakan tidak terdapat perbedaan peningkatan kemampuan pemecahan masalah matematis antar pendekatan pembelajaran yang digunakan. Dengan kata lain kemampuan pemecahan masalah matematis siswa berkemampuan matematis rendah yang mendapat pembelajaran dengan PMR tidak berbeda secara signifikan daripada siswa berkemampuan matematis yang sama tetapi mendapat pembelajaran berdasarkan pendekatan matematika secara biasa (PMB).

4. Analisis Interaksi Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis Berdasarkan Pendekatan Pembelajaran dan Kelompok Kemampuan Matematis

Tabel 3
Rangkuman Uji ANOVA Dua Jalur tentang Interaksi Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis Berdasarkan Pendekatan Pembelajaran dan Kelompok Kemampuan Matematis Siswa

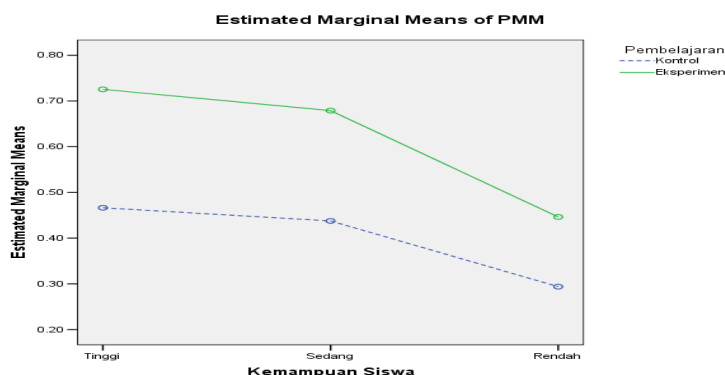
Tests of Between-Subjects Effects

Dependent Variable: PMM

| Source | Type III Sum of Squares | df | Mean Square | F | Sig. |
|--------------------------------|-------------------------|-----|-------------|---------|------|
| Corrected Model | 2.919 ^a | 5 | .584 | 12.334 | .000 |
| Intercept | 25.485 | 1 | 25.485 | 538.376 | .000 |
| Pembelajaran | 1.169 | 1 | 1.169 | 24.696 | .000 |
| Kemampuan_Siswa | .733 | 2 | .367 | 7.744 | .001 |
| Pembelajaran * Kemampuan_Siswa | .041 | 2 | .020 | .431 | .650 |
| Error | 7.479 | 158 | .047 | | |
| Total | 56.773 | 164 | | | |
| Corrected Total | 10.399 | 163 | | | |

a. R Squared = .281 (Adjusted R Squared = .258)

Dari Tabel 3 di atas terlihat bahwa nilai F untuk interaksi pembelajaran dan kelompok kemampuan matematis siswa sebesar 0,431 dengan nilai signifikansi sebesar 0,650. Nilai signifikansi ini lebih besar dari taraf signifikan 0,05, sehingga dapat disimpulkan bahwa hipotesis nol yang menyatakan tidak ada interaksi antara pendekatan pembelajaran (PMR, PMB) dengan kelompok kemampuan matematis siswa (tinggi, sedang, rendah) dapat diterima. Ini berarti bahwa selisih skor rata-rata kemampuan pemecahan masalah matematis siswa berkemampuan matematis tinggi, sedang, dan rendah yang mendapat pembelajaran melalui PMR tidak berbeda secara signifikan dengan siswa yang mendapat pembelajaran melalui PMB. Secara grafik, interaksi tersebut dapat dilihat pada Gambar 3 berikut.



Gambar 3

Interaksi Pendekatan Pembelajaran dengan Kelompok Kemampuan Matematis Siswa terhadap Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis

Berdasarkan Gambar 3 di atas, dapat dijelaskan bahwa pembelajaran dengan PMR sesuai untuk semua kelompok kemampuan matematis siswa (tinggi, sedang, dan rendah) dalam meningkatkan kemampuan pemecahan masalah matematis. Hal ini dapat dilihat dari rerata skor kemampuan pemecahan masalah matematis siswa yang mendapat pembelajaran dengan PMR lebih tinggi daripada siswa yang mendapat pembelajaran dengan PMB. Dari gambar di atas juga mengindikasikan bahwa siswa dengan kemampuan matematis tinggi memperoleh manfaat terbesar dalam pembelajaran berdasarkan PMR daripada siswa dengan kemampuan matematis sedang dan rendah. Hal ini dapat ditunjukkan melalui selisih rerata skor N-Gain kemampuan pemecahan masalah matematis antara siswa yang mendapat pembelajaran melalui PMR dan PMB berturut-turut siswa berkemampuan tinggi (0,259), sedang (0,241), rendah (0,152).

Dari Tabel 3 dapat dilihat bahwa hasil perhitungan nilai F untuk pendekatan pembelajaran sebesar 24,696, dengan taraf signifikansi sebesar 0,000. Nilai signifikansi ini lebih kecil dari taraf signifikan 0,05, sehingga dapat disimpulkan bahwa hipotesis nol yang menyatakan tidak terdapat perbedaan peningkatan kemampuan pemecahan masalah matematis berdasarkan pendekatan pembelajaran ditolak. Dengan kata lain terdapat perbedaan peningkatan kemampuan pemecahan masalah matematis yang signifikan antar siswa yang memperoleh pendekatan pembelajaran berbeda.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil analisis, temuan-temuan yang diperoleh dalam penelitian ini, maka dapat disimpulkan beberapa hal sebagai berikut:

1. Peningkatan kemampuan pemecahan masalah matematis siswa yang mendapat pembelajaran dengan pendekatan PMR lebih baik daripada siswa yang mendapat pembelajaran dengan PMB ditinjau dari keseluruhan siswa?
2. Peningkatan kemampuan pemecahan masalah matematis siswa yang mendapat pembelajaran dengan pendekatan PMR lebih baik daripada siswa yang mendapat pembelajaran dengan PMB ditinjau dari kelompok kemampuan matematis siswa (tinggi, sedang, rendah).

3. Tidak terdapat interaksi antara pendekatan pembelajaran (PMR dan PMB) dengan kelompok kemampuan matematis siswa (tinggi, sedang, rendah) terhadap kemampuan pemecahan masalah matematis.
4. Aktivitas siswa dalam proses pembelajaran dengan PMR menunjukkan bahwa siswa sangat aktif, yaitu hingga mencapai rata-rata persentase 82,76%.
5. Aktivitas siswa yang ditunjukkan dalam menyelesaikan soal kemampuan pemecahan masalah matematis menjelaskan bahwa kelompok siswa yang pembelajaran dengan pendekatan PMR lebih baik daripada kelompok siswa yang pembelajaran dengan pendekatan PMB, karena kelompok siswa yang pembelajaran dengan pendekatan PMR penguasaan siswa terhadap indikator memahami masalah, membuat rencana penyelesaian, dan memeriksa kembali langkah-langkah pengerjaan dan hasil yang diperoleh, sangat baik, tetapi penguasaan siswa terhadap indikator melaksanakan penyelesaian (melakukan perhitungan) masih kurang.
6. Respon atau tanggapan siswa terhadap pembelajaran dengan pendekatan PMR yang berkaitan dengan penerapan pendekatan yang digunakan, materi pembelajaran, komponen-komponen (perangkat) pembelajarannya, kegiatan-kegiatan yang dilakukan siswa di kelas (aktivitas siswa), dan guru serta alat peraga pembelajaran yang digunakan, umumnya siswa memberikan respon positif, mereka merasa senang dengan pelaksanaan pembelajaran yang dialami.

DAFTAR PUSTAKA

- Branca, N. A (1980). "Problem Solving as Agoal, Process, and Basic Skill", dalam Krulik, S. dan Reys, R. E. *Problem Solving in School Mathematics*. NCTM.
- Cooper, B. dan Harries, T. (2002). *Children's Responses To Contrasting Realistic Mathematics Problems: Just How Realistic Are Children Ready To Be?*. Educational Studies in Mathematics, Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.
- Darhim (2004). *Pengaruh Pembelajaran Matematika Kontekstual terhadap Hasil Belajar dan Sikap Siswa Sekolah Dasar Kelas Awal dalam Matematika*. Disertasi Doktor pada PPS UPI.: Tidak Diterbitkan.
- Heckler, Andrew F. (2004). Measuring Student Learning by Pre and Post testing: absolute Gain vs normalized Gain. *American Journal of Physics*.
- Hadi, S. (2005). *Pendidikan Matematika Realistik dan Implementasinya*. Banjarmasin: Tulip.
- Herman, T. (2006). *Pembelajaran Berbasis Masalah untuk Meningkatkan Kemampuan Berpikir Matematis Tingkat Tinggi Siswa Sekolah Menengah Pertama (SMP)*. Disertasi Doktor pada PPS UPI.: Tidak Diterbitkan.
- Hake, R. R. (1999). *Analysing Change/Gain Scores Woodland Hills Dept. of Physics*. Indiana University [Tersedia. (online). <http://physic.indiana.edu/sdi/analysing.Change-Gain.pdf>.[19maret2009].
- Kuoba, V.L. *at al.* (1988). Results of the Fourth NAEP Assessment of Mathematics. *Aritmetics Teacher*, 35, 14-19.
- Lambertus (2010). *Peningkatan Kemampuan Berpikir Kreatif dan Pemecahan Masalah Matematika Siswa SD Melalui Pendekatan Matematika Realistik*. Disertasi Doktor pada PPs UPI: tidak dipublikasikan

- Lew, H. C. (2004). *Mathematics Education in Korea After TIMSS*. Seoul: Korean National University of Education.
- Novack, J. D. (1979). *A Theory of Education*. I Hiaca Cornell University Press.
- Polya, G. (1985). *How to Solve It. A New Aspect of Mathematical Methods*. New Jersey: Pearson Education, Inc.
- Swoboda, E. and Tocki, J. (2002). *How to Prepare Prospective Teachers to Teach Mathematics – Some Remarks*. [Online]. Tersedia: <http://www.math.uoc.gr/~ictm2/authors.html> [15 Nopember 2004].

PENYELESAIAN INVERS PROBLEM PADA REAKSI DIFUSI DENGAN MENGGUNAKAN METODE OPTIMASI

Elly Musta'adah¹, Erna Apriliani²

¹Mahasiswa Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

²Dosen Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya
elly_mustaadah@yahoo.co.id

Abstrak

Invers problem banyak muncul pada bidang teknologi dan ilmu pengetahuan. Pada dasarnya, *invers problem* menggunakan pengukuran nyata dari parameter yang diamati untuk menyimpulkan nilai dari suatu parameter model. *Invers problem* dalam hal ini, merekonstruksi dua koefisien *independent* (bebas) dalam sistem reaksi difusi dari pengukuran akhir, dengan dua persamaan. Model matematika reaksi difusi yang merupakan persamaan parabolik akan ditransformasikan menjadi masalah optimasi dengan menggunakan kerangka kontrol optimal. *Minimizer* untuk fungsi kontrol ditetapkan. Penelitian ini didasarkan pada studi literatur yang meliputi kajian eksistensi.

Kata kunci: *Invers Problem*, Kontrol Optimal, Reaksi Difusi

PENDAHULUAN

Pada bidang ilmu pengetahuan dan teknologi, *invers problem* banyak muncul, misalnya pada dinamika populasi, pencitraan optik medis, penginderaan jauh dan ilmu pertahanan (K.Sakhtivel dkk, 2010). Berbagai metode telah dipergunakan untuk menyelesaikan masalah *invers problem*.

Dalam masalah ekologi, sebagai contoh, sistem reaksi difusi. Penelitian telah dilakukan untuk sistem reaksi difusi dengan satu obyek saja. Pada penelitian ini akan disajikan dua obyek yang mengalami reaksi kimia. Misalkan, ada spesies yang berbeda berinteraksi satu sama lain dan berinteraksi dalam reaksi kimia.

Model matematika untuk sistem reaksi difusi di peroleh dari *direct problem* (masalah langsung). Akan tetapi terdapat beberapa parameter fisik dari persamaan tersebut yang tidak diketahui. Oleh karena itu perlu diketahui parameter fisik dari model matematika tersebut yang nantinya dapat menjadi sebuah produk.

Invers problem digunakan untuk menentukan koefisien yang tidak diketahui dari suatu model matematika. Dalam hal ini, akan digunakan metode optimasi. Yaitu dengan merubah masalah tertentu kedalam kontrol optimum dengan menggunakan teori optimasi.

Berdasarkan hal tersebut, maka yang ingin ditunjukkan adalah : “apakah metode optimasi sesuai untuk masalah *invers problem* pada sistem reaksi difusi?”

Berdasarkan rumusan masalah tersebut, maka tujuan yang ingin dicapai adalah menunjukkan bahwa metode optimasi tersebut sesuai untuk masalah *invers problem* pada sistem reaksi difusi dengan menguji eksistensinya, dalam menentukan *invers problem* dari dua koefisien $a(x)$ dan $c(x)$ secara bersamaan untuk sistem reaksi difusi dua persamaan yang berhubungan dengan penyelesaian sistem pada waktu akhir.

PEMBAHASAN

Dalam masalah ekologi, ada dua spesies berbeda yang saling berinteraksi dalam reaksi kimia, dengan zat kimia yang berbeda dan menghasilkan zat yang baru. Pada model masalah seperti ini digunakan persamaan differensial. Sebagai contoh, sistem reaksi difusi bisa diturunkan pada model ruang dan waktu. Dalam hal ini, dimisalkan $u(x,t)$ dan $v(x,t)$ adalah fungsi kepadatan populasi dari dua spesies atau konsentrasi dari dua bahan kimia. Sistem reaksi difusi dengan kondisi batas Dirichlet nol ditulis sebagai berikut: (K.Sakhtivel dkk, 2010)

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} + a(x)u + b(x)v &= 0, & (x, t) \in Q = I \times (0, T) \\ v_t - v_{xx} + c(x)v + d(x)u &= 0, & (x, t) \in Q \end{aligned} \quad (1)$$

Dengan kondisi batas

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), v(x, 0) = g(x), & x \in I \\ u(0, t) &= u(1, t) = v(0, t) = v(1, t) = 0, & t \in (0, T) \end{aligned}$$

Interval $I = (0, 1)$ dan $T > 0$ adalah saat sembarang. Kondisi awal $f(x)$ dan $g(x)$, hanya tergantung pada x , $a(x)$ dan $c(x)$ merupakan parameter yang tidak diketahui dan koefisien $b(x)$, $d(x)$ diasumsikan *smooth* dan tidak tergantung pada waktu (t). Misal, diasumsikan ada kemungkinan untuk memberikan tambahan temperatur (suhu) untuk masalah invers panas: sebagai contoh, tambahan data $u(x, t)$, $v(x, t)$ pada saat akhir suhu diketahui.

$$u(x, T) = m(x), v(x, T) = n(x), x \in I \quad (2)$$

Berdasarkan error estimasi a dan c , yang ingin dicari adalah untuk memperoleh stabilitas perkiraan (estimasi) untuk menentukan invers problem dari dua koefisien $a(x)$ dan $c(x)$ secara bersamaan dalam sistem reaksi difusi dua persamaan yang berhubungan dengan penyelesaian sistem pada waktu akhir.

Misalkan (\tilde{u}, \tilde{v}) merupakan persamaan estimasi untuk sistem reaksi difusi, dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \tilde{u}_t - \tilde{u}_{xx} + \tilde{a}(x)\tilde{u} + b(x)\tilde{v} &= 0, & (x, t) \in Q \\ \tilde{v}_t - \tilde{v}_{xx} + \tilde{c}(x)\tilde{v} + d(x)\tilde{u} &= 0, & (x, t) \in Q \end{aligned} \quad (3)$$

Dengan kondisi batas

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, 0) &= f(x), \tilde{v}(x, 0) = g(x), & x \in I \\ \tilde{u}(0, t) &= \tilde{u}(1, t) = \tilde{v}(0, t) = \tilde{v}(1, t) = 0, & t \in (0, T) \end{aligned}$$

Misalkan didefinisikan $U = u - \tilde{u}$, $V = v - \tilde{v}$, $\mathcal{A} = a - \tilde{a}$, dan $\mathcal{C} = c - \tilde{c}$. Dengan melakukan pengurangan pada (3) dari (1)

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} + a(x)u + b(x)v - (\tilde{u}_t - \tilde{u}_{xx} + \tilde{a}(x)\tilde{u} + b(x)\tilde{v}) &= 0 \\ U_t - U_{xx} + a(x)(u - \tilde{u}) + b(x)(v - \tilde{v}) + (a(x) - \tilde{a}(x))\tilde{u} &= 0 \\ U_t - U_{xx} + aU + bV + \mathcal{A}\tilde{u} &= 0 \\ v_t - v_{xx} + c(x)v + d(x)u - (\tilde{v}_t - \tilde{v}_{xx} + \tilde{c}(x)\tilde{v} + d(x)\tilde{u}) &= 0 \\ V_t - V_{xx} + c(x)(v - \tilde{v}) + d(x)(u - \tilde{u}) + (c(x) - \tilde{c}(x))\tilde{v} &= 0 \\ V_t - V_{xx} + cV + dU + \mathcal{C}\tilde{v} &= 0 \end{aligned}$$

Sehingga dihasilkan

$$\begin{aligned} U_t - U_{xx} + aU + bV &= -\mathcal{A}\tilde{u}, & (x, t) \in Q \\ V_t - V_{xx} + cV + dU &= -\mathcal{C}\tilde{v}, & (x, t) \in Q \end{aligned} \quad (4)$$

Dengan syarat

$$\begin{aligned} U(x, 0) &= u(x, 0) - \tilde{u}(x, 0) = f(x) - f(x) = 0, \\ V(x, 0) &= v(x, 0) - \tilde{v}(x, 0) = g(x) - g(x) = 0, & x \in I \\ U(0, t) &= U(1, t) = V(0, t) = V(1, t) = 0, & t \in (0, T) \end{aligned}$$

Permasalahan yang muncul selanjutnya adalah bagaimana meminimalkan selisih koefisien yang sebenarnya, a dengan koefisien yang diestimasi, \tilde{a} .

Untuk menentukan koefisien a dan c pada sistem reaksi difusi tersebut, digunakan kerangka kontrol optimal. Dengan merubah masalah reaksi difusi kedalam masalah kontrol optimal.

Transformasi Kontrol Optimal

Pada bagian ini, masalah reaksi difusi diubah kedalam masalah kontrol optimal. Dalam kontrol optimal, istilah optimal seringkali merujuk pada minimal, misal meminimalkan kesalahan, waktu, dan lain-lain. Dalam hal ini, yang akan diminimalkan adalah selisih koefisien dari persamaan sistem reaksi difusi.

Untuk $\alpha > 0$, diasumsikan koefisien a, b, c, d dan data awal f, g memenuhi $a(x), b(x), c(x), d(x) \in C^\alpha(\bar{I})$, $m(x), n(x) \in L^2(I)$ dan $f(x), g(x) \in C^{2,\alpha}(\bar{I})$

Dengan $m(x), n(x)$ memenuhi kondisi batas Dirichlet homogen. Didefinisikan suatu himpunan $\mathcal{M} = \{a(x), c(x) : 0 < a_0 \leq a \leq a_1, 0 < c_0 \leq c \leq c_1, \nabla a, \nabla c \in L^2(I)\}$ (5)

Dan persoalan kontrol optimum sebagai berikut:

akan ditentukan $(\bar{a}(x), \bar{c}(x)) \in \mathcal{M}$ yang memenuhi

$$J(\bar{a}, \bar{c}) = \min_{a,c \in \mathcal{M}} J(a, c) \quad (6)$$

Dengan

$$\begin{aligned} J(a, c) &= \frac{1}{2} \left(\int_I (|u(x, T; a) - m(x)|^2 + |v(x, T; c) - n(x)|^2) + N (|\nabla a|^2 + |\nabla c|^2) \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_I (|u(x, T; a) - m(x)|^2 + |v(x, T; c) - n(x)|^2) + \frac{N}{2} (|\nabla a|^2 + |\nabla c|^2) dx \quad (7) \end{aligned}$$

$u(x, T; a)$ dan $v(x, T; c)$ merupakan penyelesaian dari persamaan (1) untuk koefisien tertentu $a(x), c(x) \in \mathcal{M}$ yang diberikan. Sedangkan konstanta a_0, a_1 dan c_0, c_1 diberikan dan N adalah parameter regularisasi.

Untuk menyatakan bahwa penyelesaian dari sistem kontrol tersebut ada, perlu dikaji eksistensi dari fungsi kontrol tersebut.

Eksistensi

Terlebih dahulu akan dikaji eksistensi untuk penyelesaian masalah kontrol optimal. Pada paper Sakhtivel dkk. (2010), terdapat teorema untuk menunjukkan eksistensi dari penyelesaian tersebut.

Teorema 2.2.1 Jika (u, v) merupakan penyelesaian untuk sistem (1) maka ada suatu nilai minimizer $(\bar{a}(x), \bar{c}(x)) \in \mathcal{M}$ sedemikian hingga $J(\bar{a}, \bar{c}) = \min_{a,c \in \mathcal{M}} J(a, c)$

Bukti. Dari definisi $J(a, c)$, maka fungsi $J(a, c)$ adalah nonnegatif (positif) pada batas bawah terbesar. Misal (u_n, v_n, a_n, c_n) menjadi barisan yang meminimalkan J , sebagai contoh,

$$\inf_{a,c \in \mathcal{M}} J(a, c) \leq J(a_n, c_n) \leq \inf_{a,c \in \mathcal{M}} J(a, c) + \frac{1}{n}, \text{ untuk } n = 1, 2, \dots$$

Jika $n \rightarrow \infty$

$$\text{Misal } J(a_n, c_n) \leq C, \text{ ini menunjukkan bahwa } \|\nabla a_n\|_{L^2(I)} + \|\nabla c_n\|_{L^2(I)} \leq C$$

Dengan C konstan tidak tergantung n .

Kemudian norm Sobolev $H^1(I) \subset C^\alpha(\bar{I})$ untuk $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$, menunjukkan

$$\|a_n\|_{C^{\frac{1}{2}}(I)} + \|c_n\|_{C^{\frac{1}{2}}(I)} \leq C$$

Demikian, dengan eksistensi penyelesaian klasik untuk persamaan parabola, mempunyai

$$\|u_n\|_{C^{\frac{1}{2}}(\bar{Q})} + \|v_n\|_{C^{\frac{1}{2}}(\bar{Q})} \leq C,$$

Untuk sebarang $Q_0 \Subset Q$, didapatkan

$$\|u_n\|_{C^{2+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{4}}(Q_0)} + \|v_n\|_{C^{2+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{4}}(Q_0)} \leq C$$

Kemudian ada sub barisan dari (u_n, v_n, a_n, c_n) , dinotasikan dengan (u_n, v_n, a_n, c_n) , sehingga

$$(a_n, c_n) \rightarrow (\bar{a}, \bar{c}) \in C^{\frac{1}{2}}(I) \text{ secara keseluruhan (uniformly) pada } C^\alpha(\bar{I})$$

$$(u_n, v_n) \rightarrow (\phi, \varphi) \in C^{\frac{1}{2}}(I) \text{ uniformly pada } C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\bar{Q}) \cap C^{2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2}}(Q).$$

Karena itu mengganti (u, v, a, c) pada (1) dengan (u_n, v_n, a_n, c_n) sampai dengan batas atas, tampak bahwa $(\phi, \varphi, \bar{a}, \bar{c})$ memenuhi sistem (1). Sehingga diperoleh

$$J(\bar{a}, \bar{c}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J(a_n, c_n) = \min_{a,c \in \mathcal{M}} J(a, c)$$

Karena itu $J(\bar{a}, \bar{c}) = \min_{a,c \in \mathcal{M}} J(a, c)$

Jadi $(\bar{a}, \bar{c}) := (a, c)$ adalah penyelesaian optimal dari permasalahan kontrol optimal (5), (6), dan (7).

Syarat Perlu (Necessary Condition)

Terdapat syarat perlu untuk kondisi optimal yang harus dipenuhi oleh masing-masing kontrol optimal (a, c) . Misalkan (p, q) merupakan penyelesaian dari sistem adjoint yang berhubungan dengan persamaan (1) dari bentuk

$$\left. \begin{aligned} -p_t - p_{xx} + ap + dq &= 0, & (x, t) \in Q \\ -q_t - q_{xx} + cq + bp &= 0, & (x, t) \in Q \\ p(x, T) &= u(x, T) - m(x), & x \in I \\ q(x, T) &= v(x, T) - n(x), & x \in I \\ p(0, t) = p(1, t) = q(0, t) = q(1, t) &= 0, & t \in (0, T) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Dengan m, n nilai penyelesaian untuk sistem (1) pada waktu akhir $t = T$

Teorema 2.3.1 Misal (a, c) menjadi penyelesaian dari permasalahan kontrol optimal (6). maka terdapat satu himpunan fungsi $(u, v, p, q; a, c)$ yang memenuhi

$$\int_Q (pu(a - h) + qv(c - k)) dt dx + N \int_1 [\nabla a \cdot \nabla(h - a) + \nabla c \cdot \nabla(k - c)] dx \geq 0 \quad (9)$$

Untuk sebarang $h, k \in \mathcal{M}$

Bukti. Untuk sebarang $h, k \in \mathcal{M}$ dan $0 \leq \delta \leq 1$,

Dimisalkan $a_\delta = (1 - \delta)a + \delta h \in \mathcal{M}$ dan $c_\delta = (1 - \delta)c + \delta k \in \mathcal{M}$

Kemudian ada penyelesaian (u_δ, v_δ) dari sistem (1) dengan koefisien $a = a_\delta$ dan $c = c_\delta$ memenuhi

$$J_\delta = J(a_\delta, c_\delta) = \frac{1}{2} \int_1 [|u_\delta - m(x)|^2 + |v_\delta - n(x)|^2] dx + \frac{N}{2} \int_1 (|\nabla a_\delta|^2 + |\nabla c_\delta|^2) dx \quad (10)$$

Dengan $u_\delta = u(x, T; a_\delta)$ dan $v_\delta = v(x, T; c_\delta)$. Turunan Fréchet dari J_δ , diperoleh

$$\left. \begin{aligned} \frac{dJ_\delta}{d\delta} \Big|_{\delta=0} &= \int_1 \left([u_\delta - m(x)] \frac{du_\delta}{d\delta} \Big|_{\delta=0} + [v_\delta - n(x)] \frac{dv_\delta}{d\delta} \Big|_{\delta=0} \right) dx + \\ &N \int_1 [\nabla a \cdot \nabla(h - a) + \nabla c \cdot \nabla(k - c)] dx \end{aligned} \right\}$$

Dengan (a, c) adalah penyelesaian optimal, sehingga

$$\frac{dJ_\delta}{d\delta} \Big|_{\delta=0} \geq 0 \quad (11)$$

Jika dimisalkan $(\bar{u}_\delta, \bar{v}_\delta) = \left(\frac{\partial u_\delta}{\partial \delta}, \frac{\partial v_\delta}{\partial \delta} \right)$, kemudian $(\bar{u}_\delta, \bar{v}_\delta)$ memenuhi sistem berikut dengan koefisien $(a_\delta, b, c_\delta, d)$.

$$(\bar{u}_\delta)_t - (\bar{u}_\delta)_{xx} + a_\delta \bar{u}_\delta + (h - a)u_\delta + b\bar{v}_\delta = 0, \quad (x, t) \in Q$$

$$(\bar{v}_\delta)_t - (\bar{v}_\delta)_{xx} + c_\delta \bar{v}_\delta + (k - c)v_\delta + d\bar{u}_\delta = 0, \quad (x, t) \in Q$$

Misal $\xi = \bar{u}_\delta|_{\delta=0}$ dan $\eta = \bar{v}_\delta|_{\delta=0}$, terlihat bahwa (ξ, η) memenuhi sistem berikut

$$\left. \begin{aligned} \xi_t - \xi_{xx} + \xi a + b\eta &= (a - h)u, & (x, t) \in Q \\ \eta_t - \eta_{xx} + c\eta + d\xi &= (c - k)v, & (x, t) \in Q \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Dengan $u_\delta|_{\delta=0} = u$ dan $v_\delta|_{\delta=0} = v$. Dari bentuk (11), akan ditunjukkan bahwa

$$\int_1 ([u(x, T; a) - m(x)]\xi(x, T) + [v(x, T; c) - n(x)]\eta(x, T)) dx + N \int_1 [\nabla a \cdot \nabla(h - a) + \nabla c \cdot \nabla(k - c)] dx \geq 0$$

Dari persamaan bentuk (8) diperoleh

$$\int_1 (p(x, T)\xi(x, T) + q(x, T)\eta(x, T)) dx + N \int_1 [\nabla a \cdot \nabla(h - a) + \nabla c \cdot \nabla(k - c)] dx \geq 0 \quad (13)$$

Misalkan (p, q) adalah penyelesaian dari persamaan (8) dan dikalikan dengan ξ , sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= \int_Q \xi (-p_t - p_{xx} + ap + dq) dt dx \\ &= - \int_1 \xi p|_0^T dx + \int_Q p (\xi_t - \xi_{xx} + a\xi + b\eta - b\eta) dt dx + \int_Q dq\xi dt dx \\ &= - \int_1 \xi(x, T) p(x, T) dx + \int_Q p (\xi_t - \xi_{xx} + a\xi + b\eta) dt dx + \int_Q (dq\xi - bp\eta) dt dx \end{aligned}$$

Akhirnya diperoleh bentuk persamaan berikut

$$\int_1 \xi(x, T) p(x, T) dx = \int_Q p (\xi_t - \xi_{xx} + a\xi + b\eta) dt dx + \int_Q (dq\xi - bp\eta) dt dx$$

Berdasarkan persamaan (12) maka persamaan diatas menjadi

$$\int_1 \xi(x, T) p(x, T) dx = \int_Q pu(a - h) dt dx + \int_Q (dq\xi - bp\eta) dt dx \quad (14)$$

Dan dengan cara yang sama, didapatkan bentuk persamaan (8b) sebagai berikut

$$\int_1 \eta(x, T) q(x, T) dx = \int_Q qv(c - k) dt dx + \int_Q (bp\eta - dq\xi) dt dx \quad (15)$$

Dengan mensubstitusi persamaan (14) dan (15) ke persamaan (13), maka diperoleh

$$\int_Q (pu(a - h) + qv(c - k)) dt dx + N \int_1 [\nabla a \cdot \nabla(h - a) + \nabla c \cdot \nabla(k - c)] dx \geq 0$$

Setelah syarat perlu untuk kondisi optimal dikaji, maka perlu dikaji pula stabilitas hasil estimasi dari permasalahan kontrol optimal.

Kestabilan Hasil Estimasi

Pada bagian ini, akan dikaji stabilitas estimasi untuk invers problem dari mendapatkan kembali dua koefisien penghalus (smooth) $a(x)$ dan $c(x)$ pada sistem parabolik yang telah diberikan. Permasalahan kontrol optimal ditetapkan pada bagian sebelumnya akan digunakan untuk membuktikan stabilitas estimasi.

Dalam paper K. Sakhtivel, dkk.(2010), terdapat lemma yang digunakan untuk menentukan kestabilan hasil estimasi.

Lemma 2.4.1. Misal (U, V) menjadi penyelesaian pada persamaan (4), maka diperoleh estimasi berikut:

$$\max_{0 \leq t \leq T} \int_1 (|U|^2 + |V|^2) dx \leq \exp(MT) \left(\max_{x \in I} |\mathcal{A}|^2 \int_Q |\tilde{u}|^2 dt dx + \max_{x \in I} |\mathcal{C}|^2 \int_Q |\tilde{v}|^2 dt dx \right) \quad (16)$$

Dengan nilai konstan

$$M = (2 + \max_{x \in I} |b|^2 + \max_{x \in I} |d|^2)$$

Bukti. Persamaan (4) dikalikan dengan U dan mengintegrasikan I untuk mendapatkan

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|U\|_{L^2(I)}^2 + \int_I |U_x|^2 dx + \int_I a|U|^2 dx = - \int_I bUV dx - \int_I \mathcal{A}U\tilde{u} dx$$

Misal, koefisien $a = a_0$ dan menerapkan ketidaksamaan Cauchy, maka diperoleh

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|U\|_{L^2(I)}^2 + \int_I |U_x|^2 dx + a_0 \int_I |U|^2 dx \leq \int_I |U|^2 dx + \frac{1}{2} \max_{x \in I} |\mathcal{A}|^2 \int_I |\tilde{u}|^2 dx + \frac{1}{2} \max_{x \in I} |b|^2 \int_I |V|^2 dx$$

Dengan cara yang sama dilakukan juga pada persamaan (4b).

Dengan menggabungkan dua estimasi tersebut, maka diperoleh

$$\frac{d}{dt} \left[\|U\|_{L^2(I)}^2 + \|V\|_{L^2(I)}^2 \right] \leq M \left(\|U\|_{L^2(I)}^2 + \|V\|_{L^2(I)}^2 \right) + \max_{x \in I} |\mathcal{A}|^2 \int_I |\tilde{u}|^2 dx + \max_{x \in I} |\mathcal{C}|^2 \int_I |\tilde{v}|^2 dx$$

ini mengikuti

$$\frac{d}{dt} \left[\exp(-Mt) \left(\|U\|_{L^2(I)}^2 + \|V\|_{L^2(I)}^2 \right) \right] \leq \exp(-Mt) \left(\max_{x \in I} |\mathcal{A}|^2 \int_I |\tilde{u}|^2 dx + \max_{x \in I} |\mathcal{C}|^2 \int_I |\tilde{v}|^2 dx \right)$$

Dengan mengintegrasikan dari 0 sampai t , maka dihasilkan

$$\|U\|_{L^2(I)}^2 + \|V\|_{L^2(I)}^2 \leq \exp(Mt) \left(\max_{x \in I} |\mathcal{A}|^2 \int_I \int_0^1 \exp(-Ms) |\tilde{u}|^2 ds dx + \max_{x \in I} |\mathcal{C}|^2 \int_I \int_0^1 \exp(-Ms) |\tilde{v}|^2 ds dx \right)$$

Dengan cara yang sama, berlaku untuk persamaa adjoint nya.

Lemma 2.4.2 Misal (u, v) menjadi penyelesaian dari persamaan (1). Maka diperoleh

$$\max_{0 \leq t \leq T} \int_1 (|u|^2 + |v|^2) dx \leq \exp(MT) \left(\|f\|_{L^2(I)}^2 + \|g\|_{L^2(I)}^2 \right) \quad (17)$$

Bukti. Dengan mengalikan persamaan (1) dengan u dan v dan mengintegrasikan I , diperoleh

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\|u\|_{L^2(I)}^2 + \|v\|_{L^2(I)}^2 \right] + \int_I (|u_x|^2 + |v_x|^2) dx + \int_I (au^2 + cv^2) dx \leq \frac{1}{2} \left(1 + \max_{x \in I} |b|^2 + \max_{x \in I} |d|^2 \right) \left(\|u\|_{L^2(I)}^2 + \|v\|_{L^2(I)}^2 \right)$$

Dengan memisalkan a dan c , diperoleh

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\|u\|_{L^2(I)}^2 + \|v\|_{L^2(I)}^2 \right] \leq \frac{M}{2} \left(\|u\|_{L^2(I)}^2 + \|v\|_{L^2(I)}^2 \right)$$

$$\text{Dengan } \frac{d}{dt} \left[\left(\exp(-Mt) \|u\|_{L^2(I)}^2 + \|v\|_{L^2(I)}^2 \right) \right] \leq 0$$

Terdapat teorema yang digunakan untuk membuktikan kestabilan hasil estimasi.

Teorema 2.4.1. Misal (u, v) dan (p, q) berturut-turut merupakan penyelesaian untuk sistem (1) dan (4). Misalkan ada sebuah titik $x_0 \in I$, sedemikian hingga, $a(x_0) = \tilde{a}(x_0)$ dan $c(x_0) = \tilde{c}(x_0)$. Kemudian ada saat tertentu pada waktu T_0 sedemikian hingga, untuk $T \geq T_0$ ada konstanta $C > 0$, tidak bergantung pada a_0 dan c_0 , yang memenuhi estimasi berikut

$$\max_{x \in I} |a - \tilde{a}|^2 + \max_{x \in I} |c - \tilde{c}|^2 \leq \frac{C}{N} T \exp(2MT) \int_1 (|m - \tilde{m}|^2 + |n - \tilde{n}|^2) dx \quad (18)$$

Dengan konstanta $M = \left(2 + \max_{x \in I} |b|^2 + \max_{x \in I} |d|^2\right)$.

Bukti. Misal $h = \tilde{a}$, $k = \tilde{c}$ pada persamaan (9) memiliki

$$\int_Q qv(c - \tilde{c}) dt dx + \int_Q pu(a - \tilde{a}) dt dx + N \int_1 [\nabla a \cdot \nabla(a - \tilde{a}) + \nabla c \cdot \nabla(c - \tilde{c})] dx \geq 0 \quad (19)$$

Misal $h = a$, $k = c$ ketika $a = \tilde{a}$, $c = \tilde{c}$, juga memperoleh

$$\int_Q \tilde{q}\tilde{v}(\tilde{c} - c) dt dx + \int_Q \tilde{p}\tilde{u}(\tilde{a} - a) dt dx + N \int_1 [\nabla \tilde{a} \cdot \nabla(a - \tilde{a}) + \nabla \tilde{c} \cdot \nabla(c - \tilde{c})] dx \geq 0 \quad (20)$$

Dengan (u, v) , (\tilde{u}, \tilde{v}) adalah penyelesaian untuk sistem (1) dengan koefisien (a, b, c, d) , $(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d})$ secara berturut-turut dan (p, q) , (\tilde{p}, \tilde{q}) adalah penyelesaian yang sesuai sistem adjoint (6). adapun dari (19) dan (20), didapatkan

$$\begin{aligned} N \int_1 |\nabla(a - \tilde{a})|^2 dx + N \int_1 |\nabla(c - \tilde{c})|^2 dx &\leq \int_Q \mathcal{A}(pu - \tilde{p}\tilde{u}) dt dx + \int_Q \mathcal{C}(qv - \tilde{q}\tilde{v}) dt dx \\ &= \int_Q \mathcal{A}(pU - \tilde{P}\tilde{u}) dt dx + \int_Q \mathcal{C}(qV - \tilde{Q}\tilde{v}) dt dx \end{aligned} \quad (21)$$

Penerapan ketidaksamaan Cauchy pada tiap integral sisi kanan, diperoleh

$$\begin{aligned} N \int_1 (|\nabla \mathcal{A}|^2 + |\nabla \mathcal{C}|^2) dx &\leq \frac{1}{2} \left(\max_{x \in I} |\mathcal{A}|^2 \int_Q (|p|^2 + |\tilde{u}|^2) dt dx + \right. \\ &\quad \left. \max_{x \in I} |\mathcal{C}|^2 \int_Q (|q|^2 + |\tilde{v}|^2) dt dx \right) + \\ &\quad \frac{1}{2} \int_Q (|U|^2 + |V|^2 + |\mathcal{P}|^2 + |\mathcal{Q}|^2) dt dx \end{aligned} \quad (22)$$

Dari Lemma 2.4.1 dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \int_Q (|U|^2 + |V|^2 + |\mathcal{P}|^2 + |\mathcal{Q}|^2) dt dx &\leq CT \exp(2MT) \left(\max_{x \in I} |\mathcal{A}|^2 \int_Q (|\tilde{p}|^2 + |\tilde{u}|^2) dt dx + \right. \\ &\quad \left. \max_{x \in I} |\mathcal{C}|^2 \int_Q (|\tilde{q}|^2 + |\tilde{v}|^2) dt dx + \right. \\ &\quad \left. \int_1 (|m - \tilde{m}|^2 + |n - \tilde{n}|^2) dx \right) \end{aligned} \quad (23)$$

Tambahan, dari Lemma 2.4.2, ada suatu konstanta $\Gamma > 0$ sedemikian hingga

$$\begin{aligned} \int_Q (|\tilde{u}|^2 + |\tilde{v}|^2) dt dx &\leq T \exp(MT) \Gamma \text{ dan } \int_Q (|\tilde{p}|^2 + |\tilde{q}|^2) dt dx \\ &\leq T \exp(2MT) \Gamma \end{aligned} \quad (24)$$

Dengan memasukkan $\mathcal{A}(x_0) = 0$ kedalam perhitungan dan menerapkan pada ketidaksamaan Hölder, didapatkan

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}(x)| &= \left| \int_{x_0}^x (\mathcal{A}(y))' dy \right| \leq \left(\int_1 |\nabla \mathcal{A}|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ \text{Sehingga } \max_{x \in I} |\mathcal{A}| &\leq \|\nabla \mathcal{A}\|_{L^2(I)}, \forall x \in I \end{aligned} \quad (25)$$

Mengkombinasikan estimasi terdahulu pada (22), didapatkan

$$\begin{aligned} \max_{x \in I} |\mathcal{A}|^2 + \max_{x \in I} |\mathcal{C}|^2 &\leq C_\Gamma (\max_{x \in I} |\mathcal{A}|^2 + \max_{x \in I} |\mathcal{C}|^2) + \frac{CT}{2N} \exp(2MT) + \\ &\quad \int_1 (|m - \tilde{m}|^2 + |n - \tilde{n}|^2) dx \end{aligned}$$

Dengan konstanta $C_\Gamma = \frac{T}{2N} \exp(4MT) \Gamma(1 + CT)$

Memilih $T_0 > 0$ sedemikian hingga $C_{T_0} < 1$, pembuktian dapat diselesaikan.

Dari teorema 2.4.1 diketahui bahwa jika pengukuran akhir dari sistem (1) dan (3) sama, yaitu $u(x, T) = \tilde{u}(x, T)$ dan $v(x, T) = \tilde{v}(x, T)$, maka data a dan c bisa ditentukan secara khusus, bahwa $a = \tilde{a}$ dan $c = \tilde{c}$ pada I , untuk beberapa $T_0 > 0$ yang kecil. Dari (22) – (25), diperoleh

$$\int_1 (|\nabla \mathcal{A}|^2 + |\nabla \mathcal{C}|^2) dx \leq C_T \left(\int_1 (|\nabla \mathcal{A}|^2 + |\nabla \mathcal{C}|^2) dx \right)$$

Dengan memilih $T_0 > 0$ sedemikian hingga $C_{T_0} < 1$, bisa disimpulkan bahwa

$$\int_1 (|\nabla \mathcal{A}|^2 + |\nabla \mathcal{C}|^2) dx \leq 0$$

Dengan mengasumsikan $\mathcal{A}(x_0) = \mathcal{C}(x_0) = 0$ dalam perhitungan, dapat disimpulkan bahwa $a(x) - \tilde{a}(x) \equiv 0$ dan $c(x) - \tilde{c}(x) \equiv 0$ untuk semua $x \in I$

KESIMPULAN

Metode optimasi dengan menggunakan kerangka kontrol optimal dapat digunakan untuk menyelesaikan invers problem pada sistem reaksi difusi dengan syarat batas ditentukan. Terdapat eksistensi dari penyelesaian dari permasalahan kontrol optimalnya. Dan kestabilan hasil estimasi dapat diperoleh dengan menggunakan pembuktian eksistensi dari penyelesaian kontrol optimal, sehingga dari hasil estimasi dan pengukuran sebenarnya dapat disimpulkan bahwa

$$a(x) - \tilde{a}(x) \equiv 0 \text{ dan } c(x) - \tilde{c}(x) \equiv 0 \text{ untuk semua } x \in I$$

Diharapkan ada penerapan lebih lanjut pada bidang teknologi maupun ilmu pengetahuan.

DAFTAR PUSTAKA

- Chen. Qun, Liu. Jijun, (2005), “*Solving An Inverse Parabolic Problem By Optimization From Measurement Data*”, Computational And Applied Mathematics, No. 193, 183 – 203.
- Sakhtivel. K, Gnanavel. S, Barani Balan. N, & Balachandran. K, (2010), “*Inverse Problem For The Reaction Diffusion System by Optimization Method*”, Applied Mathematical Modelling, No. 35, 571 – 579.
- Tarantola, Albert. (2005), “*Invers Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*”, Society For Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
- Yang. Liu, Deng. Zui-Chang, & Yu. Jian-Ning, (2007), “*An Inverse Problem of Identifying the Coefficient of Parabolic Equation*”, Applied Mathematical Modelling, No. 32, 1984 – 1995
- Yang. Liu, Deng. Zui-Chang, Yu. Jian-Ning, dan Luo. & Guan-Wei, (2009), “*Optimization Method For The Inverse Problem Of Reconstructing The Source Term In A Parabolic Equation*”, *Mathematics And Computers In Simulation*, No.80, 314 – 326.

SKEMA AKAR KUADRAT DALAM UNSCENTED KALMAN FILTER UNTUK MENDETEKSI KERAK PADA ALAT PENUKAR PANAS

M. Tholib¹, Erna Apriliani²

Jurusan Matematika FMIPA
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya
Email: 101tholib@gmail.com

Abstrak

Filter Kalman adalah suatu algoritma yang digunakan untuk mengestimasi variabel keadaan pada sistem linier. Sedangkan untuk sistem taklinier *Filter Kalman* tidak dapat digunakan secara langsung. Untuk beberapa tahun kemudian muncul metode baru yang dikenal dengan nama *Unscented Kalman Filter* (UKF) yang menggunakan teknik *transformasi unscented*. *Akar Kuadrat* merupakan suatu skema yang dapat diterapkan dalam UKF untuk mengestimasi suatu model dinamik taklinier. Dalam makalah ini dilakukan suatu kajian mengenai skema *Akar Kuadrat* yang diterapkan pada *Unscented Kalman Filter* (UKF) sehingga terbentuk suatu algoritma baru yang dinamakan dengan *Akar Kuadrat-Unscented Kalman Filter* (AK-UKF). Dan kemudian algoritma ini diimplementasikan pada model sistem deteksi kerak pada alat penukar panas.

Kata kunci: *Filter Kalman, Unscented Kalman Filter (UKF), Akar Kuadrat-Unscented Kalman Filter (AK-UKF), kerak, alat penukar panas.*

PENDAHULUAN

Filter Kalman merupakan salah satu metode untuk menaksir variabel keadaan dari sebuah sistem linier dengan meminimumkan kovariansi kesalahan estimasi. Salah satu pendekatan *Filter Kalman* yang bisa digunakan untuk sistem taklinier, yaitu *Extended Kalman Filter* (EKF) dan *Unscented Kalman Filter* (UKF)[4]. Selama kurang lebih 20-30 tahun EKF diakui secara umum sebagai metode untuk menaksir variabel keadaan sistem taklinier, hingga ditemukan suatu pendekatan baru yang dikenal dengan *Unscented Kalman Filter* [4]. Perbedaan kedua metode ini yaitu pada metode pelinieran yang digunakan, pada EKF sistem dilinierkan dengan menggunakan pendekatan deret Taylor, sementara pada UKF menggunakan *Transformasi Unscented*. Metode dasar *Transformasi Unscented* pertama kali diperkenalkan Uhlman dan Julier [5], mereka membentuk sebuah kerangka yang mewakili variabel random yang dinamakan *Titik-Titik Sigma*.

Skema akar kuadrat merupakan salah satu skema yang dapat diimplementasikan pada UKF. Skema ini dapat mempengaruhi pada hasil estimasi menjadi lebih baik, baik dalam hal tingkat akurasi maupun waktu komputasi yang digunakan[6].

Dalam penelitian ini akan dilakukan suatu kajian mengenai implementasi skema akar kuadrat pada UKF, yang selanjutnya diterapkan untuk mengestimasi variabel keadaan pada sistem dengan model pengukuran taklinier yaitu sistem/model pada alat penukar panas. Hasil estimasi dengan metode *Akar Kuadrat Unscented Kalman Filter* (AK-UKF) selanjutnya akan dibandingkan metode UKF standar, sehingga diperoleh metode yang memiliki tingkat ketelitian yang lebih baik.

¹ Mahasiswa Pasca Sarjana Matematika FMIPA ITS Surabaya

² Staf Pengajar Jurusan Matematika ITS Surabaya

UNSCENTED KALMAN FILTER (UKF)

Proses estimasi pada metode *Filter Kalman* menyajikan bentuk umum dari sistem yang digunakan dan beberapa tahapan dari proses estimasinya. Lewis memberikan suatu sistem dinamik linear, secara umum berbentuk sebagai berikut[3]:

$$\begin{aligned}
 x_{k+1} &= A_k x_k + B_k u_k + G_k w_k \\
 z_k &= H_k x_k + v_k \\
 x_0 &\sim (\bar{x}_0, P_{x_0}); w_k \sim (0, Q_k); v_k \sim (0, R_k)
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

dengan x_k variabel keadaan sistem pada waktu k yang nilai estimasi awalnya \bar{x}_0 dan kovarian awal P_{x_0} , $x_k \in \mathfrak{R}^n$, u_k variabel input deterministik pada waktu k , $u_k \in \mathfrak{R}^m$. w_k gangguan (noise) pada sistem yang mempunyai mean $\bar{w}_k = 0$ dan kovarian Q_k , z_k variabel pengukuran, $z_k \in \mathfrak{R}^p$, v_k gangguan (noise) pada pengukuran dengan mean $\bar{v}_k = 0$ dan kovarian R_k . A_k, B_k, G_k, H_k adalah matriks-matrik dengan ukuran yang bersesuaian.

Proses estimasinya ada dua tahap, yaitu tahap prediksi (*time update*) dipengaruhi oleh dinamika sistem, dan tahap koreksi (*measurement update*) dipengaruhi oleh informasi dari pengukuran. Kedua tahap ini akan berulang terus-menerus sampai pada waktu k yang ditentukan.

Unscented Kalman Filter adalah pengembangan dari *Filter Kalman* untuk sistem yang non-linear dengan menggunakan teknik *Transformasi Unscented*. Misalkan diberikan suatu fungsi kepadatan peluang diskrit $y_k=f(x_k, k)$ mempunyai variabel random x dari sebuah model taklinear dengan dimensi L mempunyai *mean* \hat{x} dan *kovarian* P_x . Fungsi $y_k=f(x_k, k)$ didekati dengan *transformasi unscented*. *Mean* dan *kovarian* tersebut digunakan untuk menentukan penyebaran $2L+1$ titik-titik *sigma* disekitar \hat{x} . Titik-titik *sigma* dalam bentuk vektor *sigma* χ_i diperoleh dengan menggunakan persamaan berikut [4]:

$$\begin{aligned}
 \chi_0 &= \hat{x} \\
 \chi_i &= \hat{x} + (\sqrt{(L + \lambda)P_x})_i, & i = 1, \dots, L \\
 \chi_i &= \hat{x} - (\sqrt{(L + \lambda)P_x})_{i-L}, & i = L + 1, \dots, 2L
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

dengan: $\lambda = \alpha^2(n + k) - L$ adalah parameter penskalaan, α adalah sebuah konstanta yang digunakan untuk menentukan sebaran dari titik *sigma* di sekeliling \hat{x} , dimana α selalu bernilai positif kecil dan k adalah skala penskalaan tambahan, dimana nilai $k \geq 0$. Nilai yang paling sering digunakan yaitu $k = 0$.

Misalkan diberikan variabel keadaan:

$$x = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_L]^T
 \tag{3}$$

Jika dinyatakan dalam bentuk matriks *sigma points* bisa dituliskan menjadi:

$$\chi_i = [\chi_0 \quad \chi_1 \quad \dots \quad \chi_L \quad \chi_{L+1} \quad \chi_{L+2} \quad \dots \quad \chi_{2L}]^T
 \tag{4}$$

Karena $y_k = f(x_k)$, maka penyebaran vektor *sigma* y_k adalah:

$$y_i = f(\chi_i), \quad i = 0, \dots, 2L,$$

Pembobot *mean* dan *kovarian* dihitung berdasarkan persamaan [6]:

$$\begin{aligned}
 W_0^{(m)} &= \frac{\lambda}{L + \lambda} \\
 W_0^{(c)} &= \frac{\lambda}{L + \lambda} + 1 - \alpha^2 + \beta \\
 W_i^{(m)} &= W_i^{(c)} = \frac{1}{2(L + \lambda)}, & i = 1, \dots, 2L
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Dengan menggunakan titik-titik *sigma* persamaan (2) dan persamaan pembobot mean-kovarians pada persamaan (5), maka diperoleh mean:

$$\hat{y} = \sum_{i=0}^{2L+1} [W_i^{(m)} f(\chi_i)] \quad (6)$$

Sedangkan untuk menghitung kovarians dari y menggunakan persamaan:

$$P_y = \sum_0^{2L} [W_i^{(c)} (f(\chi_i) - \hat{y})(f(\chi_i) - \hat{y})^T] \quad (7)$$

Secara ringkas algoritma *Unscented Kalman Filter* dapat dituliskan sebagai berikut[5]:

Inisialisasi

Pada saat $k=0$

$$\begin{aligned} \hat{x}_0 &= E[x_0] \\ P_{x_0} &= E[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T] \\ \hat{x}_0^a &= E[x^a] = E[\hat{x}_0^T \ 0 \ 0]^T \\ P_0^a &= E[(x_0^a - \hat{x}_0^a)(x_0^a - \hat{x}_0^a)^T] = \begin{bmatrix} P_x & 0 & 0 \\ 0 & P_w & 0 \\ 0 & 0 & P_v \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Untuk $k=1,2,3,\dots,N$:

Hitung titik *sigma*

$$\chi_{k-1}^a = [\hat{x}_{k-1}^a \ \hat{x}_{k-1}^a + \gamma\sqrt{P_{k-1}} \ \hat{x}_{k-1}^a - \gamma\sqrt{P_{k-1}}]$$

dengan: $\gamma = \sqrt{L + \lambda}$ dan $\lambda = \alpha^2(L + \kappa) - L$

Tahap prediksi (time update)

$$\begin{aligned} \chi_{k|k-1}^x &= f(\chi_{k-1}^x, \chi_{k-1}^w) \\ \hat{x}_k^- &= \sum_{i=0}^{2L} [W_i^{(m)} \chi_{i,k|k-1}^x] \\ P_{x_k}^- &= \sum_{i=0}^{2L} [W_i^{(c)} (\chi_{i,k|k-1}^x - \hat{x}_k^-)(\chi_{i,k|k-1}^x - \hat{x}_k^-)^T + Q_k] \\ Z_{k|k-1} &= H(\chi_{k|k-1}^x, \chi_{k-1}^v) \\ \hat{z}_k^- &= \sum_{i=0}^{2L} [W_i^{(m)} Z_{i,k|k-1}] \end{aligned}$$

Tahap koreksi (measurement update)

$$\begin{aligned} P_{\hat{x}_k, \hat{z}_k} &= \sum_{i=0}^{2L} [W_i^{(c)} (Z_{i,k|k-1} - \hat{z}_k^-)(Z_{i,k|k-1} - \hat{z}_k^-)^T + R_k] \\ P_{x_k, \hat{z}_k} &= \sum_{i=0}^{2L} [W_i^{(c)} (\chi_{i,k|k-1}^x - \hat{x}_k^-)(Z_{i,k|k-1} - \hat{z}_k^-)^T] \\ K_k &= P_{x_k, \hat{z}_k} P_{\hat{z}_k, \hat{z}_k}^{-1} \\ \hat{x}_k &= \hat{x}_k^- + K_k (z_k - \hat{z}_k^-) \\ P_{x_k} &= P_{x_k}^- - K_k P_{\hat{z}_k, \hat{z}_k} K_k^T \end{aligned}$$

Dengan Q_k = kov. error proses dan R_k = kov. error pengukuran

AKAR KUADRAT UNSCENTED KALMAN FILTER (AK-UKF)

Algoritma UKF standar dapat dimodifikasi dengan cara menyebarkan matriks akar kuadrat/faktor *Cholesky* S_k secara langsung, untuk menghindari kebutuhan pemfaktoran ulang pada setiap time step sehingga bisa mengurangi beban komputasi.

Untuk memperoleh nilai estimasi, kovarian error dan penghitungan faktor Cholesky tahap prediksi dan koreksi adalah dengan menggunakan teknik *Transformasi Unscented*. Secara urut algoritma akar kuadrat pada UKF dapat disusun sebagai berikut:

Inisialisasi

Pada saat $k = 0$

$$\hat{x}_0 = E[x_0]$$

$$P_{x_0} = E[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T]$$

Faktor Cholesky S_0 : $S_0 = chol(P_{x_0})$

$$\hat{x}_0^a = E[x^a] = E[\hat{x}_0^T \ 0 \ 0]^T$$

$$P_0^a = E[(x_0^a - \hat{x}_0^a)(x_0^a - \hat{x}_0^a)^T] = \begin{bmatrix} P_{x_0} & 0 & 0 \\ 0 & P_w & 0 \\ 0 & 0 & P_v \end{bmatrix}$$

Faktor Cholesky tambahan S_0^a : $S_0^a = chol(P_0^a)$

Misal diberikan variabel keadaan:

$$x_k = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_L]^T \tag{8}$$

Dengan kovarian awal:

$$P_k = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1L} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2L} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{L1} & P_{L2} & \dots & P_{LL} \end{bmatrix} \tag{9}$$

Berdasarkan model yang diberikan variabel random x_k dengan dimensi L mempunyai mean \hat{x}_k , kovarian P_k dan juga faktor Cholesky S_k yang diperoleh dari persamaan $P_k = S_k S_k^T$, atau bisa ditulis: $S_k = chol(P_k)$.

Kemudian didefinisikan variabel keadaan tambahan:

$$x_k^a = [x_k \ w_k]^T \tag{10}$$

Sedangkan kovarian awal tambahan:

$$P_k^a = \begin{bmatrix} P_k & P_k^{xw} \\ P_k^{xw} & Q_k \end{bmatrix} \tag{11}$$

Dan faktor Cholesky awal tambahan adalah:

$$S_k^a = chol(P_k^a) = chol \begin{bmatrix} P_k & P_k^{xw} \\ P_k^{xw} & Q_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_k & 0 \\ 0 & T_k \end{bmatrix} \tag{12}$$

T_k adalah faktor Cholesky dari Q_k .

Selanjutnya mean, kovarian dan faktor Cholesky tersebut digunakan untuk menentukan penyebaran $2L+1$ titik-titik sigma disekitar \hat{x}_k^a . Titik-titik sigma dalam bentuk vektor sigma $\chi_{i,k}^a$ diperoleh dengan menggunakan persamaan berikut[7]:

$$\begin{aligned} \chi_{i,k}^a &= \hat{x}_k^a, \quad i = 0 \\ \chi_{i,k}^a &= \hat{x}_k^a + \gamma S_i^a, \quad i = 1, 2, \dots, L \\ \chi_{i,k}^a &= \hat{x}_k^a - \gamma S_i^a, \quad i = L+1, \dots, 2L \end{aligned} \tag{13}$$

Dengan γ adalah skala parameter $\gamma = \sqrt{L + \lambda}$ dan $\lambda = \alpha^2(L + \kappa) - L$, S_i^a adalah elemen baris ke- i dari S_k^a , sedangkan L adalah dimensi variabel tambahan.

Berdasarkan variabel keadaan diatas persamaan matriks sigma poin bisa dituliskan menjadi:

$$\chi_{i,k}^a = [\hat{x}_k^a \ \hat{x}_k^a + \gamma S_i^a \ \hat{x}_k^a - \gamma S_i^a] \tag{14}$$

Sedangkan titik-titik sigma untuk x_{k+1} diperoleh dari:

$$\chi_{i,k+1}^x = F(\chi_{i,k}^x, \chi_{i,k}^w) \tag{15}$$

Tahap Prediksi:

Dengan menggunakan titik-titik sigma persamaan (15) dan pembobot mean dan kovarian persamaan (5) diperoleh hasil estimasi:

$$\hat{x}_{k+1}^- = \sum_{i=0}^{2L} [W_i^m \chi_{i,k+1}^x] \tag{16}$$

Langkah berikutnya adalah menentukan faktor Cholesky prediksi ($S_{\hat{x}_{k+1}}^-$) dengan cara melakukan faktorisasi QR terlebih dulu dari persamaan:

$$S_{\hat{x}_{k+1}}^- = qr([\sqrt{W_1^e}(X_{1:2L,k+1}^x - \hat{x}_{k+1}^-) \quad \sqrt{Q_{k+1}}]) \quad (17)$$

Lalu menghitung Update Faktor Cholesky dari $S_{\hat{x}_{k+1}}^-$ dengan persamaan:

$$S_{\hat{x}_{k+1}}^- = cholupdate [S_{\hat{x}_{k+1}}^-, (X_{0,k+1}^x - \hat{x}_{k+1}^-), W_0^e] \quad (18)$$

Sigma poin dari model pengukuran, yaitu:

$$Z_{i,k+1} = H(X_{i,k+1}^x, X_{i,k+1}^v) \quad (19)$$

Dengan menggunakan persamaan bobot (5) dan persamaan (19) diperoleh persamaan estimasi dari model pengukuran:

$$\hat{z}_{k+1,k} = \sum_{i=0}^{2L} [W_i^m Z_{i,k+1}] \quad (20)$$

Tahap Koreksi

Menghitung faktor Cholesky $S_{\hat{z}_{k+1}}$ dengan melakukan faktorisasi QR dari persamaan:

$$S_{\hat{z}_{k+1}} = qr([\sqrt{W_1^e}(Z_{1:2L,k+1} - \hat{z}_{k+1}) \quad \sqrt{Q_k}]) \quad (21)$$

Lalu menghitung Update Faktor Cholesky $S_{\hat{z}_k}$ dari:

$$S_{\hat{z}_{k+1}} = cholupdate (S_{\hat{z}_{k+1}}, (Z_{0,k+1} - \hat{z}_{k+1}), W_0^e) \quad (22)$$

Kovarian error model proses dan pengukuran (cross covarian) diperoleh dari persamaan:

$$P_{x_{k+1}z_{k+1}} = \sum_{i=0}^{2L} [W_i^e [X_{i,k+1} - \hat{x}_{k+1}^-] [Z_{i,k+1} - \hat{z}_{k+1}^-]^T] \quad (23)$$

Kalman Gain diperoleh dari persamaan:

$$K_{k+1} = (P_{x_{k+1}z_{k+1}} / S_{\hat{z}_{k+1}}^T) / S_{\hat{x}_{k+1}} \quad (24)$$

Persamaan estimasi tahap koreksi adalah:

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1}^- + K_{k+1} (Z_{k+1} - \hat{z}_{k+1}^-) \quad (25)$$

Menghitung matrik U dengan persamaan:

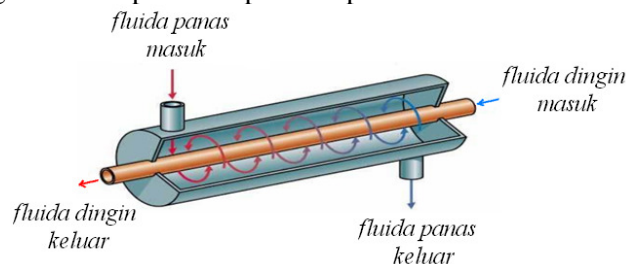
$$U = K_{k+1} S_{\hat{z}_{k+1}} \quad (21)$$

Menghitung faktor Cholesky tahap koreksi S_{k+1} dari persamaan:

$$S_{k+1} = cholupdate ([S_{k+1}^-, U, -1]) \quad (22)$$

MODEL / SISTEM PADA ALAT PENUKAR PANAS

Alat penukar panas atau dalam industri kimia populer dengan istilah *Heat Exchanger* (HE), merupakan suatu alat yang berfungsi untuk memindahkan panas antara dua fluida yang berbeda temperatur dan dipisahkan oleh suatu sekat pemisah. Perpindahan panas antara dua fluida dapat dipastikan mengakibatkan kerak[2]. Cukup banyak kerugian yang dapat ditimbulkan oleh kerak tersebut. Sehingga apabila terjadi perpindahan panas yang besar maka penting untuk dapat mendeteksi kerak yang terbentuk pada alat penukar panas.



Gambar 1. Alat Penukar Panas Tipe counter-flow

Dari gambar diatas persamaan / model yang mewakili alat penukar panas adalah[2]:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} T_{h,1} \\ T_{h,2} \\ T_{c,1} \\ T_{c,2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\left(1+\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{1}{\tau_h} & 0 & \frac{\alpha}{2\tau_h} & \frac{\alpha}{2\tau_h} \\ \left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{1}{\tau_h} & -\left(1+\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{1}{\tau_h} & \frac{\alpha}{2\tau_h} & 0 \\ \frac{\beta}{2\tau_c} & \frac{\beta}{2\tau_c} & -\left(1+\frac{\beta}{2}\right) \cdot \frac{1}{\tau_c} & 0 \\ \frac{\beta}{2\tau_c} & 0 & \left(1-\frac{\beta}{2}\right) \cdot \frac{1}{\tau_c} & -\left(1+\frac{\beta}{2}\right) \cdot \frac{1}{\tau_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{h,1} \\ T_{h,2} \\ T_{c,1} \\ T_{c,2} \end{bmatrix} \\
 + \begin{bmatrix} \left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{1}{\tau_h} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{2\tau_h} \\ 0 & \left(1-\frac{\beta}{2}\right) \cdot \frac{1}{\tau_c} \\ \frac{\beta}{2\tau_c} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{h,in} \\ T_{c,in} \end{bmatrix} & \quad (23)
 \end{aligned}$$

dengan $T_{h,1}$ adalah temperatur pada bagian panas 1($^{\circ}C$), $T_{h,2}$ adalah temperatur pada bagian panas 2 = temperatur keluar (outlet) dari fluida panas($^{\circ}C$), $T_{c,1}$ adalah temperatur pada bagian dingin 1($^{\circ}C$), $T_{c,2}$ adalah temperatur pada bagian dingin 2 = temperature keluar (outlet) dari fluida dingin($^{\circ}C$), $T_{h,in}$ adalah temperatur inlet (masuk) pada bagian panas($^{\circ}C$), $T_{c,in}$ adalah temperatur inlet (masuk) pada bagian dingin($^{\circ}C$).

Model tersebut memiliki 4 parameter yang dapat dinyatakan dalam bentuk berikut:

$$\alpha(t) = \frac{A_h U}{\dot{m}_h(t) c_h}, \tau_h(t) = \frac{M_h}{\dot{m}_h(t)}, \beta(t) = \frac{A_c U}{\dot{m}_c(t) c_c}, \tau_c(t) = \frac{M_c}{\dot{m}_c(t)},$$

dengan:

α dan β adalah jumlah unit perpindahan panas pada fluida panas dan dingin,

τ_h dan τ_c adalah waktu yang dibutuhkan perpindahan panas fluida panas dan dingin,

A_h dan A_c adalah area perpindahan panas pada fluida panas dan dingin (m^2),

U adalah koefisien perpindahan panas menyeluruh, diasumsikan U konstan, M adalah massa fluida,

c_h dan c_c adalah konstanta pada bagian panas dan bagian dingin.

Misalkan model state:

$$\frac{d}{dt} \underline{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{f}(\underline{\dot{m}}, \underline{x}, \underline{T}_{in}) \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}(t) = [\alpha \quad \beta \quad T_{h,1} \quad T_{h,2} \quad T_{c,1} \quad T_{c,2}]^T, \underline{\dot{m}} = [\dot{m}_h \quad \dot{m}_c]^T, \underline{T}_{in} = [T_{h,in} \quad T_{c,in}]^T$$

\dot{m}_h adalah laju alir massa pada bagian panas (kg/s), \dot{m}_c adalah laju alir massa pada bagian dingin (kg/s). Didapatkan persamaan model state sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ T_{h,1} \\ T_{h,2} \\ T_{c,1} \\ T_{c,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1+\alpha/2}{\tau_h}T_{h,1} + \frac{\alpha}{2\tau_h}T_{c,1} + \frac{\alpha}{2\tau_h}T_{c,2} + \frac{1-\alpha/2}{\tau_h}T_{h,in} \\ \frac{1-\alpha/2}{\tau_h}T_{h,1} - \frac{1+\alpha/2}{\tau_h}T_{h,2} + \frac{\alpha}{2\tau_h}T_{c,1} + \frac{\alpha}{2\tau_h}T_{c,in} \\ \frac{\beta}{2\tau_c}T_{h,1} + \frac{\beta}{2\tau_c}T_{h,2} - \frac{1+\beta/2}{\tau_c}T_{c,1} + \frac{1-\beta/2}{\tau_c}T_{c,in} \\ \frac{\beta}{2\tau_c}T_{h,1} + \frac{1-\beta/2}{\tau_c}T_{c,1} - \frac{1+\beta/2}{\tau_c}T_{c,2} + \frac{\beta}{2\tau_c}T_{h,in} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dari 6 parameter pada model di atas, variabel yang akan diestimasi pada makalah ini adalah α dan β , dengan tujuan untuk mengetahui jumlah unit perpindahan panas pada fluida panas dan dingin sebagai dasar deteksi adanya kerak. Dan dengan cara yang sama, dapat diestimasi pula nilai dari 4 parameter yang lain yaitu $T_{h,1}$, $T_{h,2}$, $T_{c,1}$ dan $T_{c,2}$ untuk mengetahui pola distribusi temperatur pada masing-masing bagian.

Model diatas disimulasikan dengan nilai awal yang definisikan sebagai berikut[2]:

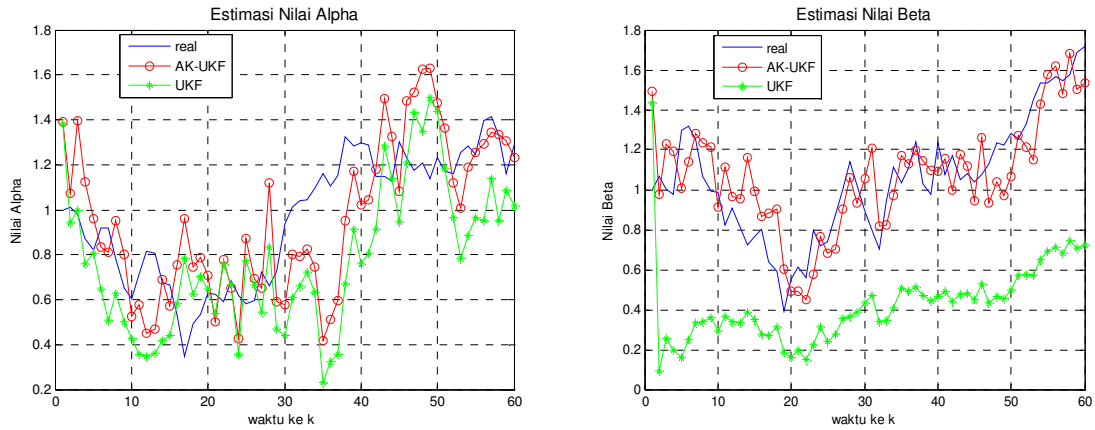
$$\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 70 \\ 60 \\ 35 \\ 70 \end{bmatrix}; \quad P(0) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Kemudian Q (kovarian noise pada sistem) dan R (kovarian noise pada pengukuran) dapat didefinisikan sebagai matriks diagonal berikut:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}; \quad R = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

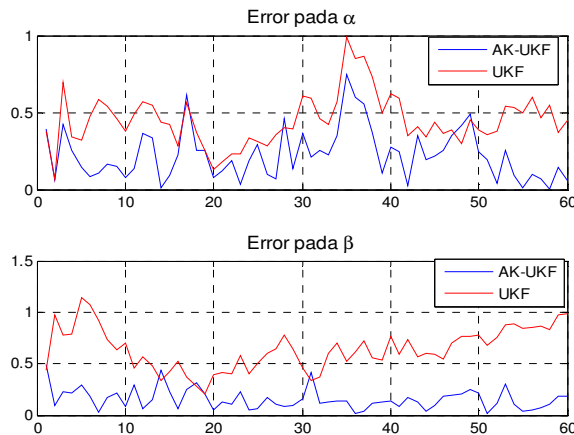
HASIL SIMULASI

Pada gambar 2 terlihat bahwa dengan 60 iterasi grafik estimasi α dengan metode AK-UKF relatif lebih mendekati grafik realnya dibandingkan dengan grafik dengan metode UKF standar. Kemudian grafik estimasi β dengan metode AK-UKF juga jauh lebih mendekati grafik realnya dibandingkan dengan grafik dengan metode UKF. Hal menunjukkan bahwa dari 60 kali iterasi estimasi α dan β dengan metode AK-UKF lebih akurat daripada metode UKF standar.



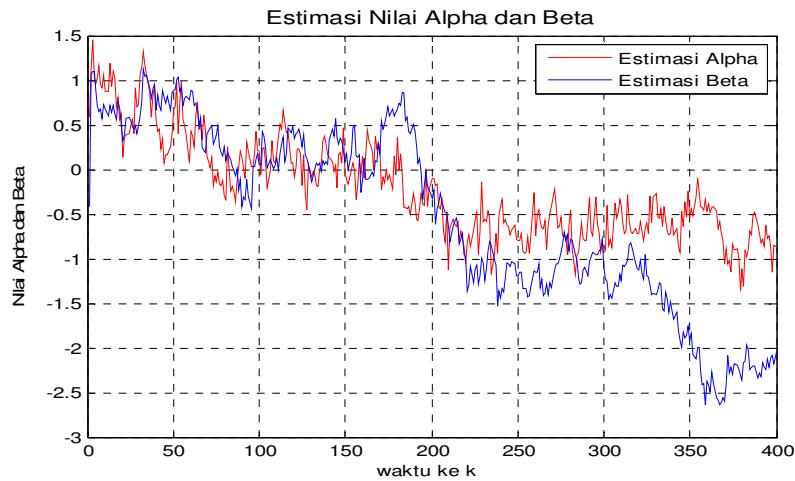
Gambar 2. Hasil Estimasi α dan β menggunakan UKF dan AK-UKF

Perbandingan nilai error kedua metode pada estimasi α dan β terlihat pada gambar 3, dapat dikatakan bahwa untuk waktu sampai ke-60 satuan waktu, nilai error estimasi α dan β dengan menggunakan metode AK-UKF cenderung stabil pada kisaran 0.01–0.75 relatif lebih kecil daripada dengan menggunakan metode UKF yang berada pada kisaran 0.25-1.00. Dapat dikatakan pula bahwa nilai estimasi α dan β dengan AK-UKF memiliki error maksimal kurang dari 0.75, yang relatif kecil dibanding dengan metode UKF standar yang mencapai 1.00. Artinya pada estimasi α dan β nilai error dengan metode UKF standar, jauh lebih besar dibandingkan dengan metode AK-UKF. Jadi, dapat disimpulkan bahwa metode AK-UKF lebih akurat daripada metode UKF standar.



Gambar 3. Error Estimasi α dan β dengan Metode UKF dan AK-UKF

Selanjutnya akan dilakukan estimasi sampai dengan 400 satuan waktu. Dengan waktu yang lebih lama, diprediksikan kerak telah timbul atau terakumulasi. Gambar 4 menunjukkan bahwa ketika memasuki waktu ke-200 telah terjadi penurunan drastis nilai estimasi dari α dan β yaitu dari kisaran $(-0.5)^{\circ}\text{C} - (-1.5)^{\circ}\text{C}$ sampai pada kisaran $(-1.3)^{\circ}\text{C} - (-2.6)^{\circ}\text{C}$. Maka secara teoritis ataupun fisis dapat dikatakan telah terdeteksi adanya kerak pada alat penukar panas.



Gambar 4. Estimasi dari α dan β sampai waktu ke -400

Untuk α pada waktu ke-75 satuan waktu, nilai dari estimasinya sudah terlihat mulai mengalami penurunan dibawah 0°C , dan secara terus menerus menurun. Mulai terjadi penurunan drastis setelah waktu ke-200 sampai pada suhu $(-1.4)^{\circ}\text{C}$. Sedangkan untuk β sampai pada waktu ke-75 satuan waktu nilai estimasinya terus mengalami penurunan sampai mendekati suhu $(-0.5)^{\circ}\text{C}$, meskipun kemudian sempat mengalami kenaikan suhu pada waktu ke-180, namun berikutnya setelah waktu ke-200 mengalami penurunan drastis sampai pada titik $(-2.6)^{\circ}\text{C}$. Hal ini menunjukkan adanya kerak pada alat tersebut ketika memasuki waktu ke-200.

Perbandingan waktu komputasi algoritma UKF dan AK-UKF pada masing-masing iterasi dapat dilihat pada Tabel 1 berikut:

Tabel.1 Perbandingan waktu komputasi algoritma UKF dan AK-UKF

| Jumlah iterasi | Waktu Komputasi (detik) | |
|----------------|-------------------------|---------------|
| | Metode UKF | Metode AK-UKF |
| $k=60$ | 2.3879 | 1.5740 |
| $k=100$ | 4.7372 | 2.9715 |
| $k=600$ | 10.5155 | 5.8328 |
| $k=1000$ | 35.4859 | 14.6148 |

Nilai Root Mean Square Error (RMSE) dari tiap-tiap variabel pada iterasi $k=60$, $k=100$ dan $k=400$ ditunjukkan pada Tabel 2.

Tabel 2 Perbandingan RMSE Algoritma UKF dan AK-UKF tiap variabel.

| Variabel keadaan | Root Mean Square Error (RMSE) | | | | | |
|------------------|-------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| | $k=60$ | | $k=100$ | | $k=400$ | |
| | UKF | AK- UKF | UKF | AK- UKF | UKF | AK- UKF |
| α | 2.5646 | 1.8775 | 3.5354 | 2.1375 | 10.4661 | 2.4596 |
| β | 3.7862 | 1.1688 | 4.9112 | 1.4220 | 37.4690 | 1.9113 |

KESIMPULAN DAN SARAN

Dari tabel perbandingan rata-rata error antara UKF standar dan AK-UKF dapat disimpulkan bahwa metode AK-UKF jauh lebih baik dan akurat daripada UKF standar. Sedangkan dari tabel perbandingan waktu komputasi yang digunakan dari kedua algoritma tersebut dapat disimpulkan pula bahwa metode AK-UKF membutuhkan waktu yang lebih sedikit daripada UKF standar. Jadi

secara keseluruhan dapat disimpulkan berarti metode AK-UKF lebih akurat dan efisien dibanding dengan metode UKF standar. Penulis menyarankan untuk mengkaji lebih lanjut penerapan metode AK-UKF pada model sistem yang taklinier dan berorde yang lebih tinggi.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Golub, H. G. dan Loan, V. F. Charles. (1996), "*Matrix Computations (Third Edition)*", The John Hopkins University Press, Baltimore and London.
- [2] Jonsson, G.R., Lalot, S., Palsson, O.P., dan Desmet, B. (2007). "*Use of Extended Kalman Filtering in Detecting Fouling in Heat Exchangers*". University of Iceland, France.
- [3] Lewis, L Frank. (1986), "*Optimal Estimation, With An Introduction To Stochastic Control Theory*", John Wiley and Sons, New York.
- [4] Rudi. (2006), "*Penerapan Extended Kalman Filter dan Unscented Kalman Filter pada Estimasi Variabel Keadaan Sistem dengan Model Pengukuran Taklinier*", Tesis Magister Jurusan Matematika FMIPA Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya.
- [5] Terejanu, Gabriel.A.(2003), "*Unscented Kalman Filter Tutorial*", Departement of Computer and Engineering University at Buffalo.
- [6] Wan, Eric dan Merwe, Rudolph V.D. (2001), "*The Square Root Unscented Kalman Filter For State and Parameter Estimation*". Oregon Graduate Institute of Science and Technology USA.

PERAN DIMENSI FRAKTAL DALAM RISET GEOMAGSA

John Maspupu

*Pussainsa LAPAN, Jl. Dr. Djundjuna No. 133 Bandung 40173,
Tlp. 0226012602 Pes. 106. Fax. 0226014998
E-mail: john_mspp@yahoo.com*

Abstrak

Makalah ini menjelaskan tentang konsep dimensi fraktal yang terkait dengan penelitian geomagnet dan magnet antariksa (*geomagsa*). Oleh karena itu fokus pembahasannya lebih diarahkan pada dimensi fraktal yang sering digunakan atau sangat berperan didalam proses penelitian geomagsa tersebut. Dimensi fraktal seperti inilah yang lebih dikenal sebagai “Dimensi Fraktal versi Acak” (*random fractal dimension*). Dengan demikian tujuan pembahasan makalah ini tiada lain adalah untuk menunjukkan peran dimensi fraktal acak dalam program riset geomagnet dan magnet antariksa. Selain itu dimensi fraktal acak ini juga dapat digunakan sebagai alat (*tool*) yang mampu menyelesaikan masalah-masalah fisis terkait keos di dalam penelitian magnet antariksa maupun geomagnet. Inilah salah satu kontribusi ilmiah yang sangat berarti untuk kondisi penelitian antariksa di masa kini ataupun masa mendatang.

Kata kunci: Dimensi Fraktal, versi Acak, Geomagsa.

PENDAHULUAN

Riset geomagnet dan magnet antariksa (*geomagsa*) ini merupakan penelitian aktivitas magnet yang terdiri dari aktivitas lokal maupun aktivitas global. Khusus untuk penelitian aktivitas magnet lokal, fokus risetnya pada aktivitas yang bersumber dari internal bumi yaitu, gempa bumi (*earthquake*). Aktivitas ini biasanya dikenal dengan sebutan *aktivitas geomagnet* yang juga dapat mengekstraksi gelombang-gelombang seismo-elektromagnet. Sedangkan riset aktivitas magnet global adalah suatu penelitian yang berkaitan dengan interaksi angin surya (*solar wind*) – magnetosfer – ionosfer (lihat Muhammad Musafar, L.K., 2010 dan Rostoker, G. et. al.,1987), seperti fenomena badai magnet ataupun fenomena badai-badai kecil lainnya dari magnetosfer (*substorms magnetospheric*) yang dapat dibaca pada makalah McPherron, R.L.,(1987). Aktivitas seperti ini biasanya dikenal sebagai aktivitas magnet antariksa. Selanjutnya pengertian tentang kapasitas dimensi dalam konsep fraktal, ternyata tidak selalu ada dan walaupun ada, tidak selalu bilangan bulat yang non negatif, itu berarti dapat berupa pecahan (lihat Maspupu, J., 2002). Kontruksi kapasitas dimensi ini pada dasarnya terdiri dari dua cara yaitu secara geometri atau secara aljabar.

Kapasitas dimensi secara geometri dapat diterapkan pada himpunan-himpunan yang struktur geometrinya cukup teratur. Sedangkan untuk himpunan data deret waktu (*time series data set*) biasanya digunakan dimensi fraktal acak yang telah dikonstruksi oleh *Burlaga* dan *Klein* (lihat *Burlaga, L.F. and Klein, L.W., 1986*) dan kemudian dimodifikasi oleh *Higuchi* (lihat *Higuchi T, 1988*). Selain itu publikasi tentang aplikasi dimensi fraktal yang terkait dengan aktivitas seismik dan gempa bumi dapat dibaca pada makalah *Gotoh, K. et. al., (2002)* dan (lihat *Ida, Y. and Hayakawa, M., 2006*). Inilah yang melatarbelakangi penentuan judul makalah tersebut di atas. Dengan demikian tujuan pembahasan makalah ini adalah menunjukkan atau memastikan peran dimensi fraktal acak ini di dalam program riset geomagnet dan magnet antariksa. Namun yang menjadi masalah adalah bagaimana caranya memastikan peran dimensi fraktal tersebut dalam penelitian ini? Dan selanjutnya dimensi fraktal seperti apa yang selalu atau sangat berperan di dalam proses penelitian geomagsa ini? Untuk itu perlu dipikirkan dan ditemukan solusi

pemecahannya, sehingga dapat memberikan kontribusi ilmiah yang signifikan untuk perkembangan penelitian geomagnet dan magnet antariksa di kemudian hari dalam taraf nasional maupun internasional.

METODOLOGI

Untuk menunjukkan atau memastikan peran dimensi fraktal versi acak ini di dalam program riset geomagnet dan magnet antariksa, perlu dilakukan langkah-langkah atau prosedur sebagai berikut:

- i) Survei internet atau perpustakaan di lembaga penelitian yang terkait dengan riset geomagnet dan magnet antariksa., misalnya : LAPAN Bandung atau LAPAN Jakarta.
- ii) Inventarisasi makalah-makalah yang terkait dengan geomagnet dan magnet antariksa dari para peneliti di dalam negeri maupun di luar negeri.
- iii) Mencermati keterkaitan atau penggunaan konsep fraktal yang terdapat di dalam pembahasan makalah-makalah tersebut.
- iv) Daftarkan konsep-konsep fraktal yang digunakan pada metodologi maupun dalam hasil pembahasan makalah-makalah tersebut (lihat Burlaga, L.F. and Klein, L.W., (1986) ; Gotoh, K. et. al., (2002) ; Hayakawa, M. et. al., (1999) ; Ida, Y. and Hayakawa, M., (2006) dan Maspupu, J.,(2009a), (2009b), (2009c), (2010)).
- v) Daftarkan bidang penelitian disertai fokus kegiatan penelitian yang terkait dengan butir iv).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Setelah melakukan survei internet atau perpustakaan diperoleh daftar judul-judul makalah yang terkait dengan program riset geomagnet dan magnet antariksa dari beberapa peneliti dalam negeri maupun luar negeri. Hasil survei ini dicantumkan dalam tabel berikut yaitu tabel 3.1 dan tabel 3.2.

Tabel 3.1. Judul makalah yang terkait dengan program riset geomagnet dan magnet antariksa dari peneliti dalam negeri.

| Nama peneliti dari dalam negeri. | Judul makalah terkait program riset geomagnet dan magnet antariksa. | Jenis dan tahun publikasi |
|----------------------------------|---|----------------------------------|
| Maspupu , J. | 1. Pendekatan dimensi fraktal untuk mengindikasi eksistensi anomali emisi sinyal <i>ULF</i> geomagnet. | <i>Prosiding SNASTI</i> , 2009. |
| Maspupu , J. | 2. Penentuan hubungan eksponen spektral dan dimensi fraktal sinyal <i>ULF</i> geomagnet. | <i>Prosiding SNASMAT</i> , 2009. |
| Maspupu , J. | 3. Estimasi eksponen spektral dan kemunculan derau kedip (<i>flicker noise</i>) pada sinyal <i>ULF</i> geomagnet. | <i>Prosiding SNASMAT</i> , 2009. |
| Maspupu , J. | 4. Multifraktal dan singularitas sinyal <i>ULF</i> geomagnet. | <i>Prosiding SNASMAT</i> , 2010. |

Tabel 3.2. Judul makalah yang terkait dengan program riset geomagnet dan magnet antariksa dari beberapa peneliti luar negeri.

| Nama peneliti dari luar negeri. | Judul makalah terkait program riset geomagnet dan magnet antariksa.. | Jenis dan tahun publikasi |
|---------------------------------|--|--|
| Burlaga, L.F. and Klein, L.W. | 1. Fractal structure of the interplanetary magnetic field. | <i>Journal Geophys. Res.</i> 91, 1986. |
| Gotoh, K. et. al. | 1. Fractal analysis of the ULF geomagnetic data obtained at Izu Peninsula, Japan in relation to the nearby earthquake swarm of June – August 2000. | <i>Journal NHESS</i> , 2002. |
| Hayakawa, et. al. | 1. Fractal Analysis of ULF geomagnetic data associated with the Guam earthquake on 08 August 1993. | <i>Geophys. Res. Lett.</i> , 26, 1999. |
| Ida, Y. and Hayakawa, M. | 1. Fractal analysis for the ULF data during the 1993 Guam earthquake to study prefracture criticality. | <i>Journal Nonlinear Processes in Geophysics</i> , 2006. |

Dengan menerapkan prosedur atau langkah-langkah metodologi yang tercantum pada butir iii) s/d butir v) , maka akan diperoleh hasil-hasil seperti yang dituangkan dalam tabel berikut di bawah ini.

Tabel 3.3. Kaitan beberapa bagian konsep fraktal dengan bidang dan fokus kegiatan program riset geomagnet dan magnet antariksa.

| No. | Konsep fraktal yang terkait | Bidang riset | Fokus kegiatan riset |
|-----|-----------------------------|--------------|---|
| 1. | Dimensi fraktal acak. | Geomagsa | Anomali emisi sinyal ULF dan kaitannya dengan prekursor gempa bumi. |
| 2. | Eksponen spektral. | Geomagsa | Deteksi badai magnet. Prekursor gempa bumi. |
| 3. | Analisis fraktal. | Geomagnet | Prekursor gempa bumi. |
| 4. | Struktur fraktal. | Magsa | Medan magnet antar planet. |
| 5. | Multifraktal. | Geomagsa | Singularitas sinyal ULF. |

KESIMPULAN DAN SARAN

Pada akhir uraian makalah ini dapat dikemukakan beberapa kesimpulan yang perlu diperhatikan :

- i). Untuk memahami pengertian tentang fraktal harus dikuasai konsep matematika yang terlibat dengan baik dan benar, begitu juga dasar-dasar pengetahuan pada masalah fisis antariksa yang terkait.
- ii). Penelitian geomagnet dan magnet antariksa tanpa penguasaan konsep fraktal tidak akan berkembang. Hal ini dikarenakan konsep fraktal diperlukan untuk mendeteksi badai magnet antariksa. Selain itu juga untuk menentukan prekursor gempa bumi.

Dari kesimpulan butir i) dan butir ii) jelas terlihat bahwa konsep fraktal mempunyai peranan penting pada pengembangan riset antariksa, khususnya dalam penelitian geomagnet dan magnet antariksa. Selanjutnya untuk mengantisipasi kesimpulan yang telah dikemukakan di atas, perlu disarankan beberapa hal berikut :

- i). Inventarisasi jumlah peneliti ilmiah di bidang matematika (terapan dan murni) pada lembaga-lembaga pemerintah yang terkait dengan penelitian antariksa di Indonesia.
- ii). Bentuk kelompok kerja bidang keahlian matematika fraktal di setiap kegiatan penelitian geomagnet dan magnet antariksa.
- iii). Pembentukan kelompok kerja tersebut diharapkan selektif mungkin dan merupakan koordinasi gabungan dari peneliti ilmiah pada lembaga pemerintah yang terkait.
- iv). Harus ada usaha pembinaan kesadaran akan kebutuhan konsep-konsep matematika realistik dikalangan peneliti ilmiah yang terkait dengan fokus penelitian tersebut.
- v). Harus ada usaha peningkatan kemampuan matematika bagi anggota muda peneliti di setiap kegiatan penelitian antariksa.
- vi). Selain itu harus terbuka kesempatan bagi peneliti ilmiah untuk mengikuti pendidikan lanjutan di luar negeri, serta melakukan penelitian lanjutan di berbagai lembaga terkemuka dalam bidang IPTEK.

Dengan mempertimbangkan saran-saran di atas, selanjutnya perlu direkomendasikan beberapa pernyataan berikut :

- a. Saran-saran pada butir i) s/d butir iv) direkomendasikan untuk kualitas kegiatan penelitian jangka pendek agar mencapai keberhasilan IPTEK.
- b. Saran pada butir v) direkomendasikan untuk kualitas kegiatan penelitian jangka panjang demi memantapkan dan mempertahankan keberhasilan IPTEK.
- c. Sedangkan saran pada butir vi) direkomendasikan untuk kualitas kegiatan IPTEK secara keseluruhan di Indonesia dalam jangka pendek maupun jangka panjang.

DAFTAR PUSTAKA

- Burlaga, L.F. and Klein, L.W., (1986). Fractal structure of the interplanetary magnetic field, *Journal Geophys. Res.*, 91, A1, pp. 347 – 350.
- Gotoh, K. et. al., (2002). Fractal analysis of the ULF geomagnetic data obtained at Izu Peninsula, Japan in relation to the nearby earthquake swarm of June – August 2000, *Journal NHESS*, pp. 229 – 236.
- Hayakawa, M. et. al., (1999). Fractal Analysis of ULF geomagnetic data associated with the Guam earthquake on 8 August 1993, *Geophys. Res. Lett.*, 26, 18, pp. 2797 – 2800.
- Higuchi T, (1988) Approach to an irregular time series on the basis of fractal theory, *Journal Physica D31*, pp. 277 – 283.
- Ida, Y. and Hayakawa, M., (2006). Fractal analysis for the ULF data during the 1993 Guam earthquake to study prefracture criticality, *Journal Nonlinear Processes in Geophysics*, pp. 409 – 412.
- Maspupu, J., (2002). Dimensi fraktal suatu himpunan, *Jurnal Natural FMIPA-Terakreditasi UNIBRAW*, hal. 29 – 36.
- Maspupu, J., (2009a). Pendekatan dimensi fraktal untuk mengindikasikan anomali emisi sinyal ULF geomagnet, *Prosiding Seminar Nasional Teknik Informatik STIKOM*, Surabaya, hal. 113-115.

- Maspupu, J., (2009b). Penentuan hubungan eksponen spektral dan dimensi fraktal *ULF* geomagnet, *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan pendidikan Matematika UNY*, Yogyakarta, hal. 1000-1009.
- Maspupu, J.,(2009c). Estimasi eksponen spektral dan kemunculan derau kedip (*flicker noise*) pada sinyal *ULF* geomagnet, *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan pendidikan Matematika UNY*, Yogyakarta, hal. 993-999.
- Maspupu, J.,(2010).Multifraktal dan singularitas sinyal *ULF* geomagnet, *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan pendidikan Matematika FKIP-UNS*, Surakarta, hal. 244-252.
- McPherron, R.L.,(1987). The role of substorms in the generation of magnetic storms, *AGU Geophys. Monogr.* 98, pp. 131-147.
- Muhammad Musafar, L.K., (2010). Bz-Component of Interplanetary magnetic field during large magnetic storms, *Prosiding Seminar Nasional Sains dan pendidikan Sains UKSW*, Salatiga, hal. 287-293.
- Rostoker, G. et. al.,(1987). The roles of direct input of energy from the solar wind and unloading of stored magnetotail energy in driven magnetospheric substorms, *Space Sci. Rev.* 46, pp. 93-111.

PREDIKSI BINTIK MATAHARI UNTUK SIKLUS 24 SECARA NUMERIK

John Maspupu

*Pussainsa LAPAN, Jl. Dr. Djundjungan No. 133 Bandung 40173,
Tlp. 0226012602 Pes. 106. Fax. 0226014998
Email: john_mspp@yahoo.com*

Abstrak

Makalah ini membahas suatu prediksi kondisi akhir atau minimum berikutnya dari bintik matahari untuk siklus 24. Teknik yang digunakan untuk memprediksi kondisi akhir bintik matahari tersebut adalah secara numerik yang melibatkan penggabungan konsep beda hingga (*finite difference*) dan model Xanthakis. Selain itu data yang digunakan untuk keperluan prediksi tersebut adalah data rata-rata bulanan bilangan bintik matahari selama 2 (dua) siklus matahari (mulai dari siklus 22 sampai siklus 23) yang bersumber dari SPD-LAPAN di Watukosek. Sedangkan tujuannya adalah untuk memperkirakan waktu tercapainya kondisi akhir dan bilangan bintik matahari (BBM) pada saat itu. Ternyata menurut hasil prediksi ini aktivitas bintik matahari terendah untuk siklus 24 diperkirakan terjadi pada bulan Juni 2023. Sedangkan minimum rata-rata bilangan bintik matahari pada saat itu diperkirakan sebesar 7,23. Dengan demikian kontribusi dari hasil prediksi ini adalah sebagai tambahan informasi yang terkait dengan penurunan aktivitas di matahari serta dampaknya pada lingkungan antariksa dan kondisi iklim di bumi.

Kata kunci: *Prediksi ; Bilangan Bintik Matahari ; Siklus ke-24.*

PENDAHULUAN

Dari hasil-hasil observasi matahari, telah ditemukan bahwa aktivitas di matahari setidaknya terdiri dari tiga jenis peristiwa. Ketiga fenomena aktivitas matahari ini antara lain dikenal dengan sebutan *flare*, lontaran masa korona atau *CME* (*coronal mass ejection*) dan bintik matahari (*sunspot*). *Flare* merupakan suatu fenomena ledakan di matahari sebagai akibat terbukanya salah satu kumparan medan magnet pada bagian matahari. Sedangkan *CME* merupakan fenomena pelontaran sebagian masa dari lapisan terluar matahari atau atmosfer matahari yang suhunya mencapai sekitar dua juta derajat Celcius (daerah korona) ke arah bumi. Kemudian bintik matahari adalah suatu peristiwa pemunculan bintik-bintik hitam di permukaan matahari. Daerah bintik matahari memiliki medan magnet yang sangat besar yaitu sekitar 1000 sampai 4000 Gauss.

Selain itu suhu di bintik matahari relatif lebih rendah dibandingkan dengan daerah lain di permukaan matahari. Kemunculan bintik matahari juga dapat mengindikasikan tingkat aktivitas matahari. Itu berarti jika jumlah bintik di permukaan matahari banyak maka aktivitas matahari pun tinggi. Sebaliknya jika jumlah bintik di permukaan matahari sedikit maka aktivitas matahari pun rendah.

Selanjutnya periode satu siklus matahari biasanya berkisar antara 9 sampai 15 tahun, namun rata-rata satu siklus matahari menurut hasil pengamatan adalah 11 tahun. Setiap siklus matahari yang terlihat pada perilaku kurva banyaknya bintik matahari (BBM) umumnya memiliki 3 kondisi bintik matahari yaitu kondisi awal bintik matahari (minimum), kondisi puncak bintik matahari (maksimum) dan kondisi akhir bintik matahari (minimum). Sedangkan waktu antara kondisi awal bintik matahari sampai kondisi puncak bintik matahari tidak selalu sama dengan waktu antara kondisi puncak bintik matahari sampai kondisi akhir bintik matahari. Aktivitas matahari pada saat kondisi awal dan akhir bintik matahari biasanya cenderung rendah, sebaliknya

pada saat kondisi puncak bintik matahari, aktivitasnya sangat tinggi. Berdasarkan perhitungan data-data pengamatan ternyata, matahari saat ini sedang menjalani siklus yang ke- 24 dan puncaknya diprediksi akan terjadi pada bulan Juni 2014 (lihat Maspupu J., 2010b). Oleh karena itu muncul pemikiran selanjutnya untuk memprediksi kondisi akhir bintik matahari selama siklus ke-24 dan inilah yang melatarbelakangi penentuan judul makalah tersebut di atas. Dengan demikian tujuan pembahasan makalah ini adalah memprediksi bilangan bintik matahari minimum pada saat kondisi akhir siklus ke-24. Namun yang menjadi masalah adalah bilamana terjadinya kondisi akhir dari siklus ke-24 ini? Dan berapa besar bilangan bintik matahari minimum pada saat itu? Untuk itu perlu disusun suatu metodologi yang melibatkan penggabungan konsep matematik secara numerik yaitu beda hingga (*finite difference*) dan model prediksi minimum Xanthakis. Selain itu, manfaat hasil prediksi ini adalah sebagai tambahan informasi yang terkait dengan penurunan aktivitas di matahari serta dampaknya pada lingkungan antariksa dan kondisi iklim di bumi.

METODE PENELITIAN

Data T_D (*time of descending*) yang digunakan dalam penelitian ini dihitung berdasarkan data-data olahan rata-rata bulanan bilangan bintik matahari selama 2 (dua) siklus matahari (mulai dari siklus 22 sampai siklus 23) yang bersumber dari SPD-LAPAN di Watukosek. Sedangkan metode yang digunakan dalam penelitian ini, menyangkut teknik numerik dari formulasi beda hingga (lihat Curtis F. G., 1980 dan Hoffman Joe D., 2001) yang dilanjutkan dengan model prediksi minimum dari Xanthakis (lihat Xanthakis J.,1965).

Selanjutnya tahapan kegiatan penelitian yang dilakukan ini dapat dijabarkan dalam beberapa langkah berikut :

- i).Kompilasi data rata-rata bulanan bilangan bintik matahari selama 2 (dua) siklus (siklus 22 s/d 23) dari SPD-LAPAN di Watukosek.
- ii).Seleksi tahun-tahun terjadi bilangan bintik matahari maksimum dan minimum (T_{Hmaks} & T_{Hmin}), juga besarnya rata-rata bulanan bilangan bintik matahari minimum (R_{min}) untuk siklus 22 dan siklus 23.
- iii).Hitung selang waktu kenaikan T_R (selang waktu antara min. sampai maks.) dan selang waktu penurunan T_D (selang waktu antara maks. sampai min. berikutnya) untuk siklus 22 dan siklus23.
- iv). Gunakan formulasi ekstrapolasi beda hingga (lihat Sastry S. S.,1979) untuk memprediksi T_D siklus 24 sebagai berikut,

$$T_D(N) = T_D(0) + p \frac{\Delta T_D(0)}{1!} + p(p-1) \frac{\Delta^2 T_D(0)}{2!} + \dots + p(p-1)\dots(p-n+1) \frac{\Delta^n T_D(0)}{n!}$$

dengan $p = \frac{N_n - N_0}{h}$ dan $h = N_n - N_{n-1} = \dots = N_1 - N_0$. Sedangkan galatnya

$$(error) \text{ dihitung dengan relasi } E(T_D) = p(p-1)\dots(p-n) \frac{\Delta^{n+1} T_D(0)}{(n+1)!}.$$

- v). Perkirakan T_{Hmin} untuk kondisi akhir siklus N , (dalam hal ini N = 22, 23, 24).
- vi). Gunakan model prediksi minimum dari Xanthakis (lihat Xanthakis J.,1965) untuk menentukan kondisi akhir rata-rata bulanan bilangan bintik matahari minimum yaitu, $\overline{R_{min.pred}} \propto \overline{R_{min.obs.}} \cos^2 \frac{\pi}{2T_D} t + g_2$ dengan ketentuan sebagai berikut:
 - a). $g_2 = -3l_R \sin \frac{\pi}{8} t$, untuk $T_D \geq 7,5$. b). $g_2 = -2l_R \sin \frac{\pi}{6} t$, untuk $6 \leq T_D < 7,5$.
 - c). $g_2 = -l_R \sin \frac{\pi}{5} t$, untuk $T_D < 6$.

Sedangkan $l_R = 6,3$ adalah konstanta estimasi berdasarkan kuadrat terkecil (*least square estimation*) dari data-data olahan observasi.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Metode numerik yang melibatkan penggabungan konsep beda hingga (*finite difference*) dan model Xanthakis ini telah digunakan untuk memprediksi minimum siklus-siklus lainnya ($N = 22, 23$). Hasil serta akurasinya dapat dilihat pada Tabel 3-5 dan Tabel 3-6. Selanjutnya pembahasan makalah ini mengkompilasikan data rata-rata bulanan bilangan bintik matahari selama 2 (dua) siklus, mulai dari siklus 22 sampai siklus 23 (tahun 1987 sampai tahun 2009) yang diperoleh dari SPD-LAPAN di Watukosek sesuai dengan langkah i) di bagian metodologi dan dapat dilihat pada Tabel 3-1.

Dari data rata-rata bulanan selama 2 (dua) siklus matahari ini diseleksi tahun-tahun minimum dan maksimum dari bilangan bintik matahari serta R_{\min} untuk kedua siklus ($N = 22, 23$), sesuai dengan langkah ii) di bagian metodologi. Kemudian kondisi awal tahun minimum bilangan bintik matahari untuk siklus 24 atau kondisi akhir tahun minimum bilangan bintik matahari untuk siklus 23, ditentukan berdasarkan kriteria minimum dari pendekatan spline kubik yaitu Agustus 2008 (lihat Maspupu J., 2010a). Sedangkan tahun maksimum bilangan bintik matahari untuk siklus 24 diprediksi secara numerik dengan menggunakan metode atau formulasi ekstrapolasi Newton-Gregory (lihat Maspupu J., 2010b). Semua hasil observasi dan perhitungan R_{\min} pada tahun minimum bilangan bintik matahari serta prediksi tahun maksimum bilangan bintik matahari untuk siklus 24, ini ditabulasikan dalam Tabel 3-2.

Tabel 3-1. Rata-rata bulanan bilangan bintik matahari SPD-LAPAN Watukosek

| No | BULAN | TAHUN | R(MEAN) | No | BULAN | TAHUN | R(MEAN) |
|----|-----------|-------|---------|----|-----------|-------|---------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | Januari | 1987 | 6.47 | 45 | September | | 116.98 |
| 2 | Februari | | 2.36 | 46 | Oktober | | 137.84 |
| 3 | Maret | | 11.4 | 47 | Nopember | | 129.02 |
| 4 | April | | 33.12 | 48 | Desember | | 136.01 |
| 5 | Mei | | 25.13 | 49 | Januari | 1991 | 159.29 |
| 6 | Juni | | 25.13 | 50 | Februari | | 193.2 |
| 7 | Juli | | 36.76 | 51 | Maret | | 199.17 |
| 8 | Agustus | | 34.97 | 52 | April | | 171.98 |
| 9 | September | | 44.90 | 53 | Mei | | 174.57 |
| 10 | Oktober | | 54.83 | 54 | Juni | | 192 |
| 11 | Nopember | | 31.74 | 55 | Juli | | 213.35 |
| 12 | Desember | | 18.83 | 56 | Agustus | | 206.22 |
| 13 | Januari | 1988 | 38.34 | 57 | September | | 159.58 |
| 14 | Februari | | 21.29 | 58 | Oktober | | 194.47 |
| 15 | Maret | | 44.34 | 59 | Nopember | | 139.78 |
| 16 | April | | 61.45 | 60 | Desember | | 228.59 |
| 17 | Mei | | 35.64 | 61 | Januari | 1992 | 245.84 |
| 18 | Juni | | 73.89 | 62 | Februari | | 242.54 |
| 19 | Juli | | 74.86 | 63 | Maret | | 293.16 |
| 20 | Agustus | | 81.72 | 64 | April | | 177.44 |
| 21 | September | | 90.23 | 65 | Mei | | 161.56 |
| 22 | Oktober | | 111.93 | 66 | Juni | | 143.42 |
| 23 | Nopember | | 105.76 | 67 | Juli | | 196.72 |
| 24 | Desember | | 133.34 | 68 | Agustus | | 160.7 |

John Maspupu / Prediksi Bintang Matahari

| | | | | | | | |
|----|----------------|-------------|--------|----|----------------|-------------|--------|
| 25 | Januari | 1989 | 124.96 | 69 | September | | 101.17 |
| 26 | Februari | | 126.26 | 70 | Oktober | | 126.77 |
| 27 | Maret | | 101.09 | 71 | Nopember | | 110.88 |
| 28 | April | | 88.08 | 72 | Desember | | 102.85 |
| 29 | Mei | | 105.54 | 73 | Januari | 1993 | 86.14 |
| 30 | Juni | | 142.12 | 74 | Februari | | 124.69 |
| 31 | Juli | | 86.25 | 75 | Maret | | 105.73 |
| 32 | Agustus | | 118.37 | 76 | April | | 106.08 |
| 33 | September | | 121.39 | 77 | Mei | | 88.75 |
| 34 | Oktober | | 108.3 | 78 | Juni | | 72.77 |
| 35 | Nopember | | 123.44 | 79 | Juli | | 78.22 |
| 36 | Desember | | 99.89 | 80 | Agustus | | 50.54 |
| 37 | Januari | 1990 | 127.92 | 81 | September | | 27.19 |
| 38 | Februari | | 96.84 | 82 | Oktober | | 57.99 |
| 39 | Maret | | 121.13 | 83 | Nopember | | 37.56 |
| 40 | April | | 123.67 | 84 | Desember | | 51.1 |
| 41 | Mei | | 99.57 | 85 | Januari | 1994 | 68.82 |
| 42 | Juni | | 99.41 | 86 | Februari | | 36.06 |
| 43 | Juli | | 141.57 | 87 | Maret | | 31.28 |
| 44 | Agustus | | 173.17 | 88 | April | | 20.9 |

| | | | | | | | |
|-----|----------------|-------------|-------|-----|----------------|-------------|--------|
| 89 | Mei | | 21.86 | 137 | Mei | | 44.21 |
| 90 | Juni | | 28.41 | 138 | Juni | | 54.36 |
| 91 | Juli | | 35.15 | 139 | Juli | | 60.3 |
| 92 | Agustus | | 23.23 | 140 | Agustus | | 73.93 |
| 93 | September | | 26.1 | 141 | September | | 83.35 |
| 94 | Oktober | | 43.1 | 142 | Oktober | | 42.19 |
| 95 | Nopember | | 18.33 | 143 | Nopember | | 55.79 |
| 96 | Desember | | 23.88 | 144 | Desember | | 75.29 |
| 97 | Januari | 1995 | 19.16 | 145 | Januari | 1999 | 49.05 |
| 98 | Februari | | 26.68 | 146 | Februari | | 61.8 |
| 99 | Maret | | 27.4 | 147 | Maret | | 64.15 |
| 100 | April | | 22.06 | 148 | April | | 62.75 |
| 101 | Mei | | 16.89 | 149 | Mei | | 100.66 |
| 102 | Juni | | 16.87 | 150 | Juni | | 139.98 |
| 103 | Juli | | 15.72 | 151 | Juli | | 107.25 |
| 104 | Agustus | | 15.78 | 152 | Agustus | | 93.7 |
| 105 | September | | 12.6 | 153 | September | | 69.6 |
| 106 | Oktober | | 17.88 | 154 | Oktober | | 102.34 |
| 107 | Nopember | | 10.25 | 155 | Nopember | | 127.94 |
| 108 | Desember | | 8.07 | 156 | Desember | | 71.88 |
| 109 | Januari | 1996 | 9.18 | 157 | Januari | 2000 | 96.58 |
| 110 | Februari | | 4.6 | 158 | Februari | | 99.43 |
| 111 | Maret | | 8.69 | 159 | Maret | | 143.15 |
| 112 | April | | 4.68 | 160 | April | | 125.47 |
| 113 | Mei | | 6.1 | 161 | Mei | | 114.36 |
| 114 | Juni | | 9.81 | 162 | Juni | | 128.29 |
| 115 | Juli | | 7.68 | 163 | Juli | | 174.38 |
| 116 | Agustus | | 14.96 | 164 | Agustus | | 116.44 |
| 117 | September | | 1.93 | 165 | September | | 112.51 |

*Prosiding Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA,
Fakultas MIPA, Universitas Negeri Yogyakarta, 14 Mei 2011*

| | | | | | | | |
|-----|----------------|-------------|-------|-----|----------------|-------------|--------|
| 118 | Oktober | | 0.23 | 166 | Oktober | | 87.74 |
| 119 | Nopember | | 14.63 | 167 | Nopember | | 94.93 |
| 120 | Desember | | 7.44 | 168 | Desember | | 95.82 |
| 121 | Januari | 1997 | 3.23 | 169 | Januari | 2001 | 91.98 |
| 122 | Februari | | 7.97 | 170 | Februari | | 73.25 |
| 123 | Maret | | 7.22 | 171 | Maret | | 109.04 |
| 124 | April | | 13.36 | 172 | April | | 117.62 |
| 125 | Mei | | 17.57 | 173 | Mei | | 100.26 |
| 126 | Juni | | 13.12 | 174 | Juni | | 142.06 |
| 127 | Juli | | 8.39 | 175 | Juli | | 79.4 |
| 128 | Agustus | | 21.05 | 176 | Agustus | | 117.71 |
| 129 | September | | 38.8 | 177 | September | | 167.23 |
| 130 | Oktober | | 18.82 | 178 | Oktober | | 121.75 |
| 131 | Nopember | | 32.78 | 179 | Nopember | | 100.73 |
| 132 | Desember | | 31.31 | 180 | Desember | | 141.38 |
| 133 | Januari | 1998 | 28.92 | 181 | Januari | 2002 | 116.96 |
| 134 | Februari | | 30.86 | 182 | Februari | | 109.85 |
| 135 | Maret | | 49.76 | 183 | Maret | | 86.4 |
| 136 | April | | 44.26 | 184 | April | | 123.49 |

| | | | | | | | |
|-----|----------------|-------------|--------|-----|----------------|-------------|-------|
| 185 | Mei | | 124.63 | 234 | Mei | | 21.22 |
| 186 | Juni | | 82.28 | 235 | Juni | | 13.06 |
| 187 | Juli | | 105.46 | 236 | Juli | | 11.46 |
| 188 | Agustus | | 106.44 | 237 | Agustus | | 10.4 |
| 189 | September | | 111.32 | 238 | September | | 13.23 |
| 190 | Oktober | | 89.41 | 239 | Oktober | | 8.11 |
| 191 | Nopember | | 80.5 | 240 | Nopember | | 17.72 |
| 192 | Desember | | 85.49 | 241 | Desember | | 11.12 |
| 193 | Januari | 2003 | 78.05 | 242 | Januari | 2007 | 15.56 |
| 194 | Februari | | 45.27 | 243 | Februari | | 9.63 |
| 195 | Maret | | 59.22 | 244 | Maret | | 3.98 |
| 196 | April | | 58.36 | 245 | April | | 2.97 |
| 197 | Mei | | 53.66 | 246 | Mei | | 9.38 |
| 198 | Juni | | 71.2 | 247 | Juni | | 10.34 |
| 199 | Juli | | 73.99 | 248 | Juli | | 8.59 |
| 200 | Agustus | | 63.63 | 249 | Agustus | | 5.01 |
| 201 | September | | 41.68 | 250 | September | | 2.04 |
| 203 | Oktober | | 58.26 | 251 | Oktober | | 0.83 |
| 204 | Nopember | | 47.8 | 252 | Nopember | | 0.28 |
| 205 | Desember | | 36.64 | 253 | Desember | | 10.72 |
| 206 | Januari | 2004 | 33.04 | 254 | Januari | 2008 | 0.78 |
| 207 | Februari | | 37.81 | 255 | Februari | | 1.02 |
| 208 | Maret | | 41.52 | 256 | Maret | | 7.23 |
| 209 | April | | 36.48 | 257 | April | | 1.92 |
| 210 | Mei | | 38.81 | 258 | Mei | | 1.96 |
| 211 | Juni | | 42.89 | 259 | Juni | | 1.66 |
| 212 | Juli | | 53.04 | 260 | Juli | | 0 |
| 213 | Agustus | | 42.07 | 261 | Agustus | | 0 |
| 214 | September | | 26.35 | 262 | September | | 0.29 |
| 215 | Oktober | | 41 | 263 | Oktober | | 1.66 |

| | | | | | | | |
|-----|----------------|-------------|-------|-----|----------------|-------------|-------|
| 216 | Nopember | | 38.73 | 264 | Nopember | | 3.14 |
| 217 | Desember | | 14.57 | 265 | Desember | | 0 |
| 218 | Januari | 2005 | 26.61 | 266 | Januari | 2009 | 0 |
| 219 | Februari | | 26.28 | 267 | Februari | | 0.27 |
| 220 | Maret | | 22.87 | 268 | Maret | | 0.8 |
| 221 | April | | 22.72 | 269 | April | | 0 |
| 222 | Mei | | 38.16 | 270 | Mei | | 0.71 |
| 223 | Juni | | 34.32 | 271 | Juni | | 3.08 |
| 224 | Juli | | 36.61 | 272 | Juli | | 3.42 |
| 225 | Agustus | | 35.44 | 273 | Agustus | | 0 |
| 226 | September | | 21.47 | 274 | September | | 3.52 |
| 227 | Oktober | | 4.5 | 275 | Oktober | | 4.23 |
| 228 | Nopember | | 12.93 | 276 | Nopember | | 2.88 |
| 229 | Desember | | 33.2 | 277 | Desember | | 9.15 |
| 230 | Januari | 2006 | 12.22 | 278 | Januari | 2010 | 12.06 |
| 231 | Februari | | 3.47 | | | | |
| 232 | Maret | | 10.47 | | | | |
| 233 | April | | 29.33 | | | | |

Tabel 3-2. Hasil observasi dan perhitungan $\overline{R_{\min}}$ pada kondisi akhir tahun-tahun minimum dan maksimum BBM untuk siklus N = 22, 23, 24.

| Siklus ke- N | T_R (time of rise) | T_D (time of desc.) |
|--------------|----------------------|-----------------------|
| 22 | 4.50 | 4.58 |
| 23 | 3.75 | 8.08 |

Catatan : Data dengan notasi *) adalah hasil prediksi (lihat Maspupu J., 2010b).

1996 – 10 artinya tahun 1996 bulan ke- 10 (bulan Oktober), begitu juga 2008 – 8 artinya tahun 2008 bulan ke- 8 (bulan Agustus) dan seterusnya.

Dari hasil Tabel 3-2., kemudian dihitung T_R (selang waktu antara min. sampai maks.) dan T_D (selang waktu antara maks. sampai min. berikutnya) untuk siklus N = 22, 23 sesuai dengan langkah ii) di bagian metodologi. Hasil perhitungan ini telah ditabulasikan dalam Tabel 3-3.

Tabel 3-3. Hasil perhitungan T_R (selang waktu antara min. s/d maks.) dan T_D (selang waktu antara maks. sampai min. berikutnya) pada BBM untuk siklus N = 22, 23.

| Siklus ke- N | Kondisi akhir Tahun Minimum | Tahun Maksimum | Kondisi akhir $\overline{R_{\min}}$ obs. |
|--------------|-----------------------------|----------------|--|
| 22 | 1996 - 10 | 1992 - 3 | 0.23 |
| 23 | 2008 - 8 | 2000 - 7 | 0.0 |
| 24 | ? | 2014 - 6 * | ? |

Kemudian lakukan prediksi T_D untuk siklus 22, 23 dan 24 dengan menerapkan langkah iv) dari bagian metodologi ini pada hasil-hasil di Tabel 3-3. Hasil penerapannya dapat dilihat pada tabel di bawah ini yaitu Tabel 3- 4.

Tabel 3-4. Hasil perhitungan T_D ($T_{DHit.}$) dan prediksi T_D ($T_{DPred.}$) untuk N = 22, 23, 24.

| Siklus ke-N | $T_{DHit.}$ | $T_{DPred.}$ |
|-------------|-------------|--------------|
| 22 | 4.58 | 5.7 |
| 23 | 8.08 | 5.3 |
| 24 | ? | 9.07 |

Nilai-nilai prediksi T_D atau $T_{DPred.}$ dari tabel 3-4 di atas ini, selanjutnya digunakan untuk memperkirakan tahun terjadinya bilangan bintik matahari minimum ($T_{Hminpred.}$). Hasil-hasil penerapan langkah v) di bagian metodologi ini dapat dilihat pada Tabel 3-5.

Tabel 3-5. Hasil observasi kondisi akhir T_{Hmin} dan prediksi T_{Hmin} selama N = 22, 23, 24.

| Siklus ke- N | Kondisi akhir $T_{Hmin obs.}$ | Kondisi akhir $T_{Hmin pred.}$ | % Galat (E_p) |
|--------------|----------------------------------|-----------------------------------|-------------------|
| 22 | 1996 - 10 | 1997 - 11 | 24.5 |
| 23 | 2008 - 8 | 2005 - 11 | 33.66 |
| 24 | ? | 2023 - 6 | 32.74 |

Kemudian untuk prediksi rata-rata bulanan R_{min} selama N = 22, 23, 24, dapat menggunakan model Xanthakis seperti pada langkah vi) di bagian metodologi. Sedangkan hasil perhitungan prediksi tersebut di atas telah dicantumkan dalam Tabel 3- 6.

Tabel 3-6. Hasil observasi kondisi akhir rata-rata bulanan R_{min} dan prediksi rata-rata bulanan R_{min} serta rata-rata bulanan R_{maks} selama N = 22, 23, 24.

| Siklus ke- N | Kondisi akhir $\overline{R_{min obs.}}$ | $\overline{R_{maks obs.}}$ | Kondisi akhir $\overline{R_{min pred.}}$ | % Galat (E_p) |
|--------------|--|----------------------------|---|-------------------|
| 22 | 0.23 | 293.16 | 3.70 | 1.184 |
| 23 | 0.0 | 174.38 | 0.01 | 0.006 |
| 24 | ? | 85.96 * | 7.23 | |

Catatan : Data dengan notasi *) adalah hasil prediksi (lihat Maspupu J., 2010b).

Hasil prediksi rata-rata R_{min} atau $\overline{R_{min pred.}}$ untuk kondisi akhir siklus 24 atau kondisi awal siklus 25 adalah sebesar **7,23** unit dan ini dikategorikan pada kelompok I (*Group I*) dari siklus-siklus bintik matahari (lihat Setiahadhi B., et.al., 1996).

KESIMPULAN

Dari hasil pembahasan makalah ini, ternyata aktivitas bintik matahari terkecil untuk kondisi akhir siklus 24 atau kondisi awal siklus 25 diperkirakan terjadi pada bulan **Juni 2023** dengan galat (*error*) metodenya sebesar **32,74 %** (lihat Tabel 3-5). Sedangkan minimum rata-rata bilangan bintik matahari pada saat itu diperkirakan sebesar **7,23** dengan galat (*error*) yang bervariasi untuk setiap siklus (lihat Tabel 3-6). Dari hasil-hasil prediksi siklus matahari ke-24 yang dimulai dengan kondisi awal minimum pada bulan Agustus 2008 (lihat Maspupu J., 2010a), kemudian kondisi puncak maksimum di bulan Juni 2014 (lihat Maspupu J., 2010b) dan kondisi akhir minimum berikutnya pada bulan Juni 2023, maka dapat diperkirakan bahwa panjangnya siklus matahari ke-24 sekitar

14,8 tahun. Oleh karena itu disarankan agar hasil prediksi kondisi akhir minimum siklus 24 ini perlu dibandingkan dengan hasil prediksi dari peneliti-peneliti lainnya untuk diuji secara teoritis, sehingga nantinya dapat diketahui hasil prediksi mana yang mendekati kondisi idialnya. Selain itu hasil-hasil prediksi ini harus dikonfirmasi dengan hasil-hasil observasi matahari di masa mendatang untuk melihat seberapa besar fakta penyimpangannya.

UCAPAN TERIMAKASIH

Secara khusus saya ucapkan terima kasih kepada Ka. SPD Watukosek yaitu Bapak Bambang Setiahadhi, drs. MSc. beserta seluruh stafnya yang telah memberikan data rata-rata bilangan bintik matahari selama 2 (dua) siklus untuk digunakan dalam penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

Curtis F. G., 1980. *Applied Numerical Analysis*, Addison Wesley Publishing Co., New-York.

Hoffman Joe D., 2001. *Numerical Methods for Engineers and Scientists*, Marcel Dekker Inc., New-York.

Maspupu J., 2010a. "Penyelidikan Bilangan Bintik Matahari Minimum dengan Pendekatan Spline Kubik", *Prosiding Seminar Nasional Matematika*, FMIPA- UNY, Yogyakarta, hal.237-242.

Maspupu J., 2010b. "Ekstrapolasi Puncak Kurva Bilangan Bintik Matahari pada Siklus 24", *Prosiding Seminar Nasional Matematika*, FMIPA – UKSW, Salatiga, hal. 735-741.

Sastry S. S., 1979. *Method of Numerical Analysis*, Prentice Hall of India, New-Delhi.

Setiahadhi B., et.al., 1996. "Prediction of 22nd and 23rd Sunspot Activity Cycle", *Solar-Terrestrial Predictions-V: Proceedings of Workshop at Hitachi, Japan*, pp. 89-92.

Xanthakis J.,1965. "The Different Indices of Solar Activity and the Time of Rise", *Proceedings of NATO Advanced Study Institute on Solar Physics*, Athens, Greece, pp. 157 -227.

KOMPARASI HASIL KLASIFIKASI PENYAKIT DIABETES MELLITUS MENGUNAKAN JARINGAN SYARAF TIRUAN *BACKPROPAGATION* DAN *LEARNING VECTOR QUANTIZATION*

Agus Nurkhozin¹, Mohammad Isa Irawan², Imam Mukhlas²

¹Mahasiswa Pascasarjana Matematika FMIPA ITS Surabaya

²Dosen Pascasarjana Jurusan FMIPA ITS Surabaya

Email: akhozin73@gmail.com

Abstrak

Diabetes Mellitus merupakan penyakit yang ditandai dengan kenaikan kadar gula dalam darah. Penyebab penyakit ini biasanya disebabkan destruksi sel beta, kebiasaan pola makan, dan olah raga yang kurang teratur. Menurut asuhan keperawatan diabetes mellitus dibedakan dalam empat klasifikasi, tetapi dalam penelitian ini data penyakit diabetes mellitus diklasifikasikan menurut dr. Eko Yulianto diklasifikasikan dalam dua kelas. Jaringan syaraf tiruan merupakan sistem pemroses informasi seperti pemroses pada otak manusia. Jaringan syaraf tiruan telah banyak digunakan dalam banyak aplikasi, salah satunya untuk klasifikasi. Dalam penelitian ini menampilkan dua metode klasifikasi yaitu metode *Backpropagation* dan *Learning Vector Quantization* untuk permasalahan klasifikasi penyakit diabetes mellitus. Kesimpulan yang didapat bahwa dalam klasifikasi penyakit diabetes mellitus metode *Backpropagation* memberikan kinerja lebih baik dibandingkan LVQ

Kata kunci: Jaringan Syaraf Tiruan, *Backpropagation*, *Learning Vector Quantization*, *Diabetes Mellitus*

PENDAHULUAN

Diabetes mellitus merupakan sua-tu keadaan hiperglikemik kronis dan perlahan namun pasti akan merusak jaringan dalam tubuh jika tidak ditangani secara tepat dan serius. Penyakit ini akan mengakibatkan berbagai macam komplikasi kronis terjadi pada mata, ginjal, saraf, dan pembuluh darah. Indonesia menempati urutan ke-4 dengan jumlah penderita diabetes mellitus terbanyak di dunia setelah India, Cina, dan Amerika Serikat.

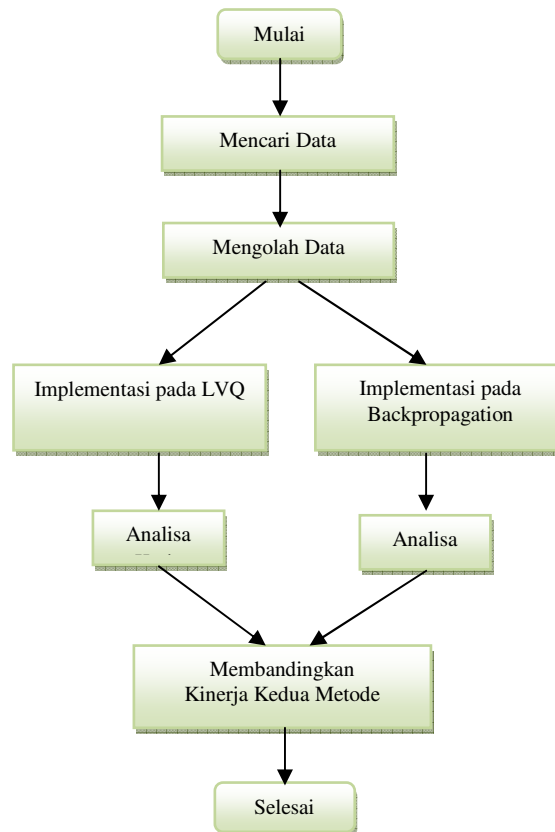
Dalam menyelesaikan Masalah yang kompleks memerlukan metode cepat, tepat dan akurat. Salah satunya adalah Jaringan Syaraf Tiruan. Jaringan ini telah menjadi obyek penelitian yang menarik dan banyak digunakan untuk menyelesaikan permasalahan pada beberapa bidang kehidupan, contohnya klasifikasi. Dalam penelitian ini menggunakan metode jaringan syaraf tiruan *backpropagation* dan *Learning Vector Quantization (LVQ)* dalam kaitannya kasifikasi penyakit diabetes, karena metode ini terkenal bagus, cepat, dan akurat yang mampu melakukan pengelompokan data berdasarkan sifat atribut yang dimiliki oleh sekelompok besar data. Penelitian ini bertujuan untuk mengkomparasi hasil klasifikasi menggunakan Jaringan syaraf tiruan *Backpropagation* dan LVQ dalam meng-klasifikasikan penyakit diabetes mellitus ?

METODE PENELITIAN

Prosedur kerja pada penelitian ini dilakukan dalam beberapa tahapan penelitian. Tahap 1 adalah mengidentifikasi permasalahan dengan disertai pencarian topik yang akan diuji, mencari literature yang sesuai dengan permasalahan penelitian, dan proses pembuatan proposal penelitian tesis. Tahap 2 adalah Mengambil data di mana data yang diambil adalah data pasien pengidap penyakit diabetes mellitus. Data diambil dari RSUD Lamongan Jalan Kusuma Bangsa No. 7 Lamongan. Data yang didapat adalah data pasien dari Bulan Januari sampai Desember 2010 yang tercatat sebanyak 1.386 pasien, dan diambil sampel sebanyak 431 pasien. Selanjutnya data yang

diperoleh didiskusikan dengan dokter spesialis penyakit dalam yaitu dr. Eko Yulianto, Spa. Di mana data tersebut diklasifikasikan dalam dua kelas. Tahap 3 mengimplementasikan pada metode klasifikasi yang didahului oleh pengolahan data sesuai kebutuhan jaringan, yang dijadikan inputan pada saat ditraining dan ditesting. Metode klasifikasi yang penulis gunakan adalah metode *Backpropagation* dan *Learning Vector Quantization (LVQ)* dengan algoritma yang berbeda. Setelah data ditraining dan ditesting dengan menggunakan metode *Backpropagation* dan LVQ hasilnya dianalisis keakurasiannya. Selanjutnya ditarik kesimpulan metode mana dari kedua metode tersebut yang lebih baik.

Diagram Proses Penelitian



Gambar 1 : Denah alur penelitian

PEMBAHASAN

Data yang diperoleh kemudian peneliti bagi menjadi enam variable input dan target sebanyak dua kelas. Variabel input dinormalisasikan dan diubah menjadi bentuk biner sesuai kebutuhan jaringan. Menurut dr. Eko Yulianto, Spa data dijabarkan sebagai berikut :

1. Kelas 1. Usia muda termasuk anak-anak (<40 tahun), badan kurus, terjadi destruksi sel beta, rata-rata tidak ada riwayat
2. Kelas 2. Usia Dewasa dan Usia Lanjut (≥ 40 tahun), badan kurus, gemuk dan obesitas, ada riwayat dan terjadi diabetagonik

Sebagai Variabel input :

x_1 = Usia x_2 = Berat badan x_3 = Tinggi badan x_4 = Riwayat keluarga

x_5 = Terdapat gangguan destruksi sel beta x_6 = Pengaruh pola makan

Sedangkan sebagai unit output atau target adalah :

t_1 = Kelas 1 t_2 = Kelas 2

Untuk x_4 sampai x_6 data sudah berbentuk biner, sedangkan untuk x_1 sampai x_3 data dinormalisasi dengan rumus :

$$x_i = \frac{x_{data} - x_{min}}{x_{max} - x_{min}}$$

kemudian data diubah menjadi bentuk biner [0,1] dengan ketentuan sebagai berikut :

$$x_i(\text{biner}) = \begin{cases} 0 & \text{jika data } x_i \text{ bernilai } \leq 0,5 \\ 1 & \text{jika data } x_i \text{ bernilai } > 0,5 \end{cases}, \text{ untuk } i = 1, 2, 3$$

Untuk data output atau target :

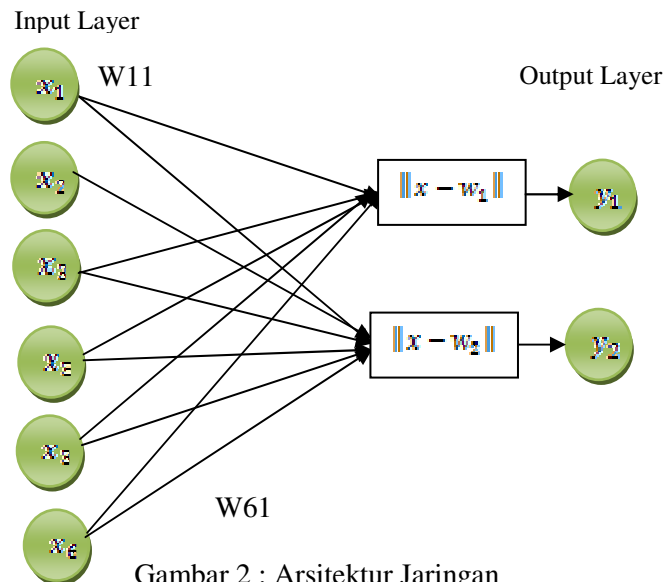
$$t_1 = 1 \text{ dan } t_2 = 2$$

Implementasi pada Jaringan

a. Jaringan LVQ

LVQ adalah jaringan *single layer* yang terdiri dari dua lapisan yaitu lapisan input dan output. Lapisan input terdiri dari enam unit input dan unit output terdiri dari dua unit output yakni diambil dari banyaknya kelas klasifikasi.

Arsitektur jaringan LVQ :



Gambar 2 : Arsitektur Jaringan LVQ Permasalahan Diabetes Mellitus

Deskripsi dari gambar di atas adalah sebagai berikut :

x adalah vektor training sebanyak (x_1, x_2, \dots, x_6)

T adalah target untuk vektor training sebanyak 2 target yaitu t_1, t_2 yang ditentukan dalam dua kelas.

w_j adalah vektor bobot untuk unit output ke-j yaitu $(w_{1j}, w_{2j}, \dots, w_{6j})$

C_j adalah kelas hasil komputasi oleh unit output ke-j, terdiri dari dua kelas yaitu t_1, t_2

$\|x - w_j\|$ adalah jarak Euclidean antara vektor input dengan vektor bobot untuk unit output ke-j.

Algoritma LVQ :

Langkah 0 inialisasi vektor referensi, inialisasi learning rate $\alpha(0)$

Langkah 1

Bila kondisi STOP belum terpenuhi, kerjakan langkah 2-6

Langkah 2

Untuk setiap vector input training x , kerjakan langkah 3- 4

Langkah 3

Dapatkan nilai J sedemikian hingga $\|x - w_j\|$ minimum

Langkah 4

Update w_j sebagai berikut :

Jika $C_j = T$ maka

$$w_j(\text{baru}) = w_j(\text{lama}) + \alpha[x - w_j];$$

Jika $C_j \neq T$ maka

$$w_j(\text{baru}) = w_j(\text{lama}) - \alpha[x - w_j];$$

Langkah 5

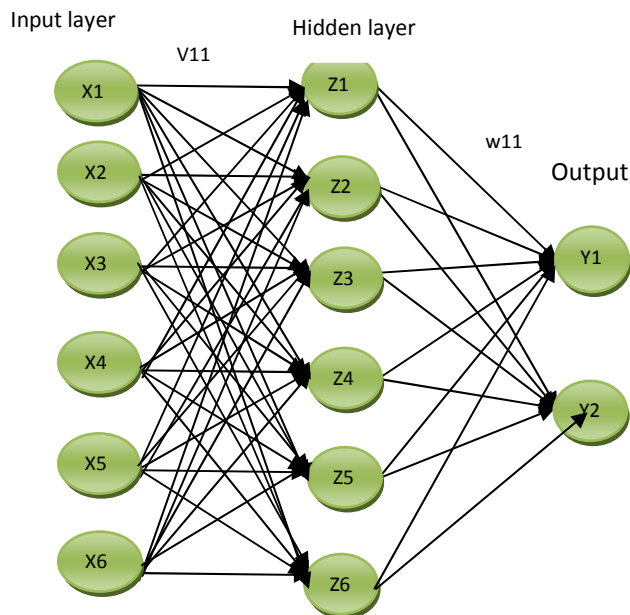
Reduksi learning rate

Langkah 6

Tes kondisi STOP

b. Jaringan Backpropagation

Backpropagation adalah jaringan multilayer, yang terdiri dari 3 lapisan yaitu lapisan input, hidden dan output. Lapisan input terdiri dari enam unit. Lapisan hidden terdiri dari 6 yang dipilih dari 10 node yang dipilih berdasarkan dari training dengan error terkecil. Sedangkan unit output terdiri dari dua kelas. Arsitektur jaringan Backpropagation :



Gambar 3 : Arsitektur backpropagation permasalahan Diabetes Mellitus

Algoritma backpropagation

Dengan menggunakan satu *hidden layer*, algoritma *backpropagation* sebagai berikut :

Step 0 :

Inialisasi nilai bobot dengan nilai acak yang kecil.

Step 1 :

Selama kondisi berhenti masih tidak terpenuhi, laksanakan *step 2 - 9*.

Step 2 : Untuk tiap pasangan pelatihan, kerjakan *step 3 - 8*.

Feedforward :

Step 3 :

Untuk tiap unit *input* ($X_i, i=1, \dots, n$) menerima sinyal *input* x_i dan menyebarkan sinyal itu ke seluruh unit pada *layer* berikutnya (*hidden layer*)

Step 4:

Untuk tiap unit dalam ($Z_j, j=1, \dots, p$) dihitung nilai *input* dengan menggunakan nilai bobotnya

$$z_in_j = v_{0j} + \sum_{i=1}^n x_i v_{ij}$$

Kemudian dihitung nilai *output* dengan menggunakan fungsi aktivasi yang dipilih

$$z_j = f(z_in_j)$$

Hasil fungsi tersebut dikirim ke semua unit pada *layer* berikutnya (unit *output*).

Step 5:

Untuk tiap unit *output* ($Y_k, k=1, \dots, m$) dihitung nilai *input* dengan menggunakan nilai bobotnya

$$y_in_k = w_{0k} + \sum_{j=1}^p z_j w_{jk}$$

Kemudian dihitung nilai *output* dengan menggunakan fungsi aktivasi

$$y_k = f(y_in_k)$$

Backpropagation Of Error

Step 6 :

Untuk tiap unit *output* ($Y_k, k=1, \dots, m$) menerima pola target yang bersesuaian dengan pola *input* dan kemudian dihitung informasi kesalahan

$$\delta_k = (t_k - y_k) f'(y_in_k)$$

Kemudian dihitung koreksi nilai bobot yang akan digunakan untuk memperbaharui nilai bobot w_{jk} :

$$\Delta w_{jk} = \alpha \delta_k z_j$$

Hitung koreksi nilai bias yang kemudian akan digunakan untuk memperbaharui nilai w_{0k} :

$$\Delta w_{0k} = \alpha \delta_k$$

dan kemudian nilai δ_k dikirim ke unit pada *layer* sebelumnya.

Step 7:

Untuk tiap unit dalam ($Z_j, j=1, \dots, p$) dihitung delta *input* yang berasal dari unit pada *layer* di atasnya :

$$\delta_in_j = \sum_{k=1}^m \delta_k w_{jk}$$

Kemudian nilai tersebut dikalikan dengan nilai turunan dari fungsi aktivasi untuk menghitung informasi kesalahan : $\delta_j = \delta_in_j f'(z_in_j)$

Hitung koreksi nilai bobot yang kemudian digunakan untuk memperbaharui nilai v_{ij} :

$$\Delta v_{ij} = \alpha \delta_j x_i$$

dan hitung nilai koreksi bias yang kemudian digunakan untuk memperbaharui v_{0j} :

$$\Delta v_{0j} = \alpha \delta_j$$

Update nilai bobot dan bias :

Step 8 :

Setiap unit *output* ($Y_k, k=1, \dots, m$) mengupdate bias dan bobotnya ($j=0, \dots, p$)

$$w_{jk}(new) = w_{jk}(old) + \Delta w_{jk}$$

Tiap unit *hidden* ($Z_j, j=1, \dots, p$) mengupdate bias dan bobotnya ($i=0, \dots, n$)

$$v_{ij}(new) = v_{ij}(old) + \Delta v_{ij}$$

Step 9 :
Menguji apakah kondisi berhenti sudah terpenuhi.

Algoritma Testing

Setelah *training*, jaringan syaraf *backpropagation* diaplikasikan dengan menggunakan fase yang diberikan sebelumnya dari algoritma *training*. Prosedur aplikasinya adalah sebagai berikut :

Step 0 :

Inisialisasi bobot (dari algoritma *training*)

Step 1 :

Untuk setiap vektor *input*,
kerjakan *step* 2-4

Step 2 :

Untuk $i = 1, \dots, n$: set aktifasi dari unit *input* x_i ;

Step 3 :

Untuk $j = 1, \dots, p$:

$$z_in_j = v_{0j} + \sum_{i=1}^n x_i v_{ij} ;$$

$$z_j = f(z_in_j)$$

Step 4 :

$$\text{Untuk } k = 1, \dots, m: y_in_k = w_{0k} + \sum_{j=1}^p z_j w_{jk} ;$$

$$y_k = f(y_in_k)$$

Penelitian ini mencari perbandingan keakurasian hasil dari dua metode jaringan yang digunakan. Data ditraining dengan menggunakan kedua metode klasifikasi yaitu jaringan LVQ dan Backpropagation dengan masing-masing algoritma berbeda. Setelah data ditraining dan ditesting dengan kedua metode tersebut, selanjutnya hasil training keduanya dibandingkan. Di bawah ini akan diberikan hasil klasifikasi dari kedua metode klasifikasi. Hasil klasifikasi yang diperoleh setelah proses training dan testing dapat dilihat pada tabel berikut :

Tabel 1 : Hasil klasifikasi dengan menggunakan $\alpha = 0.5$ dengan jumlah epoch = 100, Jumlah training 345 dan jumlah data testing 86 pasien

| Metode | Error | Persentasi keakurasian | Waktu (detik) |
|-----------------|-----------|------------------------|---------------|
| LVQ | 27.441861 | 82.558139 | 1.00 |
| Backpropagation | 26.744187 | 73.255813 | 1.53 |

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan, dapat disimpulkan bahwa untuk proses training, metode LVQ lebih akurat dibandingkan metode Backpropagation. Hal ini terlihat dari besarnya error klasifikasi dan waktu yang digunakan klasifikasinya. Sehingga klasifikasi data diabetes menggunakan LVQ memberikan tingkat akurasi lebih tinggi atau akurat dalam membaca pola jika dibandingkan klasifikasi data menggunakan jaringan Backpropagation.

SARAN

Dalam rangka pengembangan penelitian perlu dilakukan pada klasifikasi kasus yang lain karena jaringan LVQ dan Backpropagation masih dapat memung-kinkan untuk dikaji dan dikembangkan.

DAFTAR PUSTAKA

- Arief, M. (2001). *Diabetes Mellitus dan Komplikasinya*. Puslitbang Kesehatan. Jakarta
- Fausett, L. (1994). *Fundamentals of Neural Networks: Architecture, Algorithms, and Applications*, Prentice Hall
- Jorgens, V. dkk. (1994). *Bagaimana Mengobati Diabetes secara Mandiri untuk Pasien yang tidak Menyuntikkan Insulin*. Fakultas Kedokteran Universitas Indonesia.
- Kusumadewi, S. (2003). *Artificial Intelligence*. Graha Ilmu, Yogyakarta.
- Kuzuya, T. Dkk. (2002). "Report of Committee on the Classification and Diagnostic Criteria of Diabetes Mellitus". *Diabetes Research and Clinical Practice*. 55. Hal 65-85.
- Laksana, Teddy. (1996). *Perancangan Alat Pradiagnosis untuk Diabetes*. Surabaya
- Rafflesia, U. (2010). *Perbandingan Performansi Jaringan LVQ dan RBF untuk Permasalahan Klasifikasi pada Penyakit Karies Gigi*. Tesis Magister. ITS. Surabaya.
- Siang JJ. (2005). *Jaringan Syaraf Tiruan & Pemrogramannya Menggunakan Matlab*, Andi Yogyakarta
- Subianto, T. (2009). *Diabetes Mellitus*. Asuhan keperawatan.
<http://teguhsuubianto.blogspot.com/2009/06/asuhan-keperawatan-diabetesmellitus.html>.
Diakses pada Tanggal 7 Januari 2011.

PENGENDALIAN OPTIMAL TUBERKULOSIS DENGAN EXOGENOUS REINFECTION

Hasnan Nasrun, Subchan, M.Yunus

Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya
Email : hasnannasrunsiregar@yahoo.com

Abstrak

Penyakit Tuberkulosis (TB) merupakan salah satu penyakit menular tertua yang menyerang manusia. Badan Kesehatan Dunia (WHO) menyatakan bahwa sepertiga penduduk dunia telah terinfeksi oleh *Mycobacterium Tuberculosis*, yang merupakan bakteri penyebab penyakit Tuberkulosis. Di Indonesia, jumlah pasien Tuberkulosis menempati urutan ke tiga terbanyak didunia setelah Cina dan India. Model matematis Tuberkulosis dengan Exogenous Reinfection dimodelkan sebagai Permasalahan Pengendalian Optimal yang diselesaikan menggunakan metode langsung dengan mentransformasikan kedalam bentuk permasalahan pemrograman tak linear (Non linear Programing, NLP). Pengendalian dalam penelitian ini terdiri dari kendali isolasi, daya tahan tubuh dan pengobatan yang bertujuan untuk meminimalkan jumlah penduduk terinfeksi dan menular melalui penerapan Pengendalian Optimal. Hasil Penelitian ditinjau dari dua keadaan dimana R_0 (Bilangan Reproduksi Dasar) , $R_0 > 1$ untuk kasus terjadinya endemik dan upaya tambahan $R_0 < 1$ untuk kasus tidak terjadinya endemik.

Kata Kunci: Tuberkulosis dengan *Exogenous Reinfection*, Pengendalian Optimal Bilangan Reproduksi Dasar

PENDAHULUAN

Sejarah panjang penyakit Tuberkulosis telah ada sejak sekitar 6000 SM, hal ini didasari dengan ditemukannya fosil tulang dada dan belakang seorang pria yang diketahui menderita Tuberkulosis di daerah Heidelberg, Jerman. Oleh karena itulah maka Tuberkulosis tercatat sebagai salah satu penyakit menular tertua yang menyerang manusia. Menurut perkiraan Badan Kesehatan Dunia (WHO, 2003) sekitar sepertiga penduduk dunia telah terinfeksi oleh *Mycobacterium Tuberculosis*. Laporan Tuberkulosis dunia oleh WHO yang terbaru (2006), menempatkan Indonesia sebagai Negara terbesar nomor 3 penyumbang Tuberkulosis di dunia setelah India dan Cina dengan jumlah kasus baru sekitar 539.000 dan jumlah kematian sekitar 101.000 pertahun.

Penularan penyakit Tuberkulosis terbilang unik jika dibandingkan dengan penyakit menular lainnya. Pada Tuberkulosis penularan langsung dari penderita aktif kepada orang yang belum terinfeksi sebagian besar hanya mengakibatkan seseorang terjangkit Bakteri *Mycobacteria Tuberculosis* tanpa menunjukkan gejala penyakit Tuberkulosis. Pada kenyataannya, sebagian besar individu terinfeksi Tuberkulosis tetap dalam tahap laten dan tidak pernah menjadi menular atau menunjukkan gejala Tuberkulosis. Hal ini sejalan dengan pernyataan (Sunhwa Choi, 2009) yang mengatakan dalam perspektif, 30 % individu dalam kontak dengan pasien Tuberkulosis aktif akan terinfeksi (laten dan pasif), sedangkan 10% dari kelompok ini terinfeksi akan menjadi menular (aktif). Kemungkinan perkembangan Tuberkulosis laten dan pasif menjadi aktif dan menular dapat dipercepat dari kontak berulang dengan orang yang mengidap Tuberkulosis aktif dan menular. Akibatnya, sumber untuk kemajuan Tuberkulosis tidak hanya infeksi primer, tetapi juga kemungkinan *Exogenous Reinfection*. *Exogenous Reinfection* Merupakan Infeksi dari orang yang sudah memiliki Bakteri *Mycobacteria Tuberculosis* (laten dan pasif) tapi menjadi terkena TB dikarenakan Infeksi ulang dari Orang lain yang sedang terkena Tuberkulosis Aktif. Oleh karena itu, *Exogenous Reinfection* memiliki peranan penting dalam perkembangan serta penularan penyakit Tuberkulosis.

Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah Bagaimana model pengendalian optimal serta menentukan kendali optimal dari isolasi, daya tahan tubuh dan pengobatan pada Tuberkulosis dengan Exogenous Reinfection .Yang menjadi tujuan dalam penelitian ini adalah mendeskripsikan model pengendalian optimal yang menggambarkan hubungan penyakit Tuberkulosis dengan Exogenous Reinfection dan cara penularannya serta menentukan Kendali optimal dari kendali isolasi , daya tahan tubuh dan pengobatan pada Tuberkulosis dengan Exogenous Reinfection sehingga meminimalkan orang yang terinfeksi penyakit Tuberkulosis. Sedangkan manfaat dari penulisan penelitian ini adalah untuk memberikan informasi bahwa pengendalian optimal yang diperoleh dapat menjadi suatu solusi optimal dalam menentukan kebijakan untuk mengatasi penyebaran serta penularan penyakit Tuberkulosis dengan *Exogenous Reinfection*.

METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang dilakukan pada penelitian ini terdiri atas :

- Analisis Model
- Penyelesaian Kendali Optimal

Penyelesaian kendali optimal pada pencegahan Tuberkulosis dengan Exogenous Reinfection dilakukan dengan menggunakan kendali Isolasi, daya tahan tubuh dan pengobatan dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin. Prinsip Maximum Principle merupakan suatu kondisi sehingga dapat diperoleh penyelesaian *optimal control* yang sesuai dengan tujuan (memaksimalkan *performance index*).

Prosedur menyelesaikan masalah ontrol optimal dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin adalah sebagai berikut (Naidu, 2002):

Diberikan persamaan plant: $\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$

Diberikan indeks performansi: $J = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t) dt$

Dan kondisi batas $x(t_0) = x_0$ dan $x(t_f) = x_f$ bebas.

Maka langkah-langkah penyelesaiannya adalah:

Bentuk fungsi Pontryaginnya:

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = V(x(t), u(t), t) + \lambda(t) f(x(t), u(t), t)$$

Minimumkan H terhadap semua vektor kontrol $u(t)$:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)_* = 0 \text{ dan diperoleh } u^*(t) = h(x^*(t), \lambda^*(t), t)$$

Gunakan hasil dari langkah 2 ke dalam langkah 1 dan tentukan H^* yang optimal.

$$H^*(x^*(t), h(x^*(t), \lambda^*(t), t), \lambda^*(t), t) = H^*(x^*(t), \lambda^*(t), t)$$

Selesaikan sekumpulan $2n$ persamaan $\dot{x}^*(t) = + \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)_*$ dan $\dot{\lambda}^*(t) = - \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_*$

Dengan kondisi awal x_0 dan kondisi akhir $\left[H^* + \frac{\partial S}{\partial t} \right]_{t_f} \delta x_f + \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^* - \lambda^*(t) \right]_{t_f} \delta x_f = 0$

5. Untuk memperoleh kontrol optimal, substitusikan solusi $x^*(t), \lambda^*(t)$ dari langkah 4 ke dalam ekspresi optimal kontrol u^* pada langkah 2.

- Simulasi

Simulasi pada penelitian ini menggunakan bantuan program komputer untuk mencari kendali optimal pada model Tuberkulosis dengan Exogenous Reinfection.

HASIL PENELITIAN

Untuk mengendalikan penyebaran Tuberkulosis dengan *Exogenous Reinfection* digunakan model kompartemen yang dikembangkan oleh (Zhilan Feng,dkk (2000). Asumsi asumsi yang dapat diambil dari model tersebut ialah :

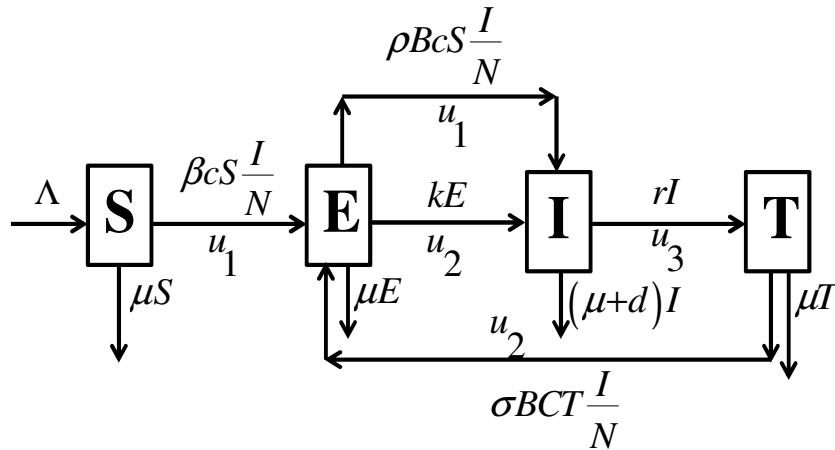
Susceptible ialah populasi yang rentan terhadap penyakit Tuberkulosis. Populasi Susceptible meningkat dengan adanya laju rekrutment dari individu yang masuk ke dalam suatu wilayah dan menurun dengan laju kematian alami (μ). Laju rekrutment meliputi kelahiran, imigrasi, dan emigrasi. Penularan dapat terjadi akibat hubungan antara Susceptible dengan Infectious yang mengakibatkan populasi ini menjadi ikut terinfeksi dan berdampak populasi dari susceptible akan berkurang. Pada populasi ini akan kita berikan kendali Isolasi (u_1) sebagai pencegah hubungan antara populasi susceptible dengan populasi infectious. Koefisien transmisi kelas Susceptible dan Exposed ini adalah β dan c .

Exposed ialah individu yang terdeteksi sudah terinfeksi tetapi belum menginfeksi , namun secara medis gejala penyakit Tuberkulosis belum menyebar. Total populasi ini dinotasikan E, berkembangnya populasi Exposed karena laju perubahan dari kelas Susceptible menjadi Exposed dipengaruhi oleh β dan c dan berubahnya populasi Exposed menjadi infectious dipengaruhi oleh k (tingkat perkembangan dari kelas pasif dan laten menuju kelas aktif dan menular), dan menurun dengan laju kematian alami (μ). Pada Populasi ini akan kita berikan kendali isolasi (u_1) dan daya tahan tubuh (u_2)

Infectious ialah individu yang menular, populasi ini muncul setelah berkembangnya gejala dari terinfeksi menjadi menular dan aktif yang dipengaruhi oleh k . Populasi ini berkurang oleh kematian akibat penyakit Tuberkulosis (d), kematian alami (μ) dan orang yg sembuh dari penyakit Tuberkulosis (r). Hubungan populasi pada kelas ini dengan kelas lainnya dapat terjadi dengan kelas susceptible dan kelas treatment. Oleh karenan itulah kita dapat menekan perkembangan kelas Infectious dengan memberikan kendali isolasi (u_1) dan mengurangi populasi kelas infectious dengan memberikan kendali pengobatan atau treatment (u_3).

Recovery Populasi sembuh (Recovery) ini disimbolkan dengan notasi T dan diasumsikan bahwa populasi ini telah sembuh dari penyakit Tuberkulosis. Populasi berasal dari individu menular (I) yang sembuh dari penyakit Tuberkulosis dan menurun karena adanya laju kematian alami (μ) . Pada populasi di kelas ini kita akan memberikan kendali pengobatan (u_3) sebagai cara untuk memperbanyak populasi pada kelas ini, serta memberikan kendali daya tahan tubuh (u_2) untuk mencegah populasi pada kelas ini kembali menjadi populasi yang terinfeksi.

Di bawah ini adalah diagram kompartemen dari hubungan keempat kelas model Tuberkulosis dengan adanya kendali sebagai berikut :



Model matematis dari penyebaran Tuberkulosis dengan exogenous reinfection dapat ditulis dalam bentuk persamaan differensial sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \Lambda - (1-u_1(t))\beta cS \frac{1}{N} - \mu S \\ \frac{dE}{dt} &= (1-u_1(t))\beta cS \frac{1}{N} - (1-u_1(t))p\beta cE \frac{1}{N} - (\mu+k)E + (1-u_2(t))\sigma\beta cT \frac{1}{N} \\ \frac{dI}{dt} &= (1-u_1(t))p\beta cE \frac{1}{N} + kE - (\mu+u_3(t)r+d)I \\ \frac{dT}{dt} &= u_3(t)rI - (1-u_2(t))\sigma\beta cT \frac{1}{N} - \mu T \\ \frac{dN}{dt} &= \Lambda - \mu N - dI \end{aligned}$$

Untuk mengetahui tingkat penyebaran suatu penyakit diperlukan suatu parameter tertentu. Parameter yang biasa digunakan adalah Bilangan Reproduksi Dasar (Basic Reproduction Number). Bilangan Reproduksi Dasar adalah bilangan yang menyatakan banyaknya rata-rata individu infeksi sekunder akibat tertular individu infeksi primer yang berlangsung didalam populasi susceptible. Kuantitas dari bilangan reproduksi dasar tergantung dari beberapa faktor diantaranya banyaknya rata-rata kontak antara individu-individu yang masih sehat (susceptible) dengan individu-individu yang sudah menderita penyakit (infectious) dan lama terjadinya kontak. Pada setiap model, bilangan reproduksi dasar tergantung pada parameter-parameter kependudukan (demografi) dan epidemiologi yang termuat di dalam model. Jika model hanya mempunyai dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik, maka tidak terjadi endemik jika $R_0 < 1$ dan terjadi endemik jika $R_0 > 1$. Bilangan reproduksi dasar pada model Tuberkulosis dengan Exogenous Reinfection adalah

$$R_0 = \left(\frac{\beta c}{\mu+r+d} \right) \left(\frac{k}{\mu+k} \right)$$

➤ **Penyelesaian Kendali Optimal**

Pada penyelesaian kendali optimal ini akan dibahas penggunaan kendali Isolasi, Vaksinasi (daya tahan tubuh), dan Pengobatan yang optimal. Tujuannya untuk meminimalkan jumlah individu yang terinfeksi (Infected) Tuberkulosis dengan waktu dan biaya yang optimal dengan indek performa sebagai berikut:

$$J(u_1, u_2, u_3) = \int_0^{t_f} \left[I(t) + \frac{B_1}{2} u_1^2(t) + \frac{B_2}{2} u_2^2(t) + \frac{B_3}{2} u_3^2(t) \right] dt$$

Pengontrol u_1 adalah kendali isolasi yang merupakan upaya yang mencegah infeksi individu rentan dengan individu menular. Hal ini akan mengurangi jumlah individu yang dapat mengembangkan Tuberkulosis aktif. u_2 ialah kendali daya tahan tubuh yang merupakan upaya untuk mencegah infeksi ulang dari Tuberkulosis. u_3 ialah Pengendalian pengobatan, (pemberian Obat-obatan secara intensif dan terkendali) yang merupakan upaya pada penanganan individu yang terinfeksi aktif untuk menjadi sembuh. B_1, B_2, B_3 adalah parameter pembobotan, menyeimbangkan kepentingan relatif dan ukuran persyaratan dalam fungsional objektif. Selanjutnya dengan menggunakan prinsip maksimum Pontryagin didapatkan Persamaan Lagrangian berikut:

$$L = E + In + \frac{1}{2} B_1 u_1^2 + \frac{1}{2} B_2 u_2^2 + \frac{1}{2} B_3 u_3^2 + \lambda_1 \left(\Lambda - \frac{(1-u_1)\beta c S I n}{N} - \mu S \right) +$$

$$\lambda_2 \left(\frac{(1-u_1)\beta c S I n}{N} - \frac{(1-u_1)\rho\beta c E I n}{N} - (\mu+k)E + \frac{(1-u_2)\sigma\beta c T I n}{N} \right) +$$

$$\lambda_3 \left(\frac{(1-u_1)\rho\beta c E I n}{N} + kE - (\mu+u_3 r+d) I n \right) +$$

$$\lambda_4 \left(u_3 r E - \frac{(1-u_2)\sigma\beta c T I n}{N} - \mu T \right) + \lambda_5 (\Lambda - \mu N - d I n)$$

$-w_{11}(u_1(t)-a_1) - w_{12}(b_1-u_1(t)) - w_{21}(u_2(t)-a_2) - w_{22}(b_2-u_2(t)) - w_{31}(u_3(t)-a_3) - w_{32}(b_3-u_3(t))$
dengan

$$w_{11}(t) = w_{12}(t) = w_{21}(t) = w_{22}(t) = w_{31}(t) = w_{32}(t) = 0$$

$$w_{11}(u_1(t)-a_1) = 0, w_{12}(b_1-u_1(t)) = 0, w_{21}(u_2(t)-a_2) = 0, w_{22}(b_2-u_2(t)) = 0$$

$$w_{31}(u_3(t)-a_3) = 0, w_{32}(b_3-u_3(t)) = 0$$

Selanjutnya berdasarkan prinsip maksimal didapatkan :

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = B_1 u_1(t) + \frac{\lambda_1 \beta c S I}{N} + \lambda_2 \left(-\frac{\beta c S I}{N} + \frac{\rho\beta c E I}{N} \right) - \frac{\lambda_3 \rho\beta c E I}{N} E - w_{11}(t) + w_{12}(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow u_1^*(t) = -\frac{\beta c I (\lambda_1 S - \lambda_2 S + \lambda_2 \rho E - \lambda_3 \rho E)}{N B_1} + w_{11}(t) - w_{12}(t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_2} = B_2 u_2(t) - \frac{\lambda_2 \sigma\beta c T I}{N} + \frac{\lambda_4 \sigma\beta c T I}{N} - w_{21}(t) + w_{22}(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow u_2^*(t) = -\frac{\sigma\beta c T I (\lambda_2 - \lambda_4)}{N B_2} + w_{21}(t) - w_{22}(t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_3} = B_3 u_3(t) - \lambda_3 r I + \lambda_4 r E - w_{31}(t) + w_{32}(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow u_3^*(t) = \frac{r I E (\lambda_3 - \lambda_4)}{B_3} + w_{31}(t) - w_{32}(t)$$

Ada tiga kasus dalam menentukan karakter yang spesifik dalam pengendalian optimal yaitu:

i. Jika $a_i < u_i(t) < b_3$

ii. jika $u_i = a_i$

iii. jika $u_i = b_i, dengan i = 1, 2, 3$

Dengan mengkombinasikan tiga kasus dalam menentukan karakter yang spesifik dalam pengendalian optimal dapat dibentuk dalam bentuk kompak sebagai berikut:

$$u_1^*(t) = \min \left\{ b_1, \max \left[a_1, -\frac{\beta c I (\lambda_1 S - \lambda_2 S + \lambda_2 \rho E - \lambda_3 \rho E)}{NB_1} \right] \right\}$$

$$u_2^*(t) = \min \left\{ b_2, \max \left[a_2, -\frac{\sigma \beta c T I (\lambda_2 - \lambda_4)}{NB_2} \right] \right\}$$

$$u_3^*(t) = \min \left\{ b_2, \max \left[a_2, \frac{r I E (\lambda_3 - \lambda_4)}{B_3} \right] \right\}$$

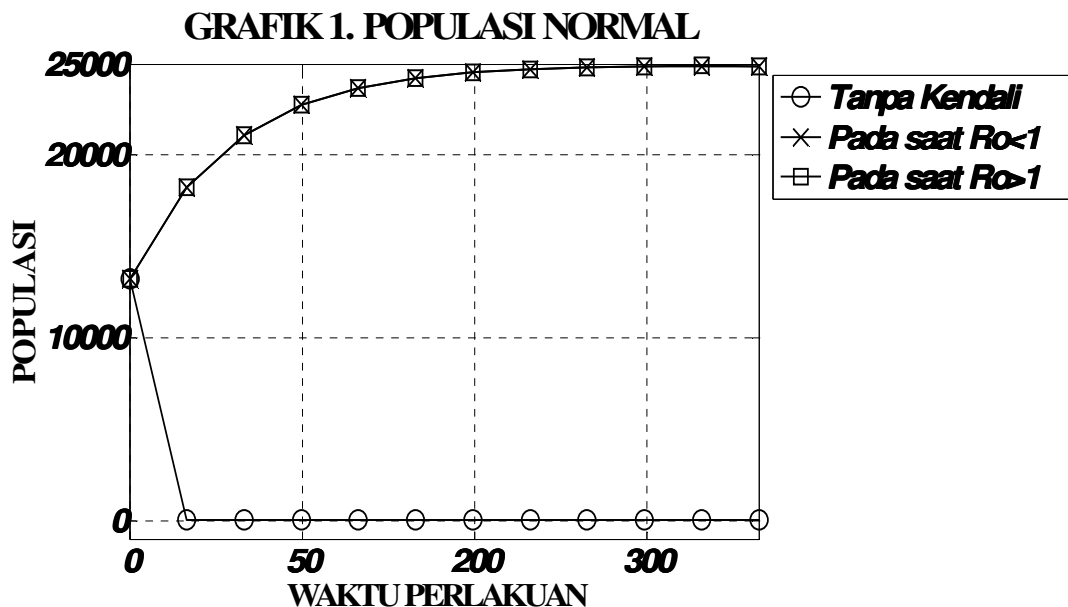
Penyelesaian pencegahan Tuberkulosis dengan Exogenous Reinfection secara numerik dilakukan dengan menggunakan bantuan program komputer. Nilai dari parameter diambil dari nilai parameter yang berasal dari Sunhwa Choi dkk(2009) yaitu :

| PARAMETER KOMPUTASI | SIMBOL | NILAI |
|---|-----------|------------|
| Waktu akhir | t f | 365 |
| Batas gawah kendali | | 0 |
| Batas atas kendali | | 1 |
| Jumlah faktor yang mempengaruhi u1 | B1 | 1, 10, 100 |
| Jumlah faktor yang mempengaruhi u2 | B2 | 1, 10, 100 |
| Jumlah faktor yang mempengaruhi u3 | B3 | 1, 10, 100 |
| Tingkat rekrutmen konstan | Λ | 417 |
| Jumlah rata-rata individu normal yang rentan terinfeksi oleh satu individu menular yang berhubungan langsung per unit waktu | β | 80 |
| Rata rata tingkat kematian alami | μ | 0.0167 |
| Jumlah rata-rata individu terinfeksi yang rentan terinfeksi oleh satu individu menular yang berhubungan langsung per unit waktu | σ | 0.9 |
| Hubungan rata rata perkapita | c | 0.1, 0.3 |
| Angka kematian perkapita akibat Tuberkulosis | d | 0.1 |
| Tingkat pegembangan dari terifeksi laten menjadi infeksi yang menular | k | 0.005 |
| Tingkat Exogenous Reinfection | ρ | 0.4 |
| Tingkat pengobatan perkapita | r | 2 |
| Total Populasi | N | 25000 |
| Nilai awal Populasi Susceptible | S(0) | 13250 |
| Nilai awal Populasi Exposed | E(0) | 10500 |
| Nilai awal populasi Infectious | I(0) | 1000 |
| Nilai awal populasi Treatment | T(0) | 250 |

Pada tahap simulasi ini akan dibandingkan sistem sebelum dikontrol (tanpa memberikan kendali Isolasi, Daya tahan tubuh dan Pengobatan) dan sesudah dikontrol (dengan memberikan kendali Isolasi, Daya tahan tubuh dan Pengobatan), sehingga kita dapat mengukur sejauh mana keefektifan dari kendali yang dilakukan. Pada sistem yang diberikan kendali kita akan membuat dua macam persoalan yaitu:

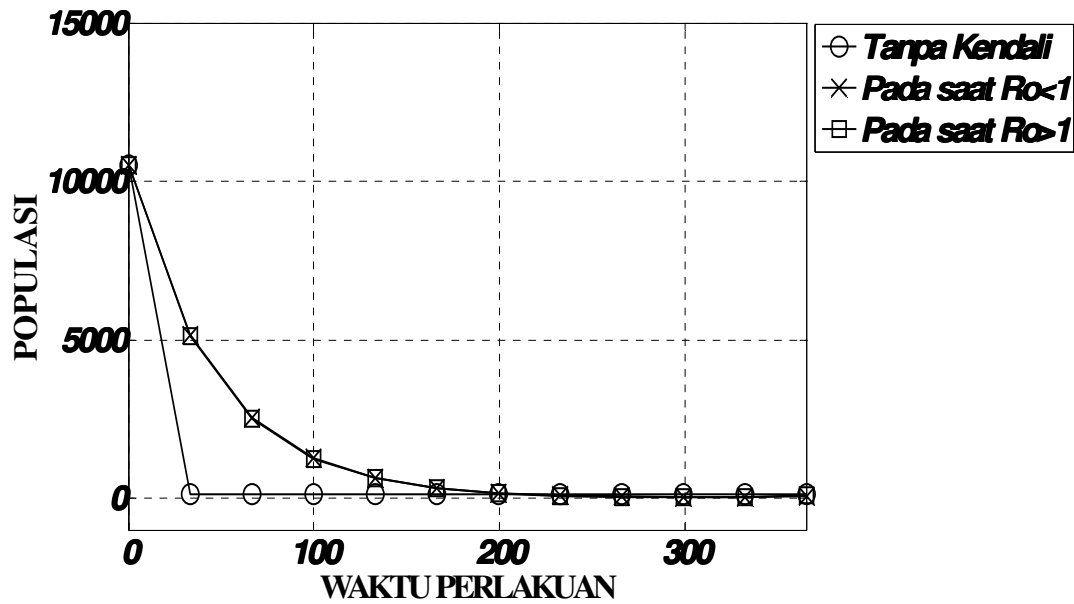
- ❖ Persoalan ketika $R_0 < 1$ artinya tidak ada terjadinya endemik Penyakit. Penularan penyakit tergolong normal serta masih dalam taraf yang biasa.
- ❖ Persoalan ketika $R_0 > 1$ Pada kasus $R_0 > 1$ artinya terjadinya endemik penyakit. Penularan penyakit tergolong diatas normal atau dikatakan dapat menular dan menyebar dengan sangat cepat. Hal ini nantinya akan dapat mengakibatkan jumlah korban yang sangat banyak apabila tidak dilakukan penanganan yang serius untuk mengantisipasi dari penularan penyakit tersebut.

Berikut ini akan ditampilkan grafik hasil simulasi Pengendalian Tuberkulosis dengan menggunakan program komputer dimana akan diperlihatkan kondisi pada saat tidak dikendalikan, dikendalikan pada saat penyebaran penyakit normal ($R_0 < 1$) serta pada saat terjadinya endemik penyakit ($R_0 > 1$).



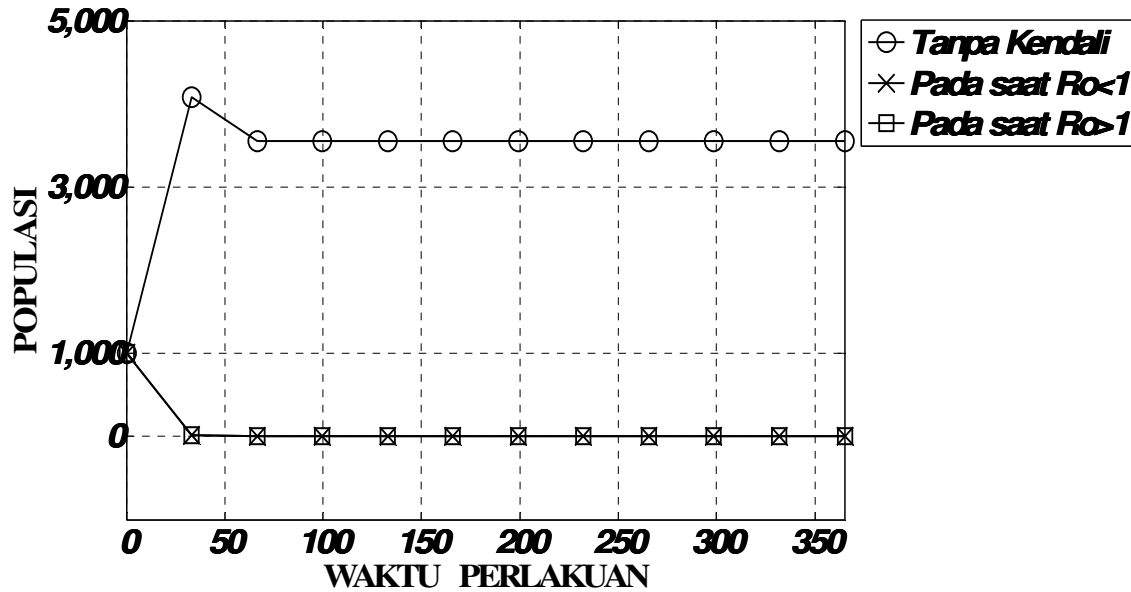
Pada Grafik 1. Menunjukkan jumlah populasi normal dimana terlihat dengan adanya kendali dapat memaksimalkan dari individu yang normal sedangkan pada kasus tanpa kendali mengakibatkan populasi individu normal menurun tajam.

GRAFIK 2. POPULASI TERINFEKSI



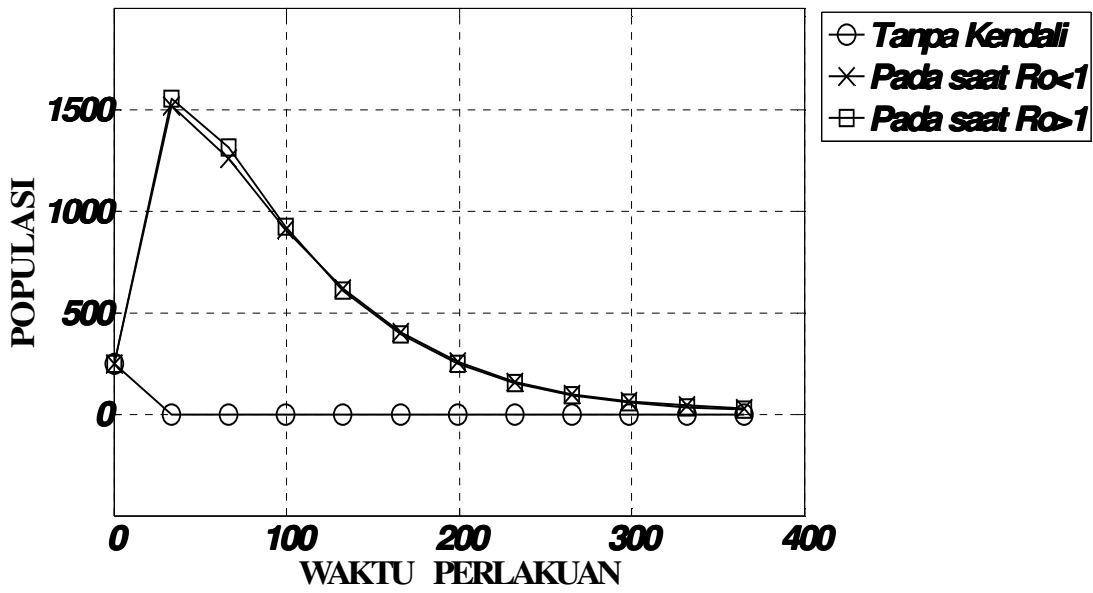
Pada Grafik 2. Menunjukkan jumlah populasi Terinfeksi dimana terlihat dengan atau tanpa kendali jumlah dari populasi sama sama menurun, tetapi pada saat dikendalikan jumlah populasi terinfeksi akan lebih sedikit dibandingkan tanpa kendali

GRAFIK 3. POPULASI MENULAR



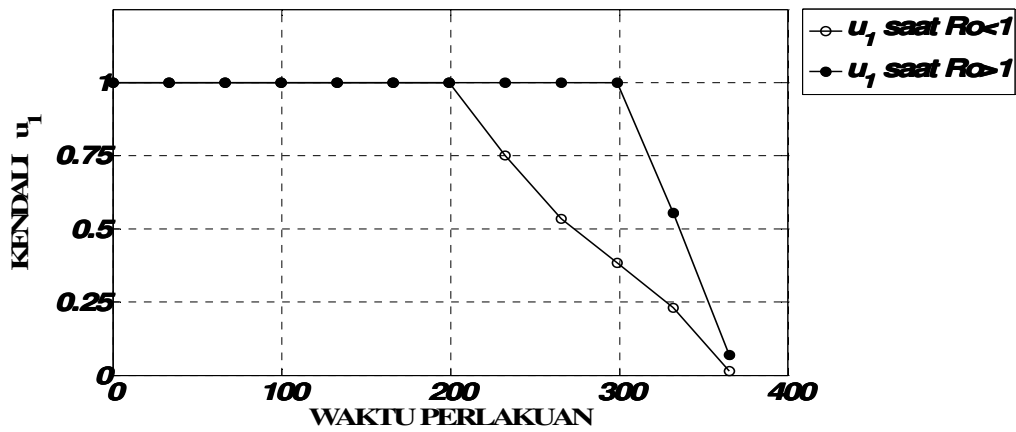
Pada Grafik 3. Menunjukkan jumlah populasi menular dimana dengan adanya kendali dapat menurunkan jumlah dari populasi yang menular. Sedangkan apabila tidak dikendalikan dapat membuat populasi ini menjadi meningkat.

GRAFIK 4. POPULASI SEMBUH

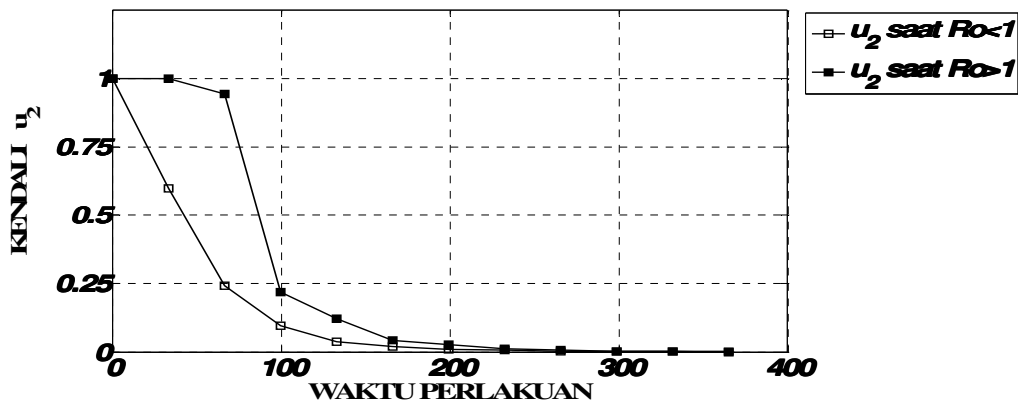


Pada Grafik 4. Menunjukkan jumlah populasi yang sembuh, dengan adanya kendali populasi sembuh mengalami peningkatan disebabkan kendali pengobatan kemudian menurun dikarenakan populasi ini bergerak ke populasi normal dikarenakan adanya kendali vaksinasi sedangkan tanpa kendali populasi terus menurun.

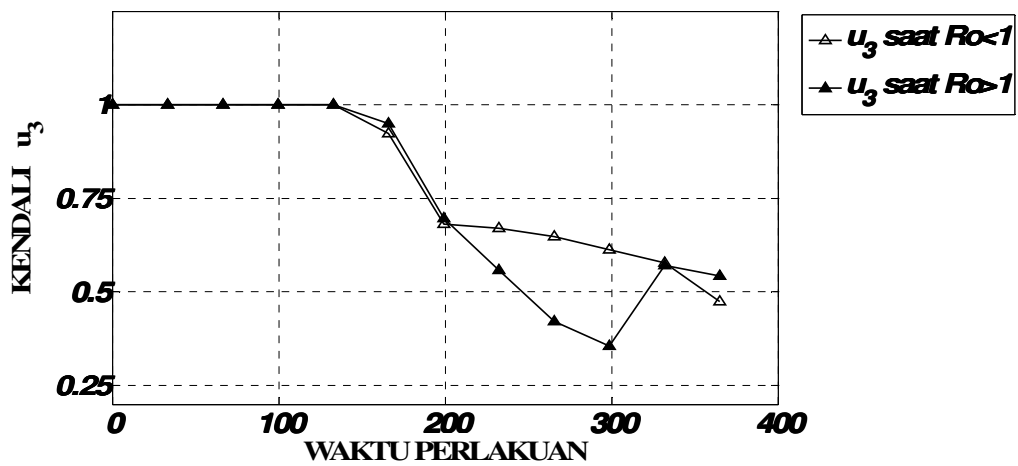
GRAFIK 6. KENDALI ISOLASI (u_1)



GRAFIK 7. KENDALI VAKSINASI (u_2)



GRAFIK 8. KENDALI PENGOBATAN (u_3)



Pada Grafik 6,7,8 Menunjukkan kendali dari isolasi, vaksinasi dan pengobatan dimana pada saat $R_0 > 1$ membutuhkan kendali yang lebih besar daripada saat $R_0 < 1$

Tabel 1. Jumlah pada Masing masing populasi setelah 1 tahun

| Populasi | Tanpa Kendali | $R_0 < 1$ | $R_0 > 1$ |
|------------|---------------|-----------|-----------|
| Normal | 54.81 | 24877.64 | 24852.49 |
| Terinfeksi | 136.05 | 60.51015 | 90.54143 |
| Menular | 3545.95 | 0.28086 | 0.36555 |
| Sembuh | 0.0000 | 29.63103 | 24.91292 |

KESIMPULAN dan SARAN

Kesimpulan

Hasil peneltiane menunjukkan kendali isolasi, Daya tahan tubuh dan pengobatan yang diberikan dapat mengurangi individu yang terinfeksi dan individu yang menular serta meminimumkan biaya dalam menerapkan program isolasi, vaksinasi dan pengobatan. Simulasi Numerik menunjukkan hasil akhir keseluruhan populasi dengan adanya kendali lebih baik daripada

tanpa kendali. Pada kasus $R_0 > 1$ atau terjadinya endemik membutuhkan kendali yang lebih besar dibandingkan dengan kasus $R_0 < 1$ atau penularan normal.

Saran

Pada kasus $R_0 < 1$ dan $R_0 > 1$ dapat diberikan berbagai bentuk strategi yang berbeda yaitu berupa kombinasi dari 3 kendali yang ada.

DAFTAR PUSTAKA

- Choi.S, (2009),*Optimal Treatment Strategies for Tuberculosis with Exogenous Reinfection*, National Science Foundation (NSF -Grant DMPS-0838705)
- Departemen Kesehatan Republik Indonesia (2006),*Pedoman Nasional Penanggulangan Tuberculosis*, (2006), Volume 2, DepKes, Jakarta.
- Feng.Z, dan Carlos Castillo-Chavez (2000),*A Model for Tuberculosis with Exogenous Reinfection*, Theor. Pop. Biol.57, 235
- Hatta.K, M.Rachik, S.Saadi, Y.Tabit and N.Yousfi (2009),”Optimal Control of Tuberculosis with Exogenous Reinfection”, *Matematika Sciences*,Vol.3,2009.
- Subchan,S, dan Zbikowski, R., (2009), ”Computational Optimal Control Tools and Practise”, *John Willey and Sons, Ltd, publication.*, United Kingdom.

OPTIMASI PENENTUAN DOSIS OBAT PADA TERAPI LEUKEMIA MYELOID KRONIK

Ibnu Hajar Salim, Subchan

*Pasca Sarjana Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya
ibnu_salsa@yahoo.com/subchan@matematika.its.ac.id*

Abstrak

Leukemia myeloid kronik merupakan suatu penyakit, yang disebabkan sel di dalam sumsum tulang yang berubah menjadi ganas dan menghasilkan sejumlah besar granulosit yang abnormal. Sebagai salah satu penyakit yang mematikan, pemberian dosis obat pada terapi leukemia myeloid kronik perlu dioptimalkan untuk pencegahan proliferasi sel kanker yang tidak terkendali. Namun dosis obat terapi yang tidak tepat berakibat fatal pada pasien, karena efek obat tidak hanya meminimalisir sel kanker, tetapi juga mempengaruhi sel-sel yang lainnya. Sehingga pemberian dosis obat terapi yang tepat, baik tunggal maupun kombinasi, akan meminimalkan proliferasi sel kanker dan mengoptimalkan waktu perawatan serta dapat mengurangi efek merugikan pada pasien leukemia myeloid kronik. Dalam model matematika leukemia myeloid kronik ini, digunakan kombinasi terapi bertarget dengan kemoterapi sitotoksik. Permasalahan leukemia myeloid kronik dimodelkan sebagai permasalahan optimal dimana penentuan dosis obat terapi yang optimal merupakan fungsi tujuan. Permasalahan optimal selanjutnya ditransformasikan menjadi permasalahan Pemrograman Non Linear (Nonlinear Programming - NLP), yang selanjutnya diselesaikan dengan menggunakan NLP.

Kata kunci: Kendali Optimal, Pemodelan Matematika, Leukemia Myeloid Kronik.

PENDAHULUAN

Pengobatan leukemia tergantung dari berbagai macam faktor, salah satu diantaranya pengobatan leukemia berdasarkan jenis leukemianya, ada beberapa pilihan terapi untuk leukemia yaitu: kemoterapi, terapi bertarget, terapi biologi, terapi radiasi dan transplantasi sel stem. Obat-obatan yang sering digunakan dalam kemoterapi misalnya beberapa obat sitotoksik seperti sitarabin, mustine dan lain-lain. Kemoterapi bisa diberikan secara tunggal atau kombinasi, dengan harapan bahwa sel-sel yang resistensi terhadap obat tertentu juga bisa merespon obat yang lain sehingga bisa diperoleh hasil yang lebih baik. Kombinasi kemoterapi, merupakan pemberian dua atau lebih zat kemoterapi dalam terapi kanker yang menyebabkan setiap pengobatan memperkuat aksi obat lainnya (sinergis). Obat-obat kemoterapi sangat aktif dalam melawan sel yang membelah. Sel-sel normal yang pertumbuhannya cepat sangat dipengaruhi oleh agen kemoterapi (Maziun, 2010).

Pengobatan sangat penting demi kelangsungan hidup pasien, namun terapi dengan obat yang kurang dari dosis optimal mengakibatkan kurang maksimalnya fungsi obat dalam mengendalikan proliferasi sel kanker, selain itu sel kanker akan semakin kebal terhadap pemberian obat tersebut. Pada terapi dengan dosis obat yang berlebihan dapat membunuh atau merusak jaringan dan sel tubuh yang normal serta menyebabkan efek samping bagi penderita penyakit kanker seperti lemas, mual, muntah, gangguan pencernaan, rambut rontok, otak dan syaraf mati rasa, kulit kering, dan lain-lain (Lesnussa, 2010). Oleh karena itu, pemberian dosis dari pengobatan yang dilakukan harus optimal agar kerusakan jaringan sehat minimal sedangkan sel kanker yang terbunuh maksimal.

Pengetahuan yang lebih maju terhadap biologi molekular telah melahirkan kelas baru suatu agen terapi yang menargetkan langsung pada gen supresor tumor atau onkogen. Imatinib merupakan terapi bertarget molekular pertama yang mendapat persetujuan dari Food and Drug Administration (FDA) Amerika Serikat. Pada Mei 2001, imatinib mesylate (imatinib) disetujui FDA untuk terapi pasien leukemia myeloid kronik (LMK) (Biantoro, 2008). Imatinib adalah agen Bcr-

Abl Tyrosine Kinase Inhibitor (TKI) yang tersedia dalam sediaan oral. Obat ini menunjukkan aktifitas yang sangat signifikan pada semua fase LMK.

Beberapa studi menunjukkan bahwa kombinasi imatinib dengan terapi yang lain, memiliki potensi lebih baik daripada imatinib tunggal (Nanda dkk., 2007). Dalam penulisan ini, dibahas tentang model pengobatan kombinasi LMK yang dikembangkan oleh (Moore dan Li, 2003), didasarkan pada sistem peredaran darah, dan termasuk interaksi kekebalan tubuh dengan sel LMK. Pengobatan kombinasi LMK yang digunakan yaitu terapi bertarget (imatinib) dan kemoterapi sitotoksik (sitarabin). Permasalahannya adalah bagaimana bentuk kendali optimal pada terapi LMK dengan terapi bertarget (imatinib) dan kemoterapi sitotoksik (sitarabin), serta menentukan waktu dan biaya optimal pada terapi LMK dengan terapi bertarget (imatinib) dan kemoterapi sitotoksik (sitarabin). Sehingga dapat diketahui seberapa baik dosis optimal dari dua jenis terapi obat pada pengobatan LMK, dan diperoleh informasi tentang kemoterapi kombinasi yang efektif pada pengobatan LMK.

METODOLOGI PENELITIAN

Penyelesaian Kendali Optimal

Untuk menyelesaikan kendali optimal, dilakukan mengikuti langkah-langkah Prinsip Maksimum Pontryagin. Prosedur menyelesaikan masalah kendali optimal dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin adalah sebagai berikut (Naidu, 2002):

Diberikan persamaan plant: $\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$

Diberikan indeks performansi: $J = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t) dt$

Dan kondisi batas $x(t_0) = x_0$ dan $x(t_f) = x_f$ bebas.

Maka langkah-langkah penyelesaiannya adalah:

1. Bentuk fungsi Pontryagin $H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = V(x(t), u(t), t) + \lambda'(t)f(x(t), u(t), t)$
2. Minimumkan H terhadap semua vektor kendali $u(t)$:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)_* = 0 \text{ dan diperoleh } u^*(t) = h(x^*(t), \lambda^*(t), t)$$

3. Gunakan hasil dari langkah 2 ke dalam langkah 1 dan tentukan H^* yang optimal.

$$H^*(x^*(t), h(x^*(t), \lambda^*(t), t), \lambda^*(t), t) = H^*(x^*(t), \lambda^*(t), t)$$

4. Selesaikan sekumpulan $2n$ persamaan $\dot{x}^*(t) = \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)_*$ dan $\dot{\lambda}^*(t) = -\left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_*$

Dengan kondisi awal x_0 dan kondisi akhir $\left[H^* + \frac{\partial S}{\partial t} \right]_{t_f} \delta x_f + \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_* - \lambda^*(t) \right]_{t_f} \delta x_f = 0$

5. Untuk memperoleh kendali optimal, substitusikan solusi $x^*(t), \lambda^*(t)$ dari langkah 4 ke dalam ekspresi kendali optimal u^* pada langkah 2.

Simulasi

Simulasi pada penelitian ini menggunakan bantuan program komputer untuk mencari kendali optimal pada model Leukemia Myeloid Kronik dengan terapi imatinib dan sitarabin.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Model Matematika Terapi Obat Leukemia Myeloid Kronik

Sistem persamaan diferensial yang diberikan di bawah ini menggambarkan interaksi antara sel T naive, sel T efektor, dan sel kanker leukemia pada pasien. Dalam model ini memperkenalkan

dua terapi obat, yaitu terapi bertarget dengan obat imatinib (u_1), dan kemoterapi sitotoksik dengan obat sitarabin (u_2),

$$\frac{dT_n}{dt} = s_n - u_2(t)d_n T_n - k_n T_n \left(\frac{C}{C+\eta} \right) \quad (1)$$

$$\frac{dT_e}{dt} = \alpha_n k_n T_n \left(\frac{C}{C+\eta} \right) + \alpha_e T_e \left(\frac{C}{C+\eta} \right) - u_2(t)d_e T_e - \gamma_e C T_e \quad (2)$$

$$\frac{dC}{dt} = (1-u_1(t))r_c C \ln \left(\frac{C_{\max}}{C} \right) - u_2(t)d_c C - \gamma_c C T_e \quad (3)$$

dengan populasi sel T naive, sel T efektor dan sel kanker pada model matematis dalam waktu t dinotasikan sebagai berikut:

$T_n(t)$: populasi sel T naive pada saat t .

$T_e(t)$: populasi sel T efektor pada saat t .

$C(t)$: populasi sel kanker pada saat t .

Setiap persamaan atau sistem dinamik di atas memiliki kondisi awal (*Initial Condition*) secara umum $T_n(0)$, $T_e(0)$, dan $C(0)$.

Dari persamaan (1)-(3), terdapat suatu fungsi tujuan (*indeks performa*) berfungsi sebagai dosis obat yang bertujuan untuk meminimalkan jumlah populasi sel kanker sehingga diperoleh dosis yang optimal, dimana fungsi tujuannya berbentuk kuadrat. Variabel kendali u_1 dan u_2 berfungsi sebagai kendali (kontrol) untuk mengurangi, menghambat dan mengendalikan populasi sel kanker sehingga didapat dosis obat optimal dengan interval waktu yang tepat dalam proses terapi leukemia myeloid kronik. Fungsi tujuan atau indeks performat yang akan diminimumkan yaitu:

$$J(u_1, u_2) = \int_0^{t_f} \left[C(t) + \frac{B_1}{2} u_1^2(t) + \frac{B_2}{2} u_2^2(t) \right] dt + B_3 C(t_f) - B_4 T_n(t_f) \quad (4)$$

Dari persamaan (1)-(3), juga akan ditunjukkan bahwa terdapat suatu kendali optimal dengan menggunakan *Pontryagins Maksimum Principle*, yang akan ditunjukkan oleh teorema berikut:

Teorema 1. (Karakteristik dari kendali optimal) (Nanda dkk., 2007)

Jika (u_1^*, u_2^*) adalah pasangan kendali optimal, dengan state T_n^* , T_e^* dan C^* maka terdapat variabel adjoin λ_1, λ_2 dan λ_3 yang memenuhi:

$$\lambda_1' = \lambda_1 \left(u_2 d_n + k_n \frac{C}{C+\eta} \right) - \lambda_2 \alpha_n k_n \frac{C}{C+\eta}$$

$$\lambda_2' = \lambda_3 \gamma_e C - \lambda_2 \left(\alpha_e \frac{C}{C+\eta} - u_2 d_e - \gamma_e C \right)$$

$$\lambda_3' = \lambda_1 k_n T_n \frac{\eta}{(C+\eta)^2} - 1 - \lambda_2 \left(\alpha_n k_n T_n \frac{\eta}{(C+\eta)^2} + \alpha_e T_e \frac{\eta}{(C+\eta)^2} - \gamma_e T_e \right) - \lambda_3 \left[(1-u_1) r_c \left(\ln \left(\frac{C_{\max}}{C} \right) - 1 \right) - u_2 d_c - \gamma_c T_e \right]$$

dengan $\lambda_1(t_f) = -B_4$, $\lambda_2(t_f) = 0$ dan $\lambda_3(t_f) = B_3$, untuk $u_1^*(t), u_2^*(t)$ dapat diwakili oleh

$$u_1^* = \frac{\lambda_3 r_c C \ln\left(\frac{C_{\max}}{C}\right)}{B_1} ; u_2^* = \frac{\lambda_1 d_n T_n + \lambda_2 d_e T_e + \lambda_3 d_c C}{B_2}$$

Dengan batas $m_1 \leq u_1 \leq M_1$ dan $m_2 \leq u_2 \leq M_2$

Bukti: Dari teorema di atas, langkah pertama yang akan dikerjakan yaitu dengan menentukan suatu bentuk *Hamiltonian* (H) yaitu

$$\begin{aligned} H = C(t) &+ \frac{B_1}{2} u_1^2(t) + \frac{B_2}{2} u_2^2(t) + \lambda_1 \left[s_n - u_2(t) d_n T_n - k_n T_n \left(\frac{C}{C+\eta} \right) \right] \\ &+ \lambda_2 \left[\alpha_n k_n T_n \left(\frac{C}{C+\eta} \right) + \alpha_e T_e \left(\frac{C}{C+\eta} \right) - u_2(t) d_e T_e - \gamma_e C T_e \right] \\ &+ \lambda_3 \left[(1-u_1(t)) r_c C \ln\left(\frac{C_{\max}}{C}\right) - u_2(t) d_c C - \gamma_c C T_e \right] \end{aligned}$$

dari bentuk *Hamiltonian* dapat ditentukan persamaan ko-keadaan (co-state) dari setiap sistem dinamik, sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \lambda_1' &= -\frac{\partial H}{\partial T_n} = \lambda_1 \left(u_2 d_n + k_n \frac{C}{C+\eta} \right) - \lambda_2 \alpha_n k_n \frac{C}{C+\eta} \\ \lambda_2' &= -\frac{\partial H}{\partial T_e} = \lambda_3 \gamma_c C - \lambda_2 \left(\alpha_e \frac{C}{C+\eta} - u_2 d_e - \gamma_e C \right) \\ \lambda_3' &= -\frac{\partial H}{\partial C} = \lambda_1 k_n T_n \frac{\eta}{(C+\eta)^2} - 1 - \lambda_2 \left(\alpha_n k_n T_n \frac{\eta}{(C+\eta)^2} + \alpha_e T_e \frac{\eta}{(C+\eta)^2} - \gamma_e T_e \right) \\ &\quad - \lambda_3 \left[(1-u_1) r_c \left(\ln\left(\frac{C_{\max}}{C}\right) - 1 \right) - u_2 d_c - \gamma_c T_e \right] \end{aligned}$$

Untuk variabel kendali yang dibatasi $m_1 \leq u_1 \leq M_1$ dan $m_2 \leq u_2 \leq M_2$, dapat ditentukan pasangan kendali optimal u_1 dan u_2 sebagai berikut:

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = B_1 u_1 - \lambda_3 r_c C \ln\left(\frac{C_{\max}}{C}\right) = 0 ; \frac{\partial H}{\partial u_2} = B_2 u_2 - \lambda_1 d_n T_n - \lambda_2 d_e T_e - \lambda_3 d_c C = 0$$

Akan diperoleh

$$u_1 = \frac{\lambda_3 r_c C \ln\left(\frac{C_{\max}}{C}\right)}{B_1} ; u_2 = \frac{\lambda_1 d_n T_n + \lambda_2 d_e T_e + \lambda_3 d_c C}{B_2}$$

Sehingga berlaku

$$u_1^* = \min \left\{ \max \left\{ m_1, \frac{\lambda_3 r_c C \ln\left(\frac{C_{\max}}{C}\right)}{B_1} \right\}, M_1 \right\}$$

$$u_2^* = \min \left\{ \max \left\{ m_2, \frac{\lambda_1 d_n T_n + \lambda_2 d_e T_e + \lambda_3 d_c C}{B_2} \right\}, M_2 \right\}$$

Pada kasus pengobatan kombinasi imatinib dan sitarabin, dengan mensubstitusi $u_1 = u_1^*$ dan $u_2 = u_2^*$ ke persamaan keadaan (state) (1)–(3), diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{dT_n^*}{dt} &= s_n - \left(\min \left\{ \max \left\{ m_2, \frac{\lambda_1 d_n T_n + \lambda_2 d_e T_e + \lambda_3 d_c C}{B_2} \right\}, M_2 \right\} \right) d_n T_n - k_n T_n \left(\frac{C}{C + \eta} \right) \\ \frac{dT_e^*}{dt} &= \alpha_n k_n T_n \left(\frac{C}{C + \eta} \right) + \alpha_e T_e \left(\frac{C}{C + \eta} \right) - \left(\min \left\{ \max \left\{ m_2, \frac{\lambda_1 d_n T_n + \lambda_2 d_e T_e + \lambda_3 d_c C}{B_2} \right\}, M_2 \right\} \right) d_e T_e - \gamma_e C T_e \\ \frac{dC^*}{dt} &= \left(1 - \left(\min \left\{ \max \left\{ m_1, \frac{\lambda_3 r_c C \ln \left(\frac{C_{\max}}{C} \right)}{B_1} \right\}, M_1 \right\} \right) \right) r_c C \ln \left(\frac{C_{\max}}{C} \right) \\ &\quad - \left(\min \left\{ \max \left\{ m_2, \frac{\lambda_1 d_n T_n + \lambda_2 d_e T_e + \lambda_3 d_c C}{B_2} \right\}, M_2 \right\} \right) d_e C - \gamma_c C T_e \end{aligned}$$

Penyelesaian Model Matematika Terapi Obat Leukemia Myeloid Kronik

Metode langsung didasarkan pada transformasi masalah kendali optimal ke dalam permasalahan non linear programming dengan mendiskretisasi persamaan keadaan dan kendali. Berdasarkan diskretisasi dari keadaan dan kendali, metode langsung dapat dikategorikan dalam tiga pendekatan berbeda (Subchan, 2009), yaitu:

1. Berdasarkan pada parameterisasi keadaan dan variabel kendali.
Kendali dan keadaan didiskretkan dan kemudian menghasilkan diskretisasi yang diselesaikan menggunakan suatu software NLP. Pendekatan kolokasi langsung berdasarkan pada diskretisasi keseluruhan dari keadaan dan kontrol. Sedangkan metode Pseudospectral Legendre, variabel keadaan dan variabel kendali didekati dengan menggunakan polinomial interpolasi Lagrange
2. Berdasarkan pada parameterisasi kendali.
Persamaan keadaan (state) dan fungsi tujuan dapat diselesaikan oleh integrasi numerik. Pendekatan ini dikenal sebagai parameterisasi kendali dan idenya adalah untuk mengestimasi variabel kendali dan menghitung variabel keadaan dengan mengintegrasikan persamaan keadaan.
3. Berdasarkan pada parameterisasi keadaan.
Parameterisasi persamaan keadaan dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan kendali optimal non linear tanpa kendala.

Kendali optimal dengan metode langsung diselesaikan dengan menggunakan software yang dapat langsung digunakan untuk memecahkan masalah *optimal control* dengan mendefinisikan masalah optimal control pada M-File dan disesuaikan dengan parameter yang diketahui. Nilai parameter dalam permasalahan optimal control ini diberikan pada Tabel 1.

Tabel 1: Estimasi Nilai Parameter

| No | Parameter | Deskripsi | Nilai Estimasi |
|----|-------------|--|---|
| 1 | s_n | Sumber populasi sel T naive | 0,29 |
| 2 | d_n | Angka kematian populasi sel T naive | 0,35 |
| 3 | d_e | Angka kematian populasi sel T efektor | 0,40 |
| 4 | d_c | Angka kematian populasi sel kanker | 0,012 |
| 5 | k_n | Diferensiasi populasi sel T naive | 0,066 |
| 6 | η | Michael-Menten | 140 |
| 7 | α_n | Proliferasi populasi sel T efektor | 0,39 |
| 8 | α_e | Sel T efektor yang merekrut sel imun | 0,65 |
| 9 | C_{max} | Populasi maksimum sel kanker | 160000 |
| 10 | r_c | Proliferasi populasi sel kanker | 0,011 |
| 11 | γ_e | Pengurangan populasi sel T efektor karena sel kanker | 0,79 |
| 12 | γ_c | Pengurangan populasi sel kanker karena sel T efektor | 0,058 |
| 13 | B_1 | Bobot efek yang merugikan dari obat imatinib | 1000 |
| 14 | B_2 | Bobot efek yang merugikan dari obat sitarabin | 500 |
| 15 | B_3 | Bobot penyelamatan populasi sel kanker | 0,1 |
| 16 | B_4 | Bobot penyelamatan populasi sel T naive | 100000 |
| 17 | $m_1 ; m_2$ | Batas bawah $u_1 ; u_2$ | 0 ; 1 |
| 18 | $M_1 ; M_2$ | Batas atas $u_1 ; u_2$ | 0,9; $\min\left\{\frac{1}{d_n}, \frac{1}{d_e}, \frac{1}{d_c}\right\}$ |

Simulasi Secara Numerik dan Analisa Hasil Simulasi

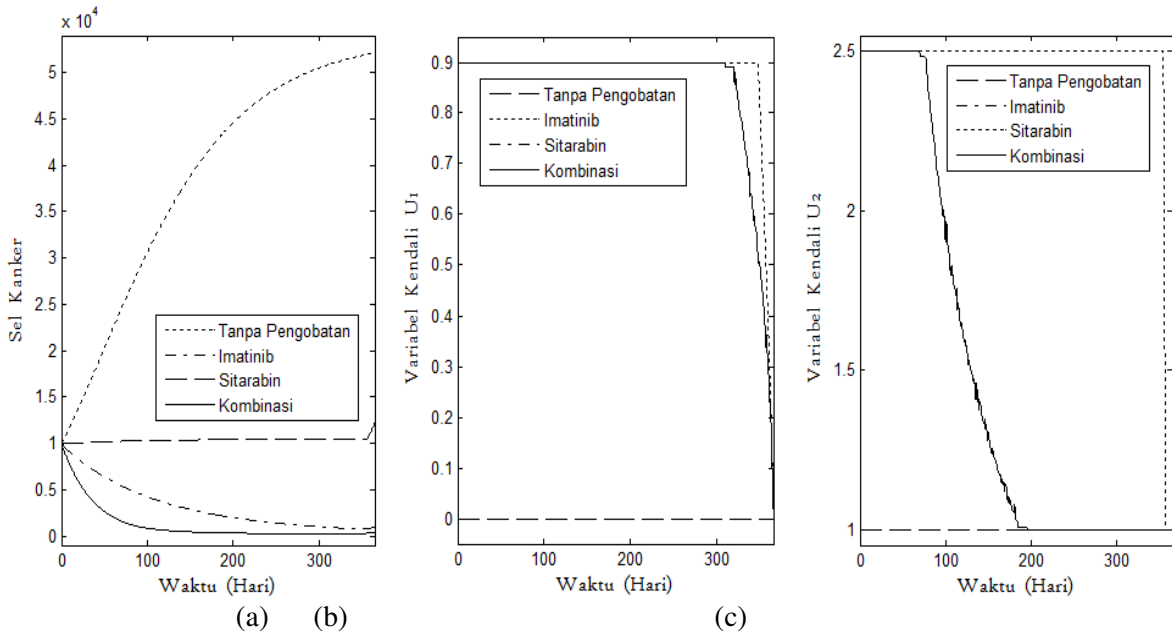
Proses simulasi populasi sel T naive, populasi sel T efektor, populasi sel kanker dan dosis obat dilakukan dengan waktu awal $t_0 = 0$, waktu akhir tetap $t_f = 365$, yang berarti bahwa simulasi untuk waktu proses terapi leukemia myeloid kronik dilakukan selama 365 hari atau satu tahun. Nilai variabel kendali untuk dosis obat imatinib (u_1) berkisar antara 0 dan 0.9 atau ($0 \leq u_1 \leq 0,9$), dan untuk nilai variabel kendali untuk dosis obat sitarabin (u_2) berkisar antara 1

dan $\min\left\{\frac{1}{d_n}, \frac{1}{d_e}, \frac{1}{d_c}\right\}$ atau $\left(1 \leq u_2 \leq \min\left\{\frac{1}{d_n}, \frac{1}{d_e}, \frac{1}{d_c}\right\}\right)$. Proses simulasi dalam penentuan

interval waktu pengobatan dan dosis optimal dibagi dalam beberapa kasus dengan populasi awal (*inisial value*) yang berbeda yang bertujuan untuk mengetahui bagaimana hubungan antara dosis obat optimal yang dihasilkan dengan populasi sel T naive, populasi sel T efektor, dan populasi sel kanker. Hal ini dapat dilihat melalui nilai dosis obat optimal hasil simulasi dan trayektori dari masing-masing komponen model, sebagai berikut:

Kasus untuk populasi sel kanker lebih besar dari populasi sel T naive ($C(0) > T_n(0)$).

Kondisi awal masing-masing populasi sel sebagai berikut: ukuran populasi sel kanker awal 10000 sel, populasi sel T naive awal 1510 sel, populasi sel T efektor awal 10 sel, dan menggunakan ekstimasi nilai parameter pada Tabel 1.



Gambar 1: Grafik Perbandingan (a) Sel Kanker (b) Variabel Kendali u_1 (c) Variabel Kendali u_2 , dengan $T_n(0) = 1510$, $T_e(0) = 10$ dan $C(0) = 10000$, untuk $C(0) > T_n(0)$.

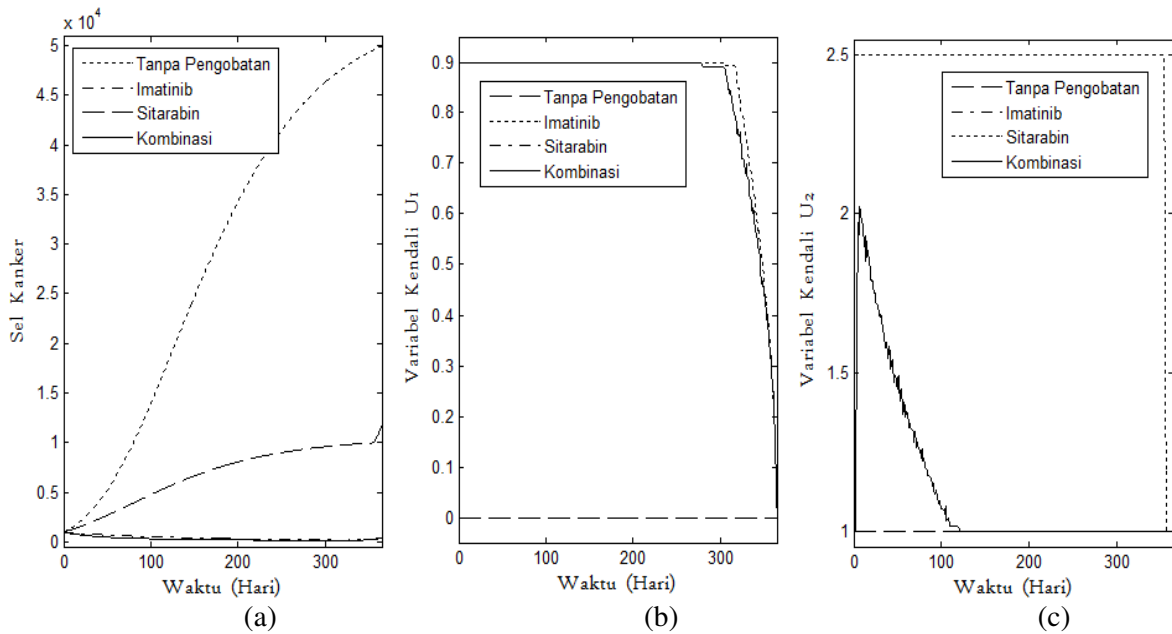
Pada Gambar 1(a) trayektori sel kanker pada terapi dengan kombinasi obat imatinib dan sitarabin menunjukkan hasil yang lebih baik dalam mengendalikan proliferasi sel kanker pada pasien LMK sampai titik minimum 179.77386. Terapi dengan obat imatinib dapat mengendalikan proliferasi sel kanker pada pasien LMK sampai titik minimum 744.47137. Terapi dengan obat sitarabin dapat mengendalikan proliferasi sel kanker pada pasien LMK sampai titik minimum 9977.66450. Sedangkan tanpa pengobatan, proliferasi sel kanker pada penderita LMK meningkat secara drastis, sehingga menyebabkan populasi sel T efektor habis (nol) pada hari ke 209, yang dapat mengakibatkan kematian karena tidak adanya sistem kekebalan tubuh pada penderita LMK.

Pada Gambar 1(b) dapat dilihat bahwa trayektori variabel kendali u_1 akan maksimum pada awal pengobatan imatinib dan kombinasi terapi. Namun kombinasi terapi lebih cepat mengalami penurunan kendali u_1 pada hari ke-309, dibandingkan terapi imatinib yang mengalami penurunan kendali u_1 pada hari ke-348. Sedangkan terapi sitarabin dan tanpa pengobatan, tidak menggunakan kendali u_1 .

Pada Gambar 1(c) dapat dilihat bahwa trayektori variabel kendali u_2 akan maksimum pada awal pengobatan sitarabin dan kombinasi terapi. Namun kombinasi terapi lebih cepat mengalami penurunan kendali u_2 hari ke-70 dan menurun sampai titik minimum satu pada hari ke-196, dibandingkan terapi sitarabin yang mengalami penurunan kendali u_2 pada hari ke-355. Sedangkan terapi imatinib dan tanpa pengobatan, tidak menggunakan kendali u_2 .

Kasus untuk populasi sel kanker lebih kecil dari populasi sel T naive ($C(0) < T_n(0)$).

Kondisi awal masing-masing populasi sel sebagai berikut: ukuran populasi sel kanker awal 1000 sel, populasi sel T naive awal 1510 sel, populasi sel T efektor awal 10 sel, dan menggunakan estimasi nilai parameter pada Table 1.



Gambar 2: Grafik Perbandingan (a) Sel Kanker (b) Variabel Kendali u_1 (c) Variabel Kendali u_2 , dengan $T_n(0) = 1510$, $T_e(0) = 10$ dan $C(0) = 1000$, untuk $C(0) < T_n(0)$.

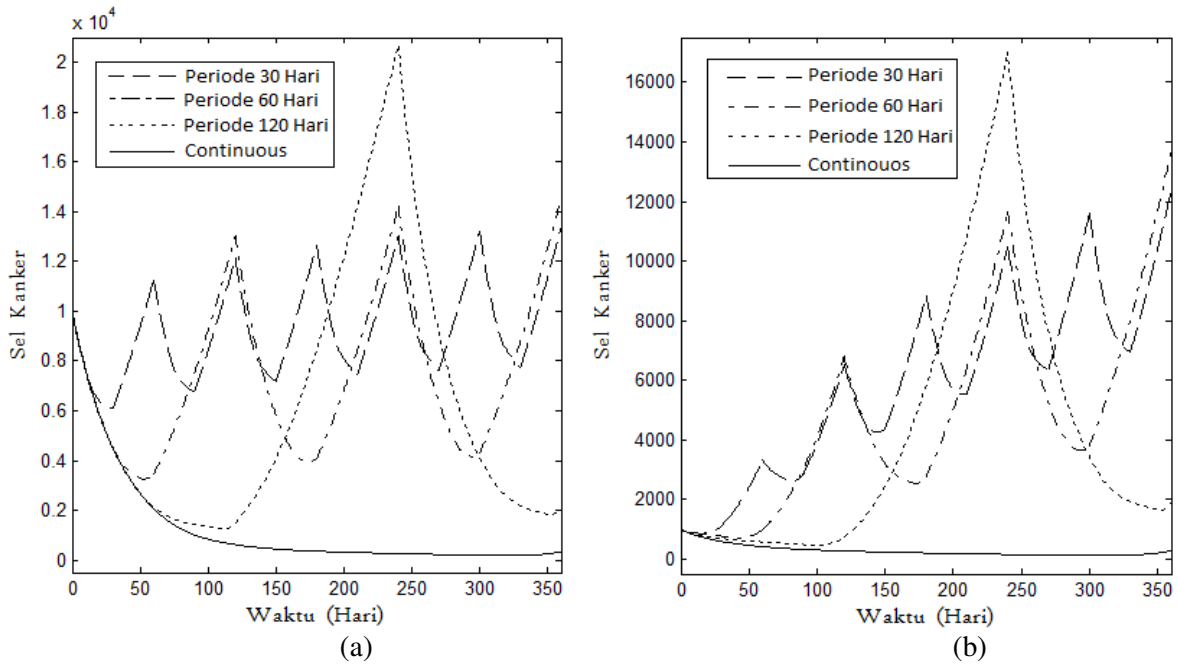
Pada Gambar 2(a) trayektori sel kanker pada terapi dengan kombinasi obat imatinib dan sitarabin menunjukkan hasil yang lebih baik dalam mengendalikan proliferasi sel kanker pada pasien LMK sampai titik minimum 118.57602. Terapi dengan obat imatinib dapat mengendalikan proliferasi sel kanker pada pasien LMK sampai titik minimum 168.91812. Terapi dengan obat sitarabin dapat mengendalikan proliferasi sel kanker pada pasien LMK, sehingga proliferasi sel kanker tidak mengalami peningkatan secara draktis seperti yang di alami penderita LMK dengan tanpa pengobatan, proliferasi sel kanker mengalami peningkatan secara draktis dari titik minimum 1000 sampai ke titik maksimum 49955.59265, sehingga menyebabkan populasi sel T efektor habis (no) pada hari ke 213 yang dapat mengakibatkan kematian karena tidak adanya sistem kekebalan tubuh pada penderita LMK.

Pada Gambar 2(b) dapat dilihat bahwa trayektori variabel kendali u_1 akan maksimum pada awal pengobatan imatinib dan kombinasi terapi. Namun kombinasi terapi lebih cepat mengalami penurunan kendali u_1 pada hari ke-280, dibandingkan terapi imatinib yang mengalami penurunan kendali u_1 pada hari ke 307. Sedangkan terapi sitarabin dan tanpa pengobatan, tidak menggunakan kendali u_1 .

Pada Gambar 2(c) dapat dilihat bahwa trayektori variabel kendali u_2 akan maksimum pada awal pengobatan sitarabin, dan mengalami penurunan dosis pada hari ke-355, sedangkan kombinasi terapi trayektori variabel kendali u_2 akan maksimum pada hari ke-4 dengan titik maksimum 2.02397 selanjutnya mengalami penurunan sampai titik minimum satu pada hari ke-121. Untuk terapi imatinib dan tanpa pengobatan, tidak menggunakan kendali u_2 .

Strategi Terapi pada Pasien LMK.

Pada periodisasi 30 hari, 60 hari, dan 120 hari dilakukan terapi dan tanpa terapi secara bergantian dengan periodisasi masing-masing waktu yang ditentukan (30 hari, 60 hari, 120 hari), untuk setiap kasus $C(0) > T_n(0)$ dan kasus $C(0) < T_n(0)$.



Gambar 3: Perbandingan strategi terapi LMK periode 30 hari, 60 hari, dan 120 hari serta continuous, untuk (a) kasus $C(0) > T_n(0)$ dan (b) kasus $C(0) < T_n(0)$.

Pada Gambar 3(a) kasus $C(0) > T_n(0)$, dengan kondisi awal masing-masing populasi sel sebagai berikut: ukuran populasi sel kanker awal 10000 sel, populasi sel T naive awal 1510 sel, populasi sel T efektor awal 10 sel, memberikan hasil:

| Strategi Terapi LMK | Hasil Minimum | | Hasil Maksimum | |
|---------------------|---------------------|------|---------------------|------|
| | Populasi Sel Kanker | Hari | Populasi Sel Kanker | Hari |
| Periode 30 Hari | 5846,53050 | 27 | 13347,00540 | 360 |
| Periode 60 Hari | 3195,90165 | 55 | 14560,10102 | 360 |
| Periode 120 Hari | 1258,80923 | 110 | 20628,24768 | 240 |
| Continuous | 179,77386 | 323 | 10000 | 0 |

Pada Gambar 3(b) kasus $C(0) < T_n(0)$, dengan kondisi awal masing-masing populasi sel sebagai berikut: ukuran populasi sel kanker awal 1000 sel, populasi sel T naive awal 1510 sel, populasi sel T efektor awal 10 sel, memberikan hasil:

| Strategi Terapi LMK | Hasil Minimum | | Hasil Maksimum | |
|---------------------|---------------------|------|---------------------|------|
| | Populasi Sel Kanker | Hari | Populasi Sel Kanker | Hari |
| Periode 30 Hari | 846,44681 | 16 | 12345,81645 | 360 |
| Periode 60 Hari | 712,71661 | 44 | 13701,72187 | 360 |
| Periode 120 Hari | 463,98387 | 98 | 17022,53870 | 240 |
| Continuous | 118,57602 | 310 | 1000 | 0 |

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

- a. Ukuran besar kecilnya populasi awal sel kanker ($C(0)$), dan populasi sel T naive ($T_n(0)$) pada kondisi awal sangat berpengaruh terhadap dosis obat optimal yang diterapkan dalam proses terapi pada pasien LMK.
- b. Terapi dengan continuous (terus menerus) lebih baik dibandingkan dengan strategi periodisasi (30 hari, 60 hari, dan 120 hari), pada terapi pasien LMK.
- c. Interval waktu yang diperlukan bagi dosis obat (kendali) untuk bereaksi dalam menghambat proliferasi sel kanker sangat dipengaruhi oleh jumlah populasi sel kanker dan jumlah populasi sel kekebalan.

Saran

Perlu dilakukan penelitian lebih lanjut tentang proses terapi kanker, yang mengaitkan kendala-kendala seperti jenis kelamin, usia, ketahanan tubuh, jenis kanker, dan lain-lain.

DAFTAR PUSTAKA

- Biantoro, I.K. (2008), *Targeted Therapy Chronic Myeloid Leukemia (CML)*, FK UGM, RS Dr. Sardjito, Yogyakarta.
- Lesnussa, Y.A. (2010), *Aplikasi Kendali Optimum Dalam Penentuan Interval Waktu dan Dosis Optimal Pada Kemoterapi Kanker*, Tesis Jurusan Matematika, FMIPA ITS, Surabaya.
- Maziun, N.A. (2010), *Analisis Stabilitas Lokal dan Kontrol Optimal pada Terapi Obat Dalam Pengobatan Kanker*, Tugas Akhir Jurusan Matematika, FMIPA ITS, Surabaya.
- Moore, H. dan Li, N.K. (2003), "A Mathematical Model For Chronic Myelogenous Leukemia (CML) and T Cell Interaction", *Journal of Theoretical Biology*, No.227, hal.513-523.
- Nanda, S., Moore, H. dan Lenhart, S. (2007), "Optimal Control of Treatment In a Mathematical Model of Chronic Myelogenous Leukemia", *Mathematical Biosciences*, No.210, hal.143-156.
- Naidu, D.S.(2002). *Optimal Control Systems*, CRC PRESS, NewYork.
- Subchan, S, dan Zbikowski, R, (2009), *Computational Optimal Control Tools and Practise*, John Willey and Sons, Ltd, Publication, United Kingdom.

PEMILIHAN GURU BERPRESTASI MENGUNAKAN METODE AHP DAN TOPSIS

Juliyanti¹, Mohammad Isa Irawan², dan Imam Mukhlash²

¹Mahasiswa Pascasarjana Matematika FMIPA ITS Surabaya dan Guru Matematika MAN 2
Kandangan Hulu Sungai Selatan, Kalimantan Selatan

²Dosen Pascasarjana Jurusan Matematika FMIPA ITS Surabaya
Email: juliyanti09@mhs.matematika.its.ac.id

Abstrak

Paper ini akan mengkaji tentang aplikasi MCDM (*Multiple Criteria Decision Making*) dalam permasalahan pemilihan guru berprestasi dengan kriteria penilaian: portofolio, tes tertulis, tes kepribadian, wawancara, membuat makalah dan presentasi. Dari metode ini dapat dibuat sebuah sistem pengambilan keputusan yang dapat digunakan secara efektif dan efisien. Dalam penelitian ini digunakan metode AHP (*Analytical Hierarchy Process*) untuk pembobotan kriteria dan uji tingkat konsistensi terhadap matriks perbandingan berpasangan. Jika matriks telah konsisten maka dapat dilanjutkan ke proses metode TOPSIS (*Technique For Orders Reference by Similarity to Ideal Solution*) dalam melakukan perankingan untuk menentukan alternatif terpilih dengan menggunakan input bobot kriteria yang diperoleh dari metode AHP.

Kata kunci: AHP, TOPSIS, MCDM, Guru Berprestasi.

PENDAHULUAN

Metode MCDM merupakan suatu metode pengambilan keputusan untuk menetapkan alternatif terbaik dari sejumlah alternatif berdasarkan kriteria tertentu. Dalam penelitian ini diambil contoh permasalahan bidang pendidikan yaitu pemilihan guru berprestasi tingkat SLTA. Alasan peneliti mengambil topik pemilihan guru berprestasi ini selain karena sebagai orang yang bekerja di bidang pendidikan juga karena pemilihan guru berprestasi ini diadakan setiap tahun di seluruh Indonesia, sehingga untuk selanjutnya peneliti ingin memberikan solusi berupa sistem pengambilan keputusan yang bisa digunakan secara efektif dan efisien.

Kelebihan AHP diantaranya adalah AHP berdasar pada matriks perbandingan pasangan dan melakukan analisis konsistensi. Sedangkan metode TOPSIS dapat menyelesaikan pengambilan keputusan secara praktis, karena konsepnya sederhana dan mudah dipahami, komputasinya efisien, serta memiliki kemampuan mengukur kinerja relatif dari alternatif-alternatif keputusan.

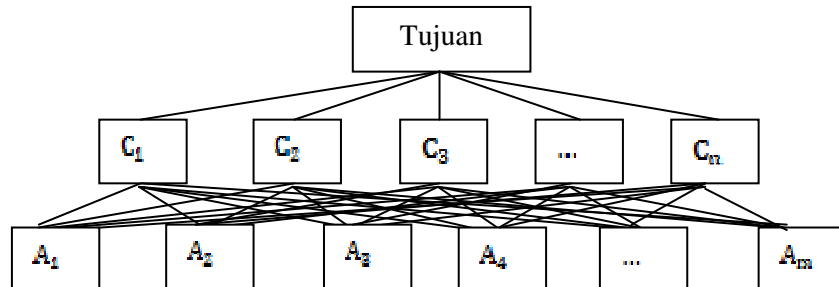
Beberapa peneliti telah menggunakan metode MCDM pada permasalahan pemilihan kualitas pegawai diantaranya seleksi karyawan untuk kualifikasi pekerjaan yang terbaik dengan menggunakan fuzzy TOPSIS (Dursun dan Karsak, 2009), fuzzy AHP (*Analytical Hierarchy Process*) yang digunakan pada permasalahan pencocokan pada konstruksi jembatan (Pan, 2008) dan alokasi secara dinamis operator pada proses manufacturing dengan metode AHP dan TOPSIS (Yang, dkk, 2007).

Tujuan penelitian ini adalah untuk membangun suatu model pengambilan keputusan multi kriteria dengan menggunakan metode AHP untuk menentukan bobot dari kriteria yang telah ditentukan dan kemudian melakukan perankingan alternatif dengan menggunakan metode TOPSIS. Untuk melihat perbedaan hasil pengambilan keputusan antara metode yang digunakan pihak Diknas Kabupaten Hulu Sungai Selatan dengan metode AHP dan TOPSIS digunakan kriteria jarak Hamming (Siang, 2011).

Metode AHP

Metode AHP (*Analytical Hierarchy Process*) dikembangkan awal tahun 1970-an oleh Thomas L. Saaty, dari Universitas Pittsburg. Model AHP memakai persepsi manusia yang dianggap 'ekspert' sebagai input utamanya. Kriteria ekspert disini bukan berarti bahwa orang

tersebut haruslah jenius, pintar, bergelar doktor dan sebagainya tetapi lebih mengacu pada orang yang mengerti benar permasalahan yang dilakukan, merasakan akibat suatu masalah atau punya kepentingan terhadap masalah tersebut. Pengukuran hal-hal kualitatif merupakan hal yang sangat penting mengingat makin kompleksnya permasalahan di sekitar kita dengan tingkat ketidakpastian yang makin tinggi. Selain itu, AHP juga menguji konsistensi penilaian. Struktur hierarki AHP dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 1. Struktur hierarki AHP

(Saaty, 2006)

Dalam menyelesaikan persoalan AHP ada beberapa prinsip dasar (Saaty, 2006) yang dipahami antara lain:

- a. *Decomposition*, setelah mendefinisikan permasalahan atau persoalan, maka perlu dilakukan dekomposisi, yaitu memecah persoalan yang utuh menjadi unsur-unsur, sampai yang sekecil-kecilnya.
- b. *Comparatif Judgement*, prinsip ini berarti membuat penilaian tentang kepentingan relatif dua elemen pada suatu tingkat tertentu dalam kaitannya dengan tingkatan di atasnya. Penilaian ini merupakan inti dari AHP, karena akan berpengaruh terhadap prioritas elemen-elemen. Hasil dari penelitian ini lebih mudah disajikan dalam bentuk matriks *Pairwise Comparison*.
- c. *Synthesis of Priority*, dari matriks *pairwise comparison* vektor eigen (ciri)nya untuk mendapatkan prioritas lokal, karena matriks *pairwise comparison* terdapat pada tingkat lokal, maka untuk melakukan secara global harus dilakukan sintesis diantara prioritas lokal. Prosedur melakukan sintesis berbeda menurut bentuk hirarki.
- d. *Local Consistency*, konsistensi memiliki dua makna. Pertama adalah bahwa objek-objek yang serupa dapat dikelompokkan sesuai dengan keseragaman dan relevansinya. Kedua adalah tingkat hubungan antara objek-objek yang didasarkan pada kriteria tertentu.

Dalam paper ini, peneliti melakukan proses metode AHP yang dibangun dalam 3 tahap berikut:

1. Penyusunan matriks perbandingan berpasangan (\tilde{A}) yang merepresentasikan tingkat kepentingan antar kriteria berdasarkan skala preferensi AHP.

$$\tilde{A} = [\tilde{a}_{im}] = \begin{bmatrix} 1 & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ \frac{1}{\tilde{a}_{12}} & 1 & \dots & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\tilde{a}_{1n}} & \frac{1}{\tilde{a}_{2n}} & \dots & 1 \end{bmatrix}, i, m = 1, 2, \dots, n$$

Misalkan C_1, C_2, \dots, C_n merupakan himpunan elemen, dimana a_{im} menyatakan jumlah elemen matriks perbandingan berpasangan C_i dan C_m . Dalam matriks perbandingan berpasangan yang diperoleh berdasarkan skala preferensi AHP memberikan nilai numerik untuk berbagai tingkat preferensi. Standar skala preferensi yang digunakan AHP diperlihatkan pada tabel berikut.

Tabel 1. Skala preferensi untuk perbandingan pasangan

| Tingkat Preferensi | Nilai Angka |
|---|-------------|
| Sama disukai | 1 |
| Sama hingga cukup disukai | 2 |
| Cukup disukai | 3 |
| Cukup hingga sangat disukai | 4 |
| Sangat disukai | 5 |
| Sangat disukai hingga amat sangat disukai | 6 |
| Amat sangat disukai | 7 |
| Amat sangat disukai hingga luar biasa disukai | 8 |
| Luar biasa disukai | 9 |

(Taylor, 2008)

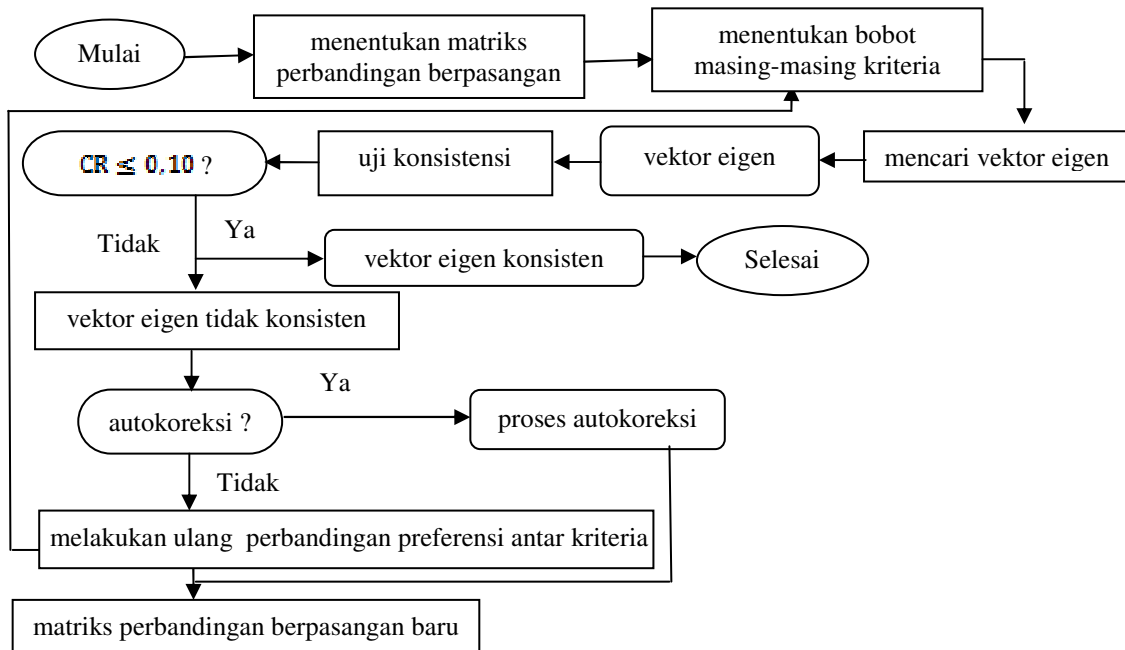
2. Normalisasi matriks keputusan. Setiap kolom matriks dijumlahkan, kemudian setiap elemen pada matriks dibagi dengan nilai total kolomnya. Setelah itu, menentukan rata-rata baris matriks atau vektor yang memuat himpunan sejumlah n bobot w_1, w_2, \dots, w_n .
3. Analisis konsistensi
 Analisis konsistensi yang terlebih dahulu dilakukan adalah menghitung Indeks konsistensi (CI) dengan bentuk persamaan: $CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n-1}$. Analisis konsistensi lain yang juga harus dihitung adalah CR (consistency ratio). Secara umum, jika $CR = \frac{CI}{RI} \leq 0,10$ maka matriks perbandingan berpasangan konsisten, sehingga bobot yang diberikan dapat digunakan pada perankingan alternatif dalam metode TOPSIS. Tingkat konsistensi yang dapat diterima ditentukan dengan membandingkan CI terhadap indeks acak (random acak), RI, yang merupakan indeks konsistensi dari matriks perbandingan berpasangan yang dibuat secara acak.

Tabel 2. Nilai indeks konsistensi random untuk perbandingan n item

| | | | | | | | |
|--------------------------|------|------|------|------|------|------|-----|
| Ukuran Matriks (n) | 1,2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | ... |
| Nilai Indeks Random (RI) | 0,00 | 0,58 | 0,90 | 1,12 | 1,24 | 1,32 | ... |

(Taylor, 2008)

Proses untuk metode AHP dapat digambarkan seperti yang tampak pada gambar berikut.



Gambar 2. Bagan alir proses metode AHP

Metode TOPSIS

TOPSIS (*Technique For Orders Reference by Similarity to Ideal Solution*) adalah salah satu metode pengambilan keputusan multi kriteria yang pertama kali diperkenalkan oleh Yoon dan Hwang (1981). Metode ini menggunakan prinsip bahwa alternatif yang terpilih harus mempunyai jarak terdekat dari solusi ideal positif dan terjauh dari solusi ideal negatif. Pilihan akan diurutkan berdasarkan nilai sehingga alternatif yang memiliki jarak terpendek dengan solusi ideal positif adalah alternatif yang terbaik. Dengan kata lain, alternatif yang memiliki nilai yang lebih besar itulah yang lebih baik untuk dipilih.

Dalam penelitian ini dilakukan prosedur TOPSIS dengan tahap sebagai berikut:

1. Menentukan normalisasi matriks keputusan. Nilai ternormalisasi r_{ij} dihitung dengan $r_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m x_{ij}^2}}$ dengan $i = 1, 2, \dots, m$; dan $j = 1, 2, \dots, n$.

2. Menentukan bobot ternormalisasi matriks keputusan. Nilai bobot ternormalisasi v_{ij} dihitung dengan persamaan: $v_{ij} = w_j r_{ij}$; $i = 1, 2, \dots, m$; dan $j = 1, 2, \dots, n$.
dimana w_j adalah bobot dari atribut atau kriteria ke- j .

3. Menentukan solusi ideal positif dan ideal negatif. A^+ dan A^- didefinisikan sebagai nilai bobot ternormalisasi.

$$A^+ = \{v_1^+, \dots, v_j^+, \dots, v_n^+\} = \{(max v_{ij} | j \in J_1), (max v_{ij} | j \in J_2)\} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$A^- = \{v_1^-, \dots, v_j^-, \dots, v_n^-\} = \{(min v_{ij} | j \in J_1), (min v_{ij} | j \in J_2)\} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Dimana J_1 terasosiasi dengan kriteria keuntungan dan J_2 terasosiasi dengan kriteria biaya.

4. Menghitung jarak dengan menggunakan jarak Euclidean dimensi n . Jarak antara setiap alternatif dengan solusi ideal positif diberikan sebagai: $S_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^+)^2}$; $i = 1, 2, \dots, m$

$$\text{Hal yang sama, untuk solusi ideal negatif, diberikan sebagai: } S_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^-)^2};$$

$i = 1, 2, \dots, m$

5. Hitung kedekatan relatif dengan solusi ideal. Kedekatan relatif dari alternatif A_j didefinisikan sebagai: $C_i^* = \frac{S_i^-}{S_i^+ + S_i^-}$; $i = 1, 2, \dots, m$.

Catatan bahwa $0 \leq C_i^* \leq 1$, dimana $C_i^* = 0$ bila $A_i = A^-$, dan $C_i^* = 1$ bila $A_i = A^+$.

6. Melakukan perankingan pilihan alternatif. Memilih sebuah alternatif dengan C_i^* maksimum atau meranking alternatif C_i^* secara *descending*.

(Yoon dan Hwang, 1995)

Dalam penyelesaian suatu kasus, TOPSIS menggunakan model masukan adaptasi dari metode lain (misalnya: AHP, UTA, ELECTRE, TAGUCHI dan lain-lain). Pada permasalahan ini, metode AHP membandingkan tiap kriteria menggunakan matriks perbandingan berpasangan. Setelah itu normalisasi matriks perbandingan berpasangan sehingga diperoleh vektor bobot kriteria, kemudian dilakukan uji konsistensi, dimana bila matriks perbandingan berpasangan konsisten maka bobot kriteriadapat digunakan sebagai input pada metode TOPSIS (Kusumadewi, 2006).

Hamming Distance

Dalam paper ini digunakan perhitungan jarak Hamming untuk menghitung ranking alternatif data guru berprestasi yang diperoleh dari Diknas terkait dengan perhitungan yang menggunakan metode AHP-TOPSIS. Fungsi jarak Hamming memberikan ukuran perbedaan / jarak antara dua buah string yang memiliki panjang yang sama.

Fungsi jarak Hamming didefinisikan sebagai:

$$H: \sum^n \times \sum^n \rightarrow Z^+$$

(himpunan bilangan bulat positif)

$H(s,t)$ = banyaknya posisi dimana s dan t memiliki harga yang berbeda.

Contoh: $H(11111, 00000) = 5$, karena kedua string berbeda di semua posisi.

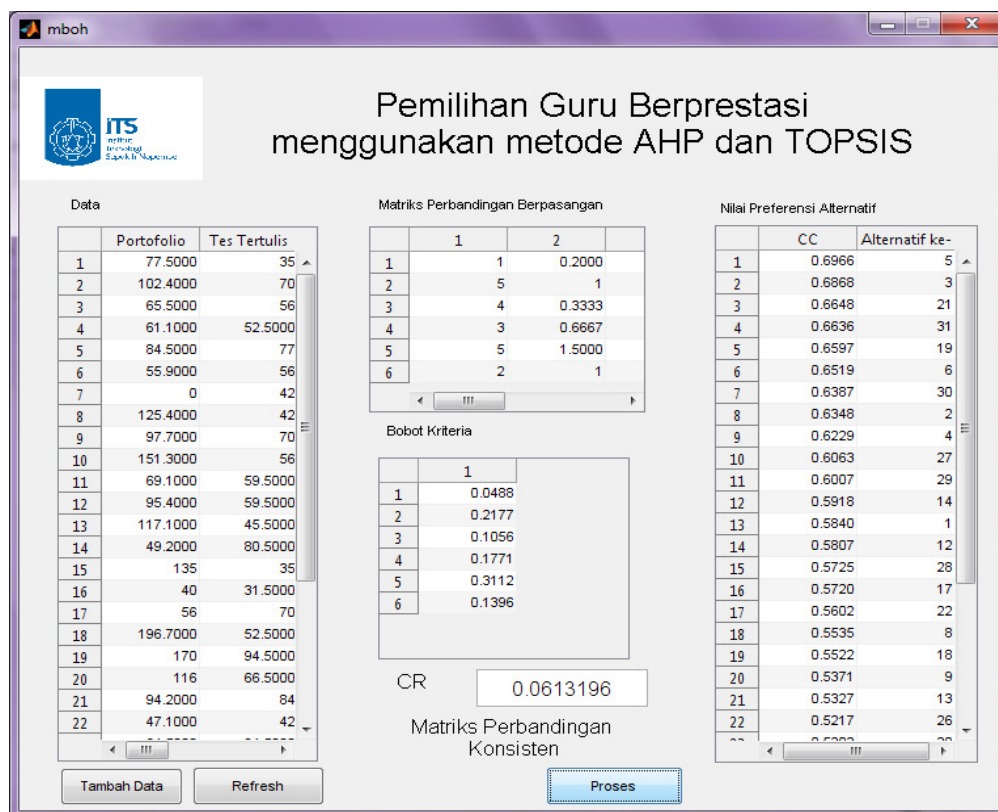
$H(11000, 00010) = 3$, karena kedua string berbeda di 3 posisi yaitu ke-1, 2, dan 4.

(Siang, 2011)

PEMBAHASAN

Data kriteria yang diambil pada penelitian ini sebanyak 6 item, yaitu: portofolio, tes tertulis, tes kepribadian, wawancara, membuat makalah, dan presentasi. Sedangkan data alternatif (calon peserta guru berprestasi) yang diambil sebanyak 32 orang. Data kriteria dan nilai setiap alternatif tersebut diperoleh dari hasil penilaian yang telah dilakukan oleh pihak Diknas Hulu Sungai Selatan sedangkan nilai perbandingan antar kriteria diperoleh dari hasil wawancara dengan pihak Diknas berdasarkan standar skala preferensi AHP.

Nilai CR yang diperoleh adalah $0.0613 < 0,10$ berarti matriks tersebut konsisten. Setelah matriks konsisten, maka dapat dilanjutkan ke proses perankingan alternatif dengan metode TOPSIS. Berikut ini adalah hasil dari pengambilan keputusan menggunakan metode AHP dan TOPSIS yang dilakukan dengan software MATLAB 2009.



Gambar 3. Hasil pengambilan keputusan menggunakan metode AHP dan TOPSIS

Output yang dihasilkan dari penelitian ini adalah sebuah alternatif yang memiliki nilai tertinggi dibandingkan dengan alternatif yang lain. Alternatif yang dimaksud adalah kandidat guru berprestasi yang ikut seleksi. Dari hasil perhitungan metode TOPSIS dengan software diperoleh alternatif / guru berprestasi urutan ke-5 yang mempunyai nilai kedekatan relatif tertinggi yaitu 0,6966.

Dalam permasalahan pemilihan guru berprestasi dengan metode ini menghasilkan urutan alternatif yang berbeda dengan data yang diperoleh dari pihak Diknas, hal ini kemungkinan disebabkan karena informasi yang diperoleh kurang lengkap dan pihak terkait yang diminta informasi / pengambil keputusan tidak menguasai sepenuhnya permasalahan yang ada. Dalam penelitian ini digunakan jarak Hamming (*Hamming distance*) untuk menghitung beda posisi ranking alternatif data guru berprestasi yang diperoleh dari Diknas dengan perhitungan yang menggunakan metode AHP-TOPSIS. Berdasarkan hasil penelitian dengan menggunakan fungsi jarak Hamming adalah sebagai berikut:

$H(22\ 7\ 11\ 19\ 6\ 18\ 30\ 13\ 16\ 10\ 31\ 12\ 17\ 15\ 32\ 28\ 20\ 2\ 1\ 14\ 3\ 23\ 26\ 25\ 24\ 27\ 9\ 21\ 8\ 5\ 4\ 29,\ 13\ 8\ 2\ 9\ 1\ 6\ 32\ 18\ 20\ 25\ 24\ 14\ 21\ 12\ 29\ 30\ 16\ 19\ 5\ 23\ 3\ 17\ 28\ 27\ 26\ 22\ 10\ 15\ 11\ 7\ 4\ 31) = 30$

KESIMPULAN

Dari penelitian yang telah dilakukan dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Metode MCDM dengan kombinasi AHP-TOPSIS telah memadai untuk digunakan dalam proses pemilihan, dalam penelitian ini pemilihan guru berprestasi. Pada kasus ini penentuan bobot kriteria dilakukan dengan metode AHP dan proses perankingan alternatif dengan metode TOPSIS. Hasil yang diperoleh dari metode ini mempunyai perbedaan posisi perankingan yang sangat signifikan dengan hasil dari metode yang digunakan oleh pihak Diknas terkait. Kesamaan ranking hanya terdapat pada alternatif ke 21 dan 31.
2. Dengan metode AHP-TOPSIS ini dapat dibangun sebuah sistem pengambilan keputusan untuk membantu proses pemilihan berdasarkan kriteria-kriteria yang ditentukan sehingga bisa dilakukan proses perhitungan yang lebih efektif dan efisien.

DAFTAR PUSTAKA

- Taylor, B.W. (2008), Edisi 8, *Introduction To Management Science*, Salemba Empat. Jakarta.
- Dagdeviren, M, dan Yavuz, S, Kilinc, N (2009), "Weapon selection using the AHP and TOPSIS methods under fuzzy environment", *Expert System with Applications*, 36, Hal. 8143-8151.
- Dursun M. dan Karsak E.E. (2009), "A Fuzzy MCDM Approach for Personnel Selection", *Expert Systems with Applications*, doi: 10.1016/j.eswa.2009.11.067.
- Kusumadewi, S (2006), *Fuzzy Multi-Atribut Decision Making (Fuzzy MADM)*, Graha Ilmu. Yogyakarta.
- Onut, S dan Soner, S (2008), "Transshipment site selections using the AHP and TOPSIS approaches under fuzzy environment", *Waste Management*, 28, Hal 1552-1559.
- Saaty, T.L. dan Vargas, L.G. (2006), *Decision Making With The Analytic Network Process*, Springer . United States of America.
- Siang, J.J.(2009) *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*, Andi Offset. Yogyakarta.
- Yang, T., Chen, C.M. dan Hung, C.C. (2007), "Multiple attribute decision-making methods for the dynamic operator allocation problem", *Mathematics and Computers in Simulation*, 73, 285–299.
- Yoon, K.P dan Hwang, C.L (1995), *Multiple attribute decision making; An Introduction*, Sage Publications, United States of America.

**KENDALI OPTIMAL PADA PENURUNAN EMISI CO₂
DAN EFEK RUMAH KACA DI INDONESIA
MENGUNAKAN METODE LANGSUNG DAN TIDAK LANGSUNG**

Aprilia Dwi Handayani, Subchan

*Pasca Sarjana Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya
Email: handayani_dwi_aprilia@yahoo.com/subchan@matematika.its.ac.id*

Abstrak

Salah satu isu internasional yang dewasa ini banyak mendapat sorotan dari berbagai kalangan adalah pemanasan global yang disebabkan oleh gas rumah kaca, seperti karbon dioksida (CO₂). Untuk mengurangi emisi CO₂ tanpa membatasi pertumbuhan ekonomi, beberapa langkah yang dapat dilakukan adalah perluasan kawasan hutan dengan cara reboisasi dan penerapan teknologi bersih. Mengingat keterbatasan sumber daya, investasi harus dilakukan secara optimal dengan cara yang efektif. Hubungan antara produksi CO₂ dengan luas area hutan dan Gross Domestic Product dimodelkan sebagai persamaan diferensial biasa. Permasalahan dapat dimodelkan sebagai permasalahan kendali optimal dimana fungsi objektifnya adalah penentuan biaya optimal reboisasi dan teknologi bersih. Solusi optimalnya diperoleh dengan menerapkan metode langsung dan tidak langsung untuk menyelesaikan permasalahan kendali optimal. Selanjutnya permasalahan kendali optimal ditransformasikan menjadi permasalahan Pemrograman Non Linear (Non Linear Programming) dimana hasil transformasinya dapat diselesaikan menggunakan NLP.

Kata kunci: Efek Rumah Kaca, Emisi CO₂, Kendali Optimal, Pemodelan Matematika.

PENDAHULUAN

Selama beberapa dekade terakhir, berkembang kekhawatiran tentang isu-isu lingkungan seperti polusi udara, konservasi cadangan air dan pengurangan hutantropis (Caetano dkk., 2008). Pemanasan global (global warming) merupakan salah satu isu internasional yang dewasa ini banyak mendapat sorotan dari berbagai macam kalangan. Pemanasan global diartikan sebagai meningkatnya suhu bumi secara keseluruhan yang disebabkan oleh efek gas rumah kaca dan merupakan salah satu gejala dari pengelolaan sumber daya hutan yang tidak berkelanjutan. Kekhawatiran dunia sangat beralasan karena pengaruh global dapat berdampak kepada kehidupan dan kondisi bentang lahan dari semua negara baik negara penghasil Gas Rumah Kaca (GRK) maupun bukan (Widodo, 2010).

Negara penghasil gas rumah kaca adalah negara-negara industri yang menggunakan bahan bakar fosil sebagai sumber energinya. Indonesia juga merupakan salah satu negara emitor GRK khususnya yang berasal dari pembukaan hutan dan pengeringan gambut ((Widodo, 2010). Negara-negara lain memandang kebakaran hutan gambut yang kerap terjadi di Indonesia merupakan penyumbang CO₂ terbesar di dunia. Bahkan, Indonesia dituding menjadi negara ketiga yang menjadi penyumbang pemanasan global karena penebangan dan pembakaran hutan yang terjadi beberapa tahun belakangan ini (Susanta, 2007). Oleh karena itu, Indonesia menjadi salah satu bagian dari solusi terhadap pengurangan pemanasan global (Widodo, 2010).

Meningkatnya pemanasan global akibat GRK akan menimbulkan masalah terhadap pola adaptasi makhluk hidup pada suatu ekosistem dan terputusnya rantai makanan antar organisme yang berakibat pada menurunnya ketersediaan stok pangan dunia. Efek rumah kaca dapat berdampak ke padarusakannya ekosistem yang akhirnya akan memutus rantai makanan dan berpengaruh kepada seluruh kehidupan di muka bumi (Widodo, 2010). Mengingat dampak yang ditimbulkan oleh efek gas rumah kaca, maka perlu diadakan tindakan preventif untuk mengurangi peningkatan emisi CO₂. Duacara yang dapat dilakukan untuk mengurangi efek gas rumah kaca dan peningkatan emisi CO₂

di lapisan troposfer adalah dengan mengelola sumber daya hutan dan menerapkan teknologi bersih. Semakin banyak luasan vegetasi dan luasan hutan maka akan semakin banyak jumlah CO₂ yang bisa diambil oleh permukaan daun untuk proses fotosintesa dan salah satu produk akhirnya adalah O₂ yang dimanfaatkan oleh makhluk hidup pada saat respirasi. Teknologi bersih atau 'clean technology' adalah teknologi yang berprinsip pada optimasi penggunaan sumber-sumber daya demi mengurangi emisi yang bersifat negative terhadap manusia dan lingkungan (Krisna, 2007).

Sebuah laporan dari UNEP menunjukkan bahwa antara tahun 1972 sampai tahun 1999, rata-rata pendapatan tahunan meningkat 13% di Afrika, 72% di Asia dan 35% di Amerika Latin dan Karibia. Di sisi lain, Afrika kehilangan sekitar 0.7% total area hutan, per tahun selama tahun 1990 sampai tahun 2000. Dalam periode yang sama, Asia Pasifik kehilangan 0.1% dan Amerika Latin dan Karibia kehilangan 0.5% dari total area hutan per tahun. Penipisan hutan akan berdampak pada peningkatan emisi CO₂. Selain itu, masalah utama yang dihubungkan dengan perkembangan ekonomi adalah kebutuhan energi, yaitu bahan bakar fosil sebagai sumber utama (Caetano dkk., 2008). Penggunaan bahan bakar fosil ini juga menyebabkan peningkatan emisi CO₂. Laju pelepasan gas-gas berbahaya di atmosfer terutama gas CO₂ diperparah dengan laju pertumbuhan ekonomi yang berkorelasi positif dengan laju pertumbuhan industri. Hubungan antara Gross Domestic Product (GDP) dan pemanasan global berkaitan dengan pengaruh inisiatif makroekonomi tertentu pada penurunan emisi CO₂ (Caetano dkk., 2008). Sebagai contoh, konsumsi yang berhubungan dengan kebijakan karbon untuk menurunkan emisi CO₂ sebanyak 50% akan menurunkan GDP sebanyak 4% di Amerika Utara, 1% di Eropa dan 19% di beberapa negara penghasil minyak.

Menurut berbagai uraian di atas, upaya penurunan tingkat emisi CO₂ terkait dengan luas area hutan dan pertumbuhan ekonomi suatu negara (GDP). Oleh karena itu, untuk menurunkan emisi CO₂ tanpa membatasi pertumbuhan ekonomi, perlu dilakukan manajemen kontrol sumber daya yang optimal. Dalam penelitian ini dideskripsikan model matematis yang menggambarkan hubungan dinamis emisi CO₂ dengan investasi pada reboisasi dan penerapan teknologi bersih serta ditentukan kendali optimal untuk mengurangi emisi CO₂ dan efek rumah kaca.

METODOLOGI PENELITIAN

Penyelesaian Kendali Optimal

Untuk menyelesaikan kendali optimal dengan metode langsung dilakukan mengikuti langkah-langkah Prinsip Maksimum Pontryagin. Prosedur menyelesaikan masalah kontrol optimal dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin adalah sebagai berikut (Naidu, 2002):

Diberikan persamaan plant: $\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$

Diberikan indeks performansi: $J = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t) dt$

Dan kondisi batas $x(t_0) = x_0$ dan $x(t_f) = x_f$ bebas.

Maka langkah-langkah penyelesaiannya adalah:

1. Bentuk fungsi Pontryagin $H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = V(x(t), u(t), t) + \lambda'(t) f(x(t), u(t), t)$
2. Minimumkan H terhadap semua vektor kontrol $u(t)$:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)_* = 0 \text{ dan diperoleh } u^*(t) = h(x^*(t), \lambda^*(t), t)$$

3. Gunakan hasil dari langkah 2 ke dalam langkah 1 dan tentukan H^* yang optimal.

$$H^*(x^*(t), h(x^*(t), \lambda^*(t), t), \lambda^*(t), t) = H^*(x^*(t), \lambda^*(t), t)$$

4. Selesaikan sekumpulan $2n$ persamaan $\dot{x}^*(t) = \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_*$ dan $\dot{\lambda}^*(t) = - \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)_*$

Dengan kondisi awal x_0 dan kondisi akhir $\left[H^* + \frac{\partial S}{\partial t} \right]_{t_f} \delta x_f + \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^* - \lambda^*(t) \right]_{t_f} \delta x_f = 0$

5. Untuk memperoleh kontrol optimal, substitusikan solusi $x^*(t), \lambda^*(t)$ dari langkah 4 ke dalam ekspresi optimal kontrol u^* pada langkah 2.

Sedangkan kendali optimal dengan metode langsung diselesaikan dengan menggunakan salah satu toolbox dari MATLAB, dengan langsung mendefinisikan parameter-parameter terlebih dahulu beserta syarat-syarat yang harus dipenuhi dalam toolbox tersebut.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Model Matematika Emisi CO₂

Sistem dinamis yang digunakan dalam penelitian ini terdiri dari tiga persamaan diferensial biasa yang masing-masing menyatakan model matematika emisi CO₂, luas area hutan dan GDP. Emisi CO₂ dipengaruhi oleh luas kawasan hutan dan penerapan teknologi bersih. Pada model emisi CO₂, keberadaan hutan dapat menyerap atau mengurangi emisi, sehingga dituliskan ke dalam bentuk $-\alpha_1 z$. Emisi CO₂ berkorelasi positif dengan pertumbuhan ekonomi (GDP) dan berkurang adanya penerapan teknologi bersih, hal ini dapat dinyatakan dalam bentuk $(\alpha_2 - u_2)y$. Pada persamaan keadaan yang kedua, bentuk $u_1 y$ menunjukkan bahwa luas area hutan meningkat karena adanya reboisasi. Sedangkan suku $-hz$ menunjukkan adanya penurunan atau penipisan luas area hutan. Sistem persamaan diferensial menggambarkan emisi CO₂ serta kaitannya dengan luas area hutan dan tingkat GDP yang diberikan oleh sistem dinamik sebagai berikut (Caetano dkk., 2008) :

$$\begin{cases} \dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{s} \right) - \alpha_1 z + (\alpha_2 - u_2)y \\ \dot{z} = u_1 y - hz \\ \dot{y} = \gamma y \end{cases}$$

Dengan:

x = Konsentrasi karbon dioksida di atmosfer

z = luas area hutan

y = Gross Domestic Product (GDP)

r = tingkat emisi CO₂

s = kapasitas angkut CO₂ di atmosfer

α_1 = parameter yang berkaitan dengan luas area hutan

α_2 = parameter yang berkaitan dengan GDP

u_1 = kontrol emisi CO₂ dengan adanya investasi pada reboisasi atau luas area hutan

u_2 = kontrol emisi CO₂ dengan adanya investasi pada penerapan teknologi bersih

h = laju penipisan hutan

Setiap persamaan pada sistem dinamik di atas memiliki kondisi awal (*initial condition*) dan kondisi akhir (*final condition*) sebagai berikut:

$$x(0) = x_0, \quad x(t_f) = x_{t_f}$$

$$z(0) = z_0, \quad z(t_f) = z_{t_f}$$

$$y(0) = y_0, \quad y(t_f) = y_{t_f}$$

dan t_f ditentukan.

Penyelesaian Kendali Optimal

Permasalahan kendali optimal dalam penelitian ini adalah meminimalkan biaya reboisasi dan emisi CO₂ yang dirumuskan dalam fungsi tujuan berikut:

$$J(u_1, u_2) = \int_0^{t_f} e^{-\delta t} (ax^2 + bu_1^2 + cu_2^2) dt$$

Kendali u_1 adalah kendali emisi CO₂ dengan adanya investasi pada reboisasi atau luas area hutan dan kendali u_2 adalah kendali emisi CO₂ dengan adanya investasi pada penerapan teknologi bersih. Bobot a, b, dan c mencerminkan nilai kepentingan relatif dari variabel x , u_1 dan u_2 .

Penyelesaian Model Emisi CO₂ dengan Metode Tidak Langsung

Kendali optimal dengan metode tidak langsung diselesaikan dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin. Langkah awal untuk menyelesaikan permasalahan kendali optimal adalah membentuk fungsi Hamiltonian, yaitu:

$$H = e^{-\delta t} (ax^2 + bu_1^2 + cu_2^2) + \lambda_x \left(rx \left(1 - \frac{x}{s} \right) - \alpha_1 z + (\alpha_2 - u_2) y \right) + \lambda_z (u_1 y - hz) + \lambda_y \gamma$$

Berdasarkan Prinsip Maksimum Pontryagin maka harus dipenuhi kondisi kondisi stasioner, persamaan state $x(t)$ dan persamaan co state $\lambda_x(t)$.

Kondisi stasioner yang harus dipenuhi adalah:

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = 0 \Leftrightarrow 2e^{-\delta t} bu_1 + \lambda_z y = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_2} = 0 \Leftrightarrow 2e^{-\delta t} cu_2 + \lambda_x y = 0$$

Sehingga diperoleh kendali optimal $u_1^* = -\frac{\lambda_z y}{2be^{-\delta t}}$ dan $u_2^* = -\frac{\lambda_x y}{2ce^{-\delta t}}$.

Persamaan State dan Co State

Dengan mensubstitusikan persamaan u_1^* dan u_2^* pada persamaan state dan co state, maka diperoleh sistem yang optimal, yaitu:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_x} = \left(rx \left(1 - \frac{x}{s} \right) \right) - \alpha_1 z + \left(\alpha_2 - -\frac{\lambda_x y}{2ce^{-\delta t}} \right)$$

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_z} = \left(-\frac{\lambda_z y}{2be^{-\delta t}} \right) y - h$$

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \lambda_y} = \gamma$$

$$\dot{\lambda}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda_x r + \frac{2r\lambda_x x}{s} - 2axe^{-\delta t}$$

$$\dot{\lambda}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -\lambda_x \alpha_1 + \lambda_z h$$

$$\dot{\lambda}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\lambda_x (\alpha_2 - u_2) - \lambda_z u_1 - \lambda_y \gamma$$

Penyelesaian Model Emisi CO₂ dengan Metode Langsung.

Metode langsung didasarkan pada transformasi masalah kendali optimal ke dalam permasalahan non linear programming dengan mendiskretisasi persamaan keadaan dan kendali. Berdasarkan diskretisasi dari keadaan dan kendali, metode langsung dapat dikategorikan dalam tiga pendekatan berbeda (Subchan, 2009), yaitu:

1. Berdasarkan pada parameterisasi keadaan dan variabel kendali.
Kendali dan keadaan didiskretkan dan kemudian menghasilkan diskretisasi yang diselesaikan menggunakan suatu software NLP. Pendekatan kolokasi langsung berdasarkan pada diskretisasi keseluruhan dari keadaan dan kontrol. Sedangkan metode Pseudospectral Legendre, variabel keadaan dan variabel kendali didekati dengan menggunakan polinomial interpolasi Lagrange
2. Berdasarkan pada parameterisasi kendali.
Persamaan keadaan (state) dan fungsi tujuan dapat diselesaikan oleh integrasi numerik. Pendekatan ini dikenal sebagai parameterisasi kendali dan idenya adalah untuk mengestimasi variabel kendali dan menghitung variabel keadaan dengan mengintegrasikan persamaan keadaan.
3. Berdasarkan pada parameterisasi keadaan.
Parameterisasi persamaan keadaan dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan kendali optimal non linear tanpa kendala.

Kendali optimal dengan metode langsung diselesaikan dengan menggunakan software yang dapat langsung digunakan untuk memecahkan masalah *optimal control* dengan mendefinisikan masalah optimal control pada M-File dan disesuaikan dengan parameter yang diketahui. Nilai parameter dalam permasalahan optimal control ini diberikan pada tabel 1. Sedangkan nilai parameter komputasi yang diberikan pada tabel 2 digunakan sebagai input pada waktu simulasi.

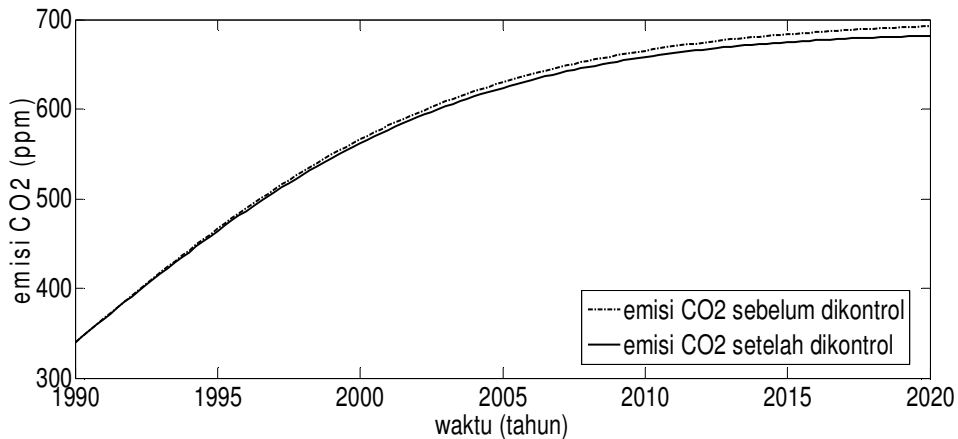
Tabel 1. Parameter dan Nilainya

| Parameter | Nilai |
|------------|-------------------|
| r | 0.15 |
| s | 700 |
| h | 0.0001 |
| γ | 0.0449 |
| a | 0.1 |
| b | 3.5×10^9 |
| c | 1×10^9 |
| α_1 | 0.0006 |
| α_2 | 0.00005 |
| δ | 59.73 |

Tabel 2. Parameter Komputasi

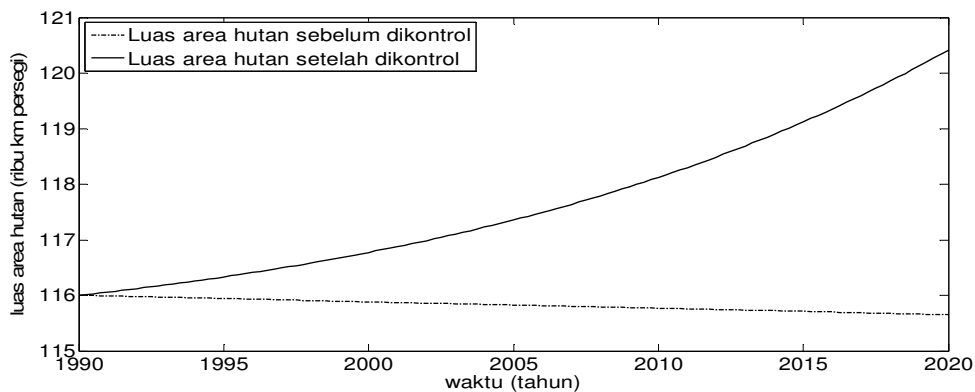
| Parameter Komputasi | Simbol | Nilai |
|----------------------------------|--------|------------|
| Waktu akhir | t_f | 30 |
| Batas kontrol u_1 | | (0, 00012) |
| Batas kontrol u_2 | | (0.0008) |
| Nilai awal emisi CO ₂ | $X(0)$ | 340 |
| Nilai awal luas area hutan | $Z(0)$ | 116 |
| Nilai awal GDP | $Y(0)$ | 1144 |

Hasil simulasi dengan software diberikan pada gambar dibawah ini:



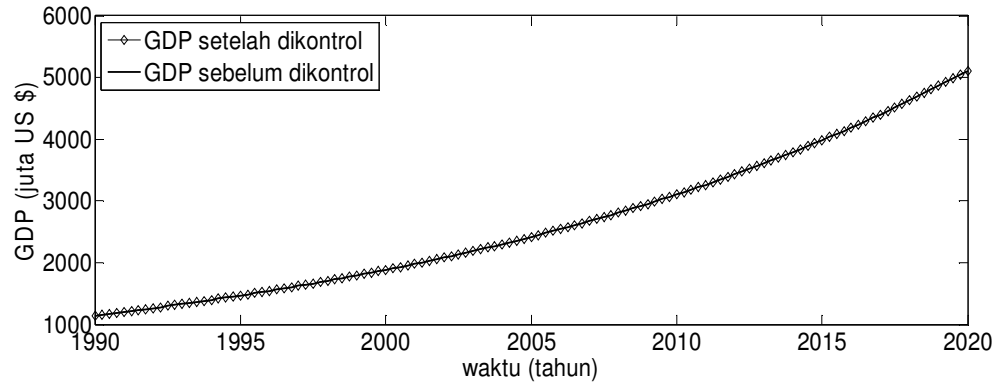
Gambar 1: Nilai emisi CO₂ sebelum dan sesudah dikontrol

Pada Gambar 1 menunjukkan besarnya emisi CO₂ selama 30 tahun mulai tahun 1990 sampai tahun 2020 dengan nilai awal besarnya emisi CO₂ adalah 340 ppm pada tahun 1990 dan akan semakin meningkat sejalan dengan bertambahnya waktu.. Grafik yang berupa garis putus-putus menunjukkan besarnya emisi CO₂ sebelum dikontrol dan grafik yang berupa garis penuh menunjukkan besarnya emisi CO₂ setelah dikontrol. Dari gambar 1 terlihat bahwa setelah dikontrol, emisi CO₂ lebih rendah dibandingkan dengan tanpa kendali. Sebagai contoh, pada tahun 2015, apabila tidak ada upaya pengendalian, maka besarnya emisi CO₂ adalah 683.55827 ppm sedangkan apabila dilaksanakan reboisasi maka tingkat emisi akan menjadi lebih rendah, yaitu sebesar 674.76001 ppm. Hal ini menunjukkan bahwa reboisasi dan teknologi bersih dapat menekan laju emisi CO₂ sehingga dapat pula menurunkan efek gas rumah kaca.



Gambar 2: Luas area hutansebelum dan sesudah dikontrol

Pada Gambar 2 menunjukkan besarnya emisi CO₂ selama 30 tahun mulai tahun 1990 sampai tahun 2020 dengan nilai awal luas area hutan adalah 116 ribu km persegi pada tahun 1990 dan akan semakin menurun sejalan dengan bertambahnya waktu.. Grafik yang berupa garis putus-putus menunjukkan luas area hutan sebelum dikontrol dan grafik yang berupa garis penuh menunjukkan luas area hutansetelah dikontrol. Dari gambar 2 terlihat bahwa sebelum dikontrol, luas area hutamenurun dari tahun ke tahun, tetapi setelah dikontrol luas area hutan dapat mengalami peningkatan sejalan dengan bertambahnya waktu.. Sebagai contoh pada tahun 2015 luas area hutan turun menjadi 115.71036 ribu km persegi, sedangkan setelah dikontrol, luas area hutan meningkat menjadi 119.12057 ribu km persegi.



Gambar 3: Nilai GDP sebelum dan sesudah dikontrol

Pada Gambar 3 menunjukkan besarnya GDP selama 30 tahun mulai tahun 1990 sampai tahun 2020 dengan nilai awal luas area hutan adalah 1140 juta US \$ pada tahun 1990. Pada gambar 3, grafik nilai GDP sebelum dan sesudah dikontrol berimpit. Berdasarkan latar belakang penelitian ini, upaya penurunan emisi CO₂ seringkali membawa dampak pada penurunan nilai GDP. Kendali optimal pada emisi CO₂ dalam penelitian ini, menunjukkan bahwa penurunan emisi CO₂ dapat dicapai dengan memperhatikan pertumbuhan ekonomi sehingga tidak terjadi penurunan nilai GDP. Dengan demikian, reboisasi dan teknologi bersih dapat mengurangi emisi CO₂ sekaligus juga tetap mempertahankan laju pertumbuhan ekonomi.

KESIMPULAN

1. Pengendalian emisi CO₂ berupa pelaksanaan reboisasi dan teknologi bersih dapat menekan laju emisi CO₂ sehingga dapat pula menurunkan efek rumah kaca.
2. Dengan pelaksanaan reboisasi dan teknologi bersih, penurunan emisi CO₂ dapat dicapai tanpa menyebabkan penurunan nilai GDP serta luas kawasan hutan dapat meningkat dari tahun ke tahun.

DAFTAR PUSTAKA

- Antonio Leonel, M, Marcolino Gerardi, D.F, Yoneyama, T, (2008), Optimal Resource Management Control for CO₂ Emission and Reduction of the Greenhouse Effect, Ecological Modelling.
- Naidu, D.S.(2002). Optimal Control Systems, CRC PRESS, NewYork
- Soemarwoto, O., (2005), Analisis Mengenai Dampak Lingkungan, Gadjah Mada University Press, Yogyakarta.
- Subchan, S, dan Zbikowski, R, (2009), Computational Optimal Control Tools and Practise, John Willey and Sons, Ltd, Publication, United Kingdom.
- Susanta, G, Sutjahjo, H, (2007), Akankah Indonesia Tenggelam akibat Pemanasan Global?, Penebar Plus⁺, Jakarta.
- Widodo, Maret 2010, Pengelolaan Sumber Daya Hutan Untuk Mengurangi Emisi Gas Co₂ Penyebab Efek Rumah Kaca (*Green House Effect*). (<http://uwityangyoyo.wordpress.com>) diakses tanggal 14 Desember 2010.

PENYELESAIAN MODEL MATEMATIKA PENELUSURAN BANJIR GELOMBANG DIFUSI (*DIFFUSION WAVE FLOOD ROUTING*)

¹M.Siing, ²Basuki Widodo

¹Jurusan Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya
MA Rahmatul Asri Maroangin, Enrekang, Sul-sel

²Jurusan Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya

Abstrak

Model penelusuran banjir gelombang difusi (*diffusion wave flood routing*) didasarkan pada persamaan differensial parsial yang memungkinkan untuk menghitung debit aliran dan kedalaman air sebagai fungsi dari ruang dan waktu. Pada makalah ini, ditunjukkan persamaan pembangun model matematika penelusuran banjir dengan pendekatan model gelombang difusi serta penyelesaian numeriknya menggunakan metode volume hingga (Metode Volume Hingga). Teknik diskritisasi yang digunakan adalah teknik diskritisasi Quadratic Upwind Interpolation for Convective Kinematics (QUICK) kemudian dilakukan simulasi dengan bantuan Program Matlab 7.8. Penyelesaian numerik dengan teknik diskritisasi QUICK merupakan penyelesaian yang stabil dan akurat, dengan tingkat akurasi sampai orde ketiga. Simulasi terhadap parameter-parameter yang berpengaruh terhadap penelusuran banjir diperoleh hasil bahwa ketinggian muka air dipengaruhi oleh perubahan kecepatan dan dapat disimpulkan bahwa semakin besar kecepatan aliran rata-rata maka semakin kecil ketinggian muka air yang dihasilkan.

Kata kunci: Penelusuran banjir, model difusi, metode volume hingga, QUICK

PENDAHULUAN

Pada suatu aliran saluran terbuka/sungai ada beberapa model yang umum digunakan untuk menggambarkan aliran saluran tersebut seperti: model Saint Venant, model Shallow Water. Pola aliran banjir pada saluran terbuka dapat didekati dengan persamaan differensial parsial yang diturunkan dari persamaan Saint Venant. Model hidrolika ini didasarkan pada dua bentuk persamaan yaitu persamaan konservasi massa dan persamaan konservasi momentum (Chow, 1988).

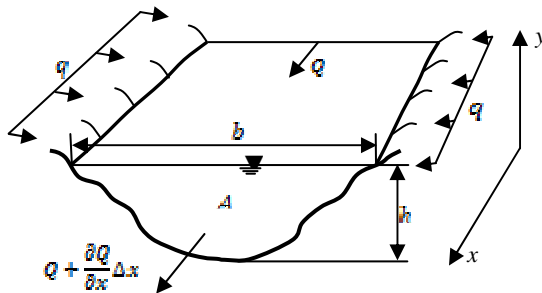
Ada beberapa pendekatan dalam model penelusuran banjir antara lain: pendekatan model gelombang difusi, model gelombang kinematik dan model gelombang dinamik atau yang dikenal sebagai pendekatan persamaan Saint Venant yang lengkap. Tujuan dari penulisan ini adalah menentukan penyelesaian model penelusuran banjir dengan pendekatan gelombang difusi menggunakan metode volume hingga dengan teknik diskritisasi QUICK.

Telah banyak penelitian yang dilakukan oleh para ahli mengenai model penelusuran banjir seperti Gosiorowski, D., Szymkiewicz, R., (2007) dalam penelitiannya membahas analisis bentuk konservatif persamaan massa dan momentum model penelusuran banjir (*flood routing*). Chagas, P.F., et.all. (2010) mengkaji tentang model matematika gelombang banjir pada saluran alam dengan menggunakan metode beda hingga, algoritma penyelesaian system persamaan aljabar nonlinearnya dengan iterasi Newton Raphson dan simulasinya dilakukan dengan program QUARIGUA (Riks Quantitative Analysis of Flooding in Urban Rivers). Tapi dalam penelitian-penelitian tersebut jarang ada yang menyelesaikan dengan menggunakan metode volume hingga. Oleh karena itu, dalam paper ini dikaji model matematika penelusuran banjir (*flood routing*) dengan pendekatan model gelombang difusi terhadap persamaan pembangun bentuk nonkonservatif dan menentukan penyelesaian numeriknya menggunakan Metode Volume Hingga dengan teknik diskritisasi QUICK kemudian disimulasikan dengan bantuan program Matlab 7.8.

LANDASAN TEORI

Konsep Penelusuran Banjir

Penelusuran banjir (*flood routing*) bisa ditafsirkan sebagai suatu prosedur matematika untuk menentukan/memperkirakan waktu dan besaran aliran banjir disuatu titik berdasarkan data yang diamati pada satu atau beberapa titik dibagian hulu. Dalam praktek terdapat dua macam penelusuran yaitu *distribusi flood routing* yang biasa dikenal sebagai hidrolika routing dan *lumped flood routing* yang biasa dikenal sebagai hidrologi routing. Perbedaannya adalah bahwa model *lumped flood routing*, aliran dihitung hanya sebagai fungsi terhadap waktu saja, sedangkan model *distribusi flood routing* merupakan fungsi terhadap ruang dan waktu. Model *distribusi flood routing* memungkinkan untuk menghitung debit aliran dan kedalaman sehingga model ini lebih mendekati pada kondisi nyata aliran tidak tunak dari luapan banjir pada suatu saluran (Chow, 1988). Gambar 2.1. berikut mengilustrasikan penelusuran banjir pada saluran terbuka/sungai :



Gambar.1. Sketsa penelusuran banjir pada saluran terbuka tampak penampang (Sivapalan, (1997)

Menurut Linsley JR, R.K et.al. (1982) Penelusuran banjir (*flood routing*) secara hidrolika bersandar pada tiga asumsi yakni : kerapatan airnya konstan, panjang sungai yang dipengaruhi oleh gelombang banjir lebih besar daripada kedalaman airnya, alirannya secara hakiki berdimensi satu. Gelombang banjir yang memenuhi asumsi ini disebut gelombang air dangkal (*shallow water wave*). Karena percepatan vertikal aliran diabaikan maka distribusi tekanan pada gelombang tersebut adalah hidrostatik.

Metode Volume Hingga

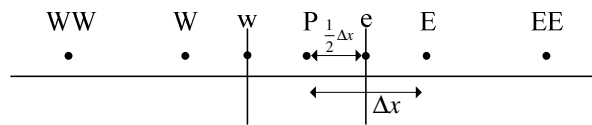
Metode Volume Hingga merupakan salah satu metode yang dapat digunakan dalam pemodelan matematika, sesuai diterapkan pada masalah aliran fluida dan aerodinamika. (Habibah, 2009). Prosedur dalam Metode Volume Hingga adalah:

1. Mendefinisikan bentuk geometri aliran.
2. Domain dari aliran diuraikan dalam mesh atau grid dari volume kontrol yang tidak tumpang tindih yang dapat membentuk persamaan yang dapat dibagikan.
3. Persamaan yang didiskretkan nilainya merupakan pendekatan dari nilai pada masing-masing titik.
4. Persamaan yang didiskretkan diselesaikan secara numerik.

Teknik Diskretisasi *Quadratic Upwind Interpolation Convective Kinematics* (QUICK)

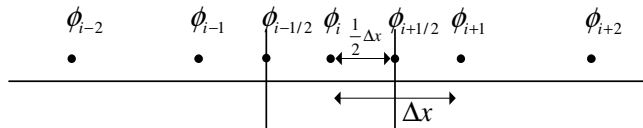
Menurut Apsley (2007) bentuk geometris dari aliran fluida pada masing-masing domain dibuat dalam bentuk grid. Grid dari domain dapat grid yang terstruktur atau yang tidak terstruktur, ataupun grid dalam koordinat kartesius atau grid yang non kartesius. Masing-masing grid memiliki kontrol *face* dan kontrol *node*. Model matematika satu dimensi dari arah memanjang penelusuran banjir (pada sumbu x) dan arah melebar dari penelusuran banjir (pada sumbu y) akan dimodelkan pada penelitian ini.

Pendiskritan dengan menggunakan metode QUICK untuk mengubah nilai pada *face* menjadi nilai pada *node*, diilustrasikan pada gambar 2.4 berikut:



Gambar 2.1. Kontrol *face* volume kendali satu dimensi

Selanjutnya kontrol *face* di atas dilakukan pendiskritan QUICK seperti pada Gambar 2.2 berikut:



Gambar 2.2. Kontrol *node* volume kendali satu dimensi

Diskritisasi QUICK dilakukan berdasarkan besarnya kecepatan V

$$\phi_e = \begin{cases} \phi_i + g_1 (\phi_{i+1} - \phi_i) + g_2 (\phi_i - \phi_{i-1}); & V > 0 \\ \phi_{i+1} + g_3 (\phi_i - \phi_{i+1}) + g_4 (\phi_{i+1} - \phi_{i+2}); & V < 0 \end{cases}$$

Dengan:

$$g_1 = \frac{(x_e - x_p)(x_e - x_w)}{(x_E - x_p)(x_E - x_w)} \quad g_2 = \frac{(x_e - x_p)(x_E - x_e)}{(x_p - x_w)(x_E - x_w)}$$

$$g_3 = \frac{(x_e - x_E)(x_e - x_{EE})}{(x_p - x_E)(x_p - x_{EE})} \quad g_4 = \frac{(x_e - x_E)(x_p - x_e)}{(x_E - x_{EE})(x_p - x_{EE})}$$

Sehingga didapatkan Formulasi QUICK untuk menentukan nilai pada kontrol *face* dan adalah sebagai berikut:

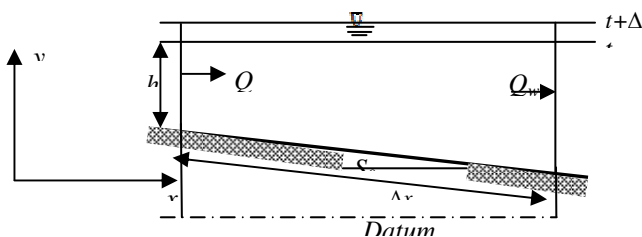
$$\phi_e = \frac{-\phi_{i-1} + 6\phi_i + 3\phi_{i+1}}{8} \quad \text{dan} \quad \phi_w = \frac{-\phi_{i-2} + 6\phi_{i-1} + 3\phi_i}{8}, \quad \text{untuk } V > 0$$

$$\phi_e = \frac{-\phi_{i+2} + 6\phi_{i+1} + 3\phi_i}{8} \quad \text{dan} \quad \phi_w = \frac{3\phi_{i-1} + 6\phi_i + 3\phi_{i+1}}{8}, \quad \text{untuk } V < 0$$

PEMBAHASAN

Persamaan Pembangun

Penelusuran banjir dapat dimodelkan berdasarkan aliran di atas saluran terbuka, aliran dalam saluran terbuka dapat dinyatakan dengan persamaan pembangun yang diperoleh dengan menerapkan persamaan konservasi massa dan momentum terhadap volume kendali. Model matematika penelusuran banjir dapat digambarkan dengan menggunakan volume kendali sebagaimana diilustrasikan pada Gambar 2. berikut ini:



Gambar 3.1. Sketsa Volume kendali Penelusuran banjir tampak potongan samping (Chow, 1988)

Persamaan matematika untuk permasalahan penelusuran banjir dibangun berdasarkan fenomena-fenomena alam yang memenuhi hukum fisika yang sesuai dengan permasalahan pada penelitian ini. Model matematika dari permasalahan ini memenuhi hukum kekekalan massa dan hukum kekekalan momentum yang dibangun berdasarkan oleh persamaan skalar transformasi. Menurut Aspley (2007) persamaan transformasi ini dirumuskan sebagai berikut:

Rate of change + net outward flux = source
 atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{d}{dt}(\rho V \phi) + \sum_{faces} \left(\rho u_n A \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial n} A \right) = SV$$

dengan:

- ϕ = konsentrasi
- Γ = difusivitas
- A = luas volume kendali (m^2)
- SV = gaya-gaya yang bekerja dalam sistem
- V = volume air

Persamaan Konservasi massa

Pada paper ini persamaan konservasi massa dapat dijelaskan dengan menggunakan prinsip kontinum yaitu : “Laju massa air yang masuk volume kendali dikurangi laju massa air yang keluar volume kendali sama dengan laju akumulasi massa air di dalam volume kendali”. Selanjutnya dikenal hukum kekekalan massa yaitu : “massa tidak dapat diciptakan dan tidak dapat dimusnahkan”, maka sumber (*source*) untuk konservasi massa adalah nol. Sehingga pernyataan di atas dapat dinyatakan dengan persamaan sebagai berikut :

$$\frac{d}{dt}(\text{mass}) + \text{net outward mass flux} = 0$$

Oleh karena, $\rho = \frac{\text{massa}}{\text{volume}} = \frac{m}{V}$ maka massa dapat dinyatakan sebagai $m = \rho V$, sehingga dengan menggunakan Teorema Pengangkutan Reynold, maka persamaan diatas dapat yang dinyatakan dengan persamaan matematika sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V) + \sum_{face} (\rho V A) = 0 \tag{1}$$

dengan :

- V = volume fluida
- ρ = massa jenis fluida
- A = luas permukaan
- V = kecepatan aliran rata-rata

Dari Persamaan (9) untuk permasalahan penelusuran banjir dalam paper ini akan dimodelkan secara satu dimensi sehingga nilai $V = A \Delta x$ dan permukaan (*faces*) kendali dikomposisi menjadi dua bagian yaitu permukaan kendali dimana aliran masuk dalam volume kendali (*PK.mas*) dan aliran keluar dari volume kendali (*PK.mas*). Sehingga Persamaan (9) dapat ditulis menjadi:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{VK} \rho dV - \iint_{PKmas} \rho V \cdot dA + \iint_{PKkel} \rho V \cdot dA = 0 \tag{2}$$

dengan:

- VK = Volume kendali.
- PK = Permukaan kendali.

Persamaan (2) diturunkan, sehingga diperoleh persamaan untuk aliran air pada saluran terbuka berikut:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + V \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

Persamaan (3) selanjutnya dikenal sebagai persamaan konservasi massa dalam bentuk non-konservatif (*non-conservatif form*)

Persamaan Konservasi Momentum

Persamaan konservasi momentum ini dapat dirumuskan dengan menggunakan prinsip kontinum, yaitu : “Laju perubahan fisis yang ditinjau dalam volume kendali ditambah laju perubahan fisis yang masuk dan keluar melalui permukaan kendali sama dengan jumlah yang dihasilkan oleh sumber”. Selanjutnya dengan menggunakan hukum konservasi momentum yaitu “laju perubahan momentum sama dengan gaya luar yang bekerja”. Sehingga persamaan konservasi momentum untuk suatu volume kendali dapat ditulis menjadi:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \nabla V) + \sum_{face} (\rho V A) V = \sum F \quad (4)$$

Dari Persamaan (5) diatas dapat ditulis sebagai berikut :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{VK} (\rho V dV) + \iint_{PK} (\rho V \cdot dA) = \sum F \quad (5)$$

Untuk gaya-gaya eksternal F adalah sebagai berikut:

$$\sum F = F_g + F_p + F_w \quad (6)$$

Dengan: $F_g = \rho g h S_0 \Delta x$, $F_p = -\rho g h \frac{\partial h}{\partial x} \Delta x$ dan $F_f = -\rho g A S_f$

Dengan mensubstitusi Persamaan (6) ke Persamaan (5) Dan dengan menggunakan aturan rantai suku-suku sehingga diperoleh persamaan berikut ini:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g S_0 - g S_f \quad (7)$$

Selanjutnya Persamaan (7) merupakan persamaan momentum penelusuran banjir dalam bentuk nonkonservatif.

Penyelesaian Numerik

Penyelesaian numerik dari model penelusuran banjir dilakukan dengan pendiskritan persamaan pembangun (*governing equation*) menggunakan Metode Volume Hingga dengan teknik diskritisasi QUICK. Penyelesaian model penelusuran banjir bentuk nonkonservatif dilakukan untuk mendapatkan ketinggian muka air banjir sebagai variable yang terikat. Dalam paper ini, model fisis penelusuran banjir dibagi menjadi 5 volume kendali dengan jumlah *node* sebanyak 5 pada masing-masing volume kendalinya. Nilai pada tiap-tiap *node* inilah yang akan dicari sebagai variasi ketinggian air pada ruas saluran. Persamaan pembangun diselesaikan secara simultan sehingga diperoleh persamaan dalam bentuk persamaan konveksi-difusi sebagai berikut:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c \frac{\partial h}{\partial x} - S \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0 \quad (8)$$

Dengan $S = \frac{AV}{2bS_f}$ (koefisien difusi) dan $c = \frac{3}{2}V$.

Selanjutnya dilakukan diskritisasi QUICK terhadap Persamaan (8) untuk menentukan nilai ketinggian muka air untuk arah kecepatan aliran $V > 0$, dengan diintegrasikan terhadap volume kendali dan pada selang waktu antara t dan $t+\Delta t$ sebagai berikut:

$$\int_{VK} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial h}{\partial t} dt d\forall + \int_{VK} \int_t^{t+\Delta t} c \frac{\partial h}{\partial x} dt d\forall = \int_{VK} \int_t^{t+\Delta t} S \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} dt d\forall \quad (9)$$

Hasil integral dari Persamaan (9), didapatkan persamaan berikut:

$$(h_p - h_0) \frac{\Delta x}{\Delta t} + c(h_e - h_w) = S \left[\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_e - \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_w \right] \quad (10)$$

Selanjutnya persamaan (11) berikut disubstitusi ke Persamaan (10) :

$$h_w = -\frac{1}{8}h_{ww} + \frac{6}{8}h_w + \frac{3}{8}h_p \quad h_e = -\frac{1}{8}h_w + \frac{6}{8}h_p + \frac{3}{8}h_E$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_e = \frac{h_E - h_p}{\Delta x} \quad \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_w = \frac{h_p - h_w}{\Delta x} \quad (11)$$

Dengan menerapkan kondisi awal dan kondisi batas sehingga diperoleh penyelesaian dalam bentuk sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{7c}{8} + \frac{4S}{\Delta x} \right) h_p + \left(\frac{3c}{8} - \frac{4S}{3\Delta x} \right) h_E &= \left(\frac{10c}{8} - \frac{8S}{3\Delta x} \right) h_A + \frac{\Delta x}{\Delta t} h_0 & : \text{node 1} \\ \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} - \frac{c}{8} + \frac{2S}{\Delta x} \right) h_p - \left(\frac{c}{8} + \frac{S}{\Delta x} \right) h_w - \frac{S}{\Delta x} h_E &= -\frac{2c}{8} h_A + \frac{\Delta x}{\Delta t} h_0 & : \text{node 2} \\ \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{3c}{8} + \frac{2S}{\Delta x} \right) h_p + \frac{c}{8} h_{ww} - \left(\frac{7c}{8} + \frac{S}{\Delta x} \right) h_w + \left(\frac{3c}{8} - \frac{S}{\Delta x} \right) h_E &= \frac{\Delta x}{\Delta t} h_0 & : \text{node 3,4} \\ \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} - \frac{3c}{8} + \frac{4S}{\Delta x} \right) h_p + \frac{c}{8} h_{ww} - \left(\frac{6c}{8} + \frac{4S}{3\Delta x} \right) h_w &= \frac{\Delta x}{\Delta t} h_0 - ch_B & : \text{node 5} \end{aligned} \quad (12)$$

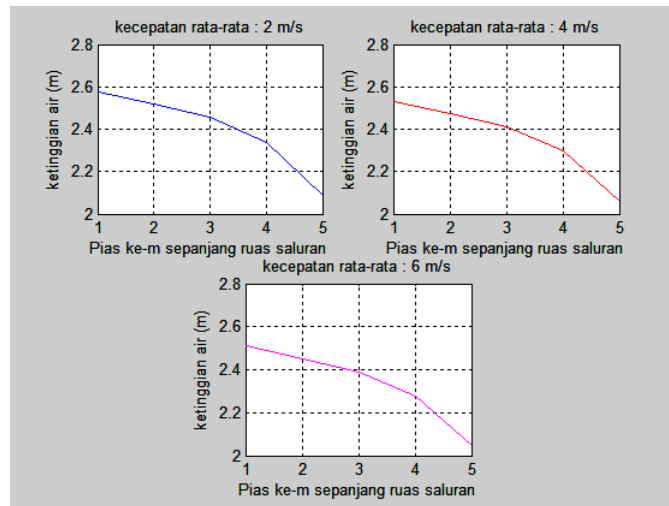
Persamaan (12) merupakan penyelesaian persamaan pembangun (*governing equation*) untuk menentukan ketinggian muka air banjir dengan teknik diskritisasi QUICK untuk $V > 0$. Selanjutnya dengan mengganti masing-masing *face* WW , W , P , dan E menjadi *node* $i - 2$, $i - 1$, i , $i + 1$ sehingga diperoleh bentuk persamaan diskritisasi dalam bentuk persamaan Matriks. Kemudian persamaan tersebut diselesaikan secara numerik dengan bantuan Program Matlab 7.8

Simulasi Model

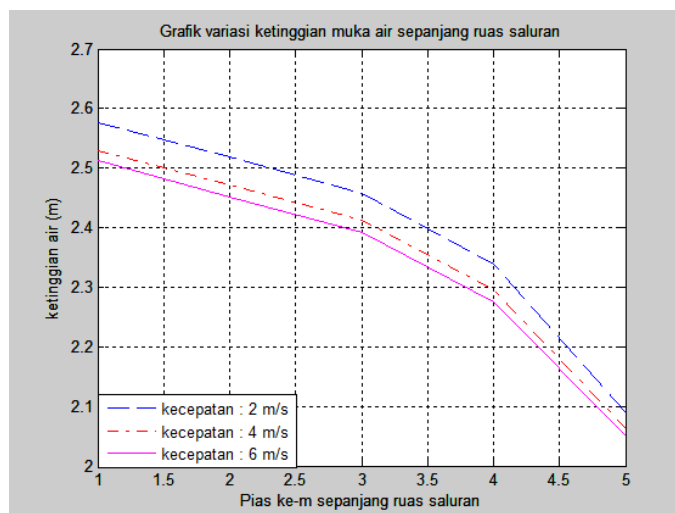
Pengaruh Perubahan Kecepatan Aliran Terhadap ketinggian muka air Penelusuran Banjir

Untuk mengetahui pengaruh perubahan kecepatan terhadap ketinggian muka air sepanjang ruas saluran maka diberikan parameter-parameter yang ditetapkan sebagai berikut panjang ruas saluran (L) = 15000 meter, saluran berpenampang segiempat dengan lebar saluran (b) = 50 m, Dalam kasus ini setiap kecepatan yang berbeda memberikan nilai ketinggian muka air yang berbeda terhadap titik node sepanjang ruas dengan kemiringan dasar saluran (S_0) = 0.0002, 0.0003 dan 0.0004. ketinggian muka air rata-rata (h) = 2 meter, sebagai syarat awal diberikan kedalaman tetap yaitu (h_0) = 2 m sedangkan syarat batas hulu ditetapkan kedalaman tetap (h_a) sebesar 2.5 m dan disebelah hilir ditetapkan (h_b) sebesar 0.2 m. simulasi dilakukan dengan jumlah total diskritisasi sebanyak 5 pias, sehingga saluran terbagi dalam beberapa ruas dengan panjang ruas Δx = 3000 m dan selang waktu Δt = 60 menit dengan memberikan input kecepatan yang berbeda.

Dalam kasus ini setiap kecepatan yang diberikan menghasilkan nilai ketinggian muka air yang berbeda terhadap titik node sepanjang ruas saluran.



Gambar 3.2. Perubahan Ketinggian muka air sepanjang ruas saluran/sungai

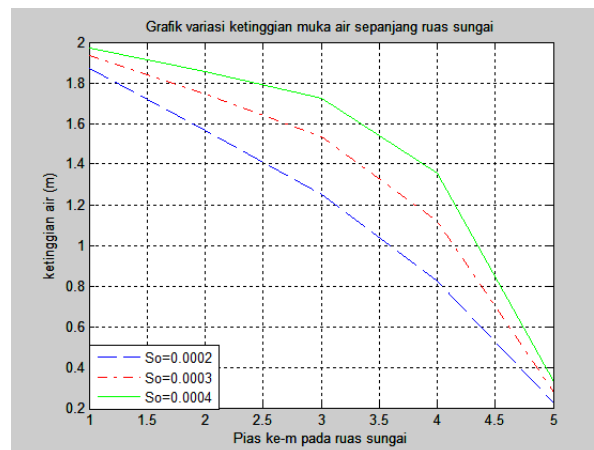


Gambar 3.3. Perbandingan ketinggian muka air dengan kecepatan berbeda

Pengaruh Perubahan Kemiringan Dasar Saluran Terhadap Ketinggian muka air Penelusuran Banjir.

Untuk mengetahui pengaruh perubahan kecepatan terhadap debit aliran sepanjang ruas saluran maka diberikan input panjang ruas saluran (L) = 15000 meter, saluran berpenampang segiempat dengan lebar saluran (b) = 50 m, kedalaman rata-rata air (h) = 2 meter, sebagai syarat awal diberikan debit aliran tetap yaitu (h_0) = 2 meter sedangkan syarat batas hulu ditetapkan debit tetap (h_a) sebesar 2 meter dan disebelah hilir ditetapkan (h_b) sebesar 0.2 meter. simulasi dilakukan jumlah total diskritisasi sebanyak 5 pias, sehingga saluran terbagi dalam beberapa ruas dengan panjang ruas $\Delta x = 3000$ m dan selang waktu $\Delta t = 60$ menit dengan memberikan input

kecepatan yang berbeda. Dalam kasus ini setiap kecepatan yang diberikan menghasilkan nilai debit aliran yang berbeda terhadap titik node, sepanjang ruas saluran.



Gambar 3.4. Perbandingan ketinggian muka air dengan kemiringan dasar saluran berbeda

KESIMPULAN

Dari hasil simulasi model penelusuran banjir gelombang difusi menunjukkan bahwa kemiringan dasar saluran dan kecepatan rata-rata aliran berpengaruh terhadap perilaku aliran gelombang banjir dengan kesimpulan:

- Semakin besar kecepatan aliran rata-rata pada saluran/sungai maka semakin kecil ketinggian muka air yang dihasilkan sepanjang ruas saluran/sungai dan semakin kecil kecepatan aliran rata-rata pada saluran/sungai maka semakin besar ketinggian muka air.
- Semakin besar kemiringan dasar saluran maka semakin besar ketinggian muka air yang dihasilkan sepanjang ruas saluran/sungai dan semakin kecil kemiringan dasar saluran maka semakin kecil ketinggian muka air.

DAFTAR PUSTAKA

- Apsley, David, (2007), *Computational Fluid Dynamic*, Lecture Handout, University of Manchester, Manchester.
- Chagas, P.F., et al, (2010), "Application of Mathematical Modeling to Study Flood Wave Behavior in Natural Rivers as Function of Hydraulic and Hydrological Parameters of the Basin", *Hydrology Day*.
- Chow, T.V., Maidment, D.R., Mays, L.M., (1988), *Applied Hydrology*, McGraw-Hill International Edition, New York.
- Gosiorowski, D., Szymkiewicz, R., (2007), "Mass And Momentum Conservation In The Simplified Flood Routing Models", *Jurnal of Hydrology*, vol. 346, hal. 51-58.
- Habibah, U., (2009), *Penyelesaian Numerik Model Aliran Air di atas Permukaan Tanah (Overland Flow)*, Tesis, Jurusan Matematika ITS, Surabaya.
- Sivapalan, M., Bates, B.C., Larsen, J.E., (1997), "A generalized non-linear diffusion wave equation : theoretical development and application", *Jurnal of Hydrology*, vol.192 , hal. 1-16.
- Versteeg, H.K. and Malalasekera, M. (1995), *An Introduction Computational Fluid Dynamics*, Longman Scientific & Technical, Harlow, England.

PENGENALAN POLA TANDA TANGAN MENGGUNAKAN METODE MOMENT INVARIANT DAN JARINGAN SYARAF RADIAL BASIS FUNCTION (RBF)

Ainun Jariah¹ dan Mohammad Isa Irawan² dan Imam Mukhlash²

1) Mahasiswa Pascasarjana Jurusan Matematika ITS Surabaya

2) Dosen Jurusan Matematika FMIPA ITS Surabaya

email : ainun09@mhs.matematika.its.ac.id

Abstrak

Jaringan syaraf tiruan *Radial Basis Function* (RBF) dikenal sebagai salah satu bentuk dari jaringan syaraf *Feedforward* lapis banyak yang handal dalam memecahkan masalah aproksimasi dan klasifikasi/pengenalan pola. Dalam penelitian ini JST RBF digunakan untuk klasifikasi pola-pola tanda tangan berdasarkan output jaringan yang mempunyai kemiripan dengan target (pemilik tanda tangan). Metode *Moment Invariant* digunakan untuk mengekstraksi citra tanda tangan menjadi suatu vektor input yang merepresentasikan setiap citra tanda tangan. Satu citra tanda tangan diwakili oleh 7 *moment invariant*. Hasil klasifikasi tanda tangan yang dikenali dengan tingkat akurasi tertentu. Untuk menguji hasil klasifikasi dilakukan uji coba. Dari hasil uji coba program menunjukkan bahwa JST RBF dapat mengenali pola tanda tangan dengan akurasi pada data uji 80 %.

Kata kunci: Jaringan syaraf tiruan, RBF, moment invariant.

PENDAHULUAN

Pengenalan pola tanda tangan merupakan salah satu bidang pengenalan pola (*pattern recognition*) yang cukup berkembang dewasa ini, dimana aplikasinya dapat diterapkan dalam berbagai bidang khususnya dalam bidang keamanan (*security system*) seperti izin penarikan uang di bank, validasi cek dan sebagainya. Teknologi identifikasi untuk pengenalan pola tanda tangan termasuk di dalam biometrika yang menggunakan karakteristik perilaku alami manusia.

Secara umum, untuk mengidentifikasi tanda tangan dapat dilakukan secara manual yaitu dengan mencocokkan tanda tangan pada waktu transaksi dengan tanda tangan yang sah. Sistem manual memiliki kelemahan dimana si pemeriksa tanda tangan kurang teliti dalam melakukan pencocokan. Oleh karena itu, diperlukan sebuah metode yang mampu menganalisis karakteristik tanda tangan sehingga mempermudah dalam mengenali tanda tangan seseorang.

Terdapat beberapa metode pengenalan tanda tangan diantaranya *hidden markov* dan berbasis Jaringan Syaraf Tiruan seperti *Learning Vector Quantization* (LVQ) , *Support Vector Machine* (SVM) . Jaringan syaraf tiruan telah digunakan secara luas dalam bidang pengenalan pola dan pada umumnya menunjukkan kelebihan dibandingkan dengan metode-metode pembelajaran lainnya, sifat generalisasi dan kemampuan adaptasinya, serta kekuatan khasnya dalam melakukan pemetaan secara *non-linier* (Simon, 1999). Meskipun demikian pengenalan tanda tangan termasuk masalah yang sulit dalam pengenalan pola. Hal ini disebabkan karena contoh - contoh tanda tangan seseorang adalah identik namun tidak sama (Abbas, 1994).

Dalam paper ini, metode Radial Basis function (RBF) digunakan untuk pengenalan pola tanda tangan . Dimana Jaringan syaraf tiruan RBF merupakan salah satu model jaringan *feed-forward* yang memiliki tiga lapisan (*layer*), yaitu lapisan input, lapisan tersembunyi (*hidden layer*) dan lapisan output, telah sukses diaplikasikan pada aproksimasi fungsi, peramalan dan klasifikasi pola (Yeung, dkk., 2009).

Pengertian Tanda Tangan

Tanda tangan adalah hasil proses menulis seseorang yang bersifat khusus sebagai substansi simbolik. Tanda tangan merupakan bentuk yang paling banyak digunakan untuk identifikasi seseorang.

Contoh-contoh tanda tangan setiap orang umumnya identik namun tidak sama. Artinya tanda tangan seseorang sering berubah-ubah setiap waktu. Perubahan ini menyangkut posisi, ukuran maupun faktor tekanan tanda tangan. Pada kenyataannya, perubahan-perubahan tersebut dipengaruhi oleh waktu, umur, kebiasaan dan keadaan mental tertentu (Abbas,1994).

Akuisisi Data

Dalam penelitian ini akan digunakan citra tanda tangan untuk pelatihan (*training*) dan pengujian (*testing*) dengan rasio 75 : 25. Untuk data pelatihan digunakan sebanyak 150 tanda tangan yang berasal 10 responden, dimana setiap responden diambil 15 tanda tangan. Sementara untuk kebutuhan pengujian, citra tanda tangan yang akan digunakan sebanyak 30 tanda tangan yang juga berasal dari 10 responden tersebut dengan asumsi setiap responden diambil 3 tanda tangan.

Dari data tangan tersebut dilakukan proses preprocessing yaitu tanda tangan yang diambil diolah terlebih dahulu untuk disamakan ukurannya dan diubah ke dalam *grayscale*. Pada tahap ini dimulai dari pengambilan gambar tanda tangan pada media kertas yang dibatasi dengan kotak ukuran 4,6 x 3,6 cm kemudian dilakukan proses *scanning*.

Estraksi Fitur

Citra tanda tangan dari hasil *scanning* selanjutnya diekstraksi untuk memperoleh vektor ciri dari setiap citra dengan ukuran dimensi yang relatif lebih kecil. Metode ekstrak yang digunakan adalah metode *Moment Invariant*. Hasil yang diperoleh pada langkah ini berupa 7 nilai moment, selanjutnya ke-7 nilai tersebut disebut hasil ekstrak citra dan digunakan sebagai vector input untuk jaringan syaraf mewakili 1 citra tanda tangan

Momen dapat menggambarkan suatu objek dalam hal area, posisi, orientasi dan parameter terdefinisi lainnya. Dengan mendapatkan sejumlah informasi momen, baik momen order nol (m_{00}) dan order 1 (m_{10} dan m_{01}) atau momen sentral, dan momen pada order ≥ 2 atau momen invariant dari sebuah obyek, maka obyek tersebut dapat diidentifikasi sekalipun telah mengalami pergeseran (translasi), perputaran (rotasi), maupun perubahan skala (*scalling*) (Gonzales,2001). Pada dasarnya suatu objek melibatkan luasan, *center of gravity* dan momen Untuk fungsi kontinu 2D, momen order ($p + q$) didefinisikan sebagai:

$$m_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^p y^q f(x, y) dx dy \text{ Untuk } p, q = 0, 1, 2, \dots$$

Secara diskrit ditulis sebagai persamaan:

$$m_{pq} = \sum_x \sum_y x^p y^q f(x, y)$$

$$\mu_{pq} = \sum_x \sum_y (x - \bar{x})^p (y - \bar{y})^q f(x, y)$$

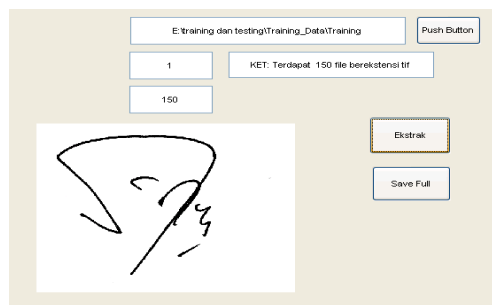
$$\eta_{pq} = \frac{\mu_{pq}}{\mu_{00}^{\frac{p+q}{2}}}, \quad \nu = \frac{p+q}{2} + 1, \quad p + q = 2, 3, \dots$$

Dengan: μ_{pq} adalah moment sentral


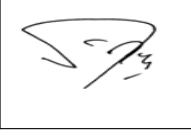
η_{pq} adalah normalisasi moment sentral

Tabel 1. Moment Invariant

| Moment Sentral | Moment Invarian |
|---|---|
| $\mu_{00} = m_{00}$ | $\phi_1 = \eta_{20} + \eta_{02}$ |
| $\mu_{10} = 0$ | $\phi_2 = (\eta_{20} - \eta_{02})^2 + 4\eta_{11}^2$ |
| $\mu_{01} = 0$ | $\phi_3 = (\eta_{20} - 3\eta_{12})^2 + (3\eta_{11} - \eta_{02})^2$ |
| $\mu_{20} = m_{20} - \bar{y}m_{01}$ | $\phi_4 = (\eta_{20} + \eta_{12})^2 + (\eta_{11} + \eta_{02})^2$ |
| $\mu_{02} = m_{02} - \bar{y}m_{10}$ | $\phi_5 = (\eta_{20} - 3\eta_{12})^2(\eta_{20} + \eta_{12})[3(\eta_{20} + \eta_{12})^2 - 3(\eta_{11} + \eta_{02})^2] + (3\eta_{11} - \eta_{02})(\eta_{11} + \eta_{02})[3(\eta_{20} + \eta_{12})^2 - (\eta_{11} + \eta_{02})^2]$ |
| $\mu_{11} = m_{11} - \bar{y}m_{10}$ | $\phi_6 = (\eta_{20} - \eta_{02})[(\eta_{20} + \eta_{12})^2 - (\eta_{11} + \eta_{02})^2] + 4\eta_{11}(\eta_{20} + \eta_{12})(\eta_{11} + \eta_{02})$ |
| $\mu_{20} = m_{20} - 3\bar{x}m_{10} + 2\bar{x}m_{10}$ | $\phi_7 = (3\eta_{11} - \eta_{02})(\eta_{20} + \eta_{12})[(\eta_{20} + \eta_{12})^2 - 3(\eta_{11} + \eta_{02})^2] + (3\eta_{12} - \eta_{20})(\eta_{11} + \eta_{02})[3(\eta_{20} + \eta_{12})^2 - (\eta_{11} + \eta_{02})^2]$ |



Gambar 1. Contoh tanda tangan yang akan diekstraksi fitur

| | |
|---|--|
|  | 4.2134531e+000 8.4879612e-001 7.7806653e+000 3.7174837e+000 8.5740114e+000 2.9176447e+000 1.9168502e+001 |
|  | 4.2555321e+000 8.8685236e-001 4.8353386e+000 1.9657619e+000 6.0601758e+000 1.4413398e+000 2.7522998e+000 |

Gambar 2. Hasil ekstraksi pada salah satu citra tanda tangan (sudut dalam satuan Radian)

Hasil Ekstraksi berupa vektor baris akan digunakan sebagai data input pada jaringan syaraf tiruan yang telah dikonstruksi sebelumnya.

Jaringan Syaraf Tiruan

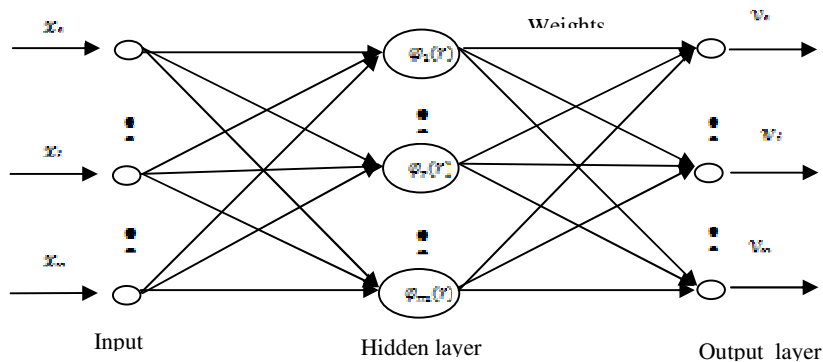
Fauset (1994) menyatakan bahwa Jaringan Syaraf Tiruan (JST) atau *Artificial Neural Network* adalah suatu sistem pemroses informasi yang memiliki karakteristik kinerja tertentu yang mirip dengan jaringan syaraf biologi. JST telah dikembangkan sebagai generalisasi dari model-model matematika dari cara kerja jaringan syaraf biologis pada manusia, dengan asumsi bahwa:

- Pemrosesan informasi terjadi pada banyak elemen-elemen sederhana yang disebut neuron.
- Sinyal yang keluar antar neuron dihubungkan oleh suatu penghubung (sinapsis).
- Setiap penghubung diasosiasikan dengan bobot (weight).
- Setiap neuron menerapkan fungsi aktivasi untuk menentukan sinyal output.

Suatu jaringan syaraf selalu dikarakteristikan dengan pola koneksi antar neuron (arsitektur), metode untuk menentukan bobotnya (Algoritma), dan fungsi aktivasi yang digunakan.

Jaringan Radial Basis Function (RBF)

Jaringan Fungsi Basis Radial (RBF) yang merupakan alternatif dari jaringan *Multilayered Feedforward Neural* (MFN) telah dikembangkan. Jaringan ini terdiri dari tiga layer yaitu input layer, hidden layer dan output layer. Fungsi aktivasinya adalah fungsi basis dan fungsi linear pada lapisan output. Jaringan ini telah banyak digunakan secara intensif. RBF merupakan pemetaan fungsi taklinier multidimensional yang tergantung kepada jarak antara vektor input dan vektor center. RBF dengan input berdimensi- $n \in \mathbb{R}^n$ dan output berdimensi- $m \in \mathbb{R}^m$. Adapun arsitektur dari RBFNN sebagai berikut :



Gambar 3. Arsitektur RBFNN

Output jaringan RBF dengan kernel \tilde{N} untuk suatu vektor input $x \in \mathbb{R}^n$ diberikan dengan persamaan berikut:

$$F_{\tilde{N}}(x) = \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \beta_i \phi_i(x)$$

$\beta_i = [\beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{im}]^T$ adalah bobot yang menghubungkan kernel ke- i dengan neuron output, dan $\phi_i(x)$ adalah output kernel ke- i dengan persamaan Gaussian sebagai berikut:

$$\phi_i(x) = \phi(\mu_i, \sigma_i, x) = \exp\left(-\frac{\|x - \mu_i\|^2}{\sigma_i}\right)$$

Dengan : $\mu_i = [\mu_{i1}, \mu_{i2}, \dots, \mu_{in}]^T$ adalah pusat kernel ke- i dan σ_i adalah lebar.

Untuk N sampel random berbeda (x_j, t_j) dengan $x_j = [x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn}]^T \in \mathbb{R}^n$ dan $t_j = [t_{j1}, t_{j2}, \dots, t_{jm}]^T \in \mathbb{R}^m$, RBF dengan kernel \tilde{N} dapat dimodelkan secara matematis.

$$\sum_{i=1}^{\tilde{N}} \beta_i \phi_i(x_j) = t_j, j = 1, \dots, N$$

RBF standard dengan \tilde{N} kernel dapat mengaproksimasi N sampel dengan error rata-rata bernilai nol, $\sum_{j=1}^N \|o_j - t_j\| = 0$, yaitu terdapat β_i, μ_i dan σ_i sedemikian sehingga:

$$\sum_{i=1}^{\tilde{N}} \beta_i \exp\left(-\frac{\|x_j - \mu_i\|^2}{\sigma_i}\right) = t_j, j = 1, \dots, N$$

Persamaan di atas dapat dituliskan sebagai:

$$H\beta = T$$

Dengan:

$$H(\mu_1, \dots, \mu_{\tilde{N}}, \sigma_1, \dots, \sigma_{\tilde{N}}, x_1, \dots, x_N) = \begin{bmatrix} \phi(\mu_1, \sigma_1, x_1) & \dots & \phi(\mu_{\tilde{N}}, \sigma_{\tilde{N}}, x_1) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \phi(\mu_1, \sigma_1, x_N) & \dots & \phi(\mu_{\tilde{N}}, \sigma_{\tilde{N}}, x_N) \end{bmatrix}_{N \times \tilde{N}}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1^T \\ \vdots \\ \beta_N^T \end{bmatrix}_{N \times m} \quad \text{dan} \quad T = \begin{bmatrix} t_1^T \\ \vdots \\ t_N^T \end{bmatrix}_{N \times m}$$

H disebut matriks output pada lapisan tersembunyi, kolom ke- i dari H adalah output dari kernel ke- i yang bersesuaian dengan input x_1, x_2, \dots, x_N .

Algoritma pada jaringan RBF

Diberikan suatu himpunan data pelatihan $\mathbf{N} = \{(x_i, t_i) | x_i \in \mathcal{R}^n, t_i \in \mathcal{R}^m, i = 1, \dots, N\}$ dengan \tilde{N} adalah banyaknya neuron tersembunyi (kernel).

Langkah 1: Inisialisasi Center μ_i dan Lebar $\sigma_i, i = 1, \dots, \tilde{N}$ secara random.

Langkah 2: Hitung Nilai Fungsi Gauss $\phi(\mu_i, \sigma_i, x), i = 1, \dots, \tilde{N}$.

Langkah 3: Nyatakan $\phi(\mu, \sigma, x)$ ke dalam matriks H dengan N baris dan \tilde{N} kolom.

Langkah 4: Hitung keluaran bobot β menggunakan persamaan:

$$\beta = H^{-1}T$$

dengan $H^{-1} = (H^T H)^{-1} H$ dan $T = [t_1, \dots, t_N]^T$

PEMBAHASAN

Desain arsitektur

Input yang digunakan sebanyak 150 neuron, hidden layer 80 neuron dan layer output 10 neuron. Hal ini dipilih karena target 150 buah tanda tangan dari 10 responden yang akan dikenali sebagai data input, tentunya akan menghasilkan 10 informasi output yang akan diperoleh melalui 80 neuron pada layer hidden sebagai jaringan yang paling sesuai dengan banyaknya target yang akan dicapai. Jadi dari desain arsitektur diatas diperoleh sebuah Matrik *Confusion* yang menunjukkan tingkat akurasi klasifikasi/pengenalan pola tanda tangan dengan metode jaringan syaraf Radial Basis Function.

Tabel 2. Matrik *Confusion* untuk data pelatihan

| | | | | | | | | | | | |
|-----------------|------------------------------|----|----|----|----|----|---|---|----|----|------------|
| Output jaringan | 1 | 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100% 0% |
| | 2 | 0 | 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100% 0% |
| | 3 | 0 | 0 | 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100% 0% |
| | 4 | 0 | 0 | 0 | 12 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 80% 20% |
| | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 15 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100% 0% |
| | 6 | 0 | 0 | 1 | 5 | 0 | 9 | 0 | 0 | 0 | 60% 40% |
| | 7 | 0 | 0 | 0 | 8 | 0 | 1 | 6 | 0 | 0 | 40% 60% |
| | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 15 | 0 | 100% 0% |
| | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 15 | 100% 0% |
| | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100% 0% |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 88% 12% |
| | Target(pemilik tanda tangan) | | | | | | | | | | |

Dari matrik *confusion* di atas terlihat error (kesalahan) dari tiap-tiap pola tanda tangan. Pada pola tanda tangan orang ke-1, ke-2, ke-3, ke-5, ke-8, ke-9, ke-10, tidak terjadi kesalahan artinya tanda tangan dapat dikenal benar. Kemudian pada pola tanda tangan orang ke-4 kesalahan yang terjadi sebanyak 20 % artinya ada 3 pola tanda tangan yang tidak dikenal benar, yaitu dikenal sebagai pola tanda tangan orang ke-7, pada pola tanda tangan orang ke-6 kesalahan yang terjadi sebanyak 40 % artinya ada 6 pola tanda tangan yang tidak dikenal benar, yaitu 1 pola tanda tangan dikenal sebagai orang ke-3 dan 5 pola

tanda tangan dikenal sebagai orang ke-4. Sedangkan pada pola tanda tangan orang ke-6 kesalahan yang terjadi kesalahan yang terjadi sebanyak 60 % artinya ada 9 pola tanda tangan tidak dikenal benar, yaitu 8 pola tanda tangan dikenal sebagai orang ke-4 dan 1 pola tanda tangan dikenal sebagai orang ke-6. Jadi dapat disimpulkan bahwa jaringan syaraf RBF dapat mengenali dengan benar pola tanda tangan dengan ketepatan 88 % dan error (kesalahan) sebesar 12%.

Untuk mengetahui kemampuan jaringan RBF dalam klasifikasi/pengenalan pola tanda maka diperlukan pengujian, yang datanya di ambil diluar data pelatihan. Tabel 3 menunjukkan matrik *confusion* Jaringan RBF untuk data pengujian.

Tabel 3. Matrik *Confusion* untuk data uji

| | | | | | | | | | | | |
|-----------------|-------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----------------|
| Output jaringan | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 66,7% 33,3% |
| | 2 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100% 0% |
| | 3 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100% 0% |
| | 4 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 66,7% 33,3% |
| | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100% 0% |
| | 6 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 66,7% 33,3% |
| | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 40% 60% |
| | 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 100% 0% |
| | 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 100% 0% |
| | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100% 0% |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 80% 20% |
| | Target (pemilik tanda tangan) | | | | | | | | | | |

Pada matrik *confusion* di atas, dapat dilihat kesalahan pengenalan pola tanda tangan pada masing-masing pemilik tanda tangan. Pada pola tanda tangan orang ke-1, 2 pola atau 66,7% tanda tangan yang dapat dikenali dengan benar dan 3,3% atau 1 pola tanda tangan dikenali sebagai pola tanda tangan orang ke-2. Pada pola tanda tangan orang ke-4, 2 pola atau 66,7% tanda tangan yang dapat dikenali dengan benar dan 3,3% atau 1 pola tanda tangan dikenali sebagai pola tanda tangan orang ke-7. Pada pola tanda tangan orang ke-6, 2 pola atau 66,7% tanda tangan yang dapat dikenali dengan benar dan 3,3% atau 1 pola tanda tangan tidak dikenal benar. Jadi dapat disimpulkan jaringan RBF dapat mengenali dengan benar pola tanda tangan dengan ketepatan 80 % dan error (kesalahan) sebesar 20%.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pelatihan pada jaringan RBF, terlihat bahwa dengan menggunakan metode RBF, error pelatihan sebesar 12% dengan akurasi klasifikasi (pengenalan) mencapai 80%. Sedangkan untuk data pengujian error yang terjadi 20% dengan akurasi 80%.

Pola tanda tangan yang tidak dapat dikenali (error), dalam penelitian ini belum tentu menunjukkan ketidakmampuan RBFNN dalam mengenali pola tanda tangan. Kemungkinan hal ini disebabkan data pelatihan dan pengujian berbeda untuk setiap jenis tanda tangan yang sama. Perbedaan ini menyangkut ukuran dan posisi dan kesalahan relatif dari semua tanda tangan yang diambil.

DAFTAR PUSTAKA

Abbas, R. 1994, *A Prototype System for off-line Signature Verification using Multilayered Feedforward Neural Networks*. Tesis Departemen of Computer Science, RMIT.

Cemil, OZ., Ercal, F., Demir, Z., (2003), *Signature Recognition and Verification with ANN*, Third International Conference on Electrical and Electronics Engineering, Bursa, Turkey.

Djunaidy, A. 2000, *Verifikasi Tanda Tangan Berdasarkan Interpretasi Struktural dari Arah Gerak dan Tekanan* . Universitas Gunadarma.

Fausett, L., (1994). *Fundamental of Neural Network architecture, Algorithms, and Applications*, Prentice-Hall, USA.

Gonzales, R.C., Richard, E.Wood., (2001), *Digital image Processing*, edition, Prentice_Hall.Inc.

Simon, H. (1999). *Neural networks: A comprehensive foundation*, New Jersey:Prentice Hall.

Yeung, D. S., Cloete, I., Shi, D. (2009). *Sensitivity Analysis for Neural Networks*, Springer.

ENUMERASI DIGRAF TIDAK ISOMORFIK

Mulyono

Jurusan Matematika FMIPA UNNES
Email: arifahsaptari@yahoo.co.id

Abstrak

Digraf tidak isomorfik yang dimaksud pada tulisan ini adalah digraf sederhana yang tidak isomorfik yang dibentuk dari n titik. Kajian ini merupakan penggabungan antara aljabar abstrak dengan teori graf. Aljabar abstrak dengan teorema Polya-nya digunakan untuk menyelesaikan masalah enumerasi digraf sederhana. Tulisan ini memaparkan teknik menghitung banyaknya digraf yang tidak isomorfik dengan teorema Polya. Berdasarkan kajian pada digraf sederhana ini diperoleh hasil: ada 3 digraf yang tidak isomorfik untuk 2 titik, ada 16 digraf yang tidak isomorfik untuk 3 titik, dan ada 218 digraf yang tidak isomorfik untuk 4 titik.

Kata kunci: enumerasi, digraf sederhana, teorema Polya, digraf tidak isomorfik

PENDAHULUAN

Masalah enumerasi yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah masalah enumerasi yang berhubungan dengan perhitungan banyaknya digraf sederhana yang tidak isomorfis antara digraf sederhana satu dengan yang lainnya. Digraf sederhana di sini adalah digraf yang tidak mempunyai sisi paralel dan loop.

Pada dasarnya tulisan ini merupakan penggabungan dua bidang ilmu yaitu antara bidang aljabar (abstrak) dan bidang teori graf, artinya aljabar abstrak melalui teorema Polya akan digunakan untuk menyelesaikan masalah enumerasi pada digraf sederhana. Teorema Polya ditemukan oleh George Polya (1887-1985), seorang ahli berkebangsaan Hungaria yang bermigrasi ke Amerika Serikat pada tahun 1940. Teorema Polya dibagi menjadi dua yaitu: Teorema Polya I dan II. Teorema Polya I menjelaskan tentang banyaknya orbit yang berbeda dari himpunan berhingga X terhadap grup yang beraksi. Grup yang beraksi/bertindak pada himpunan X memiliki pengertian suatu grup yang dapat diterapkan pada himpunan X dengan dikenai suatu aksi tertentu. Teorema Polya II selain menjelaskan banyaknya orbit yang berbeda juga menjelaskan bentuk/jenis orbit yang berbeda tersebut. Permasalahan enumerasi yang akan dibahas pada tulisan ini adalah: bagaimana enumerasi digraf tak isomorfik dari digraf sederhana dengan menggunakan Teorema Polya.

PEMBAHASAN

Definisi dan Teorema pada Aljabar yang Mendukung Teorema Polya

Berikut beberapa definisi dan teorema yang terkait dengan teorema Polya.

Definisi 1 Grup

Himpunan $G \neq \emptyset$ dengan operasi $*$ yang didefinisikan padanya disebut Grup $\langle G, * \rangle$, bila memenuhi syarat:

1. $\forall x, y \in G, x * y \in G$ (sifat tertutup terhadap operasi $*$)
2. $\exists e \in G$, sehingga $x * e = e * x = x, \forall x \in G$ (ada elemen identitas e).
3. $\forall x \in G \exists x^{-1} \in G$ sehingga $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$ (setiap elemen di G mempunyai invers).
4. $\forall x, y, z \in G, x * (y * z) = (x * y) * z$ (sifat asosiatif)

Definisi 2 Permutasi

Permutasi pada himpunan A adalah fungsi $\theta: A \rightarrow A$ yang bijektif.

Definisi 3 Grup Simetri

Jika $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ maka grup yang memuat semua permutasi dari A dinamakan grup simetri pada n unsur dan simbolkan dengan S_n . Grup simetri S_n memuat elemen sebanyak $n!$.

Definisi 4 Orbit, Penstabil, dan Karakter Permutasi

Apabila G adalah subgrup dari grup simetri S_n dan untuk $x \in X$, maka:

1. $Gx = \{g(x) : g \in G\}$ yaitu himpunan semua bayangan elemen $x \in X$ oleh permutasi g di G . Gx disebut orbit x terhadap G .
2. $G_x = \{g \in G : g(x) = x\}$ adalah himpunan semua permutasi di G yang mengakibatkan x sebagai titik tetap. Himpunan G_x disebut penstabil x di G .
3. $F(g) = \{z \in X : g(z) = z\}$ adalah himpunan semua titik-titik tetap dari permutasi $g \in G$. Himpunan $F(g)$ disebut karakter permutasi g di himpunan X .

Definisi 5 Grup Berhingga

Grup G disebut grup berhingga jika memiliki sejumlah berhingga anggota. Banyaknya anggota dalam grup G disebut order G dan disimbolkan dengan $|G|$.

Definisi 6 Koset

Jika H adalah subgrup dari grup G dan g adalah anggota G maka:

$gH = \{gh : h \in H\}$ disebut koset kiri dari H yang memuat g dan $Hg = \{hg : h \in H\}$ disebut koset kanan dari H yang memuat g .

Definisi 7 Kelas

Kumpulan dari himpunan koset kiri (kanan) H yang berbeda dari grup G akan membentuk partisi grup G , yaitu:

1. Setiap anggota G akan berada paling sedikit pada satu koset kiri (kanan) H
2. Dua koset kiri (kanan) yang berbeda tidak memiliki anggota yang sama.

Partisi yang mempunyai sifat seperti ini disebut *kelas*.

Teorema 1 Kardinalitas

Jika H adalah subgrup dari grup G dan $|H| = k$ maka setiap koset kiri (kanan) H memiliki kardinalitas k .

Teorema 2 Lagrange

Order grup berhingga dapat dibagi oleh order sembarang grup bagiannya.

Teorema 3 Orbit-Penstabil

Jika X adalah G -Set dan $x \in X$ maka :

1. $\forall x \in X, |Gx| \cdot |G_x| = |G|$
 $\Leftrightarrow |Gx| = \frac{|G|}{|G_x|}$
2. $\sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{g \in G} |F(g)|$

Teorema 4 Teorema Burnside - Frobenius

Misal G adalah grup permutasi yang beraksi pada X dengan G dan X adalah hingga. Jika k adalah banyaknya orbit di X pada G , maka:

$$k \cdot |G| = \sum_{g \in G} |F(g)|$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F(g)|$$

Definisi 8 Cycle

Suatu permutasi $\sigma \in S_n$ dinamakan cycle apabila σ paling banyak mempunyai 1 orbit yang memuat elemen lebih dari 1. Panjang cycle didefinisikan sebagai banyaknya elemen dalam orbit terbesar.

Definisi 9 Indeks Siklik

Diberikan G adalah grup permutasi dengan order m dari suatu himpunan yang banyak anggotanya n dan $g \in G$ bertipe cycle $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$. Indeks siklik g didefinisikan sebagai: $Z(g; x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} \dots x_n^{a_n}$ dan indeks siklik grup G didefinisikan:

$$Z(G; x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{m} \sum_{g \in G} Z(g; x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Definisi 10 Pewarnaan

Fungsi f dari himpunan berhingga X ke himpunan Y disebut pewarnaan X . Himpunan berhingga Y disebut warna, sedangkan himpunan semua jenis pewarnaan X terhadap warna Y disebut himpunan C . Dua pewarnaan $f, g \in C$ disebut ekuivalen (tak dapat dibedakan) terhadap grup G , grup permutasi di X jika $\exists \pi \in G$ sehingga $f(x) = g(\pi(x))$ untuk $\forall x \in X$.

Definisi 11 Pola

Kelas-kelas ekuivalen yang mempartisi himpunan C dengan relasi tak dapat dibedakan disebut pola-pola di C terhadap grup G .

Definisi 12 Persediaan Pola (Pattern Inventory/PI)

Misalkan fungsi bobot w memetakan himpunan Y ke sebuah himpunan $r = \{w(y_1), w(y_2), w(y_3), \dots, w(y_r)\}$.

Persediaan pola C terhadap grup G adalah:

$$PI(G; w(y_1), w(y_2), \dots, w(y_r)) = \sum_{n_1 + n_2 + \dots + n_r = n} K(n_1, n_2, \dots, n_r) [w(y_1)]^{n_1} [w(y_2)]^{n_2} \dots [w(y_r)]^{n_r}$$

$K(n_1, n_2, n_3, \dots, n_r)$ adalah koefisien yang menyatakan banyaknya pewarnaan yang dapat dibedakan (banyak pola) sehingga warna $w(y_1)$ bersesuaian dengan n_1 anggota, $w(y_2)$ bersesuaian dengan n_2 anggota, ..., dan $w(y_r)$ bersesuaian dengan n_r anggota.

Teorema 5 π' Permutasi dan G' Grup

Diberikan $C = \{f | f: X \rightarrow Y\}$ dan X, Y adalah himpunan berhingga, juga diketahui bahwa G adalah grup permutasi yang beraksi pada X . Untuk tiap $\pi \in G$ didefinisikan pemetaan π' dari C ke C dengan sifat:

$\pi'(f(x)) = f(\pi(x))$ untuk $\forall x \in X$ dan $\forall f \in C$, maka berlaku bahwa:

1. π' adalah permutasi di C .
2. $G' = \{\pi' : \pi \in G\}$ adalah grup

Teorema 6 (Teorema Polya I)

Diberikan $C = \{f | f: X \rightarrow Y\}$ dengan $|X| = n \geq 2$ dan $|Y| = r$. Jika G merupakan grup permutasi yang beraksi pada X dengan indeks siklik $Z(G; x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ maka banyaknya pola di C terhadap G adalah $Z(G; r, r, r, \dots, r)$.

Teorema 7 (Teorema Polya II)

Persediaan pola warna, $PI(G; w(y_1), w(y_2), w(y_3), \dots, w(y_r))$ adalah merupakan indeks siklik dari $Z(G; x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ pada $x_i = [w(y_1)]^i + [w(y_2)]^i + [w(y_3)]^i + \dots + [w(y_r)]^i$ dengan $i = 1, 2, \dots, n$.

Penerapan Teorema Polya pada Digraf Sederhana

Apabila n titik pada digraf sederhana G dikenai permutasi, maka $n(n - 1)$ pasangan titik terurut (artinya $ij \neq ji$) dari himpunan titik tersebut juga mengalami permutasi. Dalam hal ini pasangan terurut pada suatu himpunan dapat dipandang sebagai sisi, yang ujung-ujungnya adalah pasangan titik tersebut.

Jika himpunan permutasi pada titik-titik suatu digraf sederhana membentuk grup simetri yaitu S_n , maka permutasi dari pasangan titik-titik (sisi) juga membentuk grup simetri yaitu E_n . Jadi grup S_n (permutasi titik pada digraf) akan membangkitkan grup E_n (permutasi sisi pada digraf). Berdasarkan Teorema Polya ini dibuat digraf sederhana yang tidak isomorfik. Berikut akan dibahas bagaimana menentukan banyak digraf sederhana yang tidak isomorfik untuk 2 titik, 3 titik, dan 4 titik.

1. Digraf sederhana dengan $n = 2$ titik

Diketahui digraf sederhana G dengan himpunan titik $V = \{1, 2\}$. Misal S_2 adalah grup simetri yang terbentuk dari himpunan V , maka banyaknya anggota dari S_2 adalah $2! = 1.2 = 2$. Seluruh bentuk hasil perkalian cycle yang saling asing dari grup S_2 yaitu:

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (1)(2)$$

$$g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (12)$$

Permutasi pada dua titik suatu digraf sederhana membentuk grup simetri yaitu S_2 , maka permutasi dari pasangan titik-titik (sisi) juga membentuk grup simetri yaitu E_2 . Jadi grup S_2 (permutasi titik pada digraf) dengan $g \in S_2$ akan membangkitkan grup E_2 (permutasi sisi pada digraf) dengan $g' \in E_2$. Pasangan titik-titik (sisi) yang mungkin terbentuk dari dua titik adalah $n(n - 1) = 2(2 - 1) = 2$ buah, yaitu 12 dan 21 (12 artinya sisi berarah dari titik 1 ke titik 2 dan 21 artinya sisi berarah dari titik 2 ke titik 1).

Diperoleh hasil kali cycle di E_2 adalah sebagai berikut:

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (1)(2) \rightarrow g'_1 = \begin{pmatrix} 12 & 21 \\ 12 & 21 \end{pmatrix} = (12)(21)$$

$$g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (12) \rightarrow g'_2 = \begin{pmatrix} 12 & 21 \\ 21 & 12 \end{pmatrix} = (12 \ 21)$$

Tipe cycle dan indeks siklik dari anggota-anggota E_2 yaitu:

- (1). Untuk $g'_1 \in E_2$ tipe cyclenya yaitu $[2, 0]$ dan indeks sikliknya $y_1^2 y_2^0 = y_1^2$.
- (2). Untuk $g'_2 \in E_2$ tipe cyclenya yaitu $[0, 1]$ dan indeks sikliknya $y_1^0 y_2^1 = y_2$.

Sehingga indeks siklik dari E_2 adalah

$$\begin{aligned} Z(E_2; y_1, y_2) &= \frac{1}{m} \sum_{g' \in G} Z(g'; y_1, y_2) \\ &= \frac{1}{2} [Z(g'_1; y_1, y_2) + Z(g'_2; y_1, y_2)] \\ &= \frac{1}{2} [y_1^2 + y_2^2] \quad \dots\dots (1) \end{aligned}$$

Ada dua keadaan yang mungkin terjadi di antara dua titik. Keadaan tersebut adalah

- (1). Keadaan tidak ada sisi berarah antara dua titik
- (2). Keadaan ada sisi berarah antara dua titik

Jika r adalah keadaan yang mungkin terjadi di antara dua titik maka, $r = 2$. Dari persamaan (1) diperoleh $y_1 = y_2 = 2$, dan berdasarkan Teorema Polya I diperoleh

$$\begin{aligned} Z(E_2; 2,2) &= \frac{1}{2} [2^2 + 2] \\ &= 3 \end{aligned}$$

Jadi banyaknya digraf tak isomorfik yang terbentuk dari dua titik ada sebanyak 3 graf.

Jika keadaan-keadaan di antara dua titik diberi bobot w , maka

- (1). $w(z_1)$ = keadaan tidak ada sisi berarah antara dua titik.
- (2). $w(z_2)$ = keadaan ada sisi berarah antara dua titik.

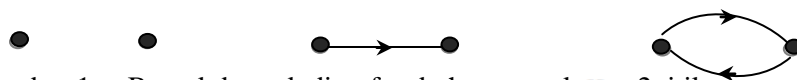
Misal $w(z_1) = T$ dan $w(z_2) = A$.

Berdasarkan Teorema Polya II, indeks siklik dari E_2 dengan mensubstitusikan

$y_1 = [w(z_1)] + [w(z_2)] = [T + A]$, dan $y_2 = [w(z_1)]^2 + [w(z_2)]^2 = [T^2 + A^2]$ menjadi

$$\begin{aligned} Z(E_2; y_1, y_2) &= \frac{1}{2} [y_1^2 + y_2] \\ &= \frac{1}{2} [[T + A]^2 + [T^2 + A^2]] \\ &= [T^2 + TA + A^2]. \end{aligned}$$

Artinya dari $n = 2$ titik akan dihasilkan 1 digraf tanpa sisi, 1 digraf dengan 1 sisi, dan 1 digraf dengan 2 sisi.



Gambar 1. Bentuk-bentuk digraf sederhana untuk $n = 2$ titik yang tak isomorfik

2. Digraf sederhana dengan $n = 3$ titik

Diketahui digraf sederhana G dengan himpunan titik $V = \{1,2,3\}$. Misal S_3 adalah grup simetri yang terbentuk dari himpunan V , maka banyaknya anggota dari S_3 adalah $3! = 1.2.3 = 6$. Seluruh bentuk hasil perkalian cycle yang saling asing dari grup S_3 yaitu:

$$\begin{aligned} g_1 &= (1)(2)(3) & g_2 &= (1)(23) \\ g_3 &= (13)(2) & g_4 &= (12)(3) \\ g_5 &= (123) & g_6 &= (132) \end{aligned}$$

Permutasi pada tiga titik suatu digraf sederhana membentuk grup simetri yaitu S_3 , maka permutasi dari pasangan titik-titik (sisi) juga membentuk grup simetri yaitu E_3 . Jadi grup S_3 (permutasi titik pada digraf) dengan $g \in S_3$ akan membangkitkan grup E_3 (permutasi sisi pada digraf) dengan $g' \in E_3$. Pasangan titik-titik (sisi) yang mungkin terbentuk dari tiga titik adalah

$n(n - 1) = 3(3 - 1) = 6$ buah, yaitu 12, 13, 23, 21, 31, dan 32. Diperoleh hasil kali cycle di E_3 adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} g'_1 &= (12)(13)(23)(21)(31)(32) & g'_4 &= (12\ 21)(13\ 23)(31\ 32) \\ g'_2 &= (12\ 13)(23\ 32)(21\ 31) & g'_5 &= (12\ 23\ 31)(13\ 21\ 32) \\ g'_3 &= (12\ 32)(13\ 31)(23\ 21) & g'_6 &= (12\ 31\ 23)(13\ 32\ 21) \end{aligned}$$

Tipe cycle dan indeks siklik dari anggota-anggota E_3 yaitu

- (1). Untuk $g'_1 \in E_3$ mempunyai tipe cycle $[6,0,0,0,0,0]$ dengan indeks sikliknya adalah $y_1^6 y_2^0 y_3^0 y_4^0 y_5^0 y_6^0 = y_1^6$.
- (2). Untuk $g'_2 \in E_3$ mempunyai tipe cycle $[0,3,0,0,0,0]$ dengan indeks sikliknya adalah $y_1^0 y_2^3 y_3^0 y_4^0 y_5^0 y_6^0 = y_2^3$.
- (3). Untuk $g'_3 \in E_3$ mempunyai tipe cycle $[0,3,0,0,0,0]$ dengan indeks sikliknya adalah $y_1^0 y_2^3 y_3^0 y_4^0 y_5^0 y_6^0 = y_2^3$.
- (4). Untuk $g'_4 \in E_3$ mempunyai tipe cycle $[0,3,0,0,0,0]$ dengan indeks sikliknya adalah $y_1^0 y_2^3 y_3^0 y_4^0 y_5^0 y_6^0 = y_2^3$.
- (5). Untuk $g'_5 \in E_3$ mempunyai tipe cycle $[0,0,2,0,0,0]$ dengan indeks sikliknya adalah $y_1^0 y_2^0 y_3^2 y_4^0 y_5^0 y_6^0 = y_3^2$.
- (6). Untuk $g'_6 \in E_3$ mempunyai tipe cycle $[0,0,2,0,0,0]$ dengan indeks sikliknya adalah $y_1^0 y_2^0 y_3^2 y_4^0 y_5^0 y_6^0 = y_3^2$.

Tampak bahwa anggota-anggota S_3 yang mempunyai tipe cycle dan indeks siklik yang sama akan diubah ke anggota-anggota E_3 yang mempunyai tipe cycle dan indeks siklik yang sama pula, sehingga indeks siklik dari E_3 adalah

$$\begin{aligned} Z(E_3; y_1, y_2, \dots, y_6) &= \frac{1}{m} \sum_{g' \in G} Z(g'; y_1, y_2, \dots, y_6) \\ &= \frac{1}{6} [y_1^6 + y_2^3 + y_2^3 + y_2^3 + y_3^2 + y_3^2] \\ &= \frac{1}{6} [y_1^6 + 3y_2^3 + 2y_3^2] \quad \dots \quad (2) \end{aligned}$$

Ada dua keadaan yang mungkin terjadi di antara dua titik. Keadaan tersebut adalah

- (1) keadaan tidak ada sisi berarah antara dua titik
- (2) keadaan ada sisi berarah antara dua titik

Jika r adalah keadaan yang mungkin terjadi di antara dua titik maka, $r = 2$. Dari persamaan (2) diperoleh $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = y_5 = y_6 = 2$, dan berdasarkan Teorema Polya I diperoleh

$$\begin{aligned} Z(E_3; y_1, y_2, y_3, \dots, y_6) &= \frac{1}{6} [y_1^6 + 3y_2^3 + 2y_3^2] \\ Z(E_3; 2,2,2,2,2,2) &= \frac{1}{6} [2^6 + 3 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2] \\ &= \frac{1}{6} [96] = 16 \end{aligned}$$

Jadi banyaknya digraf sederhana tak isomorfik yang terbentuk dari tiga titik ada sebanyak 16 buah.

Jika keadaan-keadaan di antara dua titik diberi bobot w , maka

- (1) $w(z_1) =$ keadaan tidak ada sisi berarah antara dua titik.
- (2) $w(z_2) =$ keadaan ada sisi berarah antara dua titik

Misal $w(z_1) = T$ dan $w(z_2) = A$.

Berdasarkan Teorema Polya II, indeks siklik dari E_3 dengan mensubstitusikan $y_1 = [w(z_1)] + [w(z_2)] = [T + A]$, $y_2 = [[w(z_1)]^2 + [w(z_2)]^2] = [[T^2 + A^2]]$,

dan $y_3 = [[w(z_1)]^3 + [w(z_2)]^3] = [[T^3 + A^3]]$ diperoleh indeks siklik E_3 yaitu

$$\begin{aligned}Z(E_3; y_1, y_2, y_3, \dots, y_6) &= \frac{1}{6} [y_1^6 + 3y_2^3 + 2y_3^2] \\Z(E_3; y_1, y_2, y_3, \dots, y_6) &= \frac{1}{6} [(T + A)^6 + 3 \cdot [T^2 + A^2]^3 + 2 \cdot [T^3 + A^3]^2] \\&= [T^6 + T^5A + 4T^4A^2 + 4T^3A^3 + 4T^2A^4 + TA^5 + 6A^6]\end{aligned}$$

Artinya dari $n = 3$ titik akan diperoleh: 1 digraf tanpa sisi, 1 digraf dengan 1 sisi, 4 digraf dengan 2 sisi, 4 digraf dengan 3 sisi, 4 digraf dengan 4 sisi, 1 digraf dengan 5 sisi, dan 1 digraf dengan 6 sisi.

3. Digraf sederhana dengan $n = 4$ titik

Diketahui digraf sederhana G dengan himpunan titik $V = \{1, 2, 3, 4\}$. Misal S_4 adalah grup simetri yang terbentuk dari himpunan V , maka banyaknya anggota dari S_4 adalah $4! = 1.2.3.4 = 24$. Dengan cara yang sama seperti pada digraf sederhana yang terdiri dari 2 titik dan 3 titik di atas, untuk digraf sederhana yang terdiri 4 titik ini diperoleh 218 digraf sederhana tak isomorfik yang terdiri atas: 1 digraf tanpa sisi, 1 digraf dengan 1 sisi, 5 digraf dengan 2 sisi, 13 digraf dengan 3 sisi, 27 digraf dengan 4 sisi, 38 digraf dengan 5 sisi, 48 digraf dengan 6 sisi, 38 digraf dengan 7 sisi, 27 digraf dengan 8 sisi, 13 digraf dengan 9 sisi, 5 digraf dengan 10 sisi, 1 digraf dengan 11 sisi, dan 1 digraf dengan 12 sisi.

PENUTUP

Dari pembahasan di atas, diperoleh simpulan bahwa Teorema Polya I berkaitan dengan banyaknya digraf sederhana yang terdiri dari n titik antara satu digraf dengan digraf lainnya. Teorema Polya II berkaitan dengan banyaknya digraf sederhana yang tidak isomorfik yang terdiri dari n titik dan k garis antara digraf satu dengan digraf yang lainnya. Saran dari penulis, penelitian ini dapat dikembangkan pada pewarnaan graf.

DAFTAR PUSTAKA

- Gunawan, S. 2002. Aplikasi Teorema Polya pada Enumerasi Graf Sederhana. *Integral* Vol. 8 No. 1 Hal: 1-10. Tersedia di: <http://santosa.ukdw.ac.id>. [20 April 2011].
- Tomakin, F. Y. 2009. The Polya Theory and Permutation Groups. *Chamcuri Journal of Mathematics*. Vol. 1 No.2. Hal: 1-23. Tersedia di: <http://www.math.sc.chula.ac.th/cjm> [20 April 2011].
- Vasudev, C. 2007. *Combinatorics and Graph Theory*. New Delhi: New Age International (P) Ltd.
- Wihikanwijna. 2006. *Burnside Lemma Introduksi Enumerasi Polya*. Tersedia di: <http://himatika.mipa.ugm.ac.id/down/kul/BurnsidePolya.pdf>. [20 April 2011].
- Wilson, Robin J. & Watkins, John J. 1990. *Graphs: An Introductory Approach*. New York: John Wiley & Sons. Inc.

MODEL NUMERIK DISTRIBUSI TEMPERATUR PADA RUANGAN BER-AC DENGAN MEMPERTIMBANGKAN INTERIOR DRAG

¹Hirman Rachman, ²Basuki Widodo

¹Mahasiswa Pasca Sarjana Jurusan Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember,
Guru MTsN Tinambung, Polman, Sul-Bar

²Dosen Jurusan Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Abstrak

Kualitas dan kenyamanan udara dalam suatu ruangan tergantung beberapa faktor, diantaranya pola aliran distribusi udara, pola aliran distribusi temperatur ruangan, dan kelembaban udara. Untuk mendapatkan udara yang sehat diperlukan pengkodisian ventilasi ruangan tersebut dengan bantuan difuser, Sehingga sirkulasi aliran udara dan temperatur ruangan yang telah dikondisikan menjadi lebih efektif dan terjaga. Dalam penelitian ini akan dibandingkan efektifitas dan efisiensi penggunaan difuser *Air Conditioner* (AC) berdasarkan letak. Difuser akan diletakkan di setiap bidang ruangan secara bergantian dan akan diamati dinamikanya terhadap waktu. Dalam penelitian ini, model numerik distribusi temperatur dalam ruang ber-AC dengan mempertimbangkan interior drag akan dianalisa dengan pendekatan diskritisasi *Finite Volume Method* (FVM) dan teknik diskritisasi yang digunakan adalah *Quadratic Upwind Interpolation Convective Kinematic* (QUICK). Kemudian akan divisualisasikan dengan menggunakan software CFD fluent.

Kata kunci: *CFD Fluent, Distribusi temperatur, Finite Volume Method (FVM), Quadratic Upwind Interpolation Convective Kinematic (QUICK).*

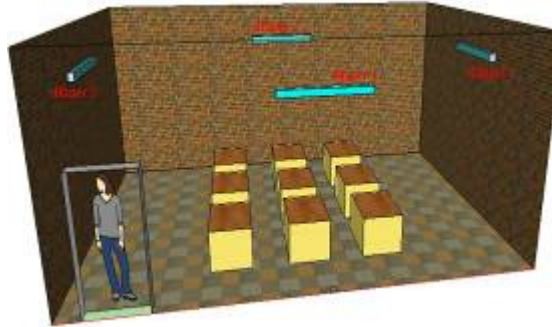
PENDAHULUAN

Perkembangan rekayasa terjadi karena kebutuhan manusia untuk mempermudah dan melayani diri dalam beraktivitas, rekayasa ini sangat dipengaruhi efisiensi dan estetika. Manusia akan mengerahkan pengetahuannya untuk menghasilkan manajemen dan inovasi dalam rangka *Self Service* tersebut, mereka akan selalu mencoba untuk membentuk suasana lingkungannya menjadi suasana yang paling maksimal dalam mendukung aktifitasnya, bukan hanya efektifitas yang ingin dicapai juga yang paling berpengaruh adalah keindahan estika lingkungannya dan manusia akan selalu mencari kombinasi terbaik untuk membentuk lingkungan yang nyaman dalam beraktifitas.

Kebanyakan orang menghabiskan sebagian besar waktu mereka di dalam ruangan, sehingga kontrol kuantitatif dan kualitatif aliran udara dalam ruangan secara luas dianggap sebagai suatu hal yang penting yang menjadi perhatian publik. Pengetahuan dan prediksi kondisi iklim dalam ruangan yang penting untuk mengoptimalkan iklim indoor dan kualitas udara dalam ruangan, dan juga penting untuk konservasi energi. Alat baru memberikan kemungkinan baru untuk studi bidang ini penting. *Computation Fluid Dynamic* (CFD) teknik yang berkembang pesat dan digunakan secara luas dan kemajuan juga sedang dibuat dalam teknik pengukuran, seperti keseluruhan medan-teknik pengukuran (Cehlin M dan Moshfegh B, 2010).

Sistem distribusi udara juga harus memberikan kondisi yang baik pada ruangan. Ini berarti kecepatan dan temperatur pada ruangan sesuai dengan daerah yang dikondisikan. Semua parameter tersebut merupakan hubungan timbal balik yang kompleks dari; jenis diffuser, kecepatan, geometri ruangan, lokasi, ukuran sumber panas dan lain-lain. Pola distribusi temperatur dalam ruangan adalah hasil interaksi antara gaya-gaya inersia, gesek, tekan dan apung. Gaya-gaya ini bekerja pada elemen-elemen aliran udara didalam ruangan. Kecepatan dan temperatur yang dihasilkan sangat bergantung pada mesin pendingin yang digunakan untuk menghasilkan udara yang dialirkan keruangan yang dikondisikan. Disamping itu posisi difuser juga akan menghasilkan distribusi temperatur yang berbeda. (Soedjono, dkk, 2006).

Penelitian yang pernah dilakukan oleh para ahli mengenai model distribusi temperatur yang menjadi referensi yaitu Soedjono, dkk., (2006), dan Cehlin M dan Moshfegh B., (2010) dalam penelitiannya membahas tentang model numerik perbandingan letak difuser dalam suatu ruangan, Matloeb, N., (2009) yang membahas secara numerik pola distribusi temperatur dalam ruang ber-AC. Pada penelitian ini akan diberikan penambahan perlakuan dengan internal drag. Dengan penambahan ini menimbulkan aliran turbulen yang menjadikan objek masalah tambahan dalam penelitian.



Gambar 1: Representasi model ruangan ber-AC dengan empat posisi difuser

Gambar diatas merupakan sketsa geometri yang akan dilakukan dalam penelitian ini, dengan posisi difuser yang berbeda akan dibandingkan pola distribusi temperatur serta model numerik yang dibangun. Dalam merepresentasikan penelitian ini prinsip fisika yang akan dimodelkan dalam bentuk numerik. Pencarian persamaan-persamaan sebagai formula pembangun dari kondisi tersebut merupakan langkah awal untuk memprediksi pola distribusi temperatur dalam simulasi model diatas. Prinsip fisika yang utama diterapkan adalah hukum konservasi (kekekalan) dan transportasi.

PEMBAHASAN

1. Persamaan Pembangun

Adalah tiga prinsip konservasi yang diterapkan pada kondisi penelitian ini, yaitu konservasi pada massa, konservasi pada momentum dan konservasi entalpi. Persamaan konservasi tersebut dituliskan sebagai berikut:

Massa

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v\phi)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w\phi)}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

Momentum-x

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vu)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho wu)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right] + \sum F_x \quad (2)$$

Momentum-y

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho wv)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \frac{\partial v}{\partial z} \right] + \sum F_y \quad (3)$$

Momentum-z

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho ww)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \sum F_z \quad (4)$$

Entalpi

$$\frac{\partial(\rho\eta)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u\eta)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v\eta)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w\eta)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left[k \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[k \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[k \frac{\partial T}{\partial z} \right] + \dot{Q} \quad (5)$$

Selain daripada prinsip-prinsip diatas, adanya suatu *internal drag* dalam ruangan akan menyebabkan gangguan pada model aliran dan difusi dari sumber, sehingga persamaan persamaan diatas mengalami distorsi akibat gangguan internal drag tersebut. Terjadinya gangguan ini

menyebabkan gerakan fluktuatif yang tak harmoni pada model alirannya. Gejala ini disebut gerak turbulen atau aliran turbulen. Aliran turbulen secara umum dapat dipandang sebagai gerakan fluida secara intrinsik menjadi tidak stabil dan goyah sehingga bentuk akhir cairan berperilaku secara acak dan kacau. Aliran ini selalu memiliki karakter spasial tiga dimensi, dan fluktuasi cepat secara bersamaan dipolakan di arus tersebut. Akibat dari gangguan internal drag yang diberikan maka persamaan (2)-(5) mengalami perubahan sebagai berikut:

Momentum-x

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vu)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho wu)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \rho k \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + S_{M_x} \quad (6)$$

Momentum-y

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho wv)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \rho k \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + S_{M_y} \quad (7)$$

Momentum-z

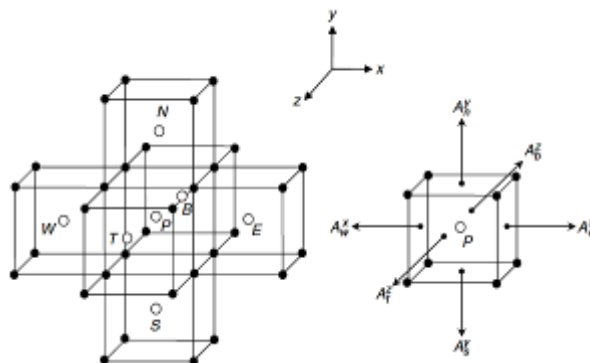
$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho ww)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial w}{\partial z} \rho k \right] + S_{M_z} \quad (8)$$

Entalphi

$$\frac{\partial(\rho \eta)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u \eta)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \eta)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w \eta)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{k}{C_p} \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{k}{C_p} \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{k}{C_p} \frac{\partial T}{\partial z} \right] + S_\eta \quad (9)$$

2. Model Numerik

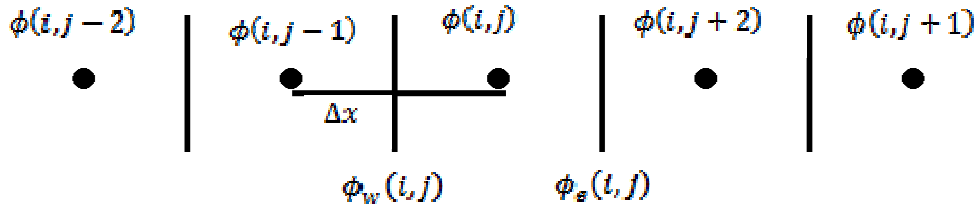
Untuk menyelesaikan persamaan diatas secara numerik, maka ada beberapa metode yang diperkenalkan untuk digunakan. memilih model matematika, kita harus memilih metode diskritisasi cocok, yaitu sebuah metode mendekati diferensial dengan sistem persamaan aljabar untuk variabel-variabel di beberapa set lokasi diskrit dalam ruang dan waktu, terdapat banyak pendekatan tapi yang umum digunakan antara lain; *Finite Difference Method (FDM)*, *Finite Volume Method (FVM)* dan *Finite Element Method (FEM)*. Metode lainnya seperti *Spectral Scheme*, *Boundary Element Method (BEM)*, dan *Cellular Automata* juga biasa digunakan dalam komputasi fluida dinamik. Dan dalam penelitian ini dalam digunakan Finite volume method (FVM).



Gambar 2: Volume kendali dari struktur metode volume hingga

Pada metode volume hingga harus diketahui domainnya dengan jelas, dari domain tersebut dibagi menjadi grid-grid baik yang terstruktur maupun yang tidak. Pada masing-masing grid memenuhi persamaan matematika yang terbentuk. Persamaan matematika yang terbentuk dalam face sehingga perlu dirubah menjadi node agar tidak saling tumpang tindih. Terdapat beberapa teknik pendiskritan dalam volume hingga, pemilihan teknik pendiskritan disesuaikan dengan permasalahan yang akan diselesaikan.

Dalam penelitian ini akan digunakan skema *Quadratic Upwind Interpolation Convective Kinematic* (QUICK) sebagai teknik diskritisasi untuk metode volume hingga tersebut. Adapun alasannya dari penggunaan skema ini karena hasil yang dicapai lebih stabil. Matrik yang diperoleh sebagai hasil dari skema ini adalah simetris berbentuk matrik tridiagonal dan mempunyai invers. Menurut Apsley (2005) pendiskritan dengan menggunakan metode QUICK untuk merubah nilai pada face menjadi nilai pada node, diilustrasikan pada gambar berikut:



Gambar 3: Diskritisasi QUICK

Gambar diatas menunjukkan pembagangan satu dimensi, karena sistem ventilasi ini dimensi tiga, dimungkinkan persamaan-persamaan yang muncul lebih dari satu persamaan dan dimungkinkan akan melibatkan algoritma Gauss. Untuk diskrit tiga dimensi flux yang terjadi pada volume kendalanya diperoleh formulasebagai berikut:

$$\phi_e(i, j, k) = -\frac{1}{8}\phi(i-1, j, k) + \frac{3}{4}\phi(i, j, k) + \frac{3}{8}\phi(i+1, j, k) \quad (10)$$

$$\phi_w(i, j, k) = -\frac{1}{8}\phi(i-2, j, k) + \frac{3}{4}\phi(i-1, j, k) + \frac{3}{8}\phi(i, j, k) \quad (11)$$

$$\phi_n(i, j, k) = -\frac{1}{8}\phi(i, j-1, k) + \frac{3}{4}\phi(i, j, k) + \frac{3}{8}\phi(i, j+1, k) \quad (12)$$

$$\phi_s(i, j, k) = -\frac{1}{8}\phi(i, j-2, k) + \frac{3}{4}\phi(i, j-1, k) + \frac{3}{8}\phi(i, j, k) \quad (13)$$

$$\phi_t(i, j, k) = -\frac{1}{8}\phi(i, j, k-1) + \frac{3}{4}\phi(i, j, k) + \frac{3}{8}\phi(i, j, k+1) \quad (14)$$

$$\phi_b(i, j, k) = -\frac{1}{8}\phi(i, j, k-2) + \frac{3}{4}\phi(i, j, k-1) + \frac{3}{8}\phi(i, j, k) \quad (15)$$

Untuk setiap properti variabel ϕ . Ini menggambarkan berbagai proses transportasi fisik yang terjadi dalam aliran fluida. Untuk memecahkan persamaan konservasi akan diubah dan bentuk persamaan transportasi atas volumekendali terbatas. Integrasi persamaan tiga dimensi volume kendali menghasilkan:

$$\int_v \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV + \int_v \left\{ \frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v\phi)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w\phi)}{\partial z} \right\} dV$$

$$= \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\Gamma \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\Gamma \phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\Gamma \phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] \right\} dV + \int_V S \phi dV \quad (16)$$

Integrasi diatas dapat ditulis dalam bentuk diskrit:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (\rho u \phi)_i A_i^x + \sum_{j=1}^N (\rho u \phi)_j A_j^y + \sum_{k=1}^N (\rho u \phi)_k A_k^z &= \sum_{i=1}^N \left[\Gamma \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_i A_i^x + \sum_{j=1}^N \left[\Gamma \phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_j A_j^y \\ &+ \sum_{k=1}^N \left[\Gamma \phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right]_k A_k^z + S \phi \Delta V \end{aligned} \quad (17)$$

Dengan mengubah persamaan konservasi kedalam bentuk persamaan transportasi diperoleh formula sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \phi_e \left[(\rho u) - 2\mu - \frac{2}{3} \rho k \right] \partial y \partial z + \phi_w \left[\frac{2}{3} \rho k - (\rho u) - 2\mu \right] \partial y \partial z + \phi_n \left[(\rho v) - \mu \right] \partial x \partial z \\ + \phi_s \left[-(\rho v) - \mu \right] \partial x \partial z + \phi_t \left[(\rho w) - \mu \right] \partial x \partial y + \phi_b \left[-(\rho w) - \mu \right] \partial x \partial y \\ = -P \partial y \partial z - P \partial x \partial z - P \partial x \partial y - \rho g \partial x \partial y \partial z \\ + \left[(\rho u_e) \partial y \partial z - (\rho u_w) \partial y \partial z + (\rho v_s) \partial x \partial z - (\rho v_n) \partial x \partial z + (\rho w_b) \partial x \partial y - (\rho w_t) \partial x \partial y \right] \end{aligned} \quad (18)$$

Selanjutnya skema QUICK yaitu persamaan (10)-(15) disubstitusikan secara serempak kedalam persamaan (18), sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \left[-\frac{1}{8} \phi_e(i-1, j, k) + \frac{3}{4} \phi_e(i, j, k) + \frac{3}{8} \phi_e(i+1, j, k) \right] \left[(\rho u) - 2\mu - \frac{2}{3} \rho k \right] \partial y \partial z \\ + \left[-\frac{1}{8} \phi_w(i-2, j, k) + \frac{3}{4} \phi_w(i-1, j, k) + \frac{3}{8} \phi_w(i, j, k) \right] \left[\frac{2}{3} \rho k - (\rho u) - 2\mu \right] \partial y \partial z \\ + \left[-\frac{1}{8} \phi_n(i, j-1, k) + \frac{3}{4} \phi_n(i, j, k) + \frac{3}{8} \phi_n(i, j+1, k) \right] \left[(\rho v) - \mu \right] \partial x \partial z \\ + \left[-\frac{1}{8} \phi_s(i, j-2, k) + \frac{3}{4} \phi_s(i, j-1, k) + \frac{3}{8} \phi_s(i, j, k) \right] \left[-(\rho v) - \mu \right] \partial x \partial z \\ + \left[-\frac{1}{8} \phi_t(i, j, k-1) + \frac{3}{4} \phi_t(i, j, k) + \frac{3}{8} \phi_t(i, j, k+1) \right] \left[(\rho w) - \mu \right] \partial x \partial y \\ + \left[-\frac{1}{8} \phi_b(i, j, k-2) + \frac{3}{4} \phi_b(i, j, k-1) + \frac{3}{8} \phi_b(i, j, k) \right] \left[-(\rho w) - \mu \right] \partial x \partial y \\ = -P \partial y \partial z - P \partial x \partial z - P \partial x \partial y - \rho g \partial x \partial y \partial z + \left[(\rho u_e) \partial y \partial z - (\rho u_w) \partial y \partial z + (\rho v_s) \partial x \partial z - (\rho v_n) \partial x \partial z \right. \\ \left. + (\rho w_b) \partial x \partial y - (\rho w_t) \partial x \partial y \right] \end{aligned} \quad (19)$$

Karena ϕ adalah peubah yang dicari, maka variabel tersebut diubah sesuai dengan keinginan yaitu distribusi temperatur sehingga ϕ dibah menjadi variabel T . Selanjutnya variabel T dipisahkan dari masing-masing suku dan disesuaikan menurut index kedudukan node satu dengan node berikutnya, Untuk memudahkan diskritisasi diperlukan penyederhanaan dengan mendefenisikan beberapa kelompok variabel yang bersesuaian indexnya pada menjadi variabel baru, sehingga diperoleh beberapa persamaan baru:

$$A[T(i-1, j, k)] + B[T(i, j, k)] + C[T(i+1, j, k)] + D[T(i+2, j, k)] + E[T(i, j-2, k)]$$

$$\begin{aligned}
 &+F[T(i, j-1, k)] + G[T(i, j+1, k)] + H[T(i, j, k-2)] + I[T(i, j, k-1)] \\
 &+J[T(i, j, k+1)] = S
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

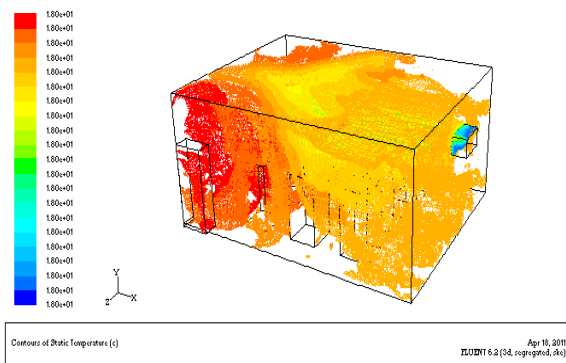
Selanjutnya untuk memperoleh persamaan perkalian matrik berbentuk $AT=S$ perlu menjabarkan secara bertahap menurut konstruksi pembangan dari ruangan yaitu membagi ruangan kedalam bebarapa volume kendali. Dalam penelitian ini ruangan berbentuk persegi panjang dengan jumlah volume kendali sebanyak 252 node dari jumlah node sepanjang-x 9(i), sepanjang-y 7(j), dan sepanjang-z 4(k).

Untuk menyelesaikan model matrik diatas dapat digunakan dengan menggunakan kode program dari MATLAB, dan untuk visualisali yang lebih kompleks digunakan software khusus CFD.

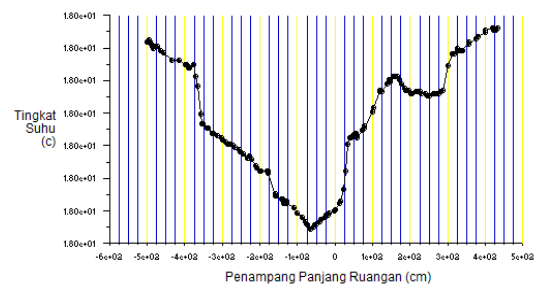
3. Visualisasi Simulasi

Sebagai visualisasi digunakan software CFD yaitu Gambit dan Fluent, aplikasi ini merupakan merupakan program komputer yang banyak digunakan untuk memodelkan aliran fluida dan perpindahan panas. Tools ini akan digunakan untuk melakukan simulasi pola distribusi temperatur pada ruang ber-AC yang dipengaruhi *internal drag*. Suatu pola yang merupakan representase dari suatu ruangan yang direduksi kedalam geometri yang berbentuk balok dengan ukuran 9 x 7 x 4 meter. Didalam ruangan tersebut dibuat *internal drag* sebanyak sembilan buah yang berukuran 1 x 1 x 2 meter. Ada empat posisi difuser yang akan dibandingkan tingkat efektifitas distribusi suhu. Difuser tersebut merupakan ventilasi masuknya udara dan kemudian ventilasi keluarnya udara melewati pintu ruangan.

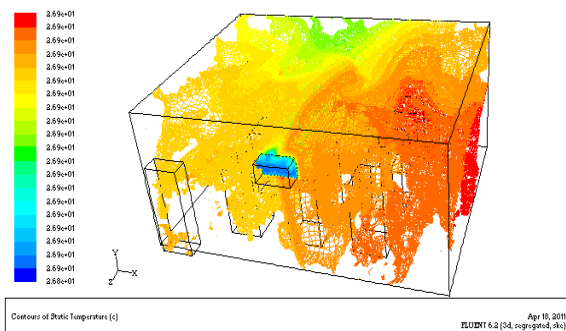
Dalam simulasi ini difuser akan menyebarkan hembusan udara dingin yang kedalam ruangan dengan kecepatan dan pengaruh gravitasi. Atribut parameter yang mempengaruhi kondisi ruangan pada umumnya menggunakan default dari parameter dari software CFD yang digunakan seperti massa jenis dan kekentalan fluida dalam hal ini adalah udara. Untuk mengukur efektifitas dipilih area sebagai subyek penerima penurunan suhu dan dalam simulasi ini subyek tersebut berupa bidang sejajar dan satu meter diatas lantai



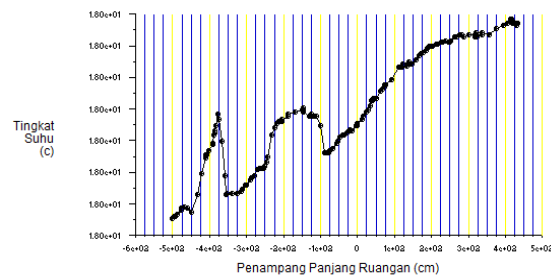
1(a)



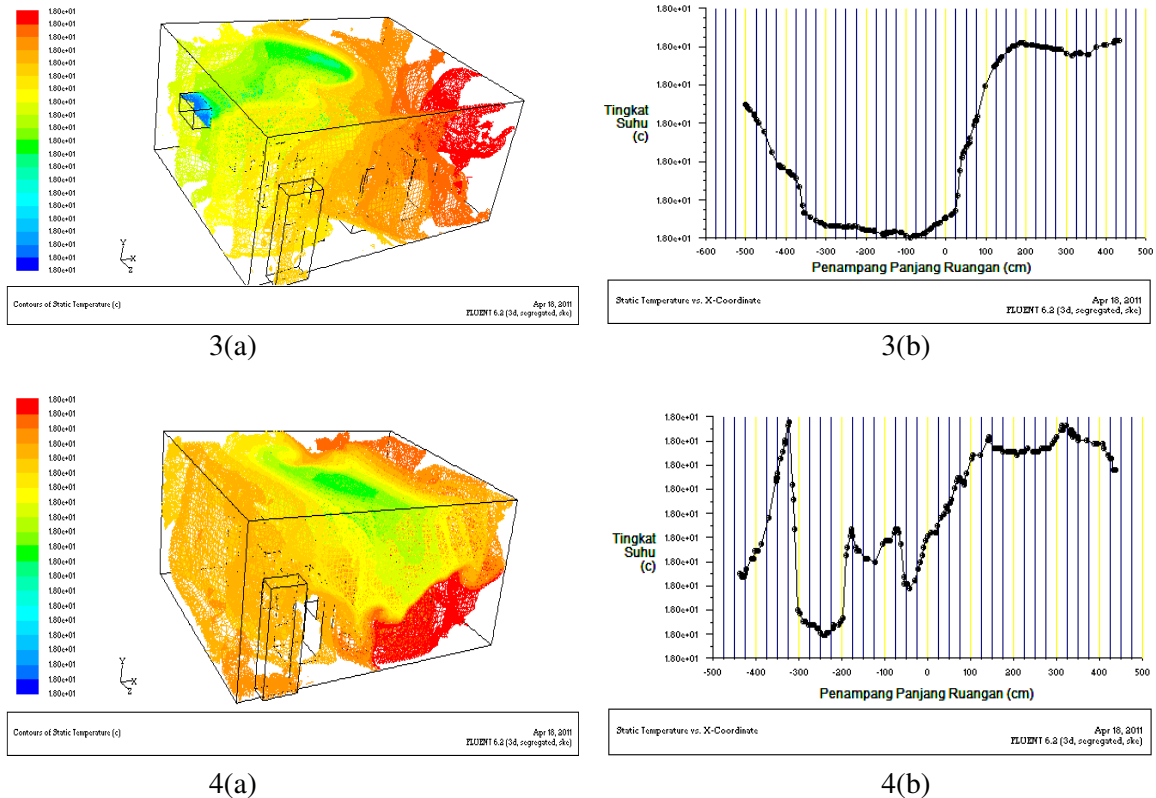
1(b)



2(a)



2(b)



Gambar 4: Kantor 3D dan gradien bidang pengamatan distribusi temperatur ruang

Pada gambar 4, label 1(a) adalah kontur 3D distribusi temperatur untuk difuser posisi-1 dan 1(b) gradien rata-rata slice bidang pengamatan, selanjutnya 2(a) dan 2(b) untuk posisi ke-2, 2(a) dan 2(b) untuk posisi ke-3 dan 2(a) dan 2(b) untuk posisi ke-4.

KESIMPULAN

Dari hasil kajian yang dilakukan pada tulisan ini maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Dalam distribusi temperatur pada ruangan ber-AC, temperatur dihantar oleh udara sehingga faktor fisis persamaan konservasi massa, momentum dan enthalpi merupakan komponen utama dalam memformulakan persamaan pembangunnya.
2. Dengan komponen *internal drag*, menyebabkan gejolak distribusi temperatur, sehingga diperlukan penambahan persamaan gangguan pada persamaan pembangunnya.
3. Dari hasil simulasi dengan software Fluent. Letak difuser pada posisi tiga menunjukkan penurunan temperatur pada sebagian besar area subjek, sehingga pada penelitian ini dapat disimpulkan bahwa letak difuser pada posisi tersebut merupakan letak yang paling efektif dalam penggunaannya.

DAFTAR PUSTAKA

- Cehlin, M., Moshfegh, B., (2010), "Numerical Modeling of A Complex Diffuser in A Room with Displacement Ventilation" *Building and Environment*, Vol. 45, Hal. 2240-2252.
- Matloeb, N., (2009), *Analisis pola Distribusi Temperatur pada Ruang Ber-AC dengan Menggunakan Finite Volume Method (FVM)*, Tesis, Jurusan Matematika, Institut Teknologi Sepuluh November, Surabaya.

Denny ME Soedjono, 2006, *Pengaruh Posisi Difuser dan Variasi Kecepatan Udara Masuk Terhadap Distribusi Temperatur Ruang Terkondisi (Sebuah Studi Numerik)*, Jurusan Teknik Mesin, Institut Teknologi Sepuluh November, Surabaya.

Apsley, D., (2005), *Computational Fluid Dynamic*, Springer, New York.

Ferziger, J.H., Peric, M., (2002), *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York.

Versteeg, HK, 1995, *An Introduction to Computational Fluid Dynamics The Finite Volume Method*, Burnt Mill Harlow England

Cahyono, M., (2000) *Materi Kuliah Hidraulika Lanjut*, Penerbit ITB Bandung, Bandung
Fluent Inc., 1996, manual of fluent CFD, Fluent Inc,

DESAIN PENGENDALIAN KETINGGIAN AIR DAN TEMPERATUR UAP PADA SISTEM *STEAM DRUM BOILER* DENGAN METODE *SLIDING MODE CONTROL* (SMC)

¹Teguh Herlambang, ²Erna Apriliani, ³Hendra Cordova dan ⁴Mardlijah

^{1,2,4} *Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Kampus ITS Keputih Sukolilo Surabaya, Indonesia*

³ *Jurusan Teknik Fisika Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Kampus ITS Keputih Sukolilo Surabaya, Indonesia*

Email : teguh@matematika.its.ac.id , teguh_itscuk06@yahoo.com

Abstrak

Pada suatu sistem pembangkit listrik tenaga uap (PLTU), yang memegang peranan penting adalah *boiler*. *Steam drum Boiler* merupakan sebuah drum yang berfungsi untuk memisahkan fluida antara fase gas dan fase cair. Keberadaannya dalam sebuah sistem *boiler*, memegang peranan yang sangat penting. Variabel yang dikendalikan dalam *steam drum boiler* adalah ketinggian air dan temperatur uap sehingga perlu adanya sistem pengendali. Pada *steam drum boiler* memiliki model dinamika yang nonlinier dan memiliki banyak ketidakpastian (*uncertainties*). Permasalahan umum yang sering dihadapi sistem pengendali nonlinier adalah munculnya gangguan tak pasti yang berasal dari dalam maupun luar sistem serta parameter yang tidak konstan. Untuk memperbaiki performansi sistem, digunakan salah satu metode yang cukup banyak mendapat perhatian yaitu *Sliding Mode Control* (SMC). Pada Paper ini, dirancang suatu sistem pengendali dengan menggunakan metode SMC yang diterapkan pada sistem *Steam Drum Boiler*. Dari hasil penelitian diperoleh kesimpulan bahwa secara umum pengendali SMC *robust* terhadap gangguan eksternal baik bernilai kecil maupun besar, serta terhadap gangguan internal baik dengan memperkecil parameter maupun memperbesar parameter..

Kata kunci: *Sliding Mode Control* (SMC), *steam drum boiler*, ketinggian air, temperatur uap

PENDAHULUAN

Di Negara kita, memproduksi listrik dilakukan oleh bermacam-macam jenis instalasi pembangkit listrik yang rumit. Salah satunya adalah PLTU (Pembangkit Listrik Tenaga Uap). Pada suatu sistem pembangkit listrik tenaga uap (PLTU), yang memegang peranan penting adalah *boiler*. *Steam drum boiler* merupakan sebuah tangki yang berfungsi untuk memisahkan fluida antara fase gas dan fase cair. Variabel yang dikendalikan dalam *steam drum boiler* adalah ketinggian air dan temperatur uap. Pengendalian ketinggian air dan temperatur uap pada *steam drum boiler* adalah hal yang sangat penting untuk *safety* dan *efisiensi* operasional dari *boiler* sehingga dapat dikatakan bahwa *steam drum boiler* adalah jantung dari sebuah *boiler*.

Dalam hal ini ketinggian air dipertahankan pada ketinggian *set point* yaitu sebesar 0,7625 m. *Control valve* pada flow air merupakan pengontrol sistem ketinggian air yang dapat dikendalikan sesuai *set point*. Temperatur uap dipertahankan pada nilai *set point* yang ditentukan yaitu sebesar 786 K. Flow uap panas merupakan pengontrol sistem temperatur uap yang dapat dikendalikan agar temperatur uap sesuai dengan nilai *set point* yang ditentukan.

Untuk memperbaiki performansi sistem, digunakan salah satu metode untuk pengendalian

adalah *Sliding Mode Control* (SMC). SMC memiliki beberapa keunggulan, yaitu sifatnya yang sangat robust, mampu bekerja dengan baik pada sistem nonlinear yang memiliki ketidakpastian model ataupun parameter. Sehingga pada penelitian ini, dirancang desain pengendalian ketinggian air dan temperatur uap pada *steam drum boiler* dengan menggunakan *Sliding Mode Control* (SMC). Agar penelitian ini tidak meluas maka ada ada batasan yaitu plant yang dijadikan objek penelitian adalah *steam drum boiler* PT PJB Unit Pembangkitan Gresik PLTU ½ dan diasumsikan *steam drum boiler* dalam keadaan belum terisi saat kondisi awal.

METODE PENELITIAN

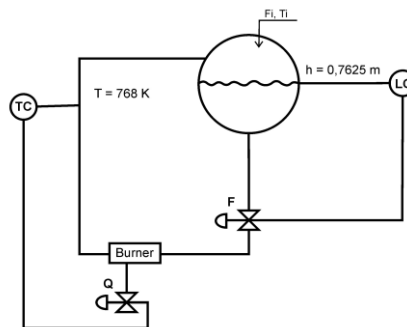
Metode yang digunakan pada paper ini dalam menyelesaikan permasalahan adalah :

1. Kajian pustaka dan Analisis permasalahan.
2. Mengkaji model matematika ketinggian air dan temperatur uap pada *steam drum boiler*.
3. Perancangan desain pengendali SMC untuk sistem *steam drum boiler*.
4. Simulasi menggunakan *software* Matlab 7.
5. Analisis performansi sistem yang dikendalikan dengan SMC.
6. Penyimpulan hasil analisis simulasi.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Perancangan Pengendali *Sliding Mode Control* (SMC)

Rancangan sistem pengendali ketinggian air dan temperatur uap pada *steam drum boiler*. Model matematika dari *steam drum boiler* dibentuk oleh dua variabel yaitu ketinggian air dan temperatur uap



Gambar 1 *steam drum boiler*

Model matematika dari gambar 1 adalah [3] :

$$A \frac{dh}{dt} = F_{in} - F_{out} \quad (1)$$

$$Ah \frac{dT}{dt} = F_{in} T_{in} - T + \frac{Q}{\rho C_p} \quad (2)$$

dimana $F_{out} = kw\sqrt{h}$

Dengan :

F_{in} = Flow air yang masuk (kg/jam) ; F_{out} = Flow air yang keluar (kg/jam)

T = Temperatur uap (K) ; T_{in} = Temperatur air yang masuk (K) ; Q = Flow uap (kg/jam)

V = Volume air (m³) ; A = Luas steam drum boiler (m²) ; h = Ketinggian Air (m)

ρ = Massa jenis air (kg/m³) ; C_p = kapasitas panas dalam steam drum (J/kg K)

w = control valve flow air (m) ; k = koefisien control valve (m^{3/2}/jam)

Pada paper ini menggunakan *Static Sliding Mode Control* (SSMC) yang merupakan bagian dari SMC dimana SMC memiliki Fungsi *Switching* yaitu permukaan $S(x,t)$ di dalam ruang

keadaan R^n , memenuhi persamaan $S(x,t) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{n-1} e$ dan permukaan *sliding* (*sliding surface*)

merupakan persamaan yang memenuhi $S(x,t) = 0$ dan persamaan kondisi sliding yang dapat ditulis dalam bentuk $\dot{S} \leq -\eta|S|$

Pemodelan matematika pada *steam drum boiler* yang mengacu dari persamaan (1) dan (2) dengan

memisalkan $\frac{F_{in}}{A} = a_1 = b_2$; $\frac{-k}{A} = b_1$; $\frac{F_{in}T_{in}}{A} = a_2$ dan $\frac{1}{A\rho C_p} = c$ maka dapat dituliskan :

$$\dot{h} = a_1 + b_1 w \sqrt{h} \quad (3)$$

$$\dot{T} = \frac{1}{h} a_2 - b_2 T + c Q \quad (4)$$

Langkah pertama, Tracking error dari ketinggian air dan temperatur uap adalah :

$$\tilde{h} = h - h_d \quad h_d = \text{konstan}$$

$$\tilde{T} = T - T_d \quad T_d = \text{konstan}$$

fungsi *switching* sebagai berikut :

$$S_h = h - h_d \quad \text{dan} \quad S_T = T - T_d$$

Didiferensialkan terhadap t dan kondisi sliding $\dot{S}_h = 0$ dan $\dot{S}_T = 0$, diperoleh

$$\hat{w} = \frac{-a_1}{b_1 \sqrt{h}} \quad \text{dan} \quad \hat{Q} = \frac{-a_2 - b_2 T}{c}$$

Berdasarkan *control law* yang memenuhi kondisi *sliding* adalah :

$$w = \frac{-a_1}{b_1 \sqrt{h}} - K_h \text{sgn}(S) \quad (5)$$

$$Q = \frac{-a_2 - b_2 T}{c} - K_T \text{sgn}(S) \quad (6)$$

Kemudian dengan mensubstitusikan persamaan (5) dan (6) pada kondisi sliding $\dot{S}_h = 0$ dan $\dot{S}_T = 0$, diperoleh :

$$\dot{S}_h = a_1 - b_1 \left(\frac{a_1}{b_1 \sqrt{h}} + K_h \text{sgn}(S) \right) \sqrt{h} \quad (7)$$

$$\dot{S}_T = \frac{-c K_T \text{sgn}(S)}{h} \quad (8)$$

Nilai K_h dan K_T pada persamaan (7) dan (8) harus dirancang agar memenuhi kondisi sliding $\dot{S} \leq -\eta|S|$, diperoleh bahwa nilai K_h dan K_T adalah :

$$K_h = \left| \max \frac{\eta}{b_1 \sqrt{h}} \right| \quad \text{dan} \quad K_T = \left| \max \frac{\eta h}{c} \right|$$

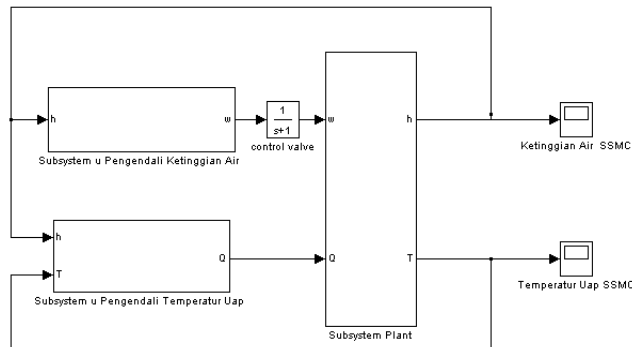
Untuk meminimalkan *chattering* pada persamaan digunakan *boundary layer* dengan

$$w = \hat{w} - K_h \operatorname{sat}\left(\frac{S}{\phi}\right) \text{ dan } Q = \hat{Q} - K_T \operatorname{sat}\left(\frac{S}{\phi}\right)$$

Sehingga diperoleh

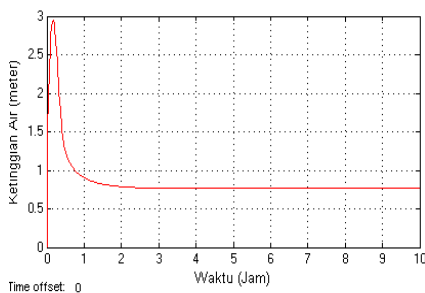
$$w = \frac{-a_1}{b_1 \sqrt{h}} - \left| \max \frac{\eta}{b_1 \sqrt{h}} \right| \operatorname{sat}\left(\frac{S}{\phi}\right) \text{ dan } Q = \frac{-a_2 - b_2 T}{c} - \left| \max \frac{\eta h}{c} \right| \operatorname{sat}\left(\frac{S}{\phi}\right)$$

Sebagai pengontrol untuk sistem *steam drum boiler*

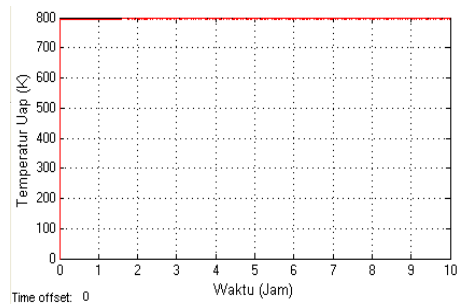


Gambar 2 Diagram Blok Sistem *Steam Drum Boiler* dengan Pengendali SMC

Setelah SMC disimulasikan dengan plant sistem *steam drum boiler* maka akan dihasilkan grafik seperti pada gambar 2 dan gambar 3.



Gambar3 Ketinggian Air



Gambar4 Temperatur Uap

Pada gambar 3 tampak bahwa pada saat pemasukan awal, ketinggian air langsung naik sampai 2.95 m pada saat jam ke-0,17 kemudian SMC pada ketinggian air mengendalikan control valve untuk sedikit ditutup maka air akan turun dan menuju ke posisi ketinggian air yang diinginkan dan stabil pada disekitar 0.7623 m. Pada gambar 4 terlihat bahwa pemasukan awal, temperatur uap langsung langsung naik menuju ke posisi yang diinginkan tetapi masih terjadi error dan terjadi disekitar 796.5 K

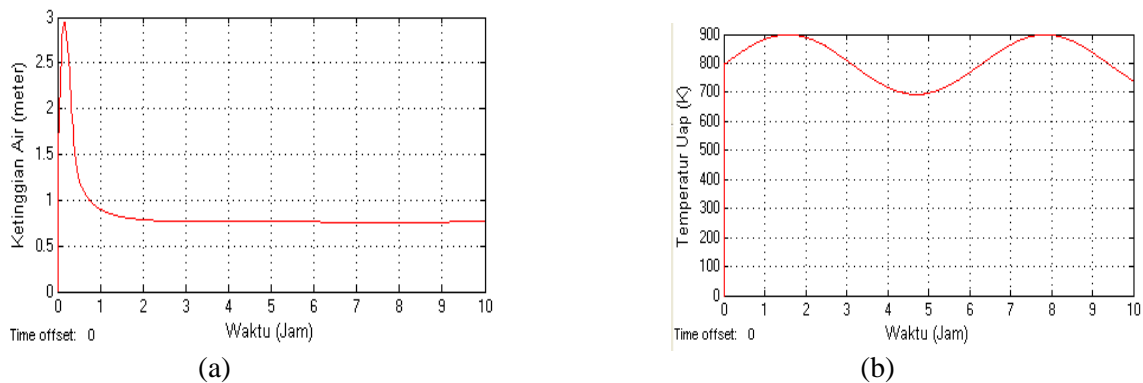
Hasil Simulasi

Dari hasil rancangan pada pada sistem *steam drum boiler* dan SMC akan dilakukan dua macam simulasi yaitu simulasi dengan gangguan eksternal dan simulasi dengan gangguan internal.

Simulasi pertama dengan Gangguan Eksternal, simulasi ini dilakukan dengan menambahkan suatu sinyal yang dianggap sebagai gangguan yang berasal dari luar sistem. Dalam simulasi ini akan digunakan fungsi sinus. fungsi sinus sebagai representasi gangguan control valve. Nilai awal yang digunakan adalah flow air yang masuk $F_{in}=386,54$, temperatur air yang masuk

$T_{in}=796$, kapasitas panas pada *steam drum boiler* $C_p=79,676$ dan koefisien control valve $k=1$. dan posisi ketinggian air dan temperatur uap yang diinginkan adalah $0,7625$ m dan 786 K.

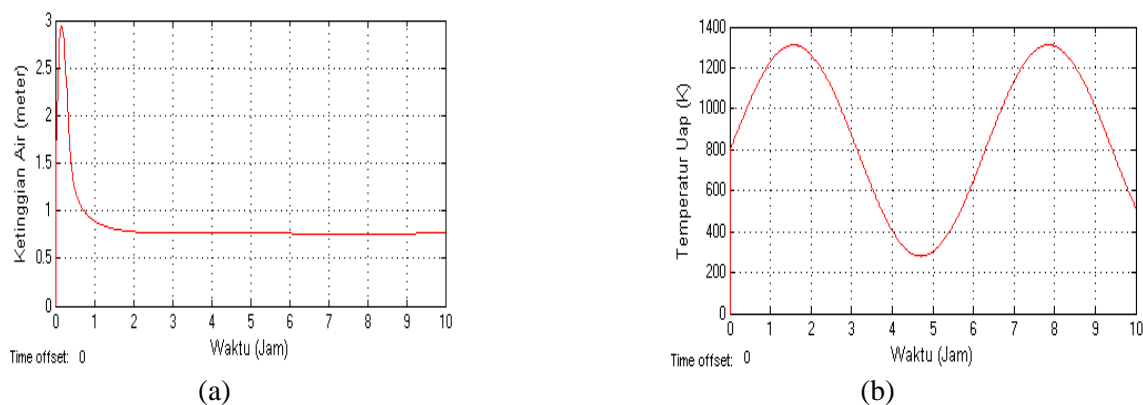
Uji dengan gangguan berupa sinyal fungsi sinus, sinyal fungsi sinus sebagai representasi gangguan control valve. Pada simulasi ini diberikan dua macam sinyal fungsi sinus, yaitu bernilai kecil (Amplitudo 1) dan bernilai besar (Amplitudo 5). Hasil yang diperoleh untuk gangguan eksternal berupa sinyal fungsi sinus kecil adalah terlihat pada gambar 5(a) dan gambar 5(b)



Gambar 5 : (a) ketinggian air dengan gangguan sinyal sinus kecil dan (b) temperatur uap dengan gangguan sinyal sinus kecil

Pada gambar 5(a) tampak ketinggian air stabil disekitar $0,7635$ m pada saat jam ke-3 namun masih terdapat osilasi. Terjadi overshoot keatas disekitar $2,95$ m pada saat jam ke- $0,18$. Pada gambar 5(b) tampak bahwa, temperatur uap stabil disekitar 740 K pada saat jam ke- $9,9$ dan masih mengalami osilasi antara 700 K - 900 K.

Hasil yang diperoleh untuk gangguan eksternal berupa sinyal fungsi sinus besar adalah tampak pada gambar 6(a) dan gambar 6(b).



Gambar 6 : (a) ketinggian air dengan gangguan sinyal sinus besar dan (b) temperatur uap dengan gangguan sinyal sinus besar

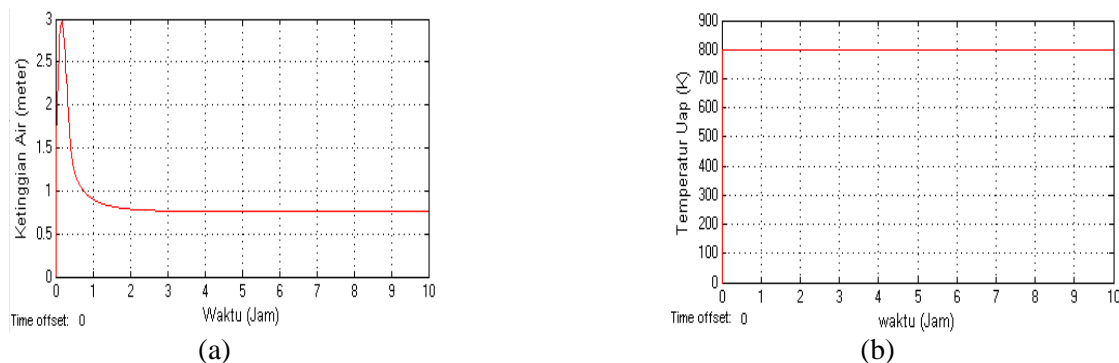
Pada gambar 6(a) tampak bahwa ketinggian air stabil disekitar $0,7684$ m pada saat jam ke-3 dan mengalami overshoot keatas disekitar $2,95$ m pada saat jam- $0,17$. Pada gambar 6(b) bahwa temperatur uap stabil disekitar $516,2$ K pada saat jam ke- $9,9$ dan mengalami osilasi antara 400 K - 900 K.

Pada sistem pengendali SMC tampak diberikan gangguan eksternal berupa sinyal fungsi sinus untuk pengendali ketinggian air sudah bekerja dengan baik karena masih stabil disekitar 0.7622 m pada saat jam ke-3 sehingga itu menggambarkan bahwa SMC pada sistem pengendali ketinggian air tahan terhadap gangguan eksternal. Namun pada sistem pengendali temperatur uap masih terdapat osilasi dan membutuhkan waktu yang lama untuk stabil.

Simulasi kedua dengan Gangguan Internal, simulasi ini dilakukan dengan mengubah nilai parameter pada sistem *steam drum boiler* untuk menguji sensitifitas sistem terhadap ketidakpastian dari dalam sistem. Parameter yang diubah adalah Flow air yang masuk, temperatur air yang masuk, kapasitas panas dalam *steam drum boiler*, koefisien control valve. Pengujian sistem pengendali dilakukan dengan memperbesar parameter sesuai batasan yang diberikan.

Simulasi Gangguan Internal dengan memperbesar parameter dari nilai semula yaitu flow air yang masuk $Fin=400$; temperatur air yang masuk $Tin=800$; kapasitas panas *steam drum boiler* $Cp=100$; koefisien control valve $k=1$.

Hasil yang diperoleh untuk gangguan internal dengan memperbesar parameter adalah tampak pada gambar 7(a) dan gambar 7(b).



Gambar 7 : (a) ketinggian air dengan gangguan internal parameter diperbesar dan (b) temperatur uap dengan gangguan internal parameter diperbesar

Pada gambar 7(a) tampak bahwa ketinggian air stabil disekitar 0,7623 m pada saat jam ke-3 dan mengalami overshoot keatas disekitar 2,98 m pada saat jam ke-0,17. Pada gambar 7(b) tampak bahwa temperatur uap stabil disekitar 800 K pada saat jam ke-0,15. Sehingga menggambarkan bahwa SMC pada sistem pengendali ketinggian air tahan terhadap gangguan internal dengan memperbesar parameter.

KESIMPULAN

Dari analisis dan pembahasan yang telah dilakukan penerapan metode *Sliding Mode Control (SMC)* pada pengendalian ketinggian air dan temperatur uap pada *steam drum boiler* diperoleh kesimpulan bahwa:

1. Rancangan sistem pengendali *Sliding Mode Control (SMC)* dapat diterapkan pada pengendalian ketinggian air dan temperatur uap pada *steam drum boiler*.
2. Performansi sistem pengendalian ketinggian air dan temperatur uap pada *steam drum boiler* dengan *Sliding Mode Control (SMC)*:
 - a. Ketinggian air sudah stabil di posisi yang diinginkan. Temperatur uap sudah stabil namun masih belum seperti posisi yang diinginkan (masih terjadi error 1,27 %).
 - b. Ketinggian air dan temperatur uap pada *steam drum boiler* masih stabil meskipun diberikan gangguan eksternal berupa fungsi sinus yang bersifat kecil maupun besar dan gangguan internal dengan memperbesar parameter.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Herlambang, Teguh.2010, “*Pemodelan Matematika dan Analisis Sifat-Sifat Sistem Level Air dan Temperatur pada Steam Drum Boiler di PLTU 1/2 PT PJB UP Gresik*”. Laporan Kerja Praktek, jurusan Matematika, ITS, Surabaya.
- [2] Perruquetti, Wilfrid dan Barbot, Jean Pierre. 2002. **Sliding Mode Control in Engineering**. New York: Marcel Dekker, Inc.
- [3] Stephanopoulos, George, 1984, *Chemical Process Control An Introduction To Theory And Practice*, Prentice Hall International, London.

Teguh Herlambang / Desain Pengendalian Ketinggian

STRATEGI PENGENDALIAN PENYEBARAN HIV TIPE GANAS DAN MUTAN DENGAN TERAPI INHIBITOR

M. Zainul Afandi, Subchan

*Program Magister FMIPA Matematika
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya
Email: luniazafandi@yahoo.co.id/subchan@matematika.its.ac.id*

Abstrak

Puluhan juta orang telah terinfeksi human immunodeficiency virus (HIV) sejak pertama kali ditemukan pada tahun 1980an, dan lebih dari dua puluh juta orang meninggal karena virus tersebut. Memang virus ini tidak menyebabkan kematian langsung pada penderita tapi menginfeksi sel sel kekebalan tubuh (T-helper) dari system kekebalan tubuh dan menyebabkan Acquired Immune Deficiency Syndrome (AIDS) sehingga melemahkan kemampuan sistem kekebalan untuk menangkal penyakit lain yang menyerang tubuh manusia. Dalam perkembangannya virus ini telah melahirkan generasi baru yang lebih ganas dan bermutasi, sehingga diperlukan penanganan tersendiri dalam mengatasinya. Salah satunya adalah dengan terapi inhibitor yang mencegah sel sel terinfeksi HIV untuk mereplikasi dirinya sendiri. Dalam tesis ini membahas bagaimana strategi pengendalian penyebaran HIV tipe ganas dan mutan menggunakan terapi Inhibitor dengan periodisasi mingguan yang hasilnya cukup signifikan dibandingkan dengan tanpa periodisasi.

Kata kunci: HIV / AIDS, Kendali Optimal, Terapi Inhibitor

PENDAHULUAN

Human Immunodeficiency Virus (HIV) adalah sebuah pathogen yang menginfeksi sel kekebalan tubuh (T-helper) dari system kekebalan tubuh dan menyebabkan Acquired Immune Deficiency Syndrome (AIDS).

Menurut Landi (2008) dan Mhawej (2010), beberapa tipe terapi anti HIV yang menjadi pembahasan dalam penulisan ini antara lain Reverse Transcriptase Inhibitor (RTI) yang berfungsi mencegah perubahan HIV-RNA menjadi HIV-DNA dengan memblokir kode kode viral HIV dalam sel genom induknya sehingga HIV tidak bisa masuk inti sel limfosit. Protease Inhibitor (PI) yang berfungsi mencegah sel sel terinfeksi virus untuk menyusun kembali bagain bagiannya setelah bereplikasi sehingga tidak terbentuk HIV baru . Dan Fussion Inhibitor (FI) yang berfungsi mencegah masuknya HIV kedalam sel yang mempunyai reseptor CD4 sehingga sel tidak terinfeksi.

Ada beberapa alasan mengapa virus HIV sulit diatasi dengan terapi. Dalam mendapatkan sel target virus ini disamping mereplikasikan diri dalam sel baru yang terinfeksi juga menghasilkan strain baru yang akan kebal terhadap obat terdahulu karena sifat mutan yang dihasilkannya sehingga cenderung ganas.

Di bidang matematika biologi, pencegahan replikasi sel sel terinfeksi HIV yang optimum diselesaikan menerapkan teori kendali optimal untuk menentukan strategi pengendalian menggunakan terapi Inhibitor.

Stengel (2008) dalam jurnalnya menyarankan untuk melakukan terapi yang sama tapi dengan periodisasi yang berbeda yaitu periodisasi mingguan. Untuk itu akan diteliti bagaimana strategi pengendalian penyebaran HIV tipe ganas dan mutan menggunakan terapi Inhibitor dengan periodisasi mingguan?.

Tujuan dari penelitian ini adalah mengetahui strategi pengendalian penyebaran HIV tipe ganas dan mutan menggunakan terapi Inhibitor dengan periodisasi mingguan.

Adapun batasan masalah dalam penelitian ini, yaitu :

1. Terapi dilakukan untuk mengendalikan penyebaran virus dalam satu individu.
2. Terapi yang digunakan adalah FI, RTI, PI dan terapi Penaik sel sehat. Pada penelitian ini hanya dipakai terapi PI saja sesuai dengan saran dari penelitian sebelumnya.
3. Periodisasi terapi dilakukan dalam ukuran minggu (7 hari, 14 hari dan 21 hari) selama 500 hari.

Manfaat dari tugas akhir ini adalah untuk memberikan informasi bahwa strategi pengendalian yang diperoleh dapat menjadi suatu solusi pada penyebaran HIV tipe ganas dan mutan menggunakan terapi Inhibitor dengan periodisasi mingguan.

METODOLOGI PENELITIAN

Urutan kegiatan penelitian meliputi rancangan penelitian, subyek penelitian, prosedur penelitian dan instrumen dan teknik analisa data.

Rancangan penelitian yang dilakukan dalam penelitian ini adalah mengumpulkan bahan bahan penelitian yang meliputi sumber informasi baik jurnal, bukun artikel dan petunjuk petunjuk lain yang relevan. Dalam hal ini penelitian mengacu pada jurnal internasional yang berjudul Mutation and control of the human immudiciency virus yang ditulis oleh Robert F. Stengel tahun 2008. Jurnal yang semisal juga ditulis oleh penulis yang sama pada tahun 2005 dengan tujuan dan hasil yang berbeda. Adapun jurnal rujukan yang dipakai adalah jurnal dengan judul Dynamics of HIV infection of CD4+ T Cells oleh Perelson (1993) dan Optimal control of the chemotherapy of HIV oleh Kirschner (1997). Di kedua jurnal inilah asal dari model matematika penyebaran virus HIV tipe ganas yang kemudian diteruskan oleh Stengel (2008) dengan menambahkan mutasi yang terjadi ketika virus berkembang dalam sebuah individu.

Subyek penelitian dalam tesis ini adalah melanjutkan apa yang telah dikerjakan oleh Stengel (2008) dengan meneliti kasus yang sama dengan periodisasi yang berbeda yaitu mingguan (sesuai dengan future works). Dari empat persamaan dinamis pada Perelson (1993) dan Kirschner (1997) dikembangkan menjadi tujuh persamaan dinamis dengan virus mutan yang dihasilkan akibat replikasi dari sel sel virus tipe ganas. Sehingga model baru yang terjadi adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= -a_1x_1 - a_2x_1x_2(1-u_2) + a_3a_4x_4(1-a_{10})(1-u_1) \\
 \dot{x}_2 &= \frac{a_5}{1+x_1+x_5} - a_2x_1x_2(1-u_2)(1-u_4) - a_6x_2 - a_2a_{11}x_5x_2 + a_7 \left(1 - \frac{x_2+x_3+x_4+x_6+x_7}{a_8} \right) x_2(1+u_3) \\
 \dot{x}_3 &= a_2x_1x_2(1-u_2)(1-u_4) - a_9x_3 - a_6x_3 \\
 \dot{x}_4 &= a_9x_3 - a_4x_4 \\
 \dot{x}_5 &= a_3a_4a_{10}x_4 + a_3a_4x_7 - a_1x_5 - a_2a_{11}x_5x_2 \\
 \dot{x}_6 &= a_2a_{11}x_5x_2 - a_9x_6 - a_6x_6 \\
 \dot{x}_7 &= a_9x_6 - a_4x_7
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

dengan

u_1 = terapi protease inhibitor

u_2 = terapi fussion inhibitor

u_3 = terapi penaik sel sehat

u_4 = terapi reverse trancription inhibitor

Dengan fungsi tujuan adalah meminimalkan jumlah virus ganas dan mutan serta biaya terapi sebagai berikut:

$$J[x(t), u(t)] = \frac{1}{2} [s_{f55}x_5(t_f)^2 + s_{f66}x_6(t_f)^2 + s_{f77}x_7(t_f)^2] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [q_{55}x_5(t)^2 + q_{66}x_6(t)^2 + q_{66}x_6(t)^2 + ru_i(t)^2] dt \quad (1.2)$$

Adapaun prosedur penelitian yang dilakukan oleh peneliti tesis ini adalah mengacu pada teori yang digunakan dalam penulisan ini:

Titik Setimbang dan kestabilan

Diberikan suatu sistem persamaan diferensial berbentuk:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x, y)$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

Jika fungsi f dan g tidak memuat waktu (t) secara eksplisit disebut system autonomous. Titik (x_0, y_0) yang membuat fungsi f dan g sama dengan nol (0) disebut titik setimbang. Jika sistem persamaan merupakan sistem linear dengan koefisien konstan maka mempunyai bentuk:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = ax + by$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

Iika $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka akar-akar persamaan karakteristik (nilai eigen λ) dari matriks A adalah:

$$|\lambda I - A| \text{ atau } \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$$

Sifat stabilitas titik setimbang (x_0, y_0) dibedakan menjadi tiga, yaitu:

1. Stabil

Titik setimbang (x_0, y_0) dikatakan stabil jika dan hanya jika akar karakteristik dari persamaan adalah real dan negatif atau mempunyai bagian real tak positif.

2. Stabil asimtotis

Titik setimbang (x_0, y_0) dikatakan stabil jika dan hanya jika akar karakteristik dari persamaan adalah real negatif atau mempunyai bagian real negatif.

3. Tidak Stabil

Titik setimbang (x_0, y_0) dikatakan stabil jika dan hanya jika akar karakteristik dari persamaan adalah real dan positif atau mempunyai paling sedikit satu akar karakteristik dengan bagian real positif.

Untuk sistem taklinear, akar karakteristik diperoleh dengan melinearkan terlebih dahulu sehingga didapatkan bentuk sistem linear. Deret Taylor dari system persamaan disekitar titik setimbang (x_0, y_0) adalah

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} + \dots$$

$$g(x, y) = g(x_0, y_0) + (x - x_0) \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} + (y - y_0) \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} + \dots$$

Misalkan $u = x - x_0$ dan $v = y - y_0$ maka akan didapat sistem linearisasi

$$\dot{u} = u \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} + v \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} + \dots$$

$$\dot{v} = u \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} + v \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} + \dots$$

Sistem persamaan diatas dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} & \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} \\ \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} & \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Atau

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Dengan J adalah matriks Jacobian.

Teori Kontrol Optimum

Tujuan utama dari kendali optimal adalah untuk mengoptimalkan kendali input yang akan diproses dalam plant dan memenuhi beberapa constrain (kondisi fisis) dan pada waktu yang sama dapat ditentukan nilai maksimal/minimal yang sesuai dengan kriteria indeks performa. Kendali optimal adalah mendapatkan u^* , tanda * menyatakan kondisi optimal yang akan mendorong dan mengatur plant C dari keadaan awal sampai keadaan akhir dengan beberapa konstrain. Kendali dengan keadaan dan waktu yang sama dapat ditentukan ekstrim berdasarkan indeks performa yang diberikan. Secara umum, formulasi yang dapat diberikan pada permasalahan kendali optimal adalah (Naidu, 2002) : 1. Mendiskripsikan secara matematik artinya diperoleh metode matematika dari proses terjadinya pengendalian (secara umum dalam bentuk variabel keadaan). 2. Spesifikasi dari indeks performa 3. Menentukan kondisi batas dan konstrain fisik pada keadaan (state) dan kendali.

Suatu system control secara umum diberikan oleh persamaan:

$$\dot{x} = F(x, u)$$

Dimana $x \in \mathbb{R}^n$ adalah state variable dan $u \in U$ adalah control. Suatu problem control

optimum, untuk meminimalkan performance indeks (cost functional) secara umum dapat ditulis ke dalam tiga bentuk :

bentuk Bolza:

$$\min_{u \in U} J = \varphi [x(t_f), p, t_f] + \int_0^T L(x(t), u(t), p, t) dt$$

bentuk Lagrange

$$\min_{u \in U} J = \int_0^T L(x(t), u(t), p, t) dt$$

bentuk Meyer

$$\min_{u \in U} J = \varphi [x(t_f), p, t_f]$$

dengan fungsi vector state .

$$X = \{x : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n | x_i, i = 1, \dots, n \}$$

dengan fungsi vector kontrol .

$$U = \{u : [0, t_f] \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m | u_i, i = 1, \dots, m\}$$

subjek untuk konstrain konstrain sebagai berikut :

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)) \quad f : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \quad x_0 \text{ diketahui}$$

$$\psi(x(t_f), t_f) = 0 \in \mathbb{R}^p \quad \psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^p, p \leq n, t_f \text{ diketahui}$$

$$C(x(t), u(t)) \leq 0 \in \mathbb{R}^q \quad C : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^q$$

$$S(x(t)) \leq 0 \in \mathbb{R}^s \quad S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$$

Performance indeks digambarkan dalam Subchan (2009) adalah suatu ukuran kualitatif dari performance system waktu .

Bentuk Lagrange dan Hamiltonian

Suatu bentuk control standar sebagai berikut :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

dengan syarat batas :

$$x(t_0) \text{ fixed}$$

$$x(t_f) \text{ free}$$

dan indeks performa pada persamaan (2.1), dapat diperoleh bentuk lagrangian L , yang diberikan sebagai :

$$\begin{aligned} L &= L(x(t), \dot{x}(t), u(t), \lambda(t), t) \\ &= V(x(t), u(t), t) + \lambda'(t) \{f(x(t), u(t), t) - \dot{x}(t)\} \end{aligned}$$

Dengan menggunakan optimasi fungsional dan Euler-Lagrange dapat diperoleh bentuk dari $x(t)$, $\lambda(t)$, $u(t)$. Menurut Naidu (2002) dari persamaan lagrangian dapat ditransformasi ke bentuk Hamiltonian, yang didefinisikan sebagai berikut:

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = V(x(t), u(t), t) + \lambda'(t) f(x(t), u(t), t)$$

Pontryagin Maximum Principle

Persamaan Pontryagin Maximum Principle dengan fungsi Hamilton merupakan pengembangan dari persamaan kalkulus variasi, teknik Multiplikasi Lagrange dan persamaan Euler. Persamaan ini dapat digunakan untuk mengoptimalkan sistem proses yang bersifat kompleks dengan banyak kendala, yang dapat bersifat linier maupun nonlinier. Maximum Principle merupakan suatu kondisi sehingga dapat diperoleh penyelesaian kendali optimal yang sesuai dengan tujuan (memaksimalkan performance index). Hal ini telah dikembangkan pada tahun 1950 oleh L.S. Pontryagin dan rekan kerjanya yang diaplikasikan untuk semua masalah kalkulus variasi.

Berikut ini akan dibahas contoh kasus yang menjadi dasar untuk membantu mendapatkan penyelesaian optimal control pada suatu model. Diberikan permasalahan sebagai berikut: Pandang plant linier time varying

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u$$

dimana $\in R^n$, $x \in R^m$, dengan fungsi tujuan kuadratik yang bersesuaian:

$$J(t_0) = \frac{1}{2}x^T t_f + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (x^T Q t(x) + U^T R(t)u) dt$$

pada interval waktu $[0, t_f]$. Akan dicari kontrol $u^*(t)$ pada $[0, t_f]$, yang meminimalkan J untuk kasus keadaan (state) akhir bebas. Misalkan waktu akhir t_f tertentu dan diketahui tidak ada fungsi keadaan akhir yang ditentukan. Keadaan awal plant $x(t)$ diberikan, matriks pembobot $S(t_f)$, $Q(t_f)$ keduanya simetri dan semi definit positif dan $R(t_f)$ simetri dan semi definit positif untuk semua $t \in [0, t_f]$. Persamaan Hamiltonian yang terbentuk adalah:

$$H(x(t), \lambda(t), u(t), t) = \frac{1}{2}(x^T Q(t)x + u^T R(t)u) + \lambda^T (Ax + Bu)$$

dengan $\lambda(t) \in R^n$ pengali lagrange tak diketahui. Persamaan state dan costatonya adalah

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = Ax + Bu \qquad \dot{\lambda} = \frac{\partial H}{\partial x} = -Qx - A^T \lambda$$

Kondisi stasionernya adalah

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = Ru + B^T \lambda$$

Dengan menyelesaikan persamaan, diperoleh kendali optimal $u^*(t)$ sebagai berikut:

$$u^*(t) = -\frac{B^T \lambda(t)}{R}$$

Dengan menggunakan persamaan dalam persamaan state dan costate

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}$$

Matriks koefisien dalam persamaan ini disebut matriks Hamiltonian. Untuk mendapatkan kendali optimal, harus memasukkan syarat batas dan menyelesaikan persamaan sehingga diperoleh kendali optimal $u^*(t)$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dari persamaan dinamis (1.1) diatas dengan analisis pada persanaannya ditentukan titik tetap bebas virus dan titik tetap endemik, sebagai berikut:

Kondisi bebas virus

$$\text{Titik tetap kondisi bebas virus} \left(0, \frac{p + \sqrt{p^2 + 4a_5 R}}{2R}, 0, 0, 0, 0, 0 \right)$$

$$\text{dengan } p = (a_7 - a_6) \text{ dan } R = \frac{a_7}{a_8}$$

Langkah selanjutnya adalah membentuk matrik Jacobian dan mensubstitusikan titik tetap kondisi bebas virus

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_3 a_4 (1 - a_{10}) & 0 & 0 & 0 \\ (a_1 - a_2 x_2) & -a_6 - \frac{a_7 x_2}{a_8} + a_7 \left(1 - \frac{x_2}{a_8}\right) & \frac{-a_7 x_2}{a_8} & \frac{-a_7 x_2}{a_8} & -(a_5 + a_2 a_{11} x_2) & \frac{-a_7 x_2}{a_8} & \frac{-a_7 x_2}{a_8} \\ a_2 x_2 & 0 & -(a_9 + a_6) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_9 & -a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 a_4 a_{10} & -(a_1 + a_2 a_{11} x_2) & 0 & a_3 a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 a_{11} x_2 & -(a_9 + a_6) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_9 & -a_4 \end{bmatrix}$$

dengan menggunakan persamaan karakteristik $|\lambda I - J| = 0$ dan ekspansi kovaktor maka diperoleh

$$(\lambda + D) \begin{bmatrix} \lambda + A & 0 & B & 0 & 0 & 0 \\ G & \lambda + K & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & \lambda + N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & \lambda + T & 0 & V \\ 0 & 0 & 0 & W & \lambda + K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M & \lambda + N \end{bmatrix}$$

Dengan bantuan software matlab dan aturan Routh-Hurwitz maka diperoleh: $A_1 > 0$, $B_1 > 0$, $C_1 > 0$, $D_1 > 0$, $E_1 > 0$, dan $F_1 > 0$. Dan dengan membandingkan nilai a_3 dengan

$$a_{3 \text{ kritis}} = \frac{\alpha (a_1 + a_2 x_{2_0})}{a_1 a_2 x_{2_0}}$$

maka diketahui bahwa kondisi bebas virus adalah stabil asimtotis karena

$$a_3 < a_{3 \text{ kritis}}.$$

Titik tetap kondisi endemik $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5, \bar{x}_6, \bar{x}_7)$ dengan

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= \frac{a_3 a_4 \bar{x}_4 (1 - a_{10}) - \bar{x}_3 (a_9 + a_6)}{a_1}, \quad \bar{x}_2 = \frac{\bar{x}_3 (a_9 + a_6)}{a_2 \bar{x}_1}, \quad \bar{x}_3 = \frac{(a_5 \beta \delta + R a_1 \beta - R a_1^2)}{\beta \alpha (\beta + \gamma a_1)}, \\ \bar{x}_4 &= \frac{(a_9 (a_5 \beta \delta + R a_1 \beta - R a_1^2) a_1)}{(a_1 \beta + \gamma a_1 a_4 \beta \alpha)}, \quad \bar{x}_5 = \frac{a_3 a_4 a_{10} \bar{x}_4}{(a_1 - a_{11} \bar{x}_2 \beta)}, \quad \bar{x}_6 = \frac{a_2 a_{11} a_3 a_4 a_{10} \bar{x}_4 \bar{x}_2}{\alpha (a_1 - a_{11} \bar{x}_2 \beta)}, \\ \bar{x}_7 &= \frac{a_9 a_2 a_{11} a_3 a_{10} \bar{x}_4 \bar{x}_2}{\alpha (a_1 - a_{11} \bar{x}_2 \beta)}, \quad \alpha = (a_9 + a_6), \quad \delta = \left(\frac{a_3 a_9}{\alpha} - 1 \right), \quad \beta = a_2 \left(\frac{a_3 a_9}{\alpha} - 1 \right), \quad \gamma = \frac{R}{\alpha} \left(1 + \frac{a_9}{a_4} \right).\end{aligned}$$

Dengan cara dan teknik yang sama seperti dalam kondisi bebas virus maka diperoleh bahwa kondisi endemik mempunyai kesetimbangan yang tidak stabil karena $a_3 > a_{3kritis}$. Jadi perlu dilakukan pengendalian pada persamaan dinamis (1.1).

Penyelesaian kendali optimal diawali dengan membentuk persamaan Lagrangian dari persamaan (1.1) dan (1.2) yaitu :

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{2} \left(q_{55} x_5(t)^2 + q_{66} x_6(t)^2 + q_{77} x_7(t)^2 + r u_1(t)^2 + r u_2(t)^2 + r u_3(t)^2 + r u_4(t)^2 \right) \\ &+ \lambda_1 \left(-a_1 x_1 - a_2 x_1 x_2 (1 - u_2) + a_3 a_4 x_4 (1 - a_{10}) (1 - u_1) \right) \\ &+ \lambda_2 \left(\frac{a_5}{1 + x_1 + x_5} - a_2 x_1 x_2 (1 - u_2) (1 - u_4) - a_6 x_2 - a_2 a_{11} x_5 x_2 \right) \\ &+ a_7 \left(1 - \frac{x_2 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7}{a_8} \right) x_2 (1 + u_3) \\ &+ \lambda_3 \left(a_2 x_1 x_2 (1 - u_2) (1 - u_4) - a_9 x_3 - a_6 x_3 \right) \\ &+ \lambda_4 \left(a_9 x_3 - a_4 x_4 \right) \\ &+ \lambda_5 \left(a_3 a_4 a_{10} x_4 + a_3 a_4 x_7 - a_1 x_5 - a_2 a_{11} x_5 x_2 \right) \\ &+ \lambda_6 \left(a_2 a_{11} x_5 x_2 - a_9 x_6 - a_6 x_6 \right) + \lambda_7 \left(a_9 x_6 - a_4 x_7 \right) \\ &- w_{11} \left(u_1(t) - a_1 \right) - w_{12} \left(b_1 - u_1(t) \right) - w_{21} \left(u_2(t) - a_2 \right) \\ &- w_{22} \left(b_2 - u_2(t) \right) - w_{31} \left(u_3(t) - a_3 \right) - w_{32} \left(b_3 - u_3(t) \right) \\ &- w_{41} \left(u_4(t) - a_4 \right) - w_{42} \left(b_4 - u_4(t) \right)\end{aligned}$$

Dengan kondisi stasioner sebagai berikut:

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = (r u_1(t)) + \lambda_1 \left(-a_3 a_4 x_4 (1 - a_{10}) \right) - w_{11}(t) + w_{12}(t) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_2} = (r u_2(t)) + \lambda_1 \left(a_1 x_1 + a_2 x_1 x_2 \right) + (\lambda_2 - \lambda_3) \left(a_2 x_1 x_2 (1 - u_4) \right) - w_{21}(t) + w_{22}(t) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_3} = (r u_3(t)) + \lambda_2 a_7 x_2 \left(1 - \frac{x_2 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7}{a_8} \right) - w_{31}(t) + w_{32}(t) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_4} = (r u_4(t)) + \lambda_2 \left(a_2 x_1 x_2 (1 - u_2) \right) + \lambda_3 \left(-a_2 x_1 x_2 (1 - u_2) \right) - w_{41}(t) + w_{42}(t) = 0$$

Maka diperoleh nilai nilai kendali optimal :

$$u_1^* = \min \left\{ b_1, \max \left\{ a_1, \frac{\lambda_1 a_3 a_4 x_4 (1 - a_{10})}{r} \right\} \right\}$$

$$u_2^* = \min \left\{ b_2, \max \left\{ a_2, \frac{-\lambda_1 (a_1 x_1 + a_2 x_1 x_2) + (\lambda_3 - \lambda_2) (a_2 x_1 x_2 (1 - u_4))}{r} \right\} \right\}$$

$$u_3^* = \min \left\{ b_3, \max \left\{ a_3, \frac{-\lambda_2 a_7 x_2 \left(1 - \frac{x_2 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7}{a_8} \right)}{r} \right\} \right\}$$

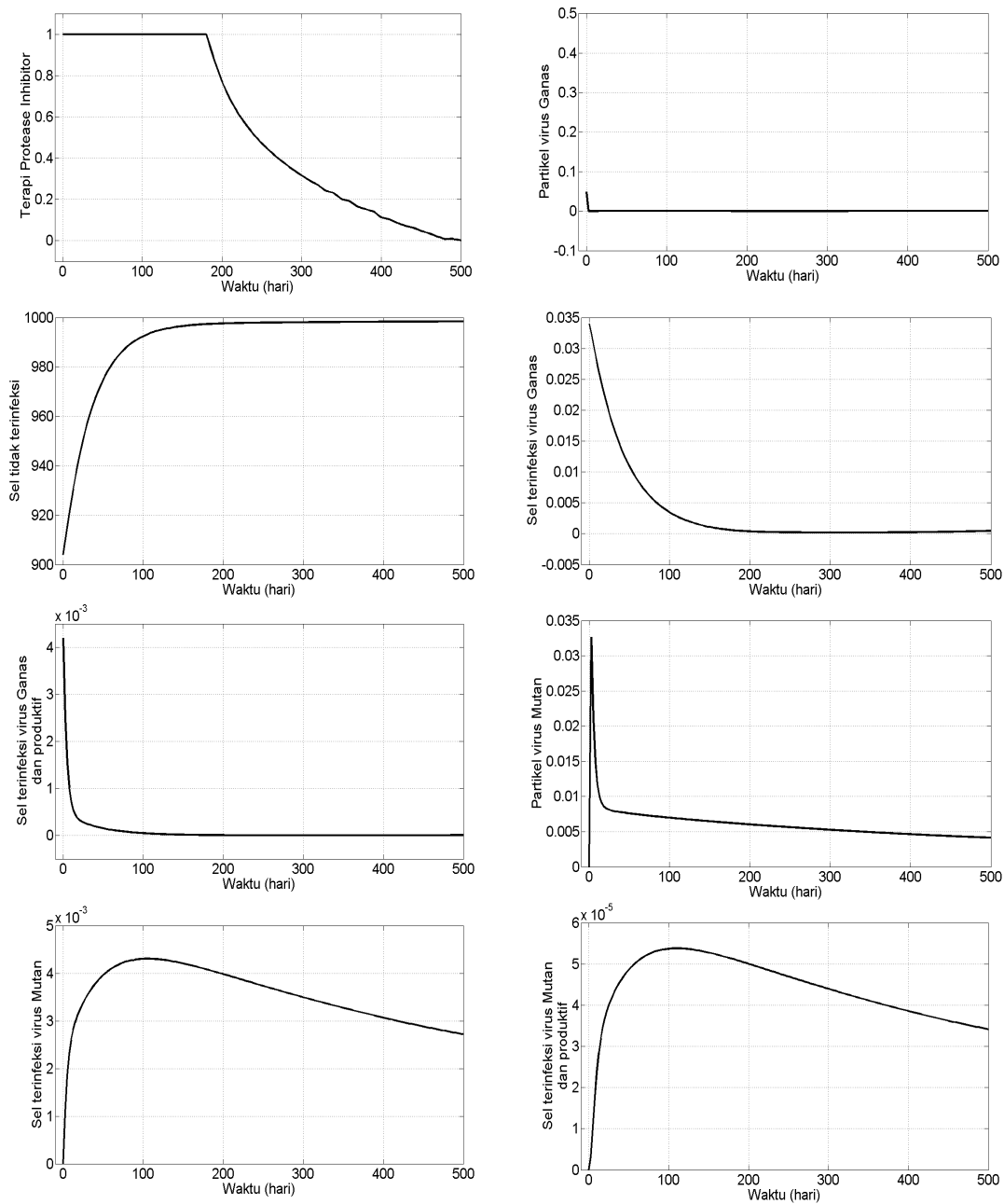
$$u_4^* = \min \left\{ b_4, \max \left\{ a_4, \frac{(\lambda_3 - \lambda_2) (a_2 x_1 x_2 (1 - u_2))}{r} \right\} \right\}$$

Simulasi

Penyelesaian secara numerik dari pengendalian penyebaran virus HIV tipe ganas dan mutan dengan menggunakan parameter dan nilai awal dari jurnal Stengel (2008), yaitu

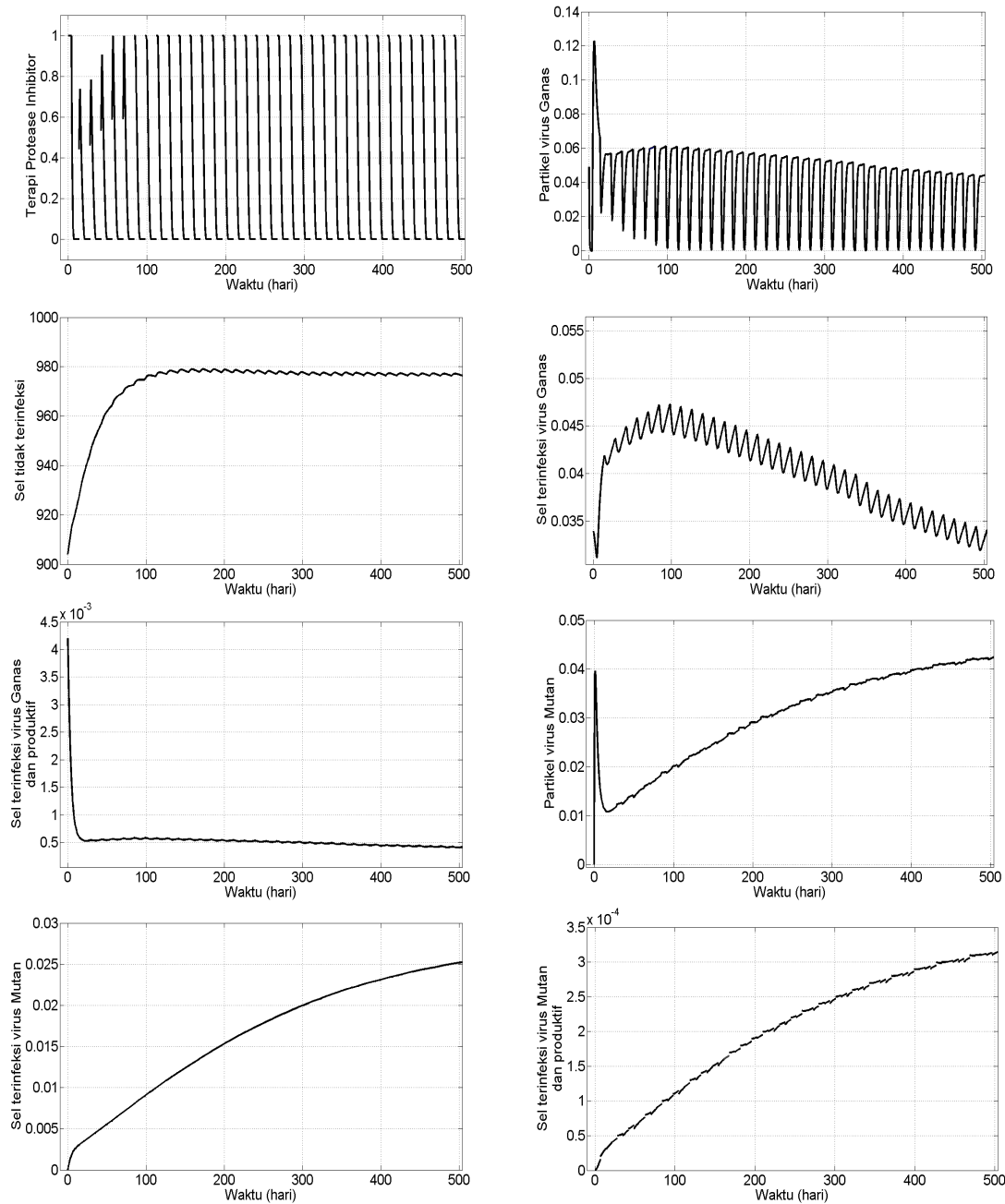
| No | Parameter | Deskripsi | Nilai Estimasi |
|----|-------------|--|----------------|
| 1 | \dot{x}_1 | Partikel virus Ganas | 0,049 |
| 2 | \dot{x}_2 | Sel sehat / tidak terinfeksi | 904 |
| 3 | \dot{x}_3 | Sel terinfeksi virus ganas | 0,034 |
| 4 | \dot{x}_4 | Sel terinfeksi virus ganas dan produktif | 0,0042 |
| 5 | \dot{x}_5 | Partikel virus mutan | 0 |
| 6 | \dot{x}_6 | Sel terinfeksi virus mutan | 0 |
| 7 | \dot{x}_7 | Sel terinfeksi virus mutan dan produktif | 0 |
| 8 | a_1 | rata rata kematian partikel HIV | 2,4 |
| 9 | a_2 | rata rata konstan sel sehat jadi terinfeksi | 0,000024 |
| 10 | a_3 | jumlah virus HIV yang diproduksi | 1200 |
| 11 | a_4 | rata rata kematian \dot{x}_4 | 0,24 |
| 12 | a_5 | sumber sel sehat | 10 |
| 13 | a_6 | rata rata kematian \dot{x}_1 dan \dot{x}_3 | 0,02 |
| 14 | a_7 | rata rata pertumbuhan sel sehat | 0,03 |
| 15 | a_8 | tingkat maksimum sel sehat | 1500 |
| 16 | a_9 | rata rata sel terinfeksi menjadi produktif | 0,003 |
| 17 | a_{10} | rata rata mutasi yang terjadi | 0,1 |
| 18 | a_{11} | tingkat ketahanan mutan | 0,6 |

Berikut adalah hasil simulasi tanpa periodisasi (terus menerus) dan dengan menggunakan periodisasi 1 minggu (7 hari) , 2 minggu (14 hari) dan 3 minggu (21 hari):



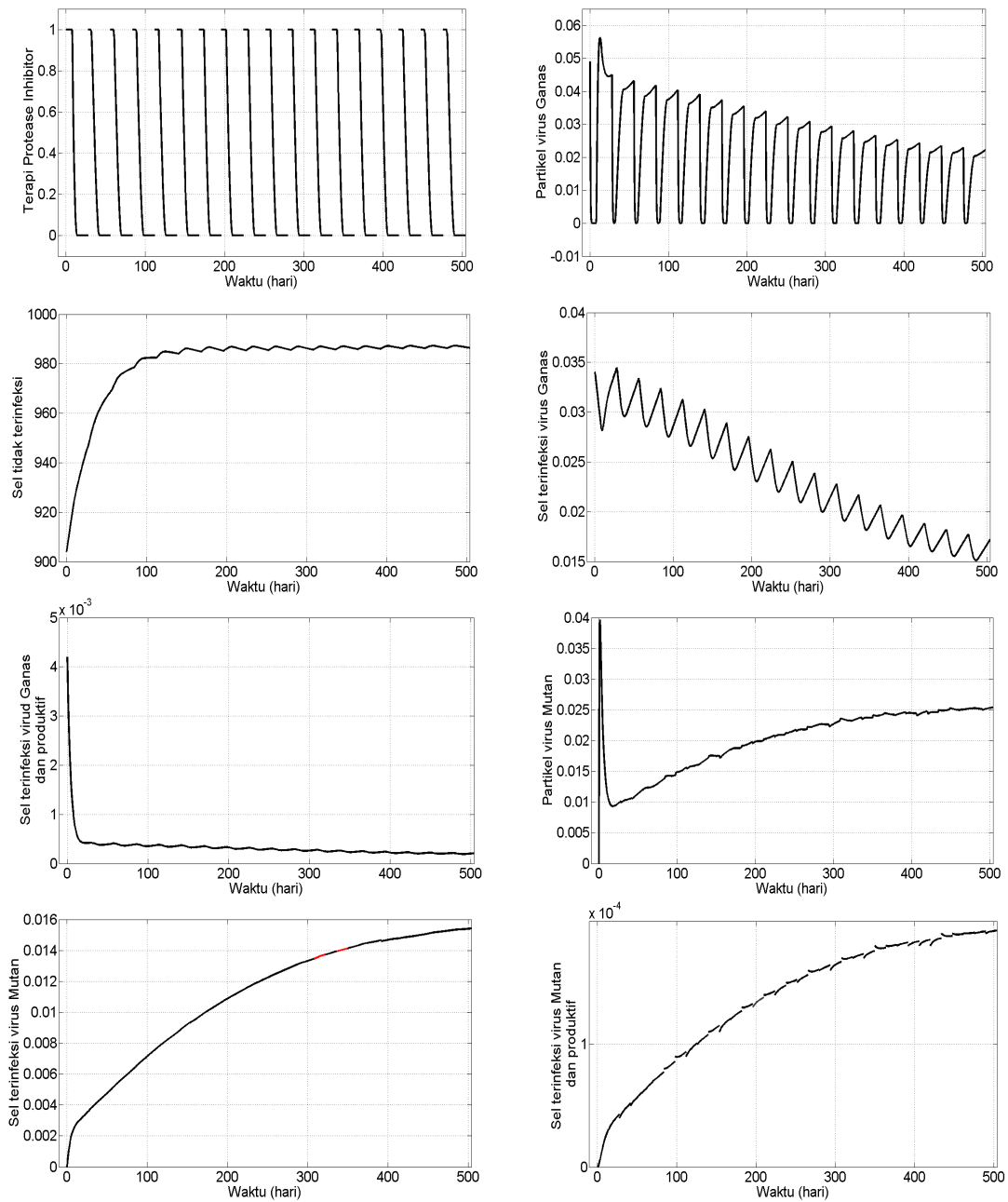
Gambar 1. Terapi Protease Inhibitor Tanpa periodisasi .

Dari Gambar 1 diatas menunjukkan bahwa dengan terapi Protease Inhibitor tanpa periodisasi adanya peningkatan jumlah sel tidak terinfeksi tapi terjadi penurunan jumlah partikelvivirus ganas, sel terinfeksi virus ganas , sel terinfeksi virus ganas dan produktif, partikel virus mutan, sel terinfeksi virus mutan dan sel terinfeksi virus mutan dan produktif



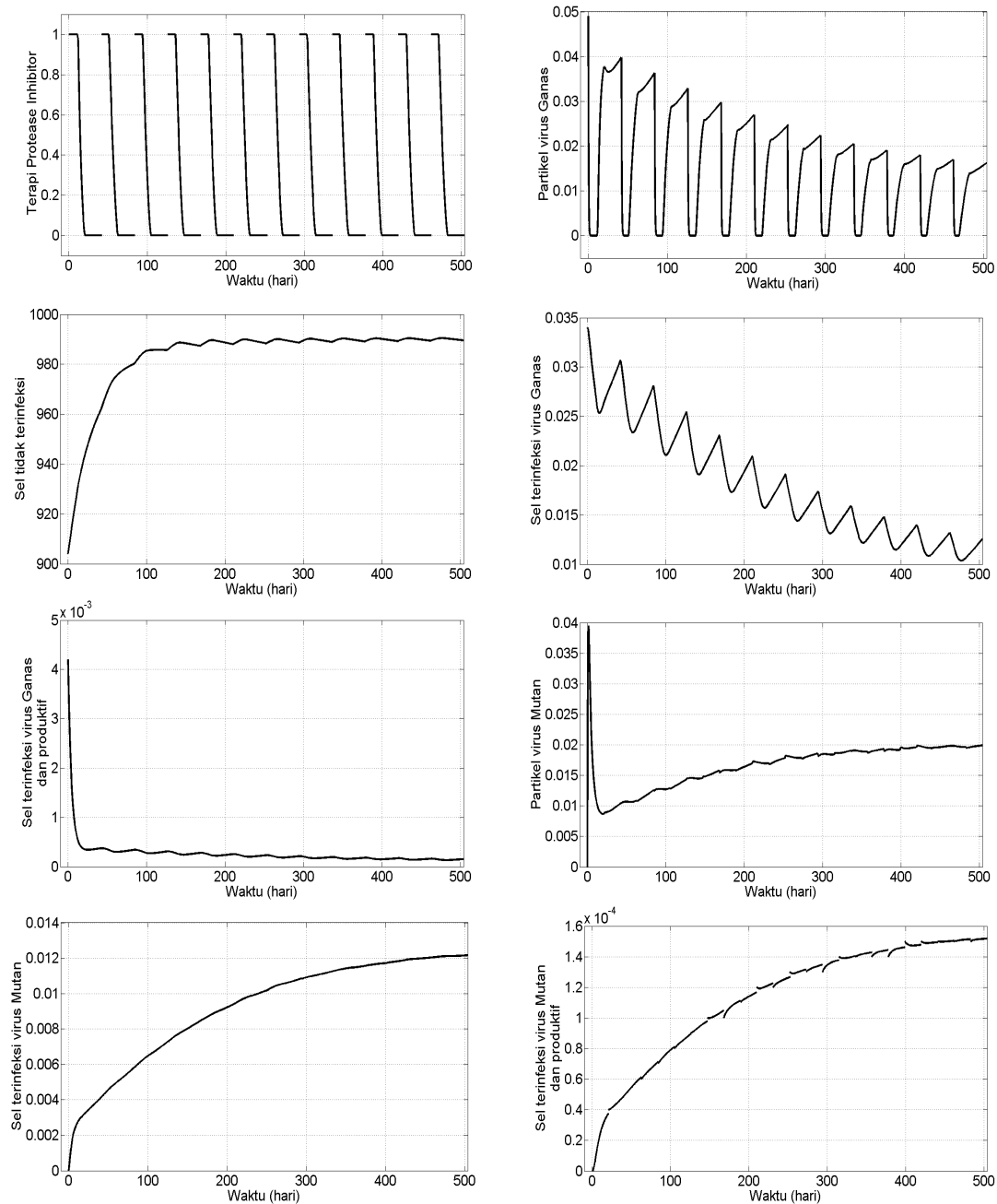
Gambar 2. Terapi Protease Inhibitor dengan periodisasi satu minggu (7 hari)

Dari Gambar 2 diatas menunjukkan bahwa dengan terapi Protease Inhibitor dengan periodisasi satu minggu adanya peningkatan jumlah sel tidak terinfeksi tapi terjadi penurunan jumlah partikel virus ganas, sel terinfeksi virus ganas dan sel terinfeksi virus ganas dan produktif sedangkan pada partikel virus mutan, sel terinfeksi virus mutan dan sel terinfeksi virus mutan dan produktif masih terjadi peningkatan jumlahnya.



Gambar 3. Terapi Protease Inhibitor dengan periodisasi dua minggu (14 hari)

Dari Gambar 3 diatas menunjukkan bahwa dengan terapi Protease Inhibitor dengan periodisasi dua minggu adanya peningkatan jumlah sel tidak terinfeksi tapi terjadi penurunan jumlah partikel virus ganas, sel terinfeksi virus ganas dan sel terinfeksi virus ganas dan produktif sedangkan pada partikel virus mutan, sel terinfeksi virus mutan dan sel terinfeksi virus mutan dan produktif masih terjadi peningkatan jumlahnya.



Gambar 4. Terapi Protease Inhibitor dengan periodisasi tiga minggu (21 hari)

Dari Gambar 4 diatas menunjukkan bahwa dengan terapi Protease Inhibitor dengan periodisasi tiga minggu adanya peningkatan jumlah sel tidak terinfeksi tapi terjadi penurunan jumlah partikel virus ganas, sel terinfeksi virus ganas dan sel terinfeksi virus ganas dan produktif sedangkan pada partikel virus mutan, sel terinfeksi virus mutan dan sel terinfeksi virus mutan dan produktif masih terjadi peningkatan jumlahnya.

Dari Gambar 1, 2, 3 dan 4 maka dibuat tabel hasil running 500 hari, dengan jelas terlihat perbedaan dari ke empat hasil simulasi sebagai berikut:

Tabel hasil simulasi

| No | Hasil terapi | Tanpa periodisasi | 1 minggu | 2 minggu | 3 minggu |
|----|---|-------------------|-----------|-----------|-----------|
| 1 | Jumlah dosis | 500 | 252 | 252 | 252 |
| 2 | Jumlah akhir virus ganas | 0.00060 | 0.04374 | 0.02156 | 0.01784 |
| 3 | Jumlah akhir sel sehat | 998.41111 | 976.76334 | 986.64311 | 988.96922 |
| 4 | Jumlah akhir sel terinfeksi virus ganas | 0.00046 | 0.03303 | 0.01667 | 0.01381 |
| 5 | Jumlah akhir sel terinfeksi virus ganas dan produktif | 0.00001 | 0.00041 | 0.00020 | 0.00017 |
| 6 | Jumlah akhir virus mutan | 0.00414 | 0.04211 | 0.02531 | 0.02072 |
| 7 | Jumlah akhir sel terinfeksi virus mutan | 0,01260 | 0.02519 | 0.01540 | 0.01258 |
| 8 | Jumlah akhir sel terinfeksi virus mutan dan produktif | 0,00016 | 0,00031 | 0,00019 | 0,00016 |

KESIMPULAN DAN SARAN

Dari table hasil simulasi diatas menunjukkan dengan jelas perbedaan hasil akhir dari tiap strategi pengendalian penyebaran virus HIV maka dapat disimpulkan bahwa terapi dengan periodisasi 3 minggu (21 hari) lebih baik hasilnya dari pada dua terapi periodisasi yang lain dengan menentukan selisih hasil akhir dari tiap tiap poin (no 2 sampai 8) dengan nilai awal dari tiap tiap kondisi. Selain itu dengan periodisasi jelas menunjukkan penghematan akan jumlah/dosis obat dari 500 dosis menjadi 252 dosis.

Dengan kondisi yang terjadi, disarankan untuk penelitian lebih lanjut dengan strategi yang berbeda supaya pada hasil simulasi partikel virus mutan, sel terinfeksi virus mutan dan sel terinfeksi virus mutan dan produktif tidak meningkat jumlahnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Landi, A., Mazzoldi, A., Andreoni, C., Bianchi, M., Cavallini, A., Laurino, M., Ricotti, L., Iuliano, R., Matteoli, B., Nelli, L.C., "Modelling and control of HIV dynamics", *Computer methods and program in biomedicine*, 89, hal 162-168.
- Mhawej, M.J., Moog, C.H., Biafore, F., Francois, C.B., (2010), "Control of HIV infection and drug dosage", *Biomedical Signal Processing and Control*. 5, hal 45-52.
- Naidu, D.S. (2002), *Optimal Control Systems*, CRC PRESS, New York. .
- Stengel, R.F, (2008), "Mutation and control of the human immunodeficiency virus", *Mathematical Biosciences*, No.213, hal 93-102.
- Subchan, S., dan Zbikowski, R., (2009), *Computational Optimal Control Tools and Practise*, John Willey and Sons, Ltd, publication, United Kingdom.

PELABELAN GRACEFUL, SKOLEM GRACEFUL

DAN PELABELAN $\hat{\rho}$ PADA GRAF $(S_n, 3)$

Amri Zulfi^{1,2}, Muzayyin Ahmad^{1,3}, Nurul Huda^{1,4}, Supriadi^{1,5}, Kiki A. Sugeng⁶

¹Program Magister Departemen Matematika FMIPA Universitas Indonesia, Depok

²Dosen Pendidikan Matematika UMSU, Medan.

³Guru SMA N 9 Tanjung Jabung Timur, Jambi.

⁴Dosen Prodi Matematika FMIPA, Unlam, Banjarmasin.

⁵Guru SMK N 3 Kota Jambi, Jambi.

⁶Dosen Program Magister Matematika FMIPA Universitas Indonesia

e-mail:zulfi_ghifarri@yahoo.com, huda_unlam@yahoo.com, muzayyin_ahmad31@yahoo.co.id,
spd_s@yahoo.co.id, kiki@ui.ac.id

Abstrak

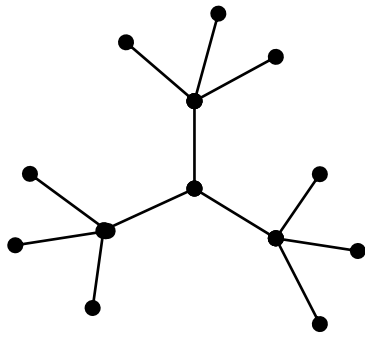
Graf $G = (V, E)$ adalah sepasang himpunan terurut dimana V adalah himpunan simpul tak kosong dan E adalah himpunan busur. Pelabelan pada graf G adalah penetapan nilai simpul dan busur dengan aturan tertentu. Pelabelan graceful adalah fungsi injektif α dari himpunan simpul V ke himpunan bilangan $\{0, 1, 2, \dots, |E|\}$ yang menginduksi fungsi bijektif α' dari himpunan busur E ke himpunan bilangan $\{1, 2, \dots, |E|\}$ dimana setiap busur $uv \in E$ dengan simpul $u, v \in V$ berlaku $\alpha'(uv) = |\alpha(u) - \alpha(v)|$. Pelabelan skolem graceful adalah modifikasi dari pelabelan graceful yaitu fungsi injektif μ dari himpunan simpul V ke himpunan bilangan $\{1, 2, \dots, |V|\}$ yang menginduksi fungsi bijektif μ' dari himpunan busur E ke himpunan bilangan $\{1, 2, \dots, |E|\}$ dimana setiap busur $uv \in E$ dengan simpul $u, v \in V$ berlaku $\mu'(uv) = |\mu(u) - \mu(v)|$. Pelabelan $\hat{\rho}$ adalah modifikasi lain dari pelabelan graceful yaitu fungsi injektif γ dari himpunan simpul V ke himpunan bilangan $\{0, 1, 2, \dots, |E| + 1\}$ yang menginduksi fungsi bijektif γ' dari himpunan busur E ke himpunan bilangan $\{1, 2, \dots, |E|\}$ dimana setiap busur $uv \in E$ dengan simpul $u, v \in V$ berlaku $\gamma'(uv) = |\gamma(u) - \gamma(v)|$. Graf $(S_n, 3)$ dibentuk dari 3 graf bintang S_n kemudian diberikan sebuah simpul dan diberikan busur-busur yang menghubungkan setiap simpul pusat S_n dengan sebuah simpul tersebut. Pada makalah ini diberikan konstruksi pelabelan skolem graceful dan pelabelan $\hat{\rho}$ untuk graf $(S_n, 3)$.

Kata kunci: pelabelan graceful, pelabelan skolem graceful, pelabelan $\hat{\rho}$, graf bintang, graf $(S_n, 3)$

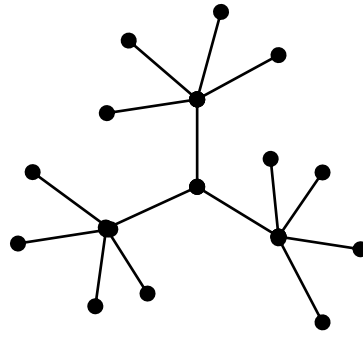
PENDAHULUAN

Graf G adalah sepasang himpunan (V, E) dimana V adalah suatu himpunan tak kosong dan E adalah suatu himpunan (mungkin kosong yang berisi pasangan-pasangan (tak terurut) dari anggota-anggota $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots\}$ dan anggota-anggota $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ masing-masing disebut simpul dan busur dari graf G . Banyaknya anggota V dinyatakan dengan $|V|$ dan banyaknya anggota E dinyatakan dengan $|E|$. Graf yang digunakan dalam makalah ini adalah graf sederhana tak berarah yang tidak memuat loop maupun multibusur.

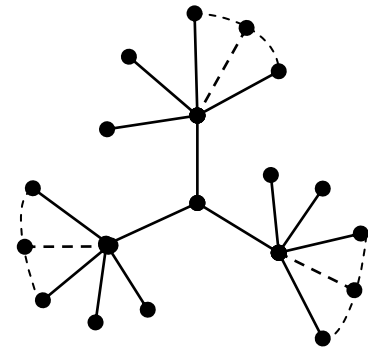
Pemilihan graf $(S_n, 3)$ di latar belakang dari graf bintang dan suatu pertanyaan, yakni mengapa gabungan 2 graf bintang S_n tidak mempunyai pelabelan Graceful dibuktikan [2,3], bagaimana jika ada sebuah simpul yang saling dihubungkan dengan simpul pusat dari 2 graf bintang S_n tersebut, sehingga setelah dihubungkan membentuk graf caterpillar telah dibuktikan [2], kemudian dengan menggunakan ide dengan cara yang sama terhadap tiga graf bintang S_n , akhirnya ditemukan graf dengan bentuk $(S_n, 3)$ yang disebut dengan graf $(S_n, 3)$.



Gambar 1.1a. Graf $(S_n, 3)$



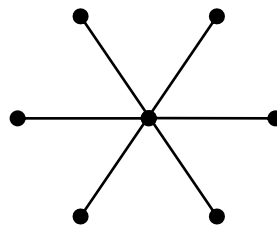
Gambar 1.1b. Graf $(S_n, 3)$



Gambar 1.1c. Graf $(S_n, 3)$

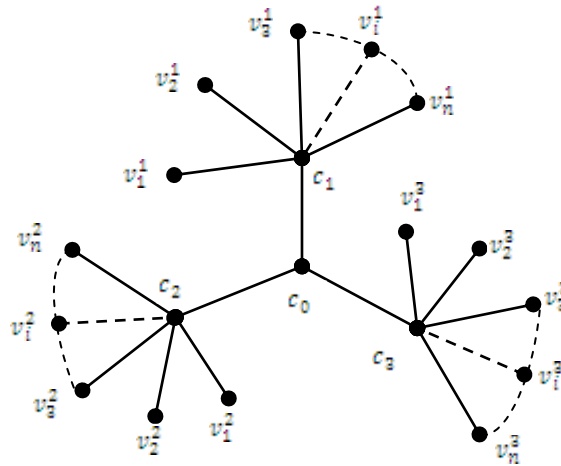
Pelabelan graceful pada graf $G(V,E)$ adalah fungsi injektif α dari himpunan simpul V ke himpunan bilangan $\{0,1,2, \dots, |E|\}$ yang menginduksi fungsi bijektif α' dari himpunan busur E ke himpunan bilangan $\{1,2, \dots, |E|\}$ dimana setiap busur $uv \in E$ dengan simpul $u,v \in V$ berlaku $\alpha'(uv) = |\alpha(u) - \alpha(v)|$. **Pelabelan skolem graceful** adalah modifikasi dari pelabelan graceful yaitu fungsi injektif μ dari himpunan simpul V ke himpunan bilangan $\{1,2, \dots, |V|\}$ yang menginduksi fungsi bijektif μ' dari himpunan busur E ke himpunan bilangan $\{1,2, \dots, |E|\}$ dimana setiap busur $uv \in E$ dengan simpul $u,v \in V$ berlaku $\mu'(uv) = |\mu(u) - \mu(v)|$. **Pelabelan \hat{p}** adalah modifikasi dari pelabelan graceful yaitu fungsi injektif γ dari himpunan simpul V ke himpunan bilangan $\{0,1,2, \dots, |E| + 1\}$ yang menginduksi fungsi bijektif γ' dari himpunan busur E ke himpunan bilangan $\{1,2, \dots, |E|\}$ dimana setiap busur $uv \in E$ dengan simpul $u,v \in V$ berlaku $\gamma'(uv) = |\gamma(u) - \gamma(v)|$. [1,2,3]. Beberapa graf yang telah dibuktikan memiliki pelabelan graceful, skolem graceful dan atau Pelabelan \hat{p} diantaranya adalah sebagai berikut : graf bintang S_n , graf sapu $B_{4,k}$, graf cumi-cumi $Sq_{4,m}$, graf carterpillar, graf cycle, graf super star. Selain itu sevenhot juga membuktikan gabungan dari beberapa graf yakni, graf $2S_n$, graf $S_n \cup S_{n+1}$, graf $S_n \cup B_{4,k}$, graf $S_n \cup Sq_{4,m}$ [3]

Graf bintang S_n adalah graf yang dibangun dari satu simpul pusat kemudian menambahkan sejumlah simpul daun pada simpul pusat tersebut. Graf bintang memiliki $n+1$ simpul dan n busur [1]



Gambar 1.3 Graf bintang S_5

Graf $(S_n, 3)$ (baru) adalah suatu graf yang dibangun dari 3 graf bintang S_n kemudian diberikan sebuah simpul c disebut dengan simpul pusat, dan diberikan busur yang menghubungkan setiap simpul pusat S_n dengan sebuah simpul c tersebut.



Gambar 1.2 Graf $(S_n, 3)$

1. Pelabelan Graceful Dan Pelabelan Skolem Graceful Pada Graf $(S_n, 3)$

Pada bagian ini akan diberikan konstruksi pelabelan graceful dan pelabelan skolem graceful pada graf $(S_n, 3)$.

Teorema 2.1 Graf $(S_n, 3)$ memiliki pelabelan graceful

Bukti. Misalkan notasi simpul graf $(S_n, 3)$ diberikan pada Gambar 1.2

Pada Gambar 1.2 diatas terlihat bahwa himpunan simpul $V(S_n, 3) = \{c_0, c_1, c_2, c_3, v_1^1, v_2^1, \dots, v_n^1, v_1^2, v_2^2, \dots, v_n^2, v_1^3, v_2^3, \dots, v_n^3\}$, himpunan busur $E(S_n, 3) = \{c_0 c_1, c_0 c_2, c_0 c_3, c_1 v_1^1, c_1 v_2^1, \dots, c_1 v_n^1, c_2 v_1^2, c_2 v_2^2, \dots, c_2 v_n^2, c_3 v_1^3, c_3 v_2^3, \dots, c_3 v_n^3\}$ maka jelas bahwa $|V| = 3n + 4$ dan $|E| = 3n + 3$. Didefinisikan pelabelan dengan menggunakan notasi α (alpha) untuk simpul sebagai berikut :

$$\alpha(c_0) = 2n + 3 \quad (2.1)$$

$$\alpha(c_1) = 0 \quad (2.2)$$

$$\alpha(c_2) = 1 \quad (2.3)$$

$$\alpha(c_3) = n + 2 \quad (2.4)$$

$$\alpha(v_i^1) = 3n + 4 - i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.5)$$

$$\alpha(v_i^2) = 2n + 3 - i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.6)$$

$$\alpha(v_i^3) = n + 2 - i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.7)$$

Pelabelan α yang didefinisikan pada persamaan (2.1)-(2.7), melabelkan anggota $V(S_n, 3)$ adalah pemetaan injektif dari V ke himpunan $\{0, 1, \dots, |E|\}$, $u, v \in V$.

Setiap busur $uv \in E$ diberikan label dengan pelabelan busur α' yang di induksikan oleh pelabelan $\alpha'(uv) = |\alpha(u) - \alpha(v)|$ pada $(S_n, 3)$ yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \alpha'(c_0c_1) &= |\alpha(c_0) - \alpha(c_1)| \\ &= |(2n+3) - (0)| \\ &= |2n+3| \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} \alpha'(c_0c_2) &= |\alpha(c_0) - \alpha(c_2)| \\ &= |(2n+3) - (1)| \\ &= |2n+2| \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} \alpha'(c_0c_3) &= |\alpha(c_0) - \alpha(c_3)| \\ &= |(2n+3) - (n+2)| \\ &= |n+1| \end{aligned} \tag{2.10}$$

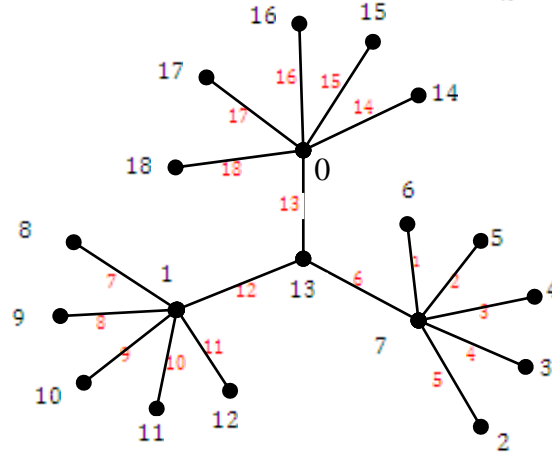
$$\begin{aligned} \alpha'(c_1v_i^1) &= |\alpha(c_1) - \alpha(v_i^1)| \\ &= |(0) - (3n+4-i)| \\ &= |3n+4-i| \end{aligned} \quad i=1,2,\dots,n \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} \alpha'(c_2v_i^2) &= |\alpha(c_2) - \alpha(v_i^2)| \\ &= |(1) - (2n+3-i)| \\ &= |2n+2-i| \end{aligned} \quad i=1,2,\dots,n \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} \alpha'(c_3v_i^3) &= |\alpha(c_3) - \alpha(v_i^3)| \\ &= |(n+2) - (n+2-i)| \\ &= |i| \end{aligned} \quad i=1,2,\dots,n. \tag{2.13}$$

Berdasarkan pelabelan α yang didefinisikan pada persamaan (2.1)-(2.7) setiap simpulnya memiliki label yang berbeda dan merupakan himpunan bilangan $\{0,1,2, \dots, |E|\}$. Kemudian pelabelan α' yang diinduksi oleh pelabelan simpul α , memberikan nilai yang berbeda pada masing-masing busur seperti pada persamaan (2.8)-(2.13) yang merupakan himpunan bilangan $\{1,2, \dots, |E|\}$. Berdasarkan hal tersebut, maka α merupakan pelabelan graceful untuk graf $(S_n, 3)$. ■

Berikut ini diberikan contoh pelabelan graceful untuk graf $(S_n, 3)$.



Gambar 2.1 Pelabelan Graceful Graf $(S_n, 3)$

Untuk semua kelas graf graceful dengan $|V| = |E| + 1$ merupakan graf skolem graceful dengan mendefinisikan $\mu(v) = x(v) + 1$. Sehingga diperoleh akibat berikut:

Akibat 2.2 Graf $(S_n, 3)$ memiliki pelabelan Skolem graceful

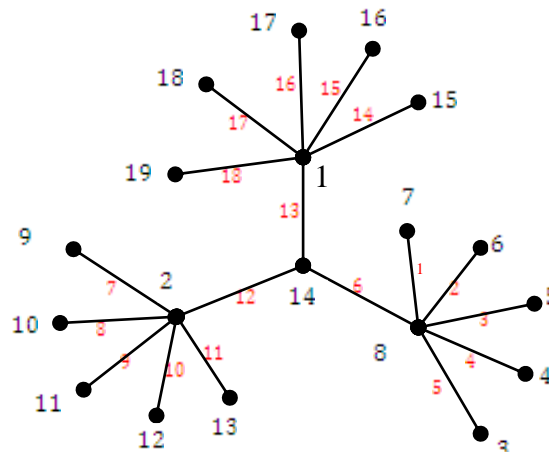
Bukti. Misalkan notasi vertek graf $(S_n, 3)$ diberikan seperti pada Gambar 1.2

Didefinisikan pelabelan μ untuk simpul dengan menambahkan 1 pada setiap label simpulnya yang menggunakan pelabelan pada Teorema 2.1. Jadi $\mu(x) = \lambda(x) + 1$ untuk setiap $x \in V(S_n, 3)$ dengan λ adalah pelabelan pada bukti Teorema 2.1.

Pelabelan yang didefinisikan oleh μ akan melabelkan anggota $V(S_n, 3)$ dengan pelabelan $\mu(V(S_n, 3))$ adalah pemetaan injektif dari V ke himpunan $\{1, 2, \dots, |V|\}$, $u, v \in V$. Sehingga setiap busur $uv \in E$ diberikan label dengan $\mu'(uv) = |\mu(u) - \mu(v)|$ pada $(S_n, 3)$ yang menghasilkan sama seperti persamaan (2.8)–(2.13).

Berdasarkan pelabelan μ yang terdefiniskan dari bukti teorema 2.1 setiap simpulnya memiliki label yang berbeda dan merupakan himpunan bilangan $\{1, 2, \dots, |V|\}$. Kemudian pelabelan μ' seperti persamaan (2.8)–(2.13) yang diinduksi oleh pelabelan simpul μ seperti bukti Teorema (2.1), memberikan nilai yang berbeda pada masing-masing busur yang merupakan himpunan bilangan $\{1, 2, \dots, |E|\}$. Maka μ merupakan pelabelan skolem graceful untuk graf $(S_n, 3)$. ■

Berikut ini diberikan contoh pelabelan skolem graceful untuk graf $(S_n, 3)$.



Gambar 2.2 Pelabelan Skolem Graceful Graf $(S_n, 3)$

Untuk semua kelas graf graceful dan graf skolem graceful dengan $|V| = |E| + 1$ merupakan graf $\hat{\rho}$ dengan mendefinisikan $\gamma(v) = \mu(v)$ atau $\gamma(v) = \alpha(v)$. Sehingga diperoleh akibat berikut:

Akibat 2.3 Graf $(S_n, 3)$ memiliki pelabelan $\hat{\rho}$

Bukti. Misal graf $(S_n, 3)$ ditunjukkan seperti pada Gambar 1.2

Menggunakan cara yang sama pada pembuktian graceful pada Teorema 2.1 dengan mendefinisikan pelabelan simpul $\gamma = \alpha$ seperti persamaan (2.1)–(2.8) dan pelabelan busur $\gamma'(uv) = |\gamma(u) - \gamma(v)|$ dimana $uv \in E$ dengan $u, v \in V$ diperoleh pelabelan simpul dari $(S_n, 3)$ ke subhimpunan bilangan

$\{0, 1, 2, \dots, |E| + 1\}$, dan pelabelan busur dari $(S_n, 3)$ ke himpunan bilangan $\{1, 2, \dots, |E|\}$. Jadi graf $(S_n, 3)$ memiliki pelabelan $\hat{\rho}$. ■

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Pada makalah ini telah diberikan konstruksi pelabelan graceful, skolem graceful dan pelabelan $\hat{\rho}$ pada graf $(S_n, 3)$.

Saran

Saat ini sedang diteliti lebih lanjut apakah untuk pelabelan graf (S_n, r) memiliki pelabelan graceful, pelabelan skolem graceful dan pelabelan $\hat{\rho}$.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Choudum, S. A., & Kishore, S. P. (1996). All 5-star are Skolem graceful. *Indian J. Pure and Appl. Math*, 27, 1101-1105.
- [2] Galian, J. A. (2010). Dynamic survey of graph Labeling. *Electronic Journal of Combinatorics*, 17, #ds6
- [3] Sevenhot, Sugeng.K.A., Silaban, D.R., (2010). Pelabelan Skolem Graceful dan Pelabelan $\hat{\rho}$ Pada Gabungan Dua Graf. *Prosiding Seminar Nasional UNPAR, Bandung*, hal MS 183- MS 191

MENENTUKAN MODEL EKONOMI BERSTRUKTUR MELALUI ANALISIS VECTOR AUTO REGRESSION (VAR) DALAM PERTUMBUHAN EKONOMI INDONESIA PERIODE 1996-2009

Soemartini

*Jurusan Statistika, FMIPA Universitas Padjadjaran
tine_soemartini@yahoo.com*

Abstrak

Vector Auto Regression (VAR) merupakan alat analisis atau suatu metode statistik yang dapat digunakan untuk meramalkan variabel-variabel dalam runtut waktu dari variabel gangguan yang terdapat dalam system variabel tersebut . Selain itu VAR Analysis juga merupakan alat analisis yang sangat bermanfaat, baik di dalam memahami adanya hubungan timbal balik (interrelationship) antara variabel-variabel ekonomi, maupun dalam pembentukan model ekonomi berstruktur . Dengan menggunakan analisis VAR .Berdasarkan hasil analisis dapat dijelaskan bahwa IPM memberikan pengaruh terhadap investasi dan investasipun memberikan pengaruh terhadap IPM, dan IPM pun memberikan pengaruh terhadap PDB (p value 0.0913) tetapi tidak sebaliknya. IPM memberikan pengaruh terhadap Investasi (p value 0,066) demikian juga Investasi memberikan pengaruh terhadap IPM.

Kata kunci: Uji stasioneritas, Uji Kausalitas Granger, PDB,IPM, Investasi PMDN dan Vektor Auto Regressive (VAR), E View 6

PENDAHULUAN

Latar Belakang

Pembangunan nasional merupakan rangkaian upaya pembangunan yang bersinambungan yang meliputi seluruh kehidupan masyarakat, bangsa dan negara untuk melaksanakan tugas mewujudkan tujuan nasional yang termaktub dalam tujuan pembangunan nasional yang telah digariskan di dalam Garis-garis Besar Haluan Negara (GBHN) ,yaitu melindungi segenap bangsa dan seluruh tumpah darah Indonesia, memajukan kesejahteraan umum,mencerdaskan kehidupan bangsa ,disamping itu pembangunan nasional merupakan pencerminan kehendak untuk terus menerus meningkatkan kesejahteraan dan kemakmuran rakyat Indonesia yang merata secara materil.

Pembangunan yang berkelanjutan diseluruh dunia telah menempatkan prioritas pembangunan tidak hanya pada bidang ekonomi yang diarahkan pada pertumbuhan ekonomi.Pada era globalisasi ini , pembangunan sumber daya manusia merupakan mayoritas dari tujuan utama pembangunan nasional di seluruh dunia. Dalam hal ini manusia ditempatkan dalam posisi sebagai subyek dari pembangunan. Pembangunan manusia harus dipandang sebagai upaya untuk mengisi dan melengkapi upaya-upaya dalam pencapaian tujuan nasional bangsa Indonesia yang tercantum dalam Pembukaan UUD 1945. Menurut UNDP (1990:1) Pembangunan manusia merupakan suatu proses untuk memperbanyak pilihan-pilihan bagi manusia (“ a process of enlarging people’s choices”), yaitu pilihan untuk sehat dan berumur panjang , berilmu pengetahuan , memiliki akses terhadap sumberdaya agar hidup layak, dan dapat turut berpartisipasi dalam penentuan kebijakan yang mempengaruhi kehidupannya , yang meliputi kebebasan politik , hak asasi , dan harga diri.

Konsesus nasional untuk peningkatan pembangunan manusia Indonesia telah dilakukan melalui Kongres Nasional Pembangunan Indonesia yang dilaksanakan bulan November 2006. Kongres tersebut telah menghasilkan dokumen pemufakatan pembangunan manusia menuju Indonesia yang lebih sejahtera ,adil, dan makmur. Dalam hal ini IPM tidak berdiri sendiri karena saling terkait dengan kondisi ekonomi makronasional seperti Pendapatan Domestik Bruto (PDB)

dan Investasi. Dimana pada tahun 2011 ini, pemerintah menargetkan laju pertumbuhan ekonomi dikisaran 6-6,3 persen. Dan salah satu pendorong laju pertumbuhan ekonomi adalah investasi. (Armida Alisjahbana, Kompas 19/3/2010).

Investasi merupakan roda yang menggerakkan perekonomian suatu negara, sebagai komponen utama dalam proses pembangunan. Indonesia merupakan Negara berkembang yang sedang mengalami pergeseran struktur ekonomi dari agraris ke industri. Untuk menjadi Negara industrialisasi dibutuhkan investasi yang cukup besar. Dalam teori ekonomi pembangunan diketahui bahwa tingkat pertumbuhan ekonomi dan investasi mempunyai hubungan timbal balik yang positif, hal ini terjadi karena semakin tinggi pertumbuhan ekonomi suatu Negara, berarti semakin besar bagian dari pendapatan yang bisa ditabung, sehingga investasi yang tercipta akan semakin besar pula. Dilain pihak semakin besar tingkat pertumbuhan ekonomi (PDB) yang dicapai maka makin besar pula investasi yang dicapai.

Perkembangan IPM Indonesia dan Data Indikator Makro Ekonomi

| Tahun | IPM | Laju Pertumbuhan Ekonomi (%) | PDB (Triliun) | Investasi PMDN (Triliun) | Investasi PMA (\$ Million) |
|-------|------|------------------------------|---------------|--------------------------|----------------------------|
| 2005 | 72,9 | 5,6 | 3.339.216.8 | 13.59 | 4.94 |
| 2006 | 73,4 | 5,8 | 3.950.893.2 | 20.649 | 5.911 |
| 2007 | 73,7 | 6,3 | 4.951.356.7 | 34.878.7 | 10.341.8 |
| 2008 | 74,2 | 6,2 | 5.613.441.7 | 8.496.6 | 10.380.6 |

Sumber : BPS, 2007 dan laporan BKPM 2007

Berdasarkan tabel di atas nampak Kualitas Hidup Manusia Indonesia tercermin dari Indeks Pembangunan Manusia (IPM) yang dari tahun ke tahun mengalami peningkatan, namun demikian masih terjadi disparitas terutama pada beberapa wilayah Timur yang nilainya jauh di bawah rata-rata nasional.

Batasan Masalah

Pertumbuhan ekonomi yang mantap, mendorong pembangunan yang semakin meningkat setiap tahunnya, serta akses terhadap sumber daya untuk mencapai standar hidup layak yang diukur dengan PDB, IPM dan Investasi, sehingga dapat dilakukan suatu batasan masalah yakni:

1. Apakah ada hubungan timbal balik antara PDB, IPM dan LPE?
2. Bagaimana model yang berstruktur yang cocok agar dapat melakukan proyeksi masing-masing variabel makro beberapa periode kedepan berdasarkan hubungan kausalitasnya?

Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk mempelajari dan mengetahui Model Ekonomi Berstruktur melalui Analisis Vector Auto Regression (VAR) dalam pertumbuhan ekonomi Indonesia melalui indikator-indikator PDB, Investasi, dan IPM.

Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini akan memberikan kontribusi :

1. Sumbangan pemikiran untuk Pemerintah untuk lebih mensukseskan pelaksanaan Peningkatan Indeks Pembangunan Manusia Yang berkaitan dengan PDB dan Investasi selanjutnya dalam rangka pemerataan hasil-hasil pembangunan terutama dalam pertumbuhan ekonomi berdasarkan gambaran umum
2. Sedangkan dari segi pengembangan ilmu pengetahuan hasil penelitian ini sangat bermanfaat bagi ilmu ekonomi dan statistika dalam menerapkan teori dan aplikasinya.

TINJAUAN PUSTAKA

Teori Pembangunan Manusia

Pembangunan manusia didefinisikan sebagai “ suatu proses untuk perluasan pilihan yang lebih banyak kepada penduduk” melalui upaya-upaya pemberdayaan yang mengutamakan peningkatan kemampuan dasar manusia agar dapat sepenuhnya berpartisipasi disegala bidang pembangunan. Elemen-elemen pembangunan secara tegas menggaris bawahi sasaran yang ingin di capai , yaitu hidup sehat dan panjang umur , berpendidikan dan dapat menikmati hidup layak.

Ini berarti pembangunan manusia merupakan manifestasi dari aspirasi dan tujuan suatu bangsa yang dimaksudkan untuk melakukan perubahan secara struktural melalui upaya yang sistematis. Sedangkan sasaran dasar pembangunan pada akhirnya adalah peningkatan derajat kesehatan (usia panjang dan kesehatan), meningkatkan pendidikan (kemampuan baca tulis dan ketrampilan) serta penguasaan atas sumber daya (pendapatan untuk dapat hidup layak) agar dapat berpartisipasi dalam pembangunan , yang juga harus dipandang sebagai upaya untuk mengisi dan melengkapi upaya-upaya dalam pencapaian tujuan nasional bangsa Indonesia yang tercantum dalam UUD 1945 .

Seperti diketahui bahwa alat ukur SDM adalah IPM. Indikator IPM melalui instrumen dasar yaitu pendidikan, kesehatan dan Pendapatan. Untuk membangun SDM yang unggul tentunya yang harus diperbaiki adalah ketiga indikator tersebut disamping itu dapat digunakan dalam perencanaan dan evaluasi pembangunan.

Produk Domestik Bruto (PDB)

Salah satu ukuran pertumbuhan ekonomi dapat dilihat dari PDB . PDB adalah produksi barang dan jasa total yang dihasilkan dalam perekonomian suatu negara di dalam masa satu tahun. PDB didalamnya merupakan pendapatan faktor produksi milik bangsa Indonesia yang berada di dalam negeri ditambah milik bangsa asing di dalam negeri

Struktur ekonomi secara kuantitatif digambarkan dengan menghitung persentase peranan nilai tambah bruto dari masing-masing sektor terhadap total Produk Domestik Bruto (PDB) , yang umumnya digunakan menganalisis perkembangan dari volume produk barang dan/jasa yang dihitung atas dasar harga konstan.

Investasi

Investasi merupakan pengeluaran yang ditujukan untuk meningkatkan atau

mempertahankan stok barang-barang modal yang terdiri dari mesin-mesin , pabrik ,kantor dan produk-produk tahan lama lainnya yang digunakan dalam proses produksi.

Menurut Paul A. Samuelson & William D. Northaus (1993) Investasi adalah pengeluaran yang dilakukan oleh para penanam modal yang menyangkut penggunaan sumber-sumber seperti peralatan , gedung , peralatan produksi dan mesin-mesin baru lainnya atau persediaan yang diharapkan akan memberikan keuntungan dari investasi tersebut.

Penanaman Modal dalam Negeri (PMDN)

Penanaman modal dalam negeri memberikan peranan dalam pembangunan ekonomi di negeri-negeri sedang berkembang, hal ini terjadi dalam berbagai bentuk. Proporsi penanaman modal dalam negeri di dalam PDB dan pesatnya pertumbuhan investasi tidak berarti pembangunan ekonomi berjalan dengan baik dan begitu pula sebaliknya, karena yang penting bukan besarnya investasi dalam nilai uang atau jumlah proyek, tetapi bagaimana efisien atau produktivitas dalam investasi tersebut.

METODE PENELITIAN

Ruang Lingkup Penelitian

Cakupan wilayah penelitian adalah Indonesia. Penelitian ini menggunakan penggabungan antara penelitian kepustakaan (Library research) & penelitian lapangan (Field research), dimana penelitian kepustakaan yang dimaksudkan untuk mendapatkan informasi yang mendukung dan melengkapi penelitian ini, sedangkan penelitian lapangan dimaksudkan memperoleh data dan informasi. Data yang digunakan merupakan data tahunan (time series) yang berasal dari Biro Pusat Statistik, serta publikasi & dan laporan-laporan yang berkaitan dengan penelitian ini.

Sumber Data

Data yang digunakan merupakan data tahunan (time series) dari periode 1996-2009 yang berasal dari Biro Pusat Statistik, Indikator makroekonomi Indonesia, serta publikasi & laporan-laporan yang berkaitan dengan tulisan ini. Objek penelitian ini ada tiga yakni: IPM, PDB dan Investasi (PMDN) di Indonesia.

Analisis Data

Model Vektor Autoregressive (VAR) biasanya digunakan untuk memproyeksikan sistem variabel-variabel runtut waktu dan untuk menganalisis dampak dinamis dari faktor gangguan yang terdapat dalam sistem variabel tersebut. Pada dasarnya analisis VAR bisa dipadankan dengan suatu model persamaan simultan, oleh karena dalam analisis VAR kita mempertimbangkan beberapa variabel endogen secara bersama-sama dalam suatu model. Disamping itu, dalam analisis VAR biasanya tidak ada variabel eksogen dalam model tersebut. (Nachrowi, 2006).

Model Vektor Autoregressive (VAR) juga merupakan gabungan dari beberapa model Autoregressive (AR), dimana model-model ini membentuk sebuah Vektor Autoregressive berorde 1, artinya variabel bebas dari model tersebut hanyalah satu lag dari variabel tak bebasnya. Model VAR 1 yang dibangkitkan dari model AR(1) dengan 2 variabel adalah

$$\text{dengan } z_t = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \alpha_0 = \begin{pmatrix} \alpha_{10} \\ \alpha_{20} \end{pmatrix}$$
$$\Phi_t = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} \quad \varepsilon_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

Model Vektor Autoregressive orde p atau VAR (p) yang dibangkitkan dari model AR(p) dengan 2 variabel adalah

$$z_t = \alpha_0 + \sum_{n=1}^p \Phi_n z_{t-n} + \varepsilon_t$$

dengan: z_t : vektor pada waktu t

α_0 : konstanta ;

Φ_t : besarnya nilai parameter z ke n ;

ε_t : nilai error

Pada analisis VAR ini ada beberapa pengujian yang harus dilakukan yang meliputi:

1. Uji akar unit (Unit Root Test)

Uji akar unit ini untuk melihat apakah data yang diamati stasioner atau tidak, karena apabila data yang diamati stasioner hal ini akan meningkatkan akurasi dari analisis VAR.

2. Uji Likelihood Ratio test

Uji ini dilakukan untuk mengetahui maksimum panjang lag yang sesuai untuk model yang diamati.

Dalam hal penentuan panjang lag dapat juga menggunakan nilai Akaike Information Criteria (AIC) dan Schwartz Criteria (SC) yang minimum, dengan menggunakan rumus –rumus

$$AIC = \log \left(\frac{\sum e_t^2}{n} \right) + \frac{2k}{n}$$

$$SIC = \log \left(\frac{\sum e_t^2}{n} \right) + \frac{k}{n} \log n$$

Dengan : $\sum e_t^2$: jumlah kuadrat residual

k : jumlah variabel bebas

n : ukuran sampel

Dalam analisis data akan digunakan software Eviews 5.

1. Granger Causality Test

Uji ini dilakukan untuk melihat apakah suatu variabel bebas meningkatkan kinerja forecasting dari variabel tidak bebas..

2. Uji normalitas , dalam hal ini digunakan statistik Jargue-Bera.

Adapun model empiris yang akan digunakan dalam penelitian ini adalah :

$$Y_{1t} = \alpha_1 + \sum \beta_{ij} Y_{1t-j} + \sum \lambda_{1j} Y_{2t-j} + \sum \delta_{1j} Y_{3t-j} + \varepsilon_1 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$Y_{2t} = \alpha_2 + \sum \beta_{2j} Y_{1t-j} + \sum \lambda_{2j} Y_{2t-j} + \sum \delta_{2j} Y_{3t-j} + \varepsilon_2 \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$Y_{3t} = \alpha_3 + \sum \beta_{3j} Y_{1t-j} + \sum \lambda_{3j} Y_{2t-j} + \sum \delta_{3j} Y_{3t-j} + \varepsilon_3 \quad \dots\dots\dots(3)$$

dengan : Y_1 : PDB (Product Domestic Bruto)
 Y_2 : Investasi PMDN
 Y_3 : IPM (Indeks Pembangunan Manusia)

HASIL PEMBAHASAN

1. Persamaan Regresi Multipel

Berdasarkan hasil entry data, yang tercantum dalam lampiran (1) dan lampiran (2) , diperoleh model-model regresi melalui OLS seperti di bawah ini :

$$IPM = a + b \text{ Investasi} + c \text{ PDB} + \varepsilon$$

$$IPM = 16.75069 + 2.268356 \text{ Investasi} + 2.045851 \text{ PDB}^* \quad \dots\dots\dots(1)$$

* tidak signifikan.

$$R^2 = 0,6413$$

Akan tetapi bila kedua variabel bebas menggunakan Ln , model menjadi :

$$IPM = a + b \text{ Ln Investasi} + c \text{ PDB} + \varepsilon$$

$$IPM = 16.75069 + 2.268356 \text{ Ln Investasi} + 2.045851 \text{ Ln PDB} \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$R^2 = 0,9165$$

Berdasarkan kedua hasil di atas , persamaan (2) lebih baik dibandingkan pers(1) karena memiliki nilai AIC dan Schwarz Criterion yang lebih kecil Lampiran (3)

Berdasarkan persamaan ke (2) dapat disimpulkan bahwa Investasi dan PDB baik secara bersama-sama maupun secara parsial memberikan pengaruh terhadap IPM.

2. Vektor AutoResgressive (VAR)

2.1. Uji Akar Unit

Berdasarkan hasil analisis data dengan menggunakan software E Views 6. diperoleh hasil bahwa data ketiga variabel tidak stasioner.

Null Hypothesis: IPM has a unit root

Exogenous: Constant

Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=2)

| | t-Statistic | Prob.* |
|--|-------------|--------|
| Augmented Dickey-Fuller test statistic | -2.250910 | 0.1996 |
| Test critical values: 1% level | -4.057910 | |
| 5% level | -3.119910 | |
| 10% level | -2.701103 | |

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Null Hypothesis: LN_INVESTASI has a unit root

Exogenous: Constant

Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=2)

| | t-Statistic | Prob.* |
|--|-------------|--------|
| Augmented Dickey-Fuller test statistic | -1.868231 | 0.3350 |
| Test critical values: 1% level | -4.057910 | |
| 5% level | -3.119910 | |
| 10% level | -2.701103 | |

*MacKinnon (1996) one-sided p-values

Null Hypothesis: LN_PDB has a unit root

Exogenous: Constant

Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=2)

| | t-Statistic | Prob.* |
|--|-------------|--------|
| Augmented Dickey-Fuller test statistic | 0.596961 | 0.9831 |
| Test critical values: 1% level | -4.057910 | |
| 5% level | -3.119910 | |
| 10% level | -2.701103 | |

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Untuk itu dilakukan differencing agar stasioner , seperti nampak di bawah ini:

Diff=2

Null Hypothesis: D(IPM,2) has a unit root

Exogenous: Constant

Lag Length: 1 (Automatic based on SIC, MAXLAG=2)

| | t-Statistic | Prob.* |
|--|-------------|--------|
| | | |

| | | | |
|--|-----------|-----------|--------|
| Augmented Dickey-Fuller test statistic | | -3.584923 | 0.0287 |
| Test critical values: | 1% level | -4.297073 | |
| | 5% level | -3.212696 | |
| | 10% level | -2.747676 | |

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Investasi

Diff=1

Null Hypothesis: D(INVESTASI) has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=2)

| | | t-Statistic | Prob.* |
|--|-----------|-------------|--------|
| Augmented Dickey-Fuller test statistic | | -4.859577 | 0.0031 |
| Test critical values: | 1% level | -4.121990 | |
| | 5% level | -3.144920 | |
| | 10% level | -2.713751 | |

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Diff=2

Null Hypothesis: D(PDB,2) has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic based on SIC, MAXLAG=2)

| | | t-Statistic | Prob.* |
|--|-----------|-------------|--------|
| Augmented Dickey-Fuller test statistic | | -5.713764 | 0.0011 |
| Test critical values: | 1% level | -4.200056 | |
| | 5% level | -3.175352 | |
| | 10% level | -2.728985 | |

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Berdasarkan hasil di atas nampak bahwa IPM stasioner pada differencing (2), Investasi pada differencing (1) dan PDB pada differencing (2).

3.Uji Kausalitas Granger

Berdasarkan hasil analisis data berdasarkan di dapatkan hasil sebagai berikut:

Pairwise Granger Causality Tests

Sample: 1 14

Lags: 2

| Null Hypothesis: | Obs | F-Statistic | Prob. |
|--|-----|-------------|--------|
| LN_PDB does not Granger Cause LN_INVESTASI | 12 | 0.52995 | 0.6105 |

| | | | |
|--|----|---------|--------|
| LN_INVESTASI does not Granger Cause LN_PDB | | 1.17369 | 0.3634 |
| IPM does not Granger Cause LN_INVESTASI | 12 | 4.08864 | 0.0666 |
| LN_INVESTASI does not Granger Cause IPM | | 6.78184 | 0.0230 |
| IPM does not Granger Cause LN_PDB | 12 | 3.43534 | 0.0913 |
| LN_PDB does not Granger Cause IPM | | 0.91594 | 0.4433 |

Berdasarkan hasil di atas dapat dijelaskan bahwa IPM memberikan pengaruh terhadap investasi dan investasipun memberikan pengaruh terhadap IPM, dan IPM pun memberikan pengaruh pada PDB (P value $0.0913 \leq 10\%$) tetapi tidak sebaliknya. Sedangkan IPM memberikan pengaruh terhadap Investasi (P value 0,066) demikian juga sebaliknya.

Dengan P value demikian diperoleh hasil persamaan baru setelah distasionerkan dan adanya interkorelasi :

$$\text{IPM} = 0,1087\text{IPM}_{(t-1)} + 0,7229 \text{IPM}_{(t-2)} + 23,8995 - 1,1797 \text{Ln PDB} + 0,6553 \text{Ln Investasi} \quad (3)$$

| | |
|----------------|----------|
| R-squared | 0.980823 |
| Adj. R-squared | 0.969865 |
| Sum sq. resids | 2.497783 |
| S.E. equation | 0.597349 |
| F-statistic | 89.50533 |

Lampiran (6)

Berdasarkan persamaan (3) dapat diartikan sebagai setiap kenaikan IPM tahun sebelumnya meningkat 1% maka IPM pada tahun ini akan meningkat sebesar 0,1087 % , jika IPM pada 2 tahun sebelumnya meningkat 1% maka IPM tahun ini meningkat sebesar 0,7229 % . Sedangkan setiap kenaikan PDB sebesar 1% maka IPM menurun sebesar 1,179% . Jika Investasi meningkat 1% maka IPM akan meningkat sebesar 0,6553%.

Model di atas sangat signifikan dan memiliki koesien determinasi sebesar 98,08%.

$$\text{Ln Inv} = -0,09899 \text{Ln Inv}_{(t-1)} - 0,5953 \text{Ln Inv}_{(t-2)} - 16,5840 - 0,4010 \text{Ln PDB} + 0,5620 \text{IPM} \quad (4)$$

| | |
|----------------|----------|
| R-squared | 0.808074 |
| Adj. R-squared | 0.698402 |
| Sum sq. resids | 1.852372 |
| S.E. equation | 0.514417 |
| F-statistic | 7.368087 |

Lampiran (7)

Berdasarkan persamaan (4) dapat disimpulkan bahwa setiap kenaikan Inv tahun sebelumnya meningkat 1% maka Inv pada tahun ini akan menurun sebesar 0,99%, jika Inv pada 2 tahun sebelumnya meningkat 1% maka Inv tahun ini menurun sebesar 0,5953 % . Sedangkan setiap kenaikan PDB sebesar 1% maka Inv menurun sebesar 0,401% . Jika IPM meningkat 1% maka Inv akan meningkat sebesar 0,5620%.

$$\text{Ln PDB} = 0,7474 \text{Ln PDB}_{(t-1)} + 0,1264 \text{Ln PDB}_{(t-2)} - 2,3244 + 0,7803 \text{IPM} - 0,1141 \text{Ln Inves} \quad (5)$$

| | |
|----------------|----------|
| R-squared | 0.941934 |
| Adj. R-squared | 0.908754 |
| Sum sq. resids | 0.248314 |
| S.E. equation | 0.188344 |
| F-statistic | 28.38835 |

Lampiran (8)

Berdasarkan persamaan (5) dapat disimpulkan bahwa sebagai setiap kenaikan PDB tahun sebelumnya meningkat 1% maka PDB pada tahun ini akan meningkat sebesar 0,7474%, jika PDB pada 2 tahun sebelumnya meningkat 1% maka PDB tahun ini meningkat sebesar 0,1264 % . Sedangkan setiap kenaikan IPM sebesar 1% maka PDB meningkat sebesar 0,78% . Jika Inv meningkat 1% maka PDB akan menurun sebesar 0,1141 %.

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa :

1. Berdasarkan dari hasil dari uji kecocokan model dan nilai R^2 persamaan (1) lebih baik dibandingkan persamaan ke (2),
2. Hasil uji akar unit diperoleh bahwa ketiga variabel yakni IPM, PDB dan Investasi tidak stasioner, untuk itu dilakukan differencing, sehingga ketiganya menjadi stasioner dan untuk pengujian Uji kausalitas Granger didapat bahwa IPM memberikan pengaruh terhadap investasi dan investasipun memberikan pengaruh terhadap IPM, dan IPM pun memberikan pengaruh pada PDB ,tetapi tidak sebaliknya. Sehingga untuk persamaan VAR yang digunakan yakni :

$$\text{IPM} = 0,1087 \text{IPM}_{(t-1)} + 0,7229 \text{IPM}_{(t-2)} + 23,8995 - 1,1797 \text{Ln PDB} + 0,6553 \text{Ln Investasi}$$

Saran

1. Disarankan agar ukuran sampel yang digunakan cukup besar (2 var eksogen) sebaiknya ≥ 20 , agar diperoleh model yang fit..
2. Metode VAR ini dibutuhkan ketelitian dan kejelian dalam analisis data agar diperoleh persamaan yang memiliki presisi yang tinggi.

DAFTAR PUSTAKA

Armida Alisjahbana, Kompas, 19Maret 2010.

Arief Sritua, 1996 , *Teori Ekonomi Mikro dan Makro Lanjutan Edisi I* , Fajar Pratama , Jakarta.

Cecep Winata dan Augustina Kurniasih ,2006, Kajian Faktor-faktor Yang Mempengaruhi Stabilitas Perekonomian Indonesia Sebagai Small Open Economy Pendekatan Vector Autoregressive (VAR).

Gordon ,J. Robert ,1993 , *Macroeconomics*, Sixth Edition , Harpers Collin College Publisher , New York.

Gujarati, Damodar., 2003, *Basic Econometrics*, Fourth Edition, Mc Graw-Hill, Inc, New York.

Rudiger Dornbusch, 1994 , *Macroeconomics* , Sixth Edition, Mc Graw-Hill, Inc, New York.

Yonathan S.Hadi,2003., Analisis Vector Auto Regression (VAR) terhadap korelasi Antara Pendapatan dan Investasi Pemerintah di Indonesia 1983/1984-1999/2000

<http://hdr.undp.org/en/statistic/data>

<http://ppkipmjabar.wordpress.com> Situs Program Pendanaan Kompetisi Indeks Pembangunan Manusia , Mei 2006, September 2006 dan Januari 2007

<http://id.wiki/IPM>

<http://id.wiki/IPM> rakyat.co.id www.bps.go.id

<http://www.Indonesia.go.id/pub/news/detail>

www.bi.go.id Juni 2007 dan BPS 2006

Lampiran : 1

| Tahun | IPM (%) | Investasi (Milyar) PMDN | PDB (Milyar) |
|-------|---------|----------------------------|--------------|
| 1996 | 61,3 | 1007,15 | 1445173 |
| 1997 | 62,1 | 1198,73 | 1513094 |
| 1998 | 63,5 | 6074,93 | 1314476 |
| 1999 | 64,3 | 5355,0 | 1324873 |
| 2000 | 67,3 | 9332,77 | 1389770 |
| 2001 | 68,3 | 58816,0 | 1442985 |
| 2002 | 69,4 | 25307,6 | 1506124 |
| 2003 | 70,9 | 30092,1 | 1579559 |
| 2004 | 71,4 | 34140,4 | 1660579 |
| 2005 | 72,3 | 34878,7 | 3339216.8 |
| 2006 | 72,7 | 38432,3 | 3950893.2 |
| 2007 | 72,8 | 39545,6 | 4951356.7 |
| 2008 | 73,2 | 40231.7 | 5613442 |
| 2009 | 73,4 | 42148.8 | 6313441.3 |

Sumber :BPS 2001,2004,2007 dan laporan BKPM 2007

Lampiran 2

| No | Ln PDB | Ln Investasi |
|----|----------|--------------|
| 1 | 14.18374 | 6.914879839 |
| 2 | 14.22967 | 7.089017942 |
| 3 | 14.08895 | 8.711925746 |
| 4 | 14.09683 | 8.585785983 |
| 5 | 14.14465 | 9.141287142 |
| 6 | 14.18222 | 10.98216921 |
| 7 | 14.22505 | 10.13886002 |
| 8 | 14.27266 | 10.31201796 |
| 9 | 14.32268 | 10.43823671 |
| 10 | 15.02125 | 10.45963161 |
| 11 | 15.18945 | 10.55665353 |
| 12 | 15.41517 | 10.58520972 |
| 13 | 15.54067 | 11.35000646 |
| 14 | 15.62600 | 11.36816787 |

Lampiran 3

Dependent Variable: IPM

Method: Least Squares

Sample: 1 14

Included observations: 14

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|-----------|-------------|------------|-------------|--------|
| C | 64.19325 | 1.401580 | 45.80062 | 0.0000 |
| INVESTASI | 8.95E-05 | 4.56E-05 | 1.961897 | 0.0756 |
| PDB | 6.30E-07 | 7.29E-07 | 0.863998 | 0.4060 |

| | | | |
|--------------------|-----------|-----------------------|----------|
| R-squared | 0.641288 | Mean dependent var | 68.77857 |
| Adjusted R-squared | 0.576068 | S.D. dependent var | 4.363164 |
| S.E. of regression | 2.840859 | Akaike info criterion | 5.113500 |
| Sum squared resid | 88.77530 | Schwarz criterion | 5.250441 |
| Log likelihood | -32.79450 | Hannan-Quinn criter. | 5.100823 |
| F-statistic | 9.832638 | Durbin-Watson stat | 0.631659 |
| Prob(F-statistic) | 0.003557 | | |

Dependent Variable: IPM
Method: Least Squares
Sample: 1 14
Included observations: 14

| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
|--------------|-------------|------------|-------------|--------|
| C | 16.75069 | 10.22128 | 1.638805 | 0.1295 |
| LN_INVESTASI | 2.268356 | 0.337836 | 6.714372 | 0.0000 |
| LN_PDB | 2.045851 | 0.819625 | 2.496082 | 0.0297 |

| | | | |
|--------------------|-----------|-----------------------|----------|
| R-squared | 0.916529 | Mean dependent var | 68.77857 |
| Adjusted R-squared | 0.901353 | S.D. dependent var | 4.363164 |
| S.E. of regression | 1.370388 | Akaike info criterion | 3.655475 |
| Sum squared resid | 20.65761 | Schwarz criterion | 3.792416 |
| Log likelihood | -22.58832 | Hannan-Quinn criter. | 3.642798 |
| F-statistic | 60.39145 | Durbin-Watson stat | 1.508274 |
| Prob(F-statistic) | 0.000001 | | |

Vector Autoregression Estimates

Date: 03/28/11 Time: 09:09

Sample (adjusted): 3 14

Included observations: 12 after
adjustments

Standard errors in () & t-statistics in []

| IPM | |
|-----------|-------------------------------------|
| IPM(-1) | 0.471156 (0.46650) [1.00997] |
| IPM(-2) | 0.569736 (0.47833) [1.19110] |
| INVESTASI | 6.55E-06 (1.6E-05) [0.40138] |
| PDB | -5.52E-07 (3.2E-07) |

[-1.71598]

| | |
|----------------|-----------|
| R-squared | 0.972147 |
| Adj. R-squared | 0.961702 |
| Sum sq. resids | 3.627809 |
| S.E. equation | 0.673406 |
| F-statistic | 93.07462 |
| Log likelihood | -9.849596 |
| Akaike AIC | 2.308266 |
| Schwarz SC | 2.469902 |
| Mean dependent | 69.95833 |
| S.D. dependent | 3.441051 |

Vector Autoregression Estimates

Date: 12/22/10 Time: 10:18

Sample (adjusted): 3 14

Included observations: 12 after
adjustments

Standard errors in () & t-statistics in []

| LN_INVESTASI | |
|------------------|--------------------------------------|
| LN_INVESTASI(-1) | -0.098983 (0.31045) [-0.31883] |
| LN_INVESTASI(-2) | -0.595292 (0.52740) [-1.12873] |
| C | -16.58403 (10.3492) [-1.60245] |
| LN_PDB | -0.401009 (0.55692) [-0.72004] |
| IPM | 0.561994 (0.31868) [1.76351] |

| | |
|----------------|-----------|
| R-squared | 0.808074 |
| Adj. R-squared | 0.698402 |
| Sum sq. resids | 1.852372 |
| S.E. equation | 0.514417 |
| F-statistic | 7.368087 |
| Log likelihood | -5.816623 |
| Akaike AIC | 1.802771 |
| Schwarz SC | 2.004815 |
| Mean dependent | 10.21916 |

KAJIAN SECARA ALJABAR TENTANG PERKALIAN BILANGAN BULAT SANGAT BESAR

Muhammad Sugeng, Mahmud Yunus

Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) Surabaya
Email: sugeng4@yahoo.com ; yunusm@matematika.its.ac.id

Abstrak

Pada tulisan ini, dirumuskan suatu metode perkalian bilangan bulat disertai dengan pengkajian proses pembuktian secara aksiomatik bahwa metode tersebut dapat diterapkan untuk sebarang bilangan bulat berhingga. Digit-digit dari bilangan-bilangan bulat yang akan dikalikan dipandang sebagai matriks kolom untuk bilangan bulat pertama dan matriks baris untuk bilangan bulat yang lain. Selanjutnya, pendekatan matriks juga digunakan untuk mengenalkan istilah “lintasan matriks”, yaitu suatu matriks kolom sedemikian sehingga entri-entrinya merupakan jumlahan dari entri-entri yang jumlah indeksnya sama. Untuk membawa kembali lintasan matriks tersebut ke dalam bentuk bulat positif, maka akan digunakan representasi basis yang dikenalkan sebagai “fungsi hitung”. Hasil akhir penelitian ini memberikan suatu metode alternatif untuk perkalian bilangan bulat sangat besar disertai dengan pengkajian proses pembuktiannya.

Kata kunci: bilangan bulat besar, lintasan matriks, matriks perkalian, operasi biner, representasi basis.

PENDAHULUAN

Perhatikan metode perkalian yang biasa digunakan oleh siswa di sekolah dasar berikut. Misalkan akan dikalikan dua bilangan 2-digit, yaitu 25 dan 34. Metode yang digunakan untuk menghitung adalah

$$\begin{array}{r} 25 \\ 34 \times \\ \hline 100 \\ 75 \quad + \\ \hline 850 \end{array}$$

Bilangan terakhir yang diperoleh tentu saja menunjukkan nilai yang benar dari hasil perkalian 25 dan 34. Tetapi, suatu masalah akan timbul ketika seseorang berpikir untuk menghitung perkalian bilangan-bilangan bulat sangat besar. Hal ini berbeda ketika orang bekerja dengan bilangan (pecahan) yang sangat kecil. Kesalahan beberapa digit yang terletak jauh dibelakang koma, dalam tingkat ketelitian tertentu dapat diabaikan nilainya. Namun, tidak demikian ketika seseorang bekerja dengan bilangan sangat besar. Kesalahan beberapa digit akan berujung pada kesalahan hasil akhir yang diperoleh dan bisa jadi akan berakibat fatal.

Walaupun keakuratan hasil kerja mesin tidak diragukan lagi, namun tidaklah berlebihan apabila dilakukan analisis kembali tentang bagaimana proses kerja teknologi dalam menjawab masalah perkalian bilangan asli dengan deretan digit yang sangat panjang itu. Faktanya, algoritma untuk menghitung perkalian yang digunakan oleh mesin tidak banyak dipaparkan kepada publik karena terbentur dengan kepentingan komersial. Hal ini menjadi pertanyaan menarik bagi penulis, apakah bilangan-bilangan sangat besar yang diperoleh dari kerja mesin tersusun dari digit-digit

yang sudah tepat atau terdapat beberapa digit yang sengaja disisipkan secara random pada posisi tertentu, mengingat keterbatasan alat untuk mengecek kembali hasil-hasil tersebut.

Dengan metode perkalian seperti yang dikemukakan di awal, tentu saja akan menyulitkan seseorang ketika bekerja pada bilangan bulat sangat besar. Namun, apabila metode tersebut memungkinkan untuk diterapkan pada bilangan bulat sangat besar, akan lebih menarik untuk mempertanyakan apakah metode penghitungan perkalian tersebut dapat dibuktikan benar secara aksiomatik untuk sebarang bilangan asli berhingga? Bertolak dari masalah tersebut, pada tulisan ini akan dirumuskan suatu metode perkalian dan kemudian akan dikaji proses pembuktiannya secara aksiomatik bahwa metode tersebut dapat diterapkan untuk sebarang bilangan bulat berhingga.

Penelitian Terkait

Azman (2010), dalam penelitiannya menerapkan metode Vedic untuk menghitung perkalian bilangan 6, 7, 8, dan 9. Azman mengasumsikan bahwa siswa yang menerapkan metode Vedic dianggap sudah menguasai perkalian bilangan satuan 1, 2, 3, 4, dan 5. Metode Vedic yang diterapkan oleh Azman ini hanya dapat bekerja untuk bilangan-bilangan 6, 7, 8, dan 9. Untuk bilangan-bilangan yang lebih besar dari itu, metode Vedic tidak lagi dapat diterapkan dengan benar.

Dalam penelitian yang sejenis dengan Azman, Suryani (2010) menggunakan metode *reference sum* untuk perkalian bilangan dua digit. Setidaknya, metode “*reference sum*” yang digunakan Suryani mempunyai domain yang lebih luas daripada metode Vedic yang digunakan oleh Azman. Walaupun demikian, keduanya belum mengungkapkan bagaimana metode yang digunakan dalam penelitiannya diterapkan untuk bilangan-bilangan dengan digit yang lebih banyak. Di samping itu, keduanya juga tidak menuliskan pembuktian secara umum bahwa metode yang mereka gunakan adalah benar untuk bilangan-bilangan yang telah disarankan, apalagi untuk bilangan bulat secara umum.

Pembahasan mengenai perkalian juga dikemukakan oleh Singer dan Saon (1996). Berbeda dengan Azman dan Suryani, Singer dan Saon memfokuskan pembahasan perkalian pada algoritmanya. Penulis lain yang juga membahas tentang algoritma perkalian adalah Hoeven (2007). Dalam karya tulisnya, Singer dan Saon mengkaji tentang efisiensi algoritma untuk perkalian bilangan bulat pada sistem paralel. Sedangkan Hoeven mengembangkan algoritma baru untuk perkalian.

Di sisi lain, beberapa orang tertarik untuk membahas bilangan besar. Shapiro (tanpa tahun) memberikan ketegasan mengenai bilangan besar yang ia maksudkan dalam artikelnya bukanlah takhingga. Dalam paparannya, Shapiro sedikit menceritakan tentang istilah “googol” yang pernah dikemukakan oleh Kasner dan Newman pada tahun 1940. Istilah tersebut digunakan untuk menyatakan bilangan 10^{100} yang dituliskan sebagai susunan dari satu digit 1 dan diikuti seratus digit 0. Dalam tulisannya, dia menyebut bahwa googol termasuk bilangan besar. Lebih lanjut, istilah “googolplex” digunakan untuk menyatakan bilangan yang tersusun atas satu digit 1 dan diikuti sebanyak googol digit 0.

Sejalan dengan itu, artikel Davis (2008) membahas lebih lengkap mengenai bilangan besar, mulai dari ekspresi penulisan, penamaan, hingga pemaparan beberapa bilangan besar yang terkenal. Ekspresi penulisan bilangan besar yang dibahas oleh Davis, diantaranya: berupa bentuk pangkat $a^b c^d$ dan perpangkatan faktorial $n!^{m!^{n!}}$. Tahir (2010) lebih tertarik membahas bilangan besar yang dikaitkan dengan pembagian. Dalam masalah ini, Tahir menggunakan tabel perkalian yang dikenal dengan sebutan BNTT (*Big Number Times Tables*).

Notasi Matriks

Suatu matriks M berukuran $m \times n$ dapat ditulis sebagai $M_{m \times n}$ atau $(a_{ij})_{m \times n}$. Notasi a_{ij} akan dipahami sebagai entri pada baris ke- i dan kolom ke- j . Misalkan diberikan matriks $M = (a_{ij})_{m \times n}$. Transpose dari M , ditulis $M^T = (a_{ji})_{n \times m}$, adalah suatu matriks yang berukuran $n \times m$ sedemikian sehingga apabila entri a_{ij} terletak pada baris ke- i dan kolom ke- j di M maka

akan ditulis sebagai entri yang terletak pada baris ke- j dan kolom ke- i di M^T . Selanjutnya, matriks M dikatakan simetris apabila berlaku $M = M^T$.

PEMBAHASAN

Sebarang bilangan bulat positif N dapat ditulis sebagai

$$N = a_1 \times 10^{n-1} + a_2 \times 10^{n-2} + a_3 \times 10^{n-3} + \dots + a_{n-1} \times 10 + a_n,$$

untuk $a_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ dimana $a_1 \neq 0$.

Selanjutnya, dalam tulisan ini bilangan N tersebut akan dituliskan sebagai matriks kolom

$$N = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Kecuali dikatakan lain, matriks kolom yang digunakan dalam tulisan ini merupakan matriks kolom dengan entri-entri bilangan bulat tak-negatif dimana entri pada baris pertama adalah tidak nol.

Matriks Perkalian

Apabila diberikan matriks-matriks kolom $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ maka dapat diperoleh

$$\mathbf{ab}^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} [b_1 \ b_2 \ b_3 \ \dots \ b_n] = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m b_1 & a_m b_2 & \dots & a_m b_n \end{bmatrix}.$$

Matriks \mathbf{ab}^T akan dituliskan sebagai $M(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ dan dikatakan sebagai matriks perkalian dari \mathbf{a} dan \mathbf{b} . Sebagaimana perkalian matriks pada umumnya, $M(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq M(\mathbf{b}, \mathbf{a})$. Sebagai contoh, misalkan $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, maka $M(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{ab}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} [4 \ 5] = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 10 \\ 12 & 15 \end{bmatrix}$ sedangkan $M(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = \mathbf{ba}^T = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} [1 \ 2 \ 3] = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \end{bmatrix}$. Walaupun demikian, terdapat hubungan tertentu antara $M(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ dan $M(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ yang akan dijelaskan pada sifat-sifat berikut.

Sifat 1

$$M(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = M(\mathbf{b}, \mathbf{a})^T.$$

Bukti: $M(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{ab}^T = (\mathbf{ba}^T)^T = M(\mathbf{b}, \mathbf{a})^T$.

Misalkan diberikan dua matriks kolom $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$,

maka

$$M(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{ab}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} [2 \ 2 \ 6] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 6 \\ 6 & 6 & 18 \end{bmatrix}$$

sedangkan

$$M(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = \mathbf{b}\mathbf{a}^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} [1 \quad 1 \quad 3] = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 6 \\ 6 & 6 & 18 \end{bmatrix}.$$

Pada kasus tersebut, diberikan matriks-matriks kolom \mathbf{a} dan \mathbf{b} yang berbeda, namun diperoleh matriks $M(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ yang sama dengan $M(\mathbf{b}, \mathbf{a})$.

Sifat 2

$M(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = M(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ jika dan hanya jika $M(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ simetris.

Bukti:

(\Rightarrow) Karena $M(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = M(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ maka berlaku $M(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = M(\mathbf{a}, \mathbf{b})^T$.
Ini berarti $M(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ simetris.

(\Leftarrow) Karena $M(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ simetris maka $M(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = M(\mathbf{a}, \mathbf{b})^T$.
Oleh karena itu, berlaku $\mathbf{a}\mathbf{b}^T = (\mathbf{a}\mathbf{b}^T)^T$.
Padahal, $(\mathbf{a}\mathbf{b}^T)^T = \mathbf{b}\mathbf{a}^T = M(\mathbf{b}, \mathbf{a})$.
Jadi, $M(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = M(\mathbf{b}, \mathbf{a})$.

Sifat 3

$M(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ simetris jika dan hanya jika $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$, untuk suatu skalar c .

Bukti:

(\Rightarrow) Misalkan m_{ij} entri pada baris ke- i dan kolom ke- j dari matriks $M(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.
Maka dapat dinyatakan bahwa $m_{ij} = a_i b_j$.
Karena $M(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ simetris maka $m_{ij} = m_{ji}$, yaitu $a_i b_j = a_j b_i$.
Pilih $c = \frac{b_k}{a_k}$, maka $b_i = c a_i$, untuk suatu indeks k .
Karena i adalah sebarang, maka berlaku $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$.

(\Leftarrow) Karena $\mathbf{b} = c\mathbf{a}$ maka berlaku

$$\begin{aligned} M(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= M(\mathbf{a}, c\mathbf{a}) \\ &= \mathbf{a}(c\mathbf{a})^T \\ &= \mathbf{a}c\mathbf{a}^T \\ &= c\mathbf{a}\mathbf{a}^T \\ &= (c\mathbf{a})\mathbf{a}^T \\ &= \mathbf{b}\mathbf{a}^T \\ &= M(\mathbf{b}, \mathbf{a}). \end{aligned}$$

Dengan demikian, $M(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ simetris.

Lintasan Matriks

Suatu lintasan ke- k pada suatu matriks $M = (a_{ij})_{m \times n}$ adalah hasil jumlahan dari semua entri a_{ij} yang memenuhi $i + j = k + 1$. Suatu lintasan matriks adalah matriks kolom dengan entri-entri p_k adalah lintasan ke- k .

Definisi 1

Misalkan M suatu matriks berukuran $m \times n$. Untuk entri-entri a_{ij} di M , lintasan ke- k , ditulis p_k , didefinisikan sebagai

$$p_k = \sum_{i+j=k+1} a_{ij}$$

Ekspresi p_k pada definisi di atas dapat diterjemahkan ke dalam ekspresi lain yang ekuivalen, yaitu:

$$p_k = \sum_{i=1}^k a_{i(k-i+1)}.$$

Dengan kata lain, p_k adalah hasil jumlahan dari entri-entri a_{ij} , dimana $j = k - i + 1$, untuk $i = 1, 2, \dots, k$.

Contoh-Contoh

(a) Misalkan $M_1 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Maka $p_1 = 3$, $p_2 = 2 - 2 = 0$, dan $p_3 = 4$.

Sedangkan p_4 tidak terdefinisi.

(b) Misalkan $M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$. Maka $p_1 = 1$, $p_2 = 6$, $p_3 = 8$, dan $p_4 = 6$. Sedangkan p_5 tidak terdefinisi.

(c) Misalkan $M_3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Maka $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, dan $p_3 = 3$.

(d) Misalkan $M_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Maka $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, dan $p_3 = 3$.

(e) Matriks $M_5 = (a_{ij})$ berukuran 2011×2011 , dimana $a_{ij} = 2i - j$.
Maka $p_{1020} + p_{2010} = \dots$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} p_{1020} &= \sum_{i=1}^{1020} a_{i(1021-i)} \\ &= \sum_{i=1}^{1020} 2i - (1021 - i) \\ &= \sum_{i=1}^{1020} 2i - (1021 - i) \\ &= 3 \sum_{i=1}^{1020} i - \sum_{i=1}^{1020} 1021 \\ &= 520710 \end{aligned}$$

Sedangkan

$$\begin{aligned} p_{2010} &= \sum_{i=1}^{2010} a_{i(2011-i)} \\ &= \sum_{i=1}^{2010} 2i - (2011 - i) \\ &= \sum_{i=1}^{2010} 2i - (2011 - i) \\ &= 3 \sum_{i=1}^{2010} i - \sum_{i=1}^{2010} 2011 \\ &= 2021055 \end{aligned}$$

Jadi, $p_{1020} + p_{2010} = 520710 + 2021055 = 2541765$

Berdasarkan contoh-contoh di atas, p_k tidak selalu dapat didefinisikan untuk sebarang nilai k sebab definisi p_k menyaratkan agar suku-sukunya merupakan entri-entri pada matriks terkait. Proposisi berikut setidaknya dapat menjamin untuk menentukan nilai-nilai k berapa saja sedemikian sehingga p_k dapat didefinisikan.

Proposisi 4

Misalkan M matriks berukuran $m \times n$ dan p_k menyatakan lintasan ke- k pada M . Maka ada bilangan asli i dan j sedemikian sehingga a_{ij} entri di M jika dan hanya jika $k + 1 \leq m + n$.

Bukti :

(\Rightarrow) Karena a_{ij} entri di M maka berlaku $i + j \leq m + n$.

Perhatikan bahwa $p_k = \sum_{i+j=k+1} a_{ij}$.

Oleh karena itu, $k + 1 = i + (k - i + 1) = i + j \leq m + n$.

(\Leftarrow) Perhatikan bahwa $p_k = \sum_{i+j=k+1} a_{ij}$.

Dengan demikian, diperoleh $i + j = k + 1$.

Karena $k + 1 \leq m + n$ maka $i + j = k + 1 \leq m + n$.

Pilih $i \leq m$ dan $j \leq n$.

Maka a_{ij} adalah entri di M .

Arti lain dari proposisi di atas mengatakan bahwa jika $k + 1 > m + n$ maka tidak ada i dan j sedemikian sehingga a_{ij} entri di M . Ini berarti, p_k tidak dapat didefinisikan untuk $k > m + n - 1$ sebab semua suku pada p_k bukanlah entri-entri di M . Secara sama, dikatakan bahwa p_k dapat didefinisikan hanya untuk $k = 1, 2, \dots, m + n - 1$. Untuk memudahkan penyebutan, maka notasi $\alpha = m + n - 1$ dikatakan sebagai **derajat lintasan** dari suatu matriks M .

Jaminan terdefinisinya p_k dari proposisi di atas menjadi dasar keabsahan untuk mendefinisikan *lintasan matriks*. Berikut ini diberikan definisi formal untuk lintasan matriks.

Definisi 2

Misalkan M suatu matriks dan α adalah derajat lintasan dari M .

Lintasan pada M adalah matriks kolom

$$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ p_\alpha \end{bmatrix}$$

dimana p_k lintasan ke- k pada M , untuk $k = 1, 2, 3, \dots, \alpha$.

Dalam kaitannya dengan matriks perkalian, meskipun $M(a, b)$ dan $M(b, a)$ tidak selalu merupakan matriks yang sama, tetapi keduanya mempunyai lintasan yang sama. Ini mudah diamati dari definisi p_k yang tidak mengubah nilai $a_i b_j$ dan $b_i a_j$.

Definisi 3

Misalkan \mathfrak{R} himpunan matriks-matriks kolom.

Fungsi hitung berbasis $t \in \mathbb{Z}$, ditulis tH , adalah fungsi

$${}^tH: \mathcal{F} \subseteq \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

dimana

$${}^tH(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^n a_k t^{n-k}$$

untuk setiap matriks kolom

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Berikut ini diberikan sebuah kasus yang menunjukkan kaitan antara lintasan matriks dan

fungsi hitung. Misalkan $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{b} = [b_1]$ maka $M(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{bmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_1 \\ a_3 b_1 \\ \vdots \\ a_m b_1 \end{bmatrix}$ dan lintasan \mathbf{p} pada

$M(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ adalah $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_1 \\ a_3 b_1 \\ \vdots \\ a_m b_1 \end{bmatrix}$. Oleh karena itu, ${}^tH(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^m a_k t^{m-k}$ dan ${}^tH(\mathbf{b}) = b_1$.

Sedangkan ${}^tH(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^m a_k b_1 t^{m-k}$. Dengan demikian, berlaku $[{}^tH(\mathbf{a})][{}^tH(\mathbf{b})] = [{}^tH(\mathbf{p})]$. Selanjutnya, diberikan sebuah dugaan bahwa kasus di atas dapat berlaku untuk sebarang \mathbf{a} dan \mathbf{b} . Dugaan ini merupakan sebuah pernyataan yang belum sempat dibuktikan, namun untuk beberapa kasus telah dicek kebenarannya.

Dugaan 5.

Misalkan matriks-matriks kolom

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

Jika tH fungsi hitung berbasis t maka berlaku

$$[{}^tH(\mathbf{a})][{}^tH(\mathbf{b})] = [{}^tH(\mathbf{p})],$$

dimana \mathbf{p} adalah lintasan matriks perkalian dari \mathbf{a} dan \mathbf{b} .

KESIMPULAN

Sebuah metode perkalian bilangan bulat sangat besar telah dirumuskan dalam tulisan ini. Mulanya, bilangan-bilangan yang akan dikalikan dipandang sebagai matriks-matriks kolom, kemudian ditentukan matriks perkaliannya. Dari matriks perkalian tersebut, diperoleh suatu lintasan matriks. Dengan menerapkan fungsi hitung basis 10 pada lintasan matriks itu, akan diperoleh suatu hasil perkalian. Akhir dari tulisan menyisakan sebuah dugaan yang merupakan sebuah pernyataan yang belum sempat dibuktikan. Adapun bukti secara formal akan diberikan pada penelitian lebih lanjut. Pembaca dapat juga mengisi ruang kosong ini untuk keperluan penelitian yang sejenis.

DAFTAR PUSTAKA

- Azman, S., (2010), "Multiplication with the Vedic Method", *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 8: 129–133.
- Davis, T., (2008), "Big Number", <http://www.2dix.com/pdf2011/big-number-pdf.pdp>, diakses pada tanggal 20 Januari 2011.
- Hoeven, J. V. D, (2007), "New Algorithm for Relaxed Multiplication", *Journal of Symbolic Computation*, 42: 792–802.
- Koshy, Thomas, (2002), *Elementary Number Theory with Applications*, Harcourt Academic Press, California.
- Shapiro, D. B, (tanpa tahun), "Big Number", <http://www.2dix.com/pdf2011/big-number-pdf.pdp>, diakses pada tanggal 20 Januari 2011.
- Singer, B. and Saon, G.,(1996), "An Efficient Algorithm for Parallel Integer Multiplication", *Communication*, 19: 415–418.
- Suryani, N., (2010), "Multiplication and the Reference Sum Methode", *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 8: 72–78.
- Tahir, S., (2010), "Building Big Number Times Tables", *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 8: 164–172.

MODEL KATASTROFI UNTUK PERFORMANSI KERJA: CUSP ATAU SWALLOWTAIL?

Asti Meiza , Sutawanir Darwis, Agus Yodi Gunawan

Institut Teknologi Bandung

Abstrak

Katastrofi, merupakan bagian dari teori singularitas dan bifurkasi, secara umum merupakan kajian yang mempelajari transisi, diskontinuitas, dan perubahan mendadak secara kualitatif. Dalam kajian terdahulu, telah digunakan model dasar katastrofi yaitu *Cusp* untuk mempelajari perilaku kecerdasan intelektual, *Intelligence Quotient* (IQ). IQ dipandang sebagai variabel keadaan sedangkan aspek-aspek dari IQ yaitu Praktis-Kongkrit (PK) dan Verbal-Teoretis (VT) sebagai variabel kontrol. Data yang ada mendukung model *Cusp*. Model *Cusp* memprediksi terjadinya sebuah 'lompatan' dari satu level kecerdasan ke level kecerdasan yang lain karena perubahan salah satu aspeknya.. Dalam tulisan ini, akan dikembangkan model performansi kerja JF yang diduga berkorelasi dengan tiga komponen kecerdasan yaitu IQ, *Emotional Quotient* (EQ), dan *Adversity Quotient* (AQ). Studi kajian data memperlihatkan ketiga faktor IQ, EQ, dan AQ, merupakan indikator yang tidak berkorelasi. Hasil ini mengarahkan pada pengambilan ketiganya menjadi variabel kontrol dan performansi kerja JF sebagai variabel keadaan. Dengan tiga variabel control, model katastrofi yang bersesuaian adalah *Swallowtail*. Dalam penelitian ini, akan dikerjakan beberapa hal spesifik model *Swallowtail* yang berkaitan dengan pemodelan performansi kerja yaitu proses pemodelan, estimasi parameter, validasi model, dan interpretasi model. Diharapkan penelitian ini akan menghasilkan sesuatu yang signifikan dalam tinjauan kembali terhadap kurikulum pendidikan nasional yang nantinya akan menghasilkan manusia Indonesia dengan performansi kerja optimal.

Kata kunci : performansi kerja, variabel keadaan dan variabel control, model *Cusp* dan model *Swallowtail*.

PENDAHULUAN

Latar Belakang

Indonesia memiliki 7169 orang doktor dari berbagai disiplin ilmu (*www.Direktori Doktor, 2010*). Tentunya tujuh ribuan doktor ini adalah orang-orang dengan kecerdasan di atas rata-rata manusia Indonesia. Tapi mengapa bangsa ini makin jauh saja tertinggal dari bangsa-bangsa lain. Bahkan dari negara-negara yang baru saja merdeka dan mulai membangun seperti Vietnam dan Laos. Apa yang salah dengan bangsa kita?

Faktor apa yang paling menentukan dalam kesuksesan seseorang di dunia kerja? Ketika teori kecerdasan baru mengenal kecerdasan intelektual, IQ (*Intelligence Quotient, David Wechsler, 1939*), orang meletakkan seluruh harapan kesuksesan pada jenis kecerdasan ini. Namun ketika beberapa orang yang sama-sama memiliki IQ tinggi, ada yang mampu bekerja dengan baik, ada yang tidak. Kemudian teori kecerdasan berkembang dengan diperkenalkannya kecerdasan emosi, EQ (*Emotional Quotient, Daniel Goleman, 1995*). jenis kecerdasan ini merujuk pada kemampuan untuk memahami dan mengendalikan emosi. Namun seperti halnya IQ, tidak semua orang bisa memanfaatkan potensi EQ mereka. *Paul Stoltz* mengamati sejumlah orang yang memiliki IQ dan EQ tinggi, tapi gagal dalam pekerjaan mereka. Diduga ada kecerdasan lain yang lebih besar peranannya. Diperkenalkanlah AQ (*Adversity Quotient, oleh siapa, 1997*) yaitu kemampuan seseorang untuk dapat bertahan meng-hadapi kesulitan dan mampu mengubah tantangan menjadi peluang. AQ tidak berdiri sendiri karena faktor IQ dan EQ tetap berperan dalam menentukan performansi kerja seseorang.

Permasalahan

Seperti yang dijelaskan pada latar belakang, ternyata pintar saja tidak cukup. Pintar di sini merupakan pemaknaan dari istilah kecerdasan kognisi yaitu *Intelligence Quotient* (IQ). Jadi kecerdasan kognisi saja tidak cukup untuk membuat bangsa ini maju. Dibutuhkan orang-orang yang tidak hanya sekedar pintar secara kognisi melainkan juga memiliki jenis-jenis kecerdasan lain. Ada beberapa gagasan kecerdasan yang sudah dipublikasikan di antaranya IQ (kecerdasan kognisi), EQ (kecerdasan emosi), SQ (kecerdasan spiritual), AQ (kecerdasan menghadapi kesulitan), CQ (kecerdasan kreatif), dan BQ (kecerdasan biomagnetik). Terdapat satu lagi kecerdasan yaitu QQ (kecerdasan quantum) tapi baru sebatas visi. Tapi dari semua itu, yang sudah memiliki alat ukur yang terstandarisasi saat ini baru dua yaitu IQ, EQ, dan AQ. Karena itu dalam studi ini akan difokuskan pada kaitan antara performansi kerja dengan ketiga jenis kecerdasan.

Urgensi Masalah

Sejauh ini, belum ditemukan penelitian di bidang psikologi dengan menggunakan model katastrofi *Swallowtail*. Penelitian terdahulu dilakukan dengan menggunakan model katastrofi, *Cusp* untuk menganalisa model kecerdasan (Meiza 2006).

Untuk memutuskan model katastrofi yang akan dipilih terlebih dahulu dilakukan pemeriksaan terhadap kebebasan linieran variabel-variabel kontrol, dalam hal ini IQ, EQ, dan AQ. Analisis korelasi dilakukan dengan menggunakan data hasil psikotes alumni sebuah perguruan tinggi negeri di Bandung. Sumber data dari bagian HRD sebuah perusahaan pengguna alumni PT tersebut.

Harapan dari studi pendahuluan ini adalah diperoleh model ideal yang mengkombinasikan komponen IQ, EQ, dan AQ pada calon tenaga kerja sehingga diperoleh ambang numerik untuk variabel-variabel tadi yaitu batas titik kritis terjadinya *jump* pada performansi kerja mereka. Lompatan yang diharapkan adalah orang dengan skor IQ, EQ, dan AQ tertentu bisa menjadi '*agent of change*' di lingkungan kerjanya. Ambang ini bisa menjadi input untuk perbaikan kurikulum di perguruan tinggi sebagai penghasil sarjana yang merupakan ujung tombak di dunia kerja sehingga dicapai nilai tersebut.

PEMBAHASAN

Tinjauan Teori

Secara bahasa, katastrofi berarti perubahan cepat atau mendadak pada permukaan bumi. Sedangkan dari sudut pandang keilmuan, beberapa ahli mendefinisikan katastrofi sebagai teori singularitas yang menjelaskan fenomena diskontinu yang diakibatkan oleh sebab-sebab kontinu (Whitney 1955). Teori katastrofi adalah suatu koleksi dari definisi-definisi dan teorema-teorema yang merupakan bagian dari *teori singularitas* yang berkaitan dengan perubahan bentuk geometri diferensial atau perubahan keadaan (Thom 1972). Teori katastrofi adalah suatu metode yang digunakan untuk mempelajari segala sesuatu yang berkaitan dengan transisi lompatan, *jump transition*, hal-hal yang diskontinu, dan perubahan kualitatif secara mendadak (Arnold 1979). Jadi, teori katastrofi menganalisa *degenerate critical points* dari fungsi potensial yaitu titik-titik dimana tidak hanya turunan pertamanya tapi juga turunan-turunan selanjutnya, sama dengan nol. Khususnya di bidang psikologi, yang pertama kali menggunakan teori katastrofi adalah E.C. Zeeman (*Catastrophe Theory* 1976).

Dari beberapa definisi di atas dapat disimpulkan bahwa studi ini akan memberikan gambaran secara kualitatif tentang perubahan kecil yang kontinu pada *variabel-variabel kontrol* yang dapat mengakibatkan perubahan secara signifikan (*jump*) pada variabel terikatnya yang disebut juga *variabel keadaan*. Variabel keadaan yaitu solusi yang menjelaskan keadaan sistem. Sedangkan variabel yang mengontrol sifat-sifat kualitatif dari solusi disebut variabel kontrol. Variabel kontrol dibagi lagi menjadi *splitting variable* yaitu variabel yang menyebabkan *kedivergenan* dan *normal variable* yaitu variabel yang menyebabkan *hysteresis*.

Dengan bantuan geometri diferensial yaitu geometri yang digunakan untuk menganalisa solusi sistem persamaan nonlinier, teori katastrofi dapat dijelaskan dengan cara yang lebih mudah. Termasuk penjelasan tentang kedua variabel yang telah dijelaskan di atas. Geometri dari himpunan solusi suatu sistem persamaan nonlinier merupakan suatu *manifold*.

Secara sederhana akan dipelajari bentuk-bentuk geometri dari solusi permasalahan non linier. Menentukan solusi analitik dari permasalahan non linier bukanlah pekerjaan mudah. Untuk itu dilakukan dengan dua cara yaitu geometri dan penentuan titik kesetimbangan dari sistem gradien.

$$\frac{dF(x;c)}{dx} = 0 \quad (1)$$

dengan

x : variabel keadaan

c : variabel kontrol (bisa a dan b)

$F(x;c)$: fungsi potensial yang merupakan suatu skalar untuk setiap keadaan x dan vektor variabel-variabel kontrol c .

Sebuah sistem yang mempunyai dinamik seperti persamaan (1) dikatakan suatu *sistem dinamik gradien*. Jika ruas kanan 0 maka dikatakan dalam kondisi setimbang. Perilaku model sangat bergantung pada jumlah variabel keadaan dan variabel kontrolnya. Semakin banyak jumlahnya akan semakin kompleks modelnya.

Berikut adalah contoh beberapa model katastrofi.

Tabel 1. Model katastrofi dalam bentuk fungsi potensial (Arnold 1992)

| No. | Model katastrofi | Fungsi Potensialnya |
|-----|--------------------|--|
| 1. | <i>Fold</i> | $F(x, u, v) = x^3 + ux$ |
| 2. | <i>Cusp</i> | $F(x, u, v) = x^4 + ux^2 + vx$ |
| 3. | <i>Swallowtail</i> | $F(x, u, v, w) = x^5 + ux^3 + vx^2 + wx$ |

Dapat dilihat bahwa *fold* terdiri dari 1 variabel kontrol, *cusp* terdiri dari 2 variabel kontrol, dan *swallowtail* terdiri dari 3 variabel kontrol. Sedangkan semuanya sama-sama memiliki 1 variabel keadaan.

Model Cusp Catastrophe

Model katastrofi yang paling sederhana dan paling sering digunakan untuk memperlihatkan perilaku diskontinu yaitu *Cusp*. Fungsi potensial model *cusp* adalah:

$$F(x;c) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx \quad (2)$$

dengan

x : variabel keadaan

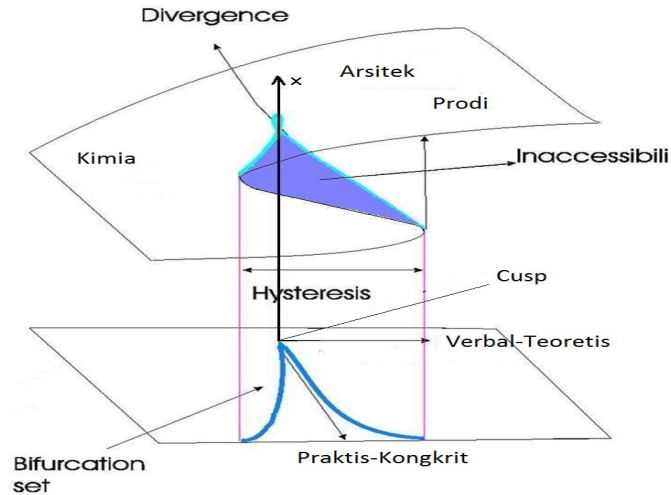
a, b : variabel kontrol

Pandang sebuah permukaan S di ruang yang $f(x, y, z) = 0$ dinyatakan dengan persamaan yang diproyeksikan ke bidang xy . Jika kurva C merupakan proyeksi dari kurva D yang terletak di permukaan S yang terdiri dari titik-titik dimana terjadinya bidang sentuh vertikal maka diberikan persamaan berikut $f_z(x, y, z) = 0$. Jika permukaan S diubah bentuknya (dipelintir) maka titik-titik *cusp* bergerak sepanjang permukaan sesaat sebelum bertemu. Ketika titik-titik ini bertemu atau 'bertabrakan' maka terjadilah 'perubahan bentuk', atau 'perubahan keadaan' yang oleh Thom disebut dengan 'katastrofi'.

Model Kecerdasan dengan Cusp

Dalam penelitian terdahulu, telah digunakan model dasar katastrofi yaitu *Cusp* untuk mempelajari perilaku kecerdasan intelektual, *Intelligence Quotient* (IQ). Di sini IQ dipandang sebagai variabel keadaan (perilaku) sedangkan aspek-aspek dari IQ yaitu Praktis-Kongkrit (PK) dan Verbal-Teoretis (VT) dijadikan sebagai variabel kontrolnya. Penelitian ini memperlihatkan terjadinya sebuah 'lompatan' dari satu level kecerdasan ke level kecerdasan yang lain karena perubahan salah satu aspeknya. Jadi, data yang ada memperlihatkan dipenuhinya model Cusp.

Berikut contoh aplikasi model *cusp* pada kombinasi dua program studi di perguruan tinggi (data dari sebuah PTN di Bandung) yang diasumsikan sebagai dua level kecerdasan yang berbeda. Model ini memperlihatkan dua mahasiswa yang mempunyai aspek PK sama tetapi aspek VT berbeda akan berada pada prodi berbeda. Mahasiswa yang memiliki VT lebih tinggi akan berada pada prodi Arsitektur.



Gambar 1. Geometri cusp untuk perpindahan prodi karena penambahan aspek PK

Model Performansi Kerja dengan *Swallowtail Catastrophe*

Dalam kajian berikutnya akan dikembangkan model untuk performansi kerja yang diduga berkorelasi dengan tiga komponen kecerdasan manusia yaitu IQ, EQ, dan AQ. Walaupun sampai saat ini belum ada penelitian yang menghasilkan data empirik bahwa terdapat korelasi antara IQ dengan EQ. Paul Stoltz (*Adversity Quotient* hal 16) menduga bahwa terdapat hubungan antara ketiga macam kecerdasan yaitu IQ, EQ, dan AQ. Ketiganya diduga memiliki kontribusi dalam meramalkan kesuksesan seseorang. Untuk mengetahui apakah ada korelasi antara ketiganya, perlu dilakukan pengambilan data dengan alat ukur masing-masing kecerdasan kemudian dilakukan analisis korelasi antara IQ-EQ, IQ-AQ, EQ-AQ. Namun karena sampai saat ini belum terdapat sebuah alat ukur yang mengukur ketiga macam kecerdasan ini sekaligus, dapat dimanfaatkan data dari alat ukur yang sudah ada yaitu tes IST, sebuah psikotes untuk usia dewasa. Dapat diteliti item-item pertanyaan dari masing-masing alat ukur.

Tabel 2. Subtes IST (Polhaupessy1993).

| Variabel laten Orde kedua | Variabel laten Orde pertama | Variabel indikator |
|---------------------------|---|-------------------------------------|
| Kecerdasan (η) | Praktis Kongkrit (γ_1) Verbal Teoretis (γ_2) | 1. SE, pembentukan keputusan, u_1 |
| | | 2. WA, penghayatan bahasa, u_2 |
| | | 3. AN, kelincahan berpikir, u_3 |
| | | 4. GE, abstraksi verbal, u_4 |
| | | 5. RA, hitung praktis, u_5 |
| | | 6. ZR, hitung teoretis, u_6 |
| | | 7. FA, kemampuan sintesis, u_7 |
| | | 8. WU, abstraksi ruang, u_8 |
| | | 9. ME, daya ingat, u_9 |

Dari variabel indikator IST dikonstruksi model persamaan struktur untuk variabel laten orde pertama, dalam hal ini PK dan VT. Diperoleh dua persamaan berikut:

$$\begin{cases} \gamma_1 = \rho_{11}AN + \rho_{12}ZR \\ \gamma_2 = \rho_{21}SE + \rho_{22}WA + \rho_{23}GE + \rho_{24}RA + \rho_{25}FA + \rho_{26}WU + \rho_{27}ME \end{cases} \quad (3)$$

Dengan analisis faktor, dari data bisa diestimasi koefisien-koefisien dari persamaan struktur di atas yaitu $\rho_{11}, \dots, \rho_{27}$.

Tinjauan Psikologi

Perhatikan komponen AN, kelincahan berpikir, yang mendukung pada aspek Praktis-Kongkrit. Ini mirip dengan aspek ‘memecahkan masalah’ dan ‘menyesuaikan diri’ pada EQ. Kemudian komponen ‘mengendalikan amarah’ pada EQ mirip dengan komponen ‘kontrol’ pada AQ. Alasan lain adalah dari proses yang terjadi di otak. Bagian otak yang merespon IQ berbeda dengan bagian otak yang merespon EQ. Dari pengamatan pada aktivitas vital sistem syaraf pusat dan organ-organ lain (*neuroscience*) menemukan bahwa EQ merujuk pada fungsi organ amigdala di batang rongga otak. Sementara bagian otak yang berperan pada IQ adalah belahan otak kiri dan kanan. Teori terbaru juga menyatakan aktivasi otak tengah meningkatkan IQ. Satu-satunya cara saat ini untuk mengetahui apakah terdapat korelasi atau tidak antara IQ dengan EQ adalah dengan melakukan pengukuran agar diperoleh data empirik (data terlampir). Studi pendahuluan yang didukung oleh data memperlihatkan ketiga variabel ini, IQ, EQ, dan AQ, merupakan parameter yang saling bebas. Ini dapat dilihat dari hasil olah data pada psikotes 36 sampel. Diperoleh

Tabel 3. Hasil analisa korelasi antar variabel.

| Pasangan variabel | Koefisien Korelasi Pearson r | Taraf signifikansi |
|-------------------|------------------------------|--------------------|
| IQ-EQ | -0,247 < 0,3 | Tidak signifikan |
| IQ-AQ | 0,131 < 0,3 | Tidak signifikan |
| EQ-AQ | 0,279 < 0,3 | Tidak signifikan |

Hasil ini mengarahkan pada pengambilan ketiganya menjadi variabel kontrol dan performansi kerja sebagai variabel keadaannya. Karena sekarang dimiliki tiga variabel kontrol maka model katastrofi yang bersesuaian adalah *Swallowtail*.

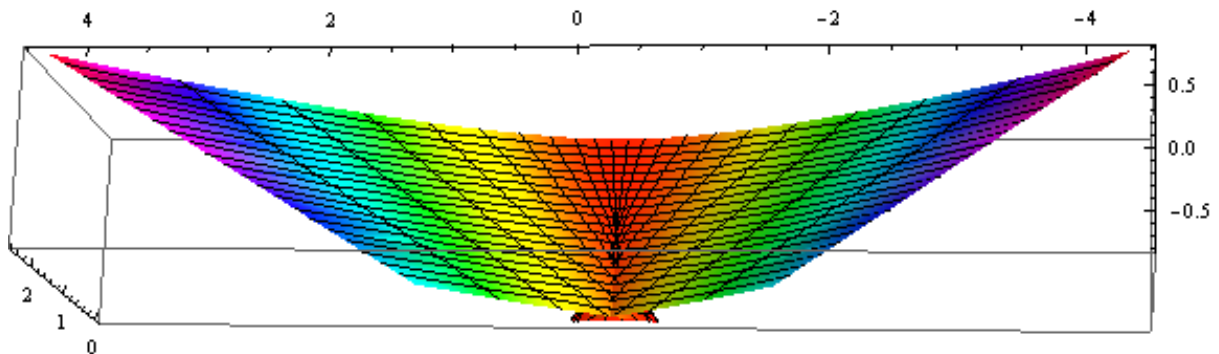
Mari lihat kembali fungsi potensial untuk model katastrofi *Swallowtail*.

$$F(x, u, v, w) = x^5 + cx^3 + bx^2 + ax \quad (4)$$

dengan

x : variabel keadaan, dalam hal ini Performansi Kerja (JP)

a, b, c : variabel kontrol, dalam hal ini IQ, EQ, dan AQ



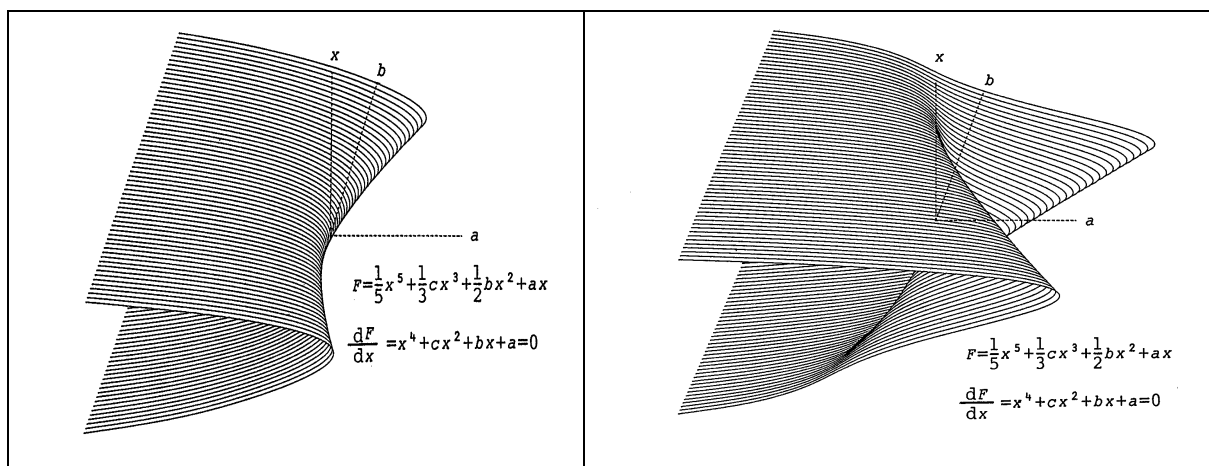
Gambar 2. Geometri Swallowtail dengan software Wolfram Mathematica 7.0.

Dalam seluruh model katastrofi, hanya *Fold* dan *Cusp* yang bisa digambarkan secara tiga dimensi di ruang biasa. Sedangkan *Swallowtail* secara konseptual hanya bisa diproyeksikan. Karena itu manifold *Swallowtail* dinyatakan dalam dua bentuk geometris. Jika variabel kontrol adalah IQ sebagai sumbu a , EQ sebagai sumbu b , dan AQ sebagai sumbu c maka diperoleh *manifold swallowtail* untuk dua kondisi yaitu $c > 0$ dan $c < 0$. Geometri ini diperoleh dengan turunan pertama fungsi potensial yaitu dalam 2 variabel kontrol (IQ dan EQ) dan 1 variabel keadaan (performansi kerja).

AQ dipilih sebagai variabel c , faktor penentu karena merupakan koefisien dari x^3 berarti kontribusinya paling besar. Alasannya yaitu sejumlah orang dengan IQ tinggi serta memiliki aspek kecerdasan emosi yang tinggi pula, namun gagal menunjukkan kemampuannya karena mudah patah semangat dan mudah menyerah. Jadi variabel c bukan menyatakan AQ dalam arti yang telah dijelaskan melainkan sebagai kebalikannya yaitu sikap mudah menyerah.

Nilai c makin kecil artinya semakin mudah untuk menyerah (AQ rendah)

Nilai c makin besar artinya semakin tidak mudah menyerah (AQ tinggi)



Gambar 3. Proyeksi swallowtail untuk $c > 0$ dan $c < 0$ (Murata 1984).

Dengan analisis terhadap model *Fold* dan *Cusp*, masing-masing bisa diketahui 'jump' terjadi untuk nilai a dan b tertentu. Geometri seperti gambar di atas diperoleh dari menentukan turunan kedua (*two-fold degenerate*) fungsi potensial *Swallowtail*. Kemudian substitusi persamaan yang diperoleh ke dalam turunan pertamanya.

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Karena terdiri dari tiga variabel kontrol yang tidak mungkin digambarkan pada ruang dimensi tiga maka analisis model *swallowtail* bisa dilakukan secara parsial yaitu melalui model *Fold* dan *Cusp*. Dengan demikian bisa diketahui 'jump' terjadi untuk nilai a , b , dan c tertentu. Artinya kita bisa mengetahui untuk nilai IQ, EQ, dan AQ berapa terjadinya 'lompatan' pada performansi kerja seseorang.

Saran

Jika nilai-nilai ambang untuk ketiga kecerdasan IQ, EQ, dan AQ diperoleh, diharapkan bisa menjadi masukan untuk perbaikan kurikulum, khususnya perguruan tinggi, agar lebih mengembangkan ketiga kecerdasan ini secara berimbang.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Arnold, V.I. (1992). *Catastrophe Theory*. Germany : Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[2] Cobb, Loren. (2010). *Estimation Theory for The Cusp Catastrophe Model. Revised*

Edition. Proceedings of the American Statistical Association Section on Survey Research Methods pp. 772-776.

- [3] Gilmore, R.(1981). *Catastrophe Theory for Scientists and Engineers*. New York : John Wiley & Sons.
- [4] Goleman, Daniel. (2004). *Emotional Intelligence*. London. Bloomsbury.
- [5] Goleman, Daniel. (2004). *Working with Emotional Intelligence*. London. Bloomsbury.
- [6] Grasman, RPPP, van der Maas, Wagenmakers, Eric-Jan. (2009). *Fitting the Cusp Catastrophe in R: A Cusp Package*. Volume 32, Issue 8. Journal of Statistical Software.
- [7] Polhaupessy, L.F. (1993). *Intelligenz Struktur Test (IST) dari Rudolf Amthauer. Suatu Pengantar*. Lecture notes in Department of Psychology UNPAD.
- [8] Meiza, Asti. (2006). *Sebuah Model Cusp Catastrophe Untuk Kecerdasan. Tesis Magister*. Bandung . ITB.
- [9] Murata, Atsuo; Kume, Yasufumi; Hashimoto, Fumio. (1984). *Geometry of Catastrophe Model*.
- [10] SJ, Guastello; RW Jr, Bond. *A Swallowtail Catastrophe Model for The Emergence of Leadership in Coordination-intensive Groups*.
- [11] Schumacker, Randall E. and Lomax, Richard G. (1996). *A Beginner's Guide to Structural Equation Modeling*. New Jersey : Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- [12] Stoltz, Paul. (2000). *Adversity Quotient : Mengubah Hambatan Menjadi Peluang*. Jakarta. Grasindo.
- [13] van der Maas, H.L.J., Kolstein, R. and van der Plicht. (2003). *Sudden Transitions in Attitudes*. Sociological Methods and Research, 32, 125-152.
- [14] van der Maas, H.L.J., Molenaar, P.C.M. and Wagenmakers. (2004). *Fitting the Cusp Catastrophe Model*.
- [15] <http://users.fmg.uva.nl/hvandermass/.Cuspfitprogram>.

Lampiran

Data IQ, EQ, dan AQ dari 36 sampel alumni sebuah PTN di Bandung.

| No. | IQ | EQ | AQ |
|-----|----|----|----|
| 1 | 19 | 13 | 15 |
| 2 | 17 | 16 | 21 |
| 3 | 21 | 13 | 17 |
| 4 | 22 | 11 | 15 |
| 5 | 19 | 12 | 14 |
| 6 | 19 | 12 | 14 |
| 7 | 15 | 13 | 15 |
| 8 | 23 | 12 | 14 |
| 9 | 16 | 12 | 12 |

| | | | |
|----|----|----|----|
| 10 | 19 | 12 | 16 |
| 11 | 21 | 13 | 14 |
| 12 | 21 | 10 | 15 |
| 13 | 16 | 11 | 13 |
| 14 | 22 | 10 | 13 |
| 15 | 23 | 15 | 18 |
| 16 | 20 | 11 | 15 |
| 17 | 24 | 10 | 14 |
| 18 | 17 | 16 | 12 |
| 19 | 20 | 12 | 11 |
| 20 | 22 | 8 | 18 |
| 21 | 19 | 12 | 15 |
| 22 | 22 | 10 | 18 |
| 23 | 22 | 7 | 17 |
| 24 | 24 | 16 | 17 |
| 25 | 22 | 11 | 12 |
| 26 | 24 | 11 | 16 |
| 27 | 23 | 10 | 16 |
| 28 | 20 | 15 | 20 |
| 29 | 23 | 10 | 13 |
| 30 | 19 | 12 | 14 |
| 31 | 19 | 12 | 17 |
| 32 | 22 | 14 | 20 |
| 33 | 22 | 16 | 15 |
| 34 | 21 | 11 | 13 |
| 35 | 18 | 13 | 18 |
| 36 | 20 | 9 | 12 |

ANALISIS PEUBAH PREDIKTOR YANG MEMUAT KESALAHAN PENGUKURAN DENGAN REGRESI ORTOGONAL

Kismiantini

*Jurusan Pendidikan Matematika, FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta
Email: kismi@uny.ac.id*

Abstrak

Analisis regresi linear sederhana adalah suatu analisis yang digunakan untuk mengetahui hubungan antara satu peubah prediktor dan satu peubah respons. Pada model regresi linear sederhana, peubah prediktor dianggap tetap (tidak memiliki distribusi) sedangkan peubah respons mengikuti distribusi normal. Bila peubah prediktor memuat kesalahan pengukuran sehingga memuat galat yang memiliki distribusi maka model regresi linear sederhana tidak tepat digunakan. Pada makalah ini akan mengkaji alternatif regresi yang mampu mengatasi permasalahan peubah prediktor yang memuat kesalahan pengukuran dengan menggunakan regresi ortogonal.

Kata kunci: peubah prediktor, kesalahan pengukuran, regresi ortogonal

PENDAHULUAN

Analisis regresi adalah suatu analisis yang digunakan untuk mengetahui hubungan antara satu atau lebih peubah prediktor dengan peubah respons. Model regresi linear sederhana adalah model yang paling sederhana untuk menjelaskan hubungan antara satu peubah prediktor (X) dan satu peubah respons (Y). Pada model regresi linear klasik, peubah prediktor diasumsikan diketahui (*fixed*) sehingga diperoleh tanpa adanya galat sedangkan peubah respons diasumsikan berdistribusi normal

Apabila peubah prediktor memuat kesalahan pengukuran (galat) maka model regresi linear sederhana kurang tepat digunakan. Alternatif regresi yang dapat digunakan untuk mengatasi permasalahan ini adalah regresi ortogonal. Pada model regresi ortogonal, baik peubah prediktor maupun peubah respons adalah peubah acak.

PEMBAHASAN

Regresi ortogonal digunakan untuk mengetahui hubungan antara peubah prediktor (X) dan peubah respons (Y) bila pada peubah prediktor tersebut mengandung kesalahan pengukuran (galat). Pada analisis regresi ortogonal, kedua peubah tersebut merupakan peubah kontinu. Regresi ortogonal ini sering digunakan pada data-data yang diperoleh dari hasil pengukuran seperti di suatu laboratorium.

Misalkan seorang peneliti yang bekerja di suatu laboratorium ingin mengetahui apakah suatu teknik baru yang relatif lebih murah untuk pengujian kadar glukose memberikan hasil pengukuran yang sama atau berbeda dengan teknik standar. Dalam hal ini, kadar glukose yang dihasilkan oleh teknik baru (Y) dimungkinkan terjadinya kesalahan pengukuran. Peubah prediktor adalah kadar glukose yang dihasilkan oleh teknik standar (X). Teknik baru ini akan digunakan sebagai pengganti teknik standar apabila menghasilkan pengukuran kadar glukose yang sama dengan teknik standar, sehingga regresi ortogonal lebih cocok digunakan daripada regresi linear sederhana.

Model Regresi Linear Sederhana

Model regresi linear sederhana adalah model regresi yang digunakan untuk mengetahui hubungan antara satu peubah prediktor dan peubah respons, dengan peubah prediktor diasumsikan tetap (*fixed*). Model regresi linear sederhana dinyatakan sebagai berikut:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2) \tag{1}$$

dengan Y_i adalah peubah respons pada pengamatan ke- i , β_0 dan β_1 adalah parameter regresi, X_i adalah peubah prediktor pada pengamatan ke- i , ε_i adalah galat (kesalahan pengukuran) pada pengamatan ke- i .

Estimator β_0 dan β_1 dapat diperoleh dengan metode maksimum likelihood (Bain & Engelhardt, 1992: 508). Berikut adalah fungsi likelihood:

$$L = L(\beta_0, \beta_1) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2\right] \tag{2}$$

Selanjutnya dilogaritmanaturalkan sehingga diperoleh fungsi log-likelihood sebagai berikut

$$\ln L = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2 \tag{3}$$

Lalu diturunkan terhadap β_0 dan β_1 dan disamadengankan nol maka diperoleh persamaan maksimum likelihood berikut:

$$n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n Y_i \Rightarrow \hat{\beta}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} - \hat{\beta}_1 \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} \tag{4}$$

$$\hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n X_i + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n X_i^2 = \sum_{i=1}^n X_i Y_i \Rightarrow \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - \frac{\sum_{i=1}^n X_i \sum_{i=1}^n Y_i}{n}}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2}{n}} = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} \tag{5}$$

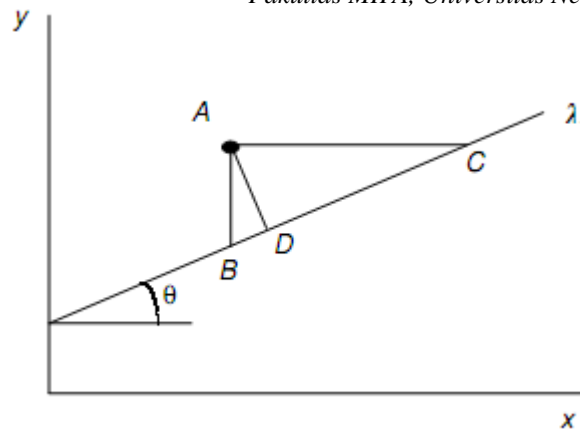
Estimasi Parameter Regresi dengan *Orthogonal Least Squares*

Estimator bagi β_0 dan β_1 pada model regresi linear sederhana (1) dapat diperoleh dengan metode *orthogonal least squares* (Dessanaik & Wang, 2003: 22-23) yaitu meminimumkan jarak antara pengamatan dengan garis dugaan. Dari Gambar 1 berikut diperoleh bahwa

$$\beta_1 = \text{tg}(\theta) \tag{6}$$

dan jarak kuadrat antara pengamatan $A(X_i, Y_i)$ dan garis dugaan adalah

$$AD^2 = [\cos(\theta)(Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)]^2 = \frac{(Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2}{1 + \beta_1^2} \tag{7}$$



Gambar 1. Ilustrasi dari estimasi parameter dengan metode *orthogonal least squares*

Selanjutnya digunakan metode *orthogonal least squares* untuk meminimumkan $L = \sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2}{1 + \beta_1^2}$, lalu diturunkan secara parsial terhadap β_0 dan β_1 turunan tersebut dan disamadengkan nol yaitu

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_0} = \sum_{i=1}^n \frac{-2(Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)}{1 + \beta_1^2} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_1} = \sum_{i=1}^n \frac{-2(1 + \beta_1^2)(Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)X_i - 2\beta_1(Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2}{(1 + \beta_1^2)^2} = 0 \quad (9)$$

Dari persamaan (4) diperoleh

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} \quad (10)$$

dengan \bar{X} menyatakan rata-rata sampel X dan \bar{Y} adalah rata-rata sampel Y . Selanjutnya dari persamaan (9) dan (10) diperoleh

$$\hat{\beta}_1^2 S_{XY} - \hat{\beta}_1 (S_{YY}^2 - S_{XX}^2) - S_{XY} = 0 \quad (11)$$

dengan S_{XX}^2 dan S_{YY}^2 berturut-turut adalah variansi sampel dari X dan Y , sedangkan S_{XY} adalah kovariansi sampel X dan Y . Sehingga solusi dari persamaan (11) untuk $\hat{\beta}_1$ adalah

$$\hat{\beta}_1 = \frac{(S_{YY}^2 - S_{XX}^2) \pm \sqrt{(S_{YY}^2 - S_{XX}^2)^2 - 4S_{XY}^2}}{2S_{XY}} \quad (12)$$

Namun demikian pembilang pada persamaan (12) harus positif sehingga estimator β_1 adalah

$$\hat{\beta}_1 = \frac{(S_{YY}^2 - S_{XX}^2) + \sqrt{(S_{YY}^2 - S_{XX}^2)^2 - 4S_{XY}^2}}{2S_{XY}} \quad (13)$$

dengan

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}, \bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}, S_{XX} = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, S_{YY} = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2; S_{XY} = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}).$$

Model Regresi Ortogonal

Misal X dan Y memuat komponen galat δ dan ε , dengan komponen galat tersebut berasal dari kesalahan pengukuran, sehingga model regresi ortogonal (Leng *et al.*, 2007: 1-2) adalah

$$\begin{aligned} X &= \xi + \delta, \quad \delta \sim N(0, \sigma_\delta^2) \\ Y &= \eta + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{14}$$

$\eta = \beta_0 + \beta_1 \xi$ dengan ξ , δ dan ε saling bebas.

dan diasumsikan bahwa X dan Y mengikuti distribusi normal bivariat,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} \mu \\ \beta_0 + \beta_1 \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tau^2 + \sigma_\delta^2 & \beta_1 \tau^2 \\ \beta_1 \tau^2 & \beta_1^2 \tau^2 + \sigma_\varepsilon^2 \end{pmatrix} \right) \tag{15}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} E(X) &= E(\xi) + E(\delta) = \mu \\ E(Y) &= E(\eta) + E(\varepsilon) = \beta_0 + \beta_1 \mu \\ Var(X) &= Var(\xi) + Var(\delta) = \tau^2 + \sigma_\delta^2 \\ Var(Y) &= Var(\eta) + Var(\varepsilon) = Var(\beta_1 \xi) + Var(\varepsilon) = \beta_1^2 \tau^2 + \sigma_\varepsilon^2 \\ Cov(X, Y) &= Cov(\xi + \delta, \beta_0 + \beta_1 \xi + \varepsilon) = \beta_1 \tau^2 \end{aligned} \tag{16}$$

Selanjutnya estimator β_1 dapat diperoleh dengan metode maksimum likelihood. Namun demikian tergantung oleh rasio dua variansi galat yaitu $\lambda = \sigma_\varepsilon^2 / \sigma_\delta^2$. Sehingga estimator maksimum likelihood dari β_1 (Leng *et al.*, 2007: 1-2) adalah

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{YY} - \lambda S_{XX} + \sqrt{(S_{YY} - \lambda S_{XX})^2 + 4\lambda S_{XY}^2}}{2S_{XY}} \tag{17}$$

Penurunan selengkapnya dapat dilihat di Fuller (1987: 13-16). Bila $\lambda = 1$, maka persamaan (17) sama dengan persamaan (13). Apabila σ_ε^2 dan σ_δ^2 tidak diketahui maka dapat diestimasi dengan ragam sampel dari Y dan X (Carroll & Ruppert, 1994: 7).

Ilustrasi Regresi Ortogonal

Sebuah perusahaan peralatan medis ingin menentukan apakah alat pemonitor tekanan darah yang baru mereka ciptakan setara dengan alat pemonitor tekanan darah yang telah beredar di pasaran. Dari sampel acak 60 orang yang diukur tekanan darah sistolik dengan menggunakan dua alat pemonitor tersebut. Peubah respons adalah tekanan darah sistolik (dalam mmHg) yang diperoleh dari alat pemonitor baru, sedangkan peubah prediktor adalah tekanan darah sistolik yang diperoleh dari alat pemonitor yang beredar di pasaran. Berdasarkan studi yang dilakukan sebelumnya, perusahaan mengetahui bahwa rasio variansi galat adalah 0,90. Berikut datanya:

Tabel 1. Data tekanan darah sistolik

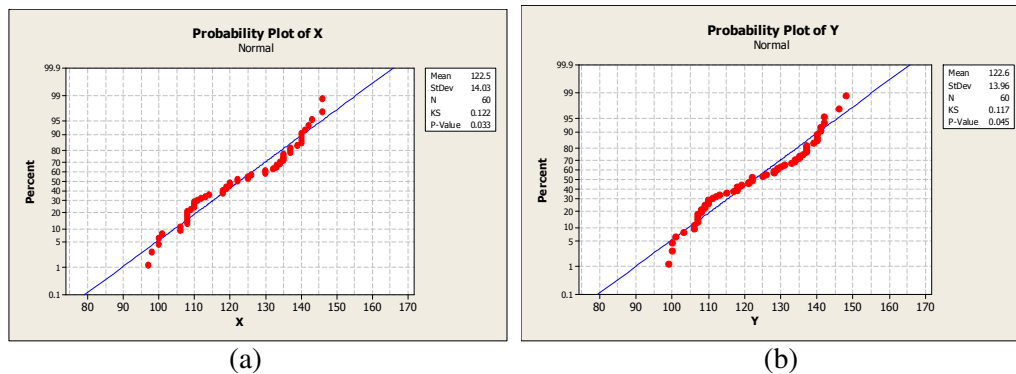
| No | Baru | Pasaran | No | Baru | Pasaran | No | Baru | Pasaran |
|----|------|---------|----|------|---------|----|------|---------|
| 1 | 100 | 100 | 21 | 107 | 108 | 41 | 99 | 97 |
| 2 | 122 | 120 | 22 | 113 | 113 | 42 | 130 | 130 |
| 3 | 129 | 132 | 23 | 128 | 130 | 43 | 134 | 134 |
| 4 | 136 | 139 | 24 | 142 | 142 | 44 | 142 | 143 |
| 5 | 110 | 110 | 25 | 109 | 109 | 45 | 115 | 114 |
| 6 | 111 | 110 | 26 | 103 | 100 | 46 | 107 | 108 |

| | | | | | | | | |
|----|-----|-----|----|-----|-----|----|-----|-----|
| 7 | 137 | 137 | 27 | 122 | 122 | 47 | 119 | 119 |
| 8 | 134 | 133 | 28 | 133 | 134 | 48 | 135 | 135 |
| 9 | 141 | 140 | 29 | 140 | 140 | 49 | 141 | 141 |
| 10 | 112 | 112 | 30 | 107 | 111 | 50 | 118 | 118 |
| 11 | 110 | 110 | 31 | 106 | 108 | 51 | 107 | 106 |
| 12 | 121 | 120 | 32 | 128 | 130 | 52 | 122 | 122 |
| 13 | 131 | 133 | 33 | 125 | 125 | 53 | 137 | 137 |
| 14 | 140 | 140 | 34 | 140 | 140 | 54 | 146 | 146 |
| 15 | 118 | 119 | 35 | 118 | 118 | 55 | 100 | 98 |
| 16 | 108 | 108 | 36 | 108 | 108 | 56 | 106 | 106 |
| 17 | 129 | 126 | 37 | 121 | 118 | 57 | 126 | 125 |
| 18 | 137 | 135 | 38 | 117 | 120 | 58 | 137 | 137 |
| 19 | 135 | 135 | 39 | 139 | 135 | 59 | 148 | 146 |
| 20 | 109 | 108 | 40 | 101 | 101 | 60 | 110 | 110 |

Data diambil dari worksheet Minitab 16 (BLOODPRESSURE.MTW)

Analisis data menggunakan Minitab 16 yang digunakan untuk

1. menyelidiki apakah peubah prediktor (X) dan peubah respons (Y) masing-masing berdistribusi normal atau tidak dengan uji kolmogorov smirnov
2. menyelidiki pemenuhan asumsi-asumsi pada regresi ortogonal
3. mengestimasi parameter regresi dan inferensi parameter pada model regresi ortogonal
4. membuat plot X dan Y beserta garis regresi



Gambar 2. Plot peluang normal

Berdasarkan Gambar 2 dilakukan pengujian normalitas dengan menggunakan uji Kolmogorov-Smirnov, berikut langkah pengujianya.

Hipotesis

H_0 : Data berdistribusi normal

H_1 : Data tidak berdistribusi normal

Taraf nyata : $\alpha = 0,01$

Statistik Uji : $D_n = \sup_x |F(x_n) - F(x)|$

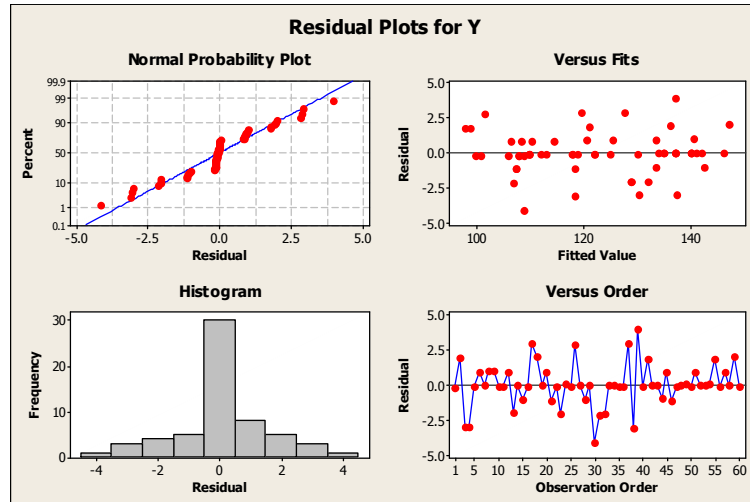
Kriteria keputusan: H_0 ditolak jika p-value $> 0,01$

Hitungan:

| | | |
|--------------------|----------------|----------------|
| Peubah | X | Y |
| Kolmogorov-Smirnov | 0,122 | 0,117 |
| p -value | 0,033 | 0,045 |
| Kesimpulan | H_0 diterima | H_0 diterima |

Kesimpulan:

Karena p -value untuk masing-masing peubah kurang dari 0,05 maka dapat disimpulkan bahwa kedua peubah mengikuti distribusi normal.



Gambar 3. Plot residual bagi peubah respons

Dari Gambar 3, asumsi galat berdistribusi normal terpenuhi yang ditunjukkan oleh titik-titik residual pada gambar *normal probability plot* mengikuti garis diagonal, asumsi galat memiliki ragam yang konstan terpenuhi yang ditunjukkan dengan oleh titik-titik residual pada gambar *versus fits* yang tidak membentuk pola tertentu, dan asumsi galat saling bebas juga terpenuhi yang ditunjukkan oleh titik-titik sisaan pada gambar *versus order* yang acak. Semua asumsi dalam model regresi ortogonal terpenuhi maka dapat dilakukan inferensi terhadap parameter regresinya.

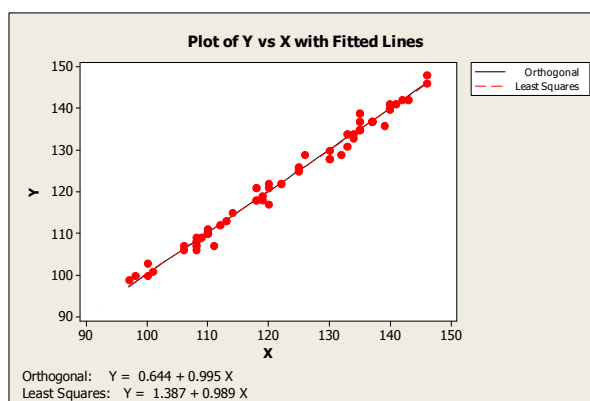
Tabel 2. Ringkasan output Minitab 16

| Model | Koefisien | Standard Error | Z | p-value | Selang Kepercayaan 99% bagi β_i | s |
|---|--------------------------------|--|-----------------|----------------|---------------------------------------|-------|
| Regresi Ortogonal $\lambda = 0,90$ | $b_0 = 0,644$ | $s\{b_0\} = 1,745$ | 0,369 | 0,712 | (-3,850; 5,138) | 1,131 |
| | $b_1 = 0,995$ | $s\{b_1\} = 0,014$ | 70,346 | 0,000 | (0,959; 1,032) | |
| Variansi Galat untuk $Y = \hat{\sigma}_\epsilon^2 = 1,079$; Variansi Galat untuk $X = \hat{\sigma}_\delta^2 = 1,198$ | | | | | | |
| Regresi Linear Sederhana | $b_0 = 1,387$ $b_1 = 0,989$ | $s\{b_0\} = 1,734$ $s\{b_1\} = 0,014$ | 0,800 70,350 | 0,427 0,000 | (-4,633; 4,700) (0,961; 1,037) | 1,516 |

Berdasarkan Tabel 2, pada model regresi ortogonal diperoleh

1. persamaan regresi ortogonal: $\hat{Y} = 0,644 + 0,995X$
2. nilai intersep mendekati 0 dan *slope* mendekati 1 sehingga kedua alat pemonitor memberikan hasil pengukuran tekanan darah sistolik yang sama.
3. 0 termuat dalam selang kepercayaan bagi intersep dan 1 termuat dalam selang kepercayaan bagi *slope*, sehingga tidak ada bukti yang menyatakan bahwa kedua alat pemonitor memberikan hasil pengukuran yang berbeda.
4. Bahwa nilai s pada model regresi ortogonal lebih kecil dari model regresi linear sederhana sehingga model regresi ortogonal merupakan model regresi yang lebih baik daripada model regresi linear sederhana

Pada model regresi linear sederhana diperoleh kesimpulan yang sama dengan model regresi linear sederhana, namun model regresi linear sederhana tidak tepat digunakan karena peubah prediktor memuat kesalahan pengukuran (*measurement error*).



Gambar 4. Plot data tekanan darah sistolik

Dari Gambar 4 dapat dilihat bahwa persamaan regresi ortogonal cocok untuk data tersebut. Titik-titik cukup dekat pada garis regresi ortogonal. Garis regresi *least square* dekat dengan garis regresi ortogonal pada data ini.

KESIMPULAN

Model regresi ortogonal lebih tepat digunakan apabila peubah prediktor memuat kesalahan pengukuran. Apabila rasio dua variansi galat adalah 1 maka nilai $\hat{\beta}_1$ pada model regresi ortogonal akan samadengan nilai $\hat{\beta}_1$ pada model regresi linear sederhana.

DAFTAR PUSTAKA

- Bain, L.J. & Engelhardt, M. 1992. *Introduction to probability and mathematical statistics*. 2nd edition. California: Duxbury press.
- Carrol, R.J. & Ruppert, D. 1994. The use and misuse of orthogonal regression estimation in linear errors-in-variables models. www.stat.tamu.edu/ftp/pub/rjcarroll/orthogonal.ps [Diakses tanggal 10 April 2011].
- Dissanaike, G. & Wang, S. 2003. A critical examination of orthogonal regression. *Social Science Research Network*-id407560. http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=407560 [Diakses tanggal 1 April 2011]
- Fuller, W.A. 1987. *Measurement error models*. New York: John Wiley & Sons.
- Leng, L., Zhang, T., Keinman, L. & Zhu, W. 2007. Ordinary least square regression, orthogonal regression, geometric mean regression and their applications in aerosol science. *Journal of Physics* 78(2007): 1-5.

KARAKTERISTIK PERSAMAAN ALJABAR RICCATI DAN PENERAPANNYA PADA MASALAH KENDALI

Muhammad Wakhid Musthofa

Program Studi Matematika Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta
Email: mwakhid_m@yahoo.com

Abstrak

Makalah ini membahas karakteristik persamaan aljabar Riccati yang berperan penting dalam desain sintesis berbagai masalah kendali. Pembahasan karakteristik persamaan ini difokuskan pada pembentukan solusi dari persamaan aljabar Riccati yang menstabilkan sistem. Selanjutnya disajikan penerapan persamaan aljabar Riccati pada masalah desain pengontrol robust H_∞ dan H_2 serta desain kontrol optimal tipe feedback pada masalah linear quadratic regulator.

Kata kunci: Persamaan aljabar Riccati, kontrol robust, kontrol optimal.

PENDAHULUAN

Permasalahan yang sering muncul dalam teori kontrol adalah masalah analisis dan masalah sintesis. Masalah analisis dapat dipandang sebagai pekerjaan memeriksa sebuah pengontrol yang telah diperoleh apakah sinyal-sinyal terkontrolnya (*tracking error*, sinyal pengontrol) memenuhi sifat-sifat yang diinginkan terhadap semua noise, gangguan dan ketidakpastian model yang diperkenankan. Sedangkan masalah sintesis memfokuskan pada pendesainan sebuah pengontrol dari suatu sistem dinamik sedemikian sehingga sinyal-sinyal terkontrolnya memenuhi sifat-sifat yang diinginkan terhadap semua noise, gangguan dan ketidakpastian model yang diperkenankan. Salah satu persamaan yang berperan penting dalam masalah sintesis adalah persamaan aljabar Riccati.

Persamaan aljabar Riccati ialah persamaan matriks dalam bentuk

$$A^*X + XA + XRX + Q = 0 \quad (1)$$

dengan matriks $Q_{n \times n}$, $R_{n \times n}$ simetris yang berelasi dengan matriks Hamiltonian berukuran $2n \times 2n$

$$H := \begin{bmatrix} A & R \\ -Q & -A^* \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Matriks Hamiltonian di atas sangat bermanfaat untuk menentukan solusi yang menstabilkan sistem yang berkorespondensi dengan persamaan (1).

PERSAMAAN ALJABAR RICCATI

Solusi Persamaan Aljabar Riccati yang Menstabilkan Sistem

Untuk menentukan solusi persamaan aljabar Riccati yang menstabilkan sistem, diasumsikan matriks Hamiltonian H tidak punya nilai eigen pada sumbu imajiner. Dikarenakan spektrum dari matriks H mempunyai sifat simetris terhadap sumbu imajiner, akibatnya $H = -H^*$ dan λ sebagai nilai eigen dari H mempunyai sifat λ dan $-\bar{\lambda}$ adalah nilai eigen dari H . Dengan demikian matriks H akan mempunyai n nilai eigen di $\text{Re}(s) < 0$ dan n nilai eigen di $\text{Re}(s) > 0$. Didefinisikan $X_-(H) = \text{span} \{v_i ; i = 1, 2, \dots, n\}$ merupakan subruang invarian berdimensi n

yang berhubungan dengan nilai-nilai eigen di $\text{Re}(s) < 0$ dengan v_i adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_i . Susun vektor-vektor $\{v_i ; i = 1, 2, \dots, n\}$ yang merupakan basis dari $X_-(H)$ menjadi matriks

$$X_-(H) = \text{Im} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

dengan $X_1, X_2 \in C^{n \times n}$. Jika X_1 nonsingular atau ekuivalen dengan jika subruang

$$X_-(H), \quad \text{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (4)$$

saling komplementer, maka dapat dibentuk $X = X_2 X_1^{-1}$ sebagai solusi dari persamaan (1). Dengan demikian X ditentukan secara tunggal oleh H atau dapat ditulis

$$H \mapsto X,$$

atau

$$\text{Ric} : \text{dom}(\text{Ric}) \subseteq \mathbb{R}^{2n \times 2n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (5)$$

Fungsi dalam persamaan (5) di atas disebut fungsi Riccati dan dinotasikan dengan Ric. Domain dari fungsi Riccati dinotasikan dengan $\text{dom}(\text{Ric})$ dipilih beranggotakan semua matriks Hamiltonian yang mempunyai sifat tidak mempunyai nilai eigen pada sumbu imajiner dan dua subruang dalam persamaan (4) saling komplementer. Matriks X yang dihasilkan dari pemetaan fungsi Riccati ($X = \text{Ric}(H)$) disebut solusi yang menstabilkan sistem.

Berdasarkan konstruksi di atas, matriks X sebagai solusi yang menstabilkan sistem dapat diperoleh dengan algoritma berikut :

1. Himpun semua nilai eigen dari H yang memenuhi $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ beserta dengan $\{v_i\}$, $i = 1, 2, \dots, k \leq n$ sebagai vektor eigen dari λ_i . Jika hanya terdapat $k < n$ vektor eigen yang bebas linear akibat adanya nilai eigen yang berulang, maka $n - k$ vektor basis yang lain dikonstruksikan dari vektor eigen tergeneralisasi.
2. Himpunan $\{v_i ; i = 1, 2, \dots, n\}$ akan membentuk subruang $X_-(H)$. Susun subruang tersebut dalam bentuk $X_-(H) = \text{Im} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$.
3. Bentuk $X = X_2 X_1^{-1}$ sebagai solusi persamaan aljabar Riccati yang menstabilkan sistem.

Sifat - Sifat Persamaan Aljabar Riccati dan Solusinya

Berikut ini dipaparkan beberapa teorema yang membicarakan tentang sifat-sifat dari persamaan aljabar Riccati dan matriks $X = \text{Ric}(H)$ sebagai solusi dari persamaan tersebut. Teorema berikut mengkarakterisasi matriks X sebagai hasil pemetaan jika matriks H diambil dari $\text{dom}(\text{Ric})$.

Teorema 1

Diberikan persamaan aljabar Riccati (1) dan matriks Hamiltonian H yang bersesuaian. Jika $H \in \text{dom}(\text{Ric})$ dan $X = \text{Ric}(H)$, maka

1. X real simetris,
2. X memenuhi persamaan aljabar Riccati (1),
3. $A + RX$ stabil.

Bukti:

1. Ambil $X_1, X_2 \in C^{n \times n}$ dengan $X_-(H) = \text{Im} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$, maka terdapat matriks $H_- \in R^{n \times n}$ sedemikian sehingga

$$H \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} H_- \quad (6)$$

dengan H_- adalah matriks representasi dari pemetaan $Ric(H_-)$ dengan domain $X_-(H)$.

Kalikan persamaan (6) dengan $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}^* J$ dari kiri, dan dengan mengingat JH simetris, diperoleh persamaan Lyapunov

$$(-X_1^* X_2 + X_2^* X_1) H_- + H_-^* (-X_1^* X_2 + X_2^* X_1) = 0. \quad (7)$$

Karena H_- stabil, maka solusi dari persamaan di atas adalah

$$-X_1^* X_2 + X_2^* X_1 = 0.$$

Sehingga $X_1^* X_2 = X_2^* X_1$ atau $X_1^* X_2$ Hermit, akibatnya $X = X_2 X_1^{-1} = (X_1^{-1})^* X_1^* X_2 X_1^{-1}$ juga Hermit. Karena X_1, X_2 selalu dapat dipilih real dan X tertentu dengan tunggal maka X real simetris.

2. Kalikan persamaan (6) dengan X_1^{-1} dari kiri dan dengan $\begin{bmatrix} X & -I \end{bmatrix}$ dari kanan, diperoleh

$$\begin{bmatrix} X & -I \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} I \\ H \end{bmatrix} = 0 \text{ yang merupakan persamaan Riccati.}$$

3. Kalikan persamaan $H \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} X_1 H_- X_1^{-1}$ dengan $\begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix}$ dari kiri, diperoleh

$$A + RX = X_1 H_- X_1^{-1}. \text{ Karena } H_- \text{ stabil maka } A + RX \text{ juga stabil.}$$

Selanjutnya teorema berikut ini memberikan syarat perlu dan syarat cukup eksistensi penyelesaian yang stabil dari persamaan aljabar Riccati (1) dengan batasan yang diberikan pada matriks R .

Teorema 2

Misal H tidak memiliki nilai eigen imajiner dan $R \geq 0$ atau $R \leq 0$. Maka $H \in \text{dom}(Ric)$ jika dan hanya jika (A, R) dapat distabilkan.

Bukti:

(\Rightarrow) Sistem (A, R) dikatakan dapat distabilkan jika terdapat matriks X sedemikian sehingga sistem $(A+RX)$ stabil. Karena $H \in \text{dom}(Ric)$ maka $X = Ric(H)$ adalah penyelesaian yang menstabilkan sistem. Akibatnya sistem $(A + RX)$ stabil asimtotik.

(\Leftarrow) Akan ditunjukkan $H \in \text{dom}(Ric)$ yakni $X_-(H)$ dan $\text{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$ saling komplementer. Hal ini ekuivalen dengan menunjukkan X_1 nonsingular ($\text{Ker } X_1 = 0$).

Klaim $\text{Ker } X_1 = 0$ adalah H_- invarian. Andaikan X_1 singular ($\text{Ker } X_1 \neq 0$), maka untuk $H_-|_{\text{ker } X_1}$ (pemetaan Ric dengan $\text{dom}(Ric) = \text{Ker } X_1$ petanya ialah $Ric(H_-)$) mempunyai λ

dan X sedemikian sehingga

$$H_- x = \lambda x \tag{8}$$

dengan $\text{Re } \lambda < 0, \quad 0 \neq x \in \text{Ker } X_1$.

Persamaan $H \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} H_-$ akan menghasilkan $X_2 x = 0$, sehingga diperoleh $X_1 x = 0$ dan $X_2 x = 0$ yang berakibat $x = 0$. Hal ini kontradiksi dengan persamaan (8). Dengan demikian ($\text{Ker } X_1 = 0$). Jadi, X_1 nonsingular.

Teorema 3

Misal (A, B) terstabilkan dan (C, A) terdeteksi, maka persamaan Riccati

$$A^* X + XA - XBB^* X + C^* C = 0 \tag{1}$$

memiliki solusi semidefinit positif tunggal. Lebih lanjut, solusi tersebut menstabilkan sistem.

Bukti :

Berdasarkan teorema 2 telah dibuktikan bahwa jika (A, B) dapat distabilkan, maka $H \in \text{dom}(\text{Ric})$, akibatnya $X = \text{Ric}(H) \geq 0$. Ini menunjukkan persamaan aljabar Riccati (1) memiliki solusi semidefinit positif tunggal X . Selanjutnya, kita akan tunjukkan $X \geq 0$ menstabilkan sistem.

Asumsikan $X \geq 0$ memenuhi persamaan aljabar Riccati tapi tidak menstabilkan sistem. Persamaan Riccati yang dimaksud dapat ditulis sebagai

$$(A - BB^* X)^* X + X(A - BB^* X) + XBB^* X + C^* C = 0. \tag{9}$$

Misal λ nilai eigen tak stabil dari matriks $A - BB^* X$ dan x vektor eigen yang bersesuaian yakni

$$(A - BB^* X)x = \lambda x.$$

Kalikan persamaan (9) dengan x^* di sisi kiri dan x di sisi kanan, diperoleh

$$(\bar{\lambda} + \lambda)x^* Xx + x^* (XBB^* X + C^* C)x = 0. \tag{10}$$

Karena $\text{Re}(\lambda) \geq 0$ dan $X \geq 0$, maka diperoleh $B^* Xx = 0$ dan $Cx = 0$. Sehingga diperoleh $Ax = \lambda x, \quad Cx = 0$, yang berarti (C, A) tidak terdeteksi. Hal ini kontradiksi dengan yang diketahui, sehingga haruslah $\text{Re}(\lambda) < 0$ artinya $X \geq 0$ adalah solusi yang menstabilkan.

APLIKASI PERSAMAAN ALJABAR RICCATI

Aplikasi Persamaan Aljabar Riccati pada Desain Pengontrol Robust H_∞

Bagian ini akan memaparkan peranan persamaan aljabar Riccati dalam mendesain pengontrol robust H_∞ pada suatu sistem yang mempunyai fungsi transfer

$$G = \left[\begin{array}{c|cc} -1 & [1 \ 0] & 1 \\ \hline \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & 0 & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \hline 1 & [0 \ 1] & 0 \end{array} \right]. \tag{11}$$

Tanpa mengurangi keumuman desain, diambil $\gamma = 1$, dan diasumsikan sistem di atas memenuhi asumsi-asumsi berikut :

1. (A, B_1) terkendali dan (C_1, A) terobservasi,

2. (A, B_2) dapat distabilkan, dan (C_2, A) dapat dideteksi,

3. $D_{12}^* [C_1 \ D_{12}] = [0 \ I],$

4. $\begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{21}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}.$

Selanjutnya dibentuk matriks Hamiltonian

$$H_\infty = \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2} B_1 B_1^* - B_2 B_2^* \\ -C_1^* C_1 & -A^* \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad J_\infty = \begin{bmatrix} A^* & \gamma^{-2} C_1^* C_1 - C_2^* C_2 \\ -B_1 B_1^* & -A \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen dari H_∞ adalah -1 dengan vektor eigen $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan 1 dengan vektor eigen $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Maka,

$X_\infty(H) = \text{Im} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sehingga didapat $X_\infty = X_2 X_1^{-1} = \frac{1}{2}$, dengan X_∞ adalah solusi dari persamaan aljabar Riccati

$$A^* X_\infty + X_\infty A + X_\infty (B_1 B_1^* - B_2 B_2^*) X_\infty - C_1^* C_1 = 0. \tag{12}$$

Dengan cara yang sama didapat $Y_\infty = \frac{1}{2}$, dimana Y_∞ adalah solusi dari persamaan aljabar Riccati

$$A Y_\infty + Y_\infty A + Y_\infty (C_1^* C_1 - C_2^* C_2) Y_\infty - B_1 B_1^* = 0. \tag{13}$$

Sehingga $H_\infty, J_\infty, \text{ dan } (X_\infty, Y_\infty)$ memenuhi

(i) $H_\infty \in \text{dom}(\text{Ric})$ dan $X_\infty = \text{Ric}(H_\infty) = \frac{1}{2} > 0,$

(ii) $J_\infty \in \text{dom}(\text{Ric})$ dan $Y_\infty = \text{Ric}(J_\infty) = \frac{1}{2} > 0,$

(iii) $\rho(X_\infty Y_\infty) = \frac{1}{4} < \gamma^2.$

Maka pengontrol robust dari sistem di atas adalah

$$K_{sub}(s) = \left| \begin{array}{c|c} \hat{A}_\infty & -Z_\infty L_\infty \\ \hline F_\infty & 0 \end{array} \right|$$

dengan $F_\infty = -B_2^* X_\infty = -\frac{1}{2}, \quad L_\infty = -Y_\infty C_2^* = -\frac{1}{2}, \quad Z_\infty = (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1} = \frac{4}{3},$

dan $\hat{A}_\infty = A + \gamma^{-2} B_1 B_1^* X_\infty + B_2 F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2 = -\frac{5}{3}.$

Sehingga didapat

$$K_{sub}(s) = \left| \begin{array}{c|c} \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right| = -\frac{1}{3s+5}. \tag{14}$$

Aplikasi Persamaan Aljabar Riccati pada Desain Pengontrol Robust H_2

Berikut akan disajikan peranan persamaan aljabar Riccati dalam mendesain pengontrol robust H_2 pada suatu sistem yang mempunyai fungsi transfer

$$G = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & [1 & 0] & 1 \\ \hline \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & & 0 & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \hline 1 & [0 & 1] & 0 \end{array} \right]. \quad (15)$$

Tanpa mengurangi keumuman desain, diambil $\gamma=1$, dan diasumsikan sistem di atas memenuhi asumsi-asumsi berikut :

- (i) (A, B_2) dapat distabilkan, dan (C_2, A) dapat dideteksi,
- (ii) $R_1 = D_{12}^* D_{12} = 1 > 0$ dan $R_2 = D_{21}^* D_{21} = 1 > 0$,
- (iii) $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ mempunyai rank kolom penuh untuk semua ω ,
- (iv) $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ mempunyai rank baris penuh untuk semua ω .

Selanjutnya dibentuk matriks Hamiltonian

$$H_2 = \begin{bmatrix} A - B_2 R_1^{-1} D_{12}^* C_1 & -B_2 R_1^{-1} B_2^* \\ -C_1^* (I - D_{12} R_1^{-1} D_{12}^*) C_1 & -(A - B_2 R_1^{-1} D_{12}^* C_1)^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} (A - B_1 R_1^{-1} D_{21}^* C_2)^* & -C_2 R_2^{-1} C_2^* \\ -B_1^* (I - D_{21} R_1^{-1} D_{21}^*) B_1 & -(A - B_1 R_2^{-1} D_{21}^* C_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Didapat $X_{21} = -0,9732$ $X_{22} = -0,2298$, $X_2 = X_{22} X_{21}^{-1} = 0,2361$, dengan X_2 adalah penyelesaian stabil dari persamaan aljabar Riccati

$$(A - B_2 R_1^{-1} D_{12}^* C_1)^* X_2 + X_2 A - B_2 R_1^{-1} D_{12}^* C_1 - X_2 B_2 R_1^{-1} B_2^* X_2 - C_1^* (I - D_{12} R_1^{-1} D_{12}^*) C_1 = 0$$

dan $Y_{21} = -0,9239$ $Y_{22} = -0,3827$, $Y_2 = Y_{22} Y_{21}^{-1} = 0,4142$, dengan Y_2 adalah penyelesaian stabil dari persamaan aljabar Riccati

$$(A - B_1 R_2^{-1} D_{21}^* C_2) Y_2 + Y_2 (A - B_1 R_1^{-1} D_{21}^* C_2)^* - Y_2 C_2 R_2^{-1} C_2^* Y_2 - B_1^* (I - D_{21} R_1^{-1} D_{21}^*) B_1 = 0.$$

Maka, $F_2 = -R_1^{-1} (B_2^* X_2 + D_{12} C_1) = -1,2361$, $L_2 = -(Y_2 C_2^* + B_1 D_{21}^*) R_2^{-1} = -0,4142$,

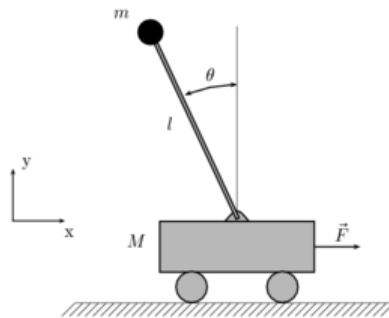
dan $\hat{A}_2 = A + B_2 F_2 + L_2 C_2 = -2,6503$.

Sehingga diperoleh pengontrol sub optimum H_2

$$K_{sub}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_2 & -L_2 \\ \hline F_2 & 0 \end{array} \right] = \frac{-0,5120}{s + 2,6503}. \quad (16)$$

Aplikasi Persamaan Aljabar Riccati pada LQR

Pada bagian ini akan didesain pengontrol tipe *feedback* pada masalah *linear quadratic regulator* (LQR) untuk menstabilkan posisi pendulum sehingga pendulum tetap dalam posisi terbalik dengan cara menggerakkan kereta dari satu posisi ke posisi yang lain sehingga state dari sistem tetap berada di sekitar titik equilibrium 0 (titik asal).



Gambar 1. sistem *inverted pendulum*

Model matematika dari sistem pendulum terbalik terlinearisasi disajikan dengan sistem persamaan

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\epsilon}{1-\epsilon} & \frac{\beta_2}{1-\epsilon} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\epsilon} & -\frac{\beta_2}{1-\epsilon} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \theta \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{\beta_1}{1-\epsilon} u(t). \quad (17)$$

Dalam keadaan *steady state*, akan dicari kontrol $u(t)$ yang meminimalkan indeks performansi

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x(t)^T Q x(t) + r u^2(t)] dt \quad (18)$$

dengan $Q > 0$ dan $r > 0$ merupakan bobot untuk x dan u . Input kontrol $u(t)$ dihitung dengan rumus

$$u(t) = -\frac{1}{r} b^T S x(t) \quad (19)$$

atau

$$u(t) = -Kx(t)$$

dengan S adalah penyelesaian dari persamaan aljabar Riccati

$$-SA - A^T S + \frac{1}{r} S b b^T S - Q = 0 \quad (20)$$

dan $S > 0$.

Dengan mengambil matriks $Q = I_4$ dan $r = 1$ maka dengan menyelesaikan persamaan aljabar Riccati (20) didapatkan kontrol $u(t) = -Kx(t)$ dengan

$$K = [-1 \quad -11.5958 \quad -7.8354 \quad -11.3729] \quad (21)$$

dan

$$S = \begin{bmatrix} 5.2602 & 11.3729 & 10.0191 & 11.3750 \\ 11.3729 & 66.0528 & 48.4488 & 64.1712 \\ 10.0191 & 48.4488 & 37.2699 & 47.8938 \\ 11.3750 & 64.1712 & 47.8938 & 63.3141 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

KESIMPULAN

Dalam makalah ini telah dikaji konstruksi solusi persamaan aljabar Riccati yang menstabilkan sistem. Beberapa sifat penting yang terkait dengan solusi yang menstabilkan tersebut juga telah dipaparkan melalui beberapa teorema. Makalah ini juga telah menyajikan beberapa kontribusi persamaan aljabar Riccati dalam menyelesaikan masalah pendesainan pengontrol yang robust maupun optimal. Namun demikian permasalahan dalam kajian ini masih cukup sederhana. Sehingga pengembangan permasalahan seperti penentuan solusi yang menstabilkan pada suatu sistem singular beserta penerapannya pada permasalahan kendali dapat menjadi bahan kajian lebih lanjut.

DAFTAR PUSTAKA

- Earl, M.G., D'Andrea, R., 2005, Design and Implementation of a Minimum Time Translation for an Inverted Pendulum, *Proceeding of the Asian Conference of Industrial Automation and Robotic*, Bangkok.
- Lewis, F. L., Syrmos, V. L., 1995, *Optimal Control*, John Wiley and Sons, pp 170 – 174.
- Musthofa, M.W, 2009, Desain Linear Quadratic Regulator pada Sistem Inverted Pendulum, *Prosiding Seminar Nasional Matematika UNY*, Yogyakarta.
- Olsder, G. J., 1994, *Mathematical Systems Theory*, 1994, Delftse Uitgevers Maatschappij, Netherland, pp 13 – 16.
- Zhou, K., J.C. Doyle. 1998, *Essentials of Robust Control*, Prentice Hall International, New Jersey.
- Zhou, K., J.C. Doyle., K Glover., 1998, *Robust Optimal Control*, Prentice Hall International, New Jersey.
- Zhou, K., P. Khargonekar. 1988, An Algebraic Riccati Equation Approach to H_∞ Optimization, *Systems and Control Letters*, 11, 85-91.

**PROSEDUR PENAKSIRAN PARAMETER MODEL MULTILEVEL
MENGUNAKAN *TWO STAGE LEAST SQUARE*
DAN *ITERATIVE GENERALIZED LEAST SQUARE***

Bertho Tantular

*Jurusan Statistika Universitas Padjadjaran
Email: berthovens@yahoo.co.id, bertho@unpad.ac.id*

Abstrak

Dalam pemodelan untuk data hirarki salah satu model yang digunakan yaitu model intersep acak atau biasa disebut juga model efek acak. Penaksiran untuk model intersep acak tidak dapat menggunakan metode kuadrat terkecil biasa. Metode kuadrat terkecil dua tahap (*Two Stage Least Square*) dapat digunakan untuk mengatasi masalah tersebut (Ringdal 1992). Pendekatan lain yang dapat digunakan adalah metode *Generalized Least Square* yang memerlukan prosedur iteratif dalam penaksirannya sehingga disebut *Iterative Generalized Least Square*. Suatu simulasi digunakan untuk membandingkan kedua metode tersebut untuk mencari metode yang terbaik.

Kata kunci: Model Regresi Multilevel, *Two Stage Least Square*, RIGLS

PENDAHULUAN

Dalam suatu penelitian struktur data yang diperoleh terkadang merupakan data hierarki yang merupakan data yang diperoleh melalui *multistage sampling* dari populasi berjenjang. Variabel-variabel dapat didefinisikan dari setiap level. Sebagian variabel ini dapat diukur secara langsung dari level aslinya. Analisis dari data seperti ini disebut sebagai analisis data multilevel. Pemodelan regresi untuk data multilevel, disebut model regresi multilevel, merupakan hal yang menarik untuk dikaji lebih jauh terutama dalam penaksiran parameter karena melibatkan parameter-parameter yang terkandung dalam level yang berbeda.

Beberapa peneliti telah mengusulkan metode-metode yang berbeda untuk menaksir parameter dalam model regresi multilevel. Metode Kuadrat Terkecil atau *Ordinary Least Square (OLS)* merupakan metode klasik dalam menaksir parameter tanpa menggunakan asumsi distribusi. Untuk model regresi multilevel dapat digunakan metode Two stage OLS (Ringdal, 1992). Metode lain yang juga menggunakan kuadrat terkecil adalah *Iterative Generalised Least Square (IGLS)* (Longford, 1987) dan *Generalized Estimating Equation (GEE)* (Liang and Zeger, 1986).

Metode penaksiran parameter yang melibatkan asumsi distribusi pada model multilevel yaitu metode kemungkinan maksimum yang disebut *Restricted Maximum Likelihood (REML)* (Goldstein, 1995).

Pendekatan lain adalah menggunakan penaksir bayes yang membutuhkan distribusi prior. Dua pendekatan yang menggunakan bayes adalah *Marcov Chain Monte Carlo (MCMC)* dan Metode Bootstrap (*Gibbs Sampling*). Kedua pendekatan ini dikatakan dapat menyempurnakan *standard error* penaksirnya.

Dari semua metode penaksiran untuk model multilevel akan ditunjukkan beberapa prosedur yang dapat digunakan pada beragam kondisi data. Penelitian ini dibatasi hanya untuk penaksiran yang menggunakan metode kuadrat terkecil yaitu *two stage OLS* dan *Iterative Generalised Least Square*.

Model Multilevel

Model regresi multilevel merupakan bagian dari model umum yaitu *Linear Mixed Models*. Secara umum model regresi multilevel mempunyai struktur data hierarki yaitu sebuah peubah tak bebas (*dependent variable*) yang diukur pada level 1 dan beberapa peubah bebas (*explanatory variable*) diukur pada setiap level. Suatu model regresi multilevel yang sederhana hanya terdiri dari dua level. Model berikut adalah model regresi dua level dengan satu peubah penjelas level 1:

$$y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}X_{ij} + e_{ij} \quad (1)$$

i menyatakan individu dalam Kelompok ke- j ($i = 1, 2, \dots, n_j$)

j menyatakan Kelompok ($j = 1, 2, \dots, J$)

Pada regresi biasa *intersep* dan *slope* untuk setiap Kelompok adalah sama nilainya, sedangkan pada model ini *intersep* dan *slope* untuk setiap Kelompok berbeda. Asumsi yang mendasari model regresi multilevel (Persamaan 1) pada umumnya sama dengan regresi linier biasa yaitu e_{ij} berdistribusi normal dengan rata-rata nol dan ragam σ^2_j . Hal ini menunjukkan bahwa ragam tiap kelompok berbeda. Tetapi untuk beberapa kasus ada kalanya ragam tiap kelompok dianggap sama (Hox, 2002).

Pada Persamaan 1 nilai β_{0j} dan β_{1j} dapat diperoleh dengan menganggap β_{0j} dan β_{1j} sebagai respons dari persamaan-persamaan berikut:

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{10}Z_j + u_{0j} \quad (2)$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{01} + \gamma_{11}Z_j + u_{1j} \quad (3)$$

Dalam hal ini Z_j adalah peubah penjelas level 2 dan u_{0j} dan u_{1j} adalah galat pada level 2. Dari Persamaan 2 terlihat bahwa nilai y secara umum dapat diprediksi oleh Z_j . Dari Persamaan 3 juga dapat diketahui bahwa hubungan fungsional antara y dengan X bergantung pada nilai Z_j .

Bila Persamaan 2 dan Persamaan 3 disubstitusikan ke Persamaan 1 maka akan menjadi:

$$y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{10}Z_j + \gamma_{01}X_{ij} + \gamma_{11}X_{ij}Z_j + (u_{0j} + u_{1j}X_{ij} + e_{ij}) \quad (4)$$

Dalam Persamaan 2.4 pada ruas kanan bagian yang tidak berada dalam kurung merupakan bagian tetap (*fixed part*) atau biasa disebut *fixed effect* sedangkan bagian yang berada didalam kurung disebut bagian acak (*random part*) atau biasa disebut *random effect*.

Model 2.4 dapat disederhanakan menjadi model berikut ini

$$y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{10}Z_j + \gamma_{01}X_{ij} + \gamma_{11}X_{ij}Z_j + \delta_{ij} \quad (5)$$

dengan $\delta_{ij} = (u_{0j} + u_{1j}X_{ij} + e_{ij})$ atau disebut sebagai galat total.

Model 5 terlihat seperti model regresi biasa tetapi bila melihat pada galatnya terdiri atas tiga komponen yaitu u_{0j} , u_{1j} dan e_{ij} . Asumsi yang mendasari model seperti ini adalah:

- $E(u_{0j}) = E(u_{1j}) = E(e_{ij}) = 0$
- $V(u_{0j}) = \sigma^2_{u0}$, $V(u_{1j}) = \sigma^2_{u1}$, $V(e_{ij}) = \sigma^2_e$
- $Cov(u_{0j}, e_{ij}) = Cov(u_{1j}, e_{ij}) = Cov(e_{ij}, e_{kl}) = 0$
- $Cov(u_{0j}, u_{1j}) = \sigma_{u01}$

Parameter-parameter γ_{00} , γ_{10} , γ_{01} dan γ_{11} pada Persamaan 5 disebut sebagai parameter tetap (*fixed parameter*) sedangkan σ^2_{u0} , σ^2_{u1} , σ_{u01} dan σ^2_e disebut sebagai parameter acak (*random parameter*).

Berdasarkan asumsi tersebut dapat dihitung ragam untuk galat total δ_{ij} adalah

$$V(\delta_{ij}) = \sigma^2_{u0} + 2X_{ij}\sigma_{u01} + X^2_{ij}\sigma^2_{u1} + \sigma^2_e \quad (6)$$

Terlihat pada Persamaan 6 bahwa galat total δ_{ij} heteroskedastik, seperti telah dijelaskan pada bab sebelumnya, karena merupakan fungsi dari variabel penjelas Level-1, meskipun masing-masing komponennya yaitu u_{0j} , u_{1j} dan e_{ij} homoskedastik. Galat total δ_{ij} akan homoskedastik apabila model tidak mengasumsikan komponen koefisien kemiringan acak. (Jones and Steenbergen, 1997)

Parameter-parameter γ_{00} , γ_{01} , γ_{10} dan γ_{11} pada Persamaan 2.11 disebut sebagai parameter tetap (*fixed parameter*) sedangkan σ^2_{u0} , σ^2_{u1} , σ_{u01} dan σ^2_e pada persamaan 2.12 disebut sebagai parameter acak (*random parameter*).

Two Stage OLS (Metode Kuadrat Terkecil Dua Tahap)

Salah satu metode penaksiran yang populer untuk menaksir koefisien regresi adalah Metode Kuadrat Terkecil (*Ordinary Least Square/OLS*) dan Metode Kemungkinan Maksimum (*Maximum Likelihood Methods*). Untuk menaksir koefisien pada model regresi linier multilevel juga dapat digunakan Metode Kuadrat Terkecil dan Metode Kemungkinan Maksimum.

Leeuw dan Kreft (1986) membuat pendekatan sederhana dalam menaksir parameter tetap untuk model multilevel yaitu dengan menggunakan Metode Kuadrat Terkecil Dua Tahap (*Two Stage OLS*). Hal yang sama juga dilakukan oleh Ringdal (1992). Dalam model multilevel harus dipahami bahwa parameter yang akan ditaksir merupakan suatu variabel acak dan bukan sebuah nilai konstanta.

Misalkan model yang digunakan adalah model intersep acak. Model untuk Level 1 dalam bentuk matriks adalah sebagai berikut

$$y_j = X_j \beta_j + e_j \tag{7}$$

dengan $j = 1, 2, \dots, m$

Dalam hal ini vektor y_j berukuran $n_j \times 1$, matriks X_j berukuran $n_j \times (p + 1)$, vektor β_j berukuran $(p + 1) \times 1$ dan e_j berukuran $n_j \times 1$. Model untuk Level 2 adalah sebagai berikut

$$\beta = Z\gamma + u \tag{8}$$

Dalam hal ini vektor β berukuran $m \times 1$, matriks Z berukuran $m \times (q + 1)$, vektor β_j berukuran $(q + 1) \times 1$ dan u berukuran $m \times 1$. Apabila kita pandang kedua model pada Persamaan 7 dan Persamaan 8 secara terpisah maka secara sederhana untuk menaksir parameternya bisa menggunakan Metode Kuadrat Terkecil Biasa.

Pada tahap pertama adalah menentukan penaksir Metode Kuadrat Terkecil untuk Model pada Persamaan 7 atau sebut saja Model Level 1. Penaksir tak bias untuk Model Level 1 adalah sebagai berikut

$$\hat{\beta}_j = (X_j' X_j)^{-1} X_j' y_j \tag{9}$$

untuk $j = 1, 2, \dots, m$

pada tahap ini diperoleh sebanyak m penaksir sesuai dengan banyaknya kelompok. Hal penting yang perlu diketahui adalah penaksir-penaksir ini diperoleh secara terpisah untuk setiap kelompok. Penaksir ini merupakan penaksir yang tak bias.

Ekspektasi bagi β_j adalah sebagai berikut

$$E(\hat{\beta}_j) = Z_j \gamma$$

dan variansnya adalah

$$V(\hat{\beta}_j) = \Omega_2 + \sigma_j^2 (X_j' X_j)^{-1}$$

Dan penaksir untuk varians adalah

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{(y_j - X_j \hat{\beta}_j)' (y_j - X_j \hat{\beta}_j)}{(n_j - p)}$$

Penaksir ini merupakan penaksir yang tak bias. Sehingga model regresi dalam kelompok pada Level 1 menghasilkan penaksir tak bias bagi koefisien regresi dan varians.

Pada tahapan selanjutnya nilai-nilai hasil taksiran pada tahap sebelumnya digunakan sebagai respon untuk Model pada Persamaan 8 atau sebut saja Model Level 2. Dengan ditetapkannya nilai respon ini maka koefisien Model Level 2 dapat ditaksir menggunakan Metode Kuadrat Terkecil yang hasilnya adalah

$$\hat{\gamma} = (Z' Z)^{-1} Z' \hat{\beta} \tag{10}$$

Sehingga diperoleh semua penaksir koefisien regresinya.

Selanjutnya adalah menaksir Ω_2 . Permasalahan dalam menaksir Ω_2 adalah bahwa struktur varians kovarians ini bukan merupakan struktur model regresi biasa sehingga Ω_2 tidak dapat ditaksir dengan cara yang sama dengan model pada Level 1 tetapi membutuhkan suatu pemikiran

lebih jauh tentang hal ini. Meskipun dalam mendapatkan penaksir Ω_2 merupakan hal yang sulit karena melibatkan struktur varians-kovarians yang tidak sederhana tetapi bukan sesuatu yang tidak mungkin bahkan penaksir yang diperoleh merupakan penaksir yang tak bias. (Leeuw dan Kreft, 1986).

Pendekatan ini merupakan pendekatan tradisional yang sangat sederhana. Dalam pendekatan ini penaksir yang diperoleh bukan merupakan penaksir yang baik terutama pada saat ukuran sampel dari tiap kelompok Level 2 tidak sama. Selain itu apabila model yang digunakan adalah model koefisien acak maka struktur varians untuk galat total tidak dapat diperoleh. Apabila digunakan model multilevel yang lebih umum maka efek interaksi antara variabel pada Level 1 dan variabel pada Level 2 akan terabaikan sebab apabila kita melakukan substitusi pada metode ini maka penaksir tersebut akan menjadi bias.

Generalized Least Square

Menggunakan ide dari Longford (1989), Goldstein (1995) mengusulkan menggunakan metode kuadrat terkecil umum (*Generalised Least Square*) untuk menaksir parameter tetap pada model multilevel. Metode ini dinilai lebih baik dari metode sebelumnya karena model yang digunakan merupakan model yang telah disubstitusikan sehingga struktur varians-kovarians yang digunakan terdiri dari komponen Level 1 dan Level 2. Model yang digunakan adalah model dalam notasi matriks sebagai berikut

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{E} \quad (11)$$

dengan $\mathbf{E} = \mathbf{Z}\mathbf{e}$, dalam hal ini varians galat adalah $V(\mathbf{E}) = \mathbf{V}$. Dengan demikian penaksir *Generalized Least Square* diperoleh dengan meminimumkan fungsi persamaan linier berikut ini

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{E} &= (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \\ &= \mathbf{y}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \end{aligned}$$

sehingga dapat dengan mudah diperoleh penaksir parameternya sebagai berikut

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y} \quad (12)$$

Penaksir pada Persamaan 12 ini masih mengandung unsur parameter yang nilainya tidak diketahui yaitu pada matriks \mathbf{V} yang merupakan matriks *block diagonal* dari parameter acak $\sigma_{u_0}^2$, $\sigma_{u_1}^2$ dan σ^2 . Sehingga untuk mendapatkan nilai taksiran ini harus melalui proses iterasi. Sehingga metode penaksirannya disebut sebagai *Iterative Generalised Least Square* (IGLS). (Goldstein, 1995).

Penaksir IGLS secara umum menghasilkan penaksir yang bias terutama pada saat ukuran sampel kecil. Untuk mendapatkan penaksir yang tak bias Goldstein (1995) memodifikasi penaksir IGLS ini dengan cara mengubah $E(\mathbf{y}^*) = \mathbf{V}$ menjadi

$$E(\mathbf{y}^*) = \mathbf{V} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' \quad (13)$$

penaksir ini disebut sebagai *Restricted Iterative Generalised Least Square* atau RIGLS.

SIMULASI

Sebuah simulasi sederhana dibuat untuk membuktikan secara numerik pendapat-pendapat yang telah dijelaskan pada bagian sebelumnya. Secara umum prosedur simulasi untuk model multilevel intersep acak dengan prediktor pada level 2 untuk ukuran sampel tiap kelompok sama dilakukan dengan cara sebagai berikut: Variabel X dibangkitkan dari distribusi normal dengan rata-rata nol dan simpangan baku 2, galat level 1 (e_{ij}) dibangkitkan dari distribusi normal dengan rata-rata nol dan simpangan baku 7, ditetapkan efek intersep (α_j) terdiri dari 4 kelompok dengan ukuran yang sama, variabel Z dibangkitkan dari distribusi uniform dalam interval 0 dan 1, efek intersep acak dibangkitkan dari distribusi normal dengan rata-rata tiap kelompok berbeda dengan simpangan baku yang sama yaitu 0.01, nilai respon y dihitung berdasarkan model regresinya. Simulasi ini dilakukan pada ukuran sampel 100, 200, 500 dan 1000 dan diulang untuk banyak kelompok 4, 10, 20 dan 50. Setiap simulasi dilakukan sebanyak 1000 kali.

Setiap hasil simulasi dihitung nilai taksiran parameter tetap dan galat bakunya (*standard error*). Untuk simulasi ini digunakan paket *nlme* dalam *software R 2.11.1*. Tabel berikut adalah hasil simulasi untuk ukuran sampel tiap kelompok sama dan banyak kelompok 4

Tabel 1 Hasil Simulasi untuk Ukuran Sampel Tiap Kelompok Sama
Untuk banyak kelompok 4

| Metode | Ukuran Sampel | γ_{00} | | β_1 | | γ_{01} | |
|--------|---------------|---------------|------------|-----------|------------|---------------|------------|
| | | Penaksir | Galat Baku | Penaksir | Galat Baku | Penaksir | Galat Baku |
| TSLS | 100 | 1.5370 | 3.2757 | 0.9920 | 0.3747 | 0.9479 | 5.9106 |
| | 200 | 1.4779 | 2.5894 | 0.9745 | 0.2657 | 1.0139 | 4.6529 |
| | 500 | 1.4537 | 2.3385 | 0.9945 | 0.1589 | 1.0158 | 4.3813 |
| | 1000 | 1.5269 | 3.3628 | 1.0016 | 0.1122 | 0.9089 | 5.1737 |
| IGLS | 100 | 1.5356 | 3.2586 | 0.9977 | 0.3645 | 0.9478 | 5.8356 |
| | 200 | 1.4804 | 2.5930 | 0.9774 | 0.2592 | 1.0093 | 4.6716 |
| | 500 | 1.4559 | 2.3400 | 0.9946 | 0.1586 | 1.0111 | 4.3784 |
| | 1000 | 1.5283 | 3.3571 | 1.0012 | 0.1122 | 0.9073 | 5.1717 |

Dari Tabel 1 terlihat untuk ukuran sampel 100 bahwa kedua metode memberikan hasil yang tidak terlalu jauh berbeda. Secara umum galat baku untuk metode IGLS sedikit lebih kecil dari metode TSLS. Untuk ukuran sampel 200 kedua metode juga memberikan hasil yang tidak terlalu jauh berbeda. Secara umum galat baku untuk metode IGLS sedikit lebih besar dari metode TSLS kecuali untuk parameter β_1 . Secara umum untuk ukuran sampel 500 galat baku untuk metode IGLS sedikit lebih kecil dari metode TSLS kecuali untuk parameter γ_{00} . Untuk ukuran sampel 1000 galat baku untuk metode IGLS sedikit lebih kecil dari metode TSLS.

Penambahan ukuran sampel dalam simulasi ini tidak mengubah nilai penaksir meskipun ada perubahan dalam galat baku. Sehingga secara umum dapat disimpulkan bahwa kedua metode memberikan hasil yang relatif sama.

Tabel-tabel berikut adalah hasil simulasi untuk ukuran sampel tiap kelompok sama dan banyak kelompok 10, 20 dan 50.

Tabel 2 Hasil Simulasi untuk Ukuran Sampel Tiap Kelompok Sama
Untuk ukuran sampel n=1000

| Metode | Banyak kelompok | γ_{00} | | β_1 | | γ_{01} | |
|--------|-----------------|---------------|------------|-----------|------------|---------------|------------|
| | | Penaksir | Galat Baku | Penaksir | Galat Baku | Penaksir | Galat Baku |
| TSLS | 10 | 1.4563 | 1.3902 | 1.4738 | 1.4567 | 1.3911 | 1.4774 |
| | 20 | 1.8740 | 2.4372 | 3.5691 | 1.8731 | 2.4348 | 3.5688 |
| | 50 | 1.0015 | 1.0014 | 0.9952 | 1.0021 | 1.0011 | 0.9951 |
| IGLS | 10 | 0.1127 | 0.1129 | 0.1193 | 0.1115 | 0.1102 | 0.1132 |
| | 20 | 1.1141 | 1.2338 | 1.0914 | 1.1130 | 1.2306 | 1.0874 |
| | 50 | 3.7429 | 4.7859 | 7.0760 | 3.7411 | 4.7831 | 7.0764 |

Berdasarkan Tabel 2 terlihat bahwa untuk banyak kelompok 20 kedua metode memberikan hasil yang tidak terlalu jauh berbeda. Secara umum galat baku untuk metode IGLS sedikit lebih kecil dari metode TSLS. Kedua metode juga memberikan hasil yang tidak terlalu jauh berbeda pada banyak kelompok 20. Secara umum galat baku untuk metode IGLS sedikit lebih kecil dari metode TSLS. Pada ukuran kelompok 50 kedua metode juga memberikan hasil yang tidak terlalu

jauh berbeda. Secara umum galat baku untuk metode IGLS sedikit lebih kecil dari metode TSLS. Dengan demikian penambahan ukuran kelompok dalam simulasi ini tidak mengubah nilai penaksir tetapi dengan bertambahnya ukuran kelompok nilai galat baku berubah menjadi semakin besar. Sehingga secara umum dapat disimpulkan bahwa kedua metode memberikan hasil yang relatif sama.

Tabel berikut adalah hasil simulasi untuk ukuran sampel tiap kelompok berbeda dan banyak kelompok 4

Tabel 3 Hasil Simulasi untuk Ukuran Sampel Tiap Kelompok Berbeda
Untuk $n=100$ $m=4$

| Metode | Banyak kelompok | γ_{00} | | β_1 | | γ_{01} | |
|--------|-----------------|---------------|------------|-----------|------------|---------------|------------|
| | | Penaksir | Galat Baku | Penaksir | Galat Baku | Penaksir | Galat Baku |
| TSLS | 100 | 0.7456 | 5.2440 | 0.9853 | 0.6262 | 0.5484 | 9.1314 |
| | 200 | 0.8263 | 4.3671 | 0.9809 | 0.4230 | 0.1824 | 8.5956 |
| | 500 | 0.7386 | 3.4939 | 1.0071 | 0.2395 | 0.5034 | 6.9308 |
| IGLS | 100 | -0.3060 | 4.3795 | 0.9969 | 0.3547 | 1.0494 | 8.0956 |
| | 200 | -0.2821 | 4.2515 | 0.9838 | 0.2559 | 1.0287 | 8.0193 |
| | 500 | -0.3457 | 3.4814 | 1.0021 | 0.1557 | 1.3007 | 6.6553 |

Tabel 3 memperlihatkan bahwa kedua metode juga memberikan hasil yang sangat berbeda. Untuk $n = 100$ penaksir β_1 pada TSLS dan IGLS memberikan hasil yang relatif sama dan untuk penaksir γ_{00} pada TSLS dan IGLS memberikan hasil yang bertolak belakang. Sedangkan untuk penaksir γ_{01} penaksir TSLS memperlihatkan selisih yang jauh dari parameter dibandingkan dengan penaksir IGLS. Secara umum galat baku untuk metode IGLS lebih kecil dari metode TSLS. Selain itu Tabel 8 juga memperlihatkan bahwa untuk $n = 200$ kedua metode juga memberikan hasil yang sangat berbeda. Untuk penaksir β_1 pada TSLS dan IGLS memberikan hasil yang relatif sama dan untuk penaksir γ_{00} pada TSLS dan IGLS memberikan hasil yang bertolak belakang. Sedangkan untuk penaksir γ_{01} penaksir TSLS memperlihatkan selisih yang jauh dari parameter dibandingkan dengan penaksir IGLS. Secara umum galat baku untuk metode IGLS lebih kecil dari metode TSLS. Sedangkan untuk $n = 500$ memperlihatkan bahwa kedua metode juga memberikan hasil yang sangat berbeda. Untuk penaksir β_1 pada TSLS dan IGLS memberikan hasil yang relatif sama dan untuk penaksir γ_{00} pada TSLS dan IGLS memberikan hasil yang bertolak belakang. Sedangkan untuk penaksir γ_{01} penaksir TSLS memperlihatkan selisih yang jauh dari parameter dibandingkan dengan penaksir IGLS. Secara umum galat baku untuk metode IGLS lebih kecil dari metode TSLS. Secara umum penambahan ukuran sampel pada kedua metode tidak memberikan dampak terhadap penaksir tetapi dapat memperkecil nilai galat baku untuk kedua metode.

KESIMPULAN

Parameter tetap dalam model multilevel dapat ditaksir menggunakan metode kuadrat terkecil. Ada dua pendekatan metode kuadrat terkecil untuk model multilevel yaitu metode *two stage least square* (TSLS) dan *iterative generalized least square* (IGLS).

Berdasarkan hasil simulasi pada bagian sebelumnya metode TSLS dan metode IGLS memberikan hasil penaksir sama baik untuk ukuran sampel tiap kelompok sama dalam berbagai

ukuran sampel dan berbagai ukuran kelompok. Metode IGLS memberikan hasil yang lebih baik dibandingkan metode TSLS untuk ukuran sampel tiap kelompok berbeda dalam berbagai ukuran sampel. Selain itu galat baku metode IGLS relatif lebih kecil dibandingkan dengan metode TSLS.

Hasil simulasi menunjukkan bahwa metode IGLS memberikan hasil penaksiran yang lebih baik bila dibandingkan dengan metode TSLS untuk berbagai ukuran sampel dan berbagai ukuran kelompok. Penambahan ukuran sampel dalam simulasi ini tidak memberikan dampak pada penaksir tetapi dapat memperkecil nilai galat baku penaksirnya. Penambahan ukuran kelompok dalam simulasi ini tidak mengubah nilai penaksir tetapi dengan bertambahnya ukuran kelompok nilai galat baku berubah menjadi semakin besar.

DAFTAR PUSTAKA

Goldstein (1995) *Multilevel Statistical Models 2nd Ed.*, E-Book of Arnold, London.

Hox (1995) *Applied Multilevel Analysis*, TT-Publikaties, Amsterdam.

_____(2002) *Multilevel Analysis: Techniques and Applications*. Lawrence Erlbaum Associates Publishers, Mahwah, New Jersey, London

Hox, J.J. and Kreft, Ita G.G. (1994) Multilevel Analysis Methods. *Sociological Methods & Research*, Vol 22, No. 3, pp. 283-299.

Jones, Steenbergen (1997) *Modelling Multilevel Data Structures*. Paper prepared in 14th annual meeting of the political methodology society, Columbus, OH.

Ringdal (1992) Methods for Multilevel Analysis. *Acta Sociologica*, Vol 35, pp. 235-243. Sage Publications.

APLIKASI SISTEM INFERENSI FUZZY METODE SUGENO DALAM MEMPERKIRAKAN PRODUKSI AIR MINERAL DALAM KEMASAN

Suwandi¹, Mohammad Isa Irawan², dan Imam Mukhlash²

¹Mahasiswa Pascasarjana Matematika FMIPA ITS Surabaya

²Dosen Pascasarjana Jurusan Matematika FMIPA ITS Surabaya
suwandi_oke@yahoo.co.id

Abstrak

Persaingan pasar dalam dunia industri pada era globalisasi saat ini semakin kompetitif sehingga dibutuhkan kemampuan pengelola perusahaan yang profesional agar dapat memenangkan persaingan dalam pasar global. Pada bidang produksi kemampuan itu antara lain adalah kemampuan merencanakan atau menentukan jumlah produksi barang. Hal ini agar dapat memenuhi permintaan pasar dengan jumlah yang sesuai dengan memperhatikan persediaan barang, biaya yang tersedia dan kemampuan mesin produksi. Sehingga jumlah kebutuhan konsumen terhadap barang produksi terpenuhi dengan tepat. Penelitian ini bertujuan untuk memperkirakan berapa jumlah produksi dengan mengaplikasikan sistem inferensi fuzzy metode Sugeno orde satu berdasarkan variabel jumlah permintaan, jumlah persediaan, kemampuan mesin produksi dan biaya produksi yang tersedia. Pengambilan data diperoleh dari Perusahaan Daerah Air Minum dengan produk air minum dalam kemasan, mulai bulan Januari 2011 sampai dengan Pebruari 2012. Tahapan pengolahan data meliputi proses fuzzifikasi, pembentukan aturan dasar dengan menggunakan metode inferensi model fuzzy Sugeno orde satu, mengaplikasikan komposisi aturan dan defuzzifikasi. Estimasi jumlah permintaan pada periode berikutnya dimaksudkan agar jumlah produksi dapat ditentukan lebih tepat. Metode estimasi menggunakan regresi kuadratik. Sedangkan untuk mengetahui tingkat akurasi hasil estimasi digunakan *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE).

Kata kunci : Jumlah Produksi, Metode Sugeno, Orde Satu

PENDAHULUAN

Pada metode klasik, pengukuran terhadap jumlah produksi dilakukan secara numerik menggunakan dasar himpunan *crisp* dengan mempertimbangkan banyaknya permintaan, persediaan barang, kemampuan mesin dan persediaan biaya. Dalam realitasnya terdapat parameter-parameter pengukuran yang bersifat tidak jelas sehingga penggunaan pengukuran menggunakan dasar himpunan *crisp* tidak memberikan penyelesaian memuaskan karena kurang fleksibel. Logika fuzzy dapat digunakan sebagai solusi alternatif untuk mengatasi ketidakpastian dan perubahan-perubahan yang menyertai permasalahan jumlah produksi karena bersifat fleksibel (Lipsey, 1995).

Permasalahan dalam penelitian ini adalah bagaimana aplikasi sistem inferensi fuzzy metode Sugeno dalam menentukan jumlah perkiraan produksi air mineral dalam kemasan berdasarkan faktor jumlah permintaan, jumlah persediaan barang, biaya produksi yang tersedia dan kemampuan mesin produksi. Penelitian ini bertujuan membuat sistem inferensi fuzzy metode sugeno orde satu yang dapat digunakan untuk memperkirakan jumlah produksi dan membuat simulasi model FIS metode sugeno menggunakan matlab.

Langkah-langkah penelitian meliputi pengumpulan data, identifikasi data untuk menentukan variabel dan semesta pembicaraan yang diperlukan dalam melakukan perhitungan dan analisis masalah. Proses pengolahan data meliputi proses fuzifikasi, pembentukan aturan dasar, komposisi aturan, defuzzifikasi, pengujian.

Proses fuzifikasi dilakukan dengan membentuk himpunan fuzzy masing variabel sebagai input pada anteseden. Pembentukan aturan dasar dilakukan dengan membuat kombinasi beberapa variabel input dan menetapkan operasi antar himpunan yang sesuai dengan kondisi faktual perusahaan. Perancangan rule disesuaikan karakteristik data variabel diperusahaan. Komposisi

aturan diperoleh dari kumpulan dan korelasi antar aturan dengan menghitung $\sum_{r=1}^R \alpha_r z_r$ dengan R banyaknya rule, α_r fire strength ke-r, dan z_r output pada anteseden aturan ke-r. Proses defusifikasi dilakukan dengan metode defazifikasi *weighted average* untuk mendapatkan jumlah produksi barang dengan menggunakan bantuan *Matlab 7.8.0*. Pengujian dilakukan untuk mengetahui bahwa sistem inferensi yang dibangun dapat digunakan untuk memperkirakan jumlah produksi.

Konsep Dasar Himpunan Fuzzy

Jika X adalah sebuah koleksi obyek-obyek yang dinotasikan dengan x , maka himpunan fuzzy A dalam X adalah sebuah himpunan pasangan berurutan $A = \{x, \mu_A(x) | x \in X\}$. Notasi $\mu_A(x)$ disebut fungsi keanggotaan atau derajat keanggotaan x dalam A yang memetakan X ke ruang keanggotaan M yang terletak pada rentang $[0, 1]$, bila M hanya memuat dua titik 0 dan 1, maka A adalah bukan fuzzy dan $\mu_A(x)$ serupa dengan karakteristik fungsi himpunan non fuzzy. (Zimmermann,2000)

Representasi Fungsi Linier

Fungsi linier memetakan input ke derajat keanggotaannya yang digambarkan dalam bentuk garis linier naik dan turun .

Fungsi keanggotaan representasi linear naik adalah :

$$\mu(x) = \begin{cases} 0; & x \leq a \\ \frac{(x-a)}{(b-a)}; & a \leq x \leq b \end{cases}$$

Fungsi keanggotaan representasi linear turun adalah :

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{(b-x)}{(b-a)}; & a \leq x \leq b \\ 0; & x \geq b \end{cases}$$

Representasi Kurva Segitiga

Fungsi keanggotaan yang merepresentasikan kurva segitiga adalah :

$$\mu(x) = \begin{cases} 0; & x \leq a \text{ atau } x \geq c \\ \frac{(x-a)}{(b-a)}; & a \leq x \leq b \\ \frac{(c-x)}{(c-b)}; & b \leq x \leq c \end{cases}$$

Representasi Kurva Trapesium

Fungsi keanggotaan yang merepresentasikan kurva trapesium adalah :

$$\mu(x) = \begin{cases} 0; & x \leq a \text{ atau } x \geq d \\ \frac{(x-a)}{(b-a)}; & a \leq x \leq b \\ 1; & b \leq x \leq c \\ \frac{(d-x)}{(d-c)}; & x \geq d \end{cases}$$

Representasi Kurva Bahu

Kurva bahu terdiri dari bahu kanan dan bahu kiri. Kurva bahu kiri merepresentasikan kondisi konstan dari kiri dengan nilai keanggotaan 1 kemudian turun dengan nilai keanggotaan menuju ke 0. Sedangkan kurva bahu kanan merepresentasikan keadaan yang linier naik menuju nilai keanggotaan 1 secara konstan kekanan.

Fungsi keanggotaan yang merepresentasikan kurva bahu kiri :

$$\mu(x) = \begin{cases} 1; & x \leq a \\ \frac{(b-x)}{(b-a)}; & a \leq x \leq b \\ 0; & x \geq b \end{cases}$$

Fungsi keanggotaan yang merepresentasikan kurva bahu kanan :

$$\mu(x) = \begin{cases} 0; & x \leq b \\ \frac{(x-b)}{(c-b)}; & b \leq x \leq c \\ 1; & x \geq c \end{cases}$$

Representasi Kurva-S

Kurva-S atau *sigmoid* berhubungan dengan kenaikan dan penurunan permukaan secara tak linear. Kurva-S yang menunjuk pertumbuhan adalah kurva S-MF (Cox, 1994). Fungsi keanggotaan S-MF adalah :

$$S(x; \alpha, \gamma) = \begin{cases} 0; & x \leq \alpha \\ 2 \left(\frac{x-\alpha}{\gamma-\alpha} \right)^2; & \alpha \leq x \leq \frac{\alpha+\gamma}{2} \\ 1 - 2 \left(\frac{\gamma-x}{\gamma-\alpha} \right)^2; & \frac{\alpha+\gamma}{2} \leq x \leq \gamma \\ 1; & x \geq \gamma \end{cases}$$

Adapun kurva penyusutan merupakan kurva-S yang berhubungan dengan penurunan adalah kurva Z-MF dengan fungsi keanggotaan :

$$Z(x; \alpha, \gamma) = \begin{cases} 1; & x \leq \alpha \\ 1 - 2 \left(\frac{x-\alpha}{\gamma-\alpha} \right)^2; & \alpha \leq x \leq \frac{\alpha+\gamma}{2} \\ 2 \left(\frac{x-\gamma}{\gamma-\alpha} \right)^2; & \frac{\alpha+\gamma}{2} \leq x \leq \gamma \\ 0; & x \geq \gamma \end{cases}$$

Kurva PI

Kurva PI merupakan gabungan fungsi bentuk – S dan kurva bentuk Z . Fungsi keanggotaan kurva PI adalah :

$$\pi(x; \alpha, \gamma) = \begin{cases} S(x; \gamma-\alpha, \gamma), & \text{untuk } x \leq \gamma \\ Z(x; \gamma, \gamma+\alpha), & \text{untuk } x \geq \gamma \end{cases}$$

Dimana γ adalah pusat kurva, dan α adalah lebar kurva.

Sistem Inferensi Fuzzy Metode Sugeno

Metode sistem inferensi fuzzy sugeno disebut juga metode sistem inferensi fuzzy TSK yang diperkenalkan oleh Takagi, Sugeno dan Kang. Output dari sistem inferensi fuzzy diperlukan 4 tahap :

1. Tahap fuzzifikasi
Fuzzifikasi merupakan proses mentransformasikan data pengamatan kedalam bentuk himpunan fuzzy (Jang, 1997).
2. Pembentukan aturan dasar data fuzzy
Aturan dasar fuzzy mendefinisikan hubungan antara fungsi keanggotaan dan bentuk fungsi keanggotaan hasil. Pada metode segeno output (konsekuen) sistem tidak berupa himpunan fuzzy tetapi berupa konstanta atau persamaan linier. Menurut Cox (1994) metode TSK terdiri dari dua jenis, yaitu :
 - a. Model fuzzy sugeno orde nol
Secara umum bentuk fuzzy sugeno orde nol adalah :
IF $(x_1 \text{ is } A_1) \circ (x_2 \text{ is } A_2) \circ (x_3 \text{ is } A_3) \circ \dots (x_N \text{ is } A_N)$ THEN $z = k$
Dengan A_i adalah himpunan fuzzy ke -i sebagai anteseden dan k adalah konstanta tegas sebagai konsekuen.
 - b. Model fuzzy sugeno orde satu
Secara umum bentuk fuzzy sugeno orde satu adalah :
IF $(x_1 \text{ is } A_1) \circ (x_2 \text{ is } A_2) \circ \dots (x_N \text{ is } A_N)$ THEN $z = p_1 * x_1 + \dots + p_N * x_N + q$
Dengan A_i adalah himpunan fuzzy ke-i sebagai anteseden, p_i konstanta tegas ke-i dan q konstanta pada konsekuen.
3. Komposisi aturan
Apabila sistem terdiri dari beberapa aturan, maka inferensi diperoleh dari kumpulan dan korelasi antar aturan yaitu menghitung hasil dari $\sum_{r=1}^R \alpha_r z_r$ dengan R banyaknya rule, α_r fire strength ke-r, dan z_r output pada anteseden aturan ke-r
4. Penegasan (*defuzzifikasi*)
Pada proses ini output berupa bilangan crisp. Defuzzifikasi dilakukan dengan cara mencari nilai rata-ratanya yaitu $z = \frac{\sum_{r=1}^R \alpha_r z_r}{\sum_{r=1}^R \alpha_r}$ (Kusumadewi, 2010)

Model Regresi Kuadrat

Pola data yang bergerak membentuk pola kuadratik dapat didekati dengan analisis regresi model regresi kuadratik yang persamaannya adalah :

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_1^2$$

Nilai b_0 , b_1 dan b_2 diperoleh dari metode *least square* yang menyebabkan nilai error hasil prediksi paling kecil

Mean Absolute Percentage Error (MAPE)

MAPE merupakan ukuran kesalahan relatif yang dirumuskan dengan :

$$MAPE = \left(\frac{100}{n} \right) \sum \left| \frac{A_t - F_t}{A_t} \right| \quad (\text{Nasution, 2006})$$

PEMBAHASAN

Pengumpulan dan Pengolahan Data

Data permintaan, perkiraan permintaan, persediaan barang, dan jumlah produksi terdapat dalam tabel 1

Tabel 1 Data Permintaan, Perkiraan permintaan, Persediaan Barang, Jumlah produksi Air Minum Kemasan Gelas

| Periode | Permintaan (Kardus) | Perkiraan Permintaan (Kardus) | Persediaan Barang (Kardus) | Jumlah Produksi (Kardus) |
|---------|---------------------|-------------------------------|----------------------------|--------------------------|
| 1 | 149 | 180 | 112 | 106 |
| 2 | 83 | 120 | 68 | 116 |
| 3 | 63 | 100 | 72 | 100 |
| 4 | 135 | 75 | 98 | 162 |
| 5 | 93 | 160 | 104 | 104 |
| 6 | 164 | 110 | 106 | 204 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 45 | 275 | 315 | 154 | 272 |
| 46 | 260 | 320 | 142 | 229 |
| 47 | 314 | 310 | 162 | 223 |

Perusahaan dalam menentukan jumlah produksi pada periode ke-n didasarkan pada perkiraan permintaan pada periode ke-n+1. Perkiraan data permintaan perusahaan didasarkan pada tren data penjualan sebelumnya, catatan pesanan dan event-event tertentu yang diperkirakan membutuhkan produk air dalam kemasan plastik. Banyak barang persediaan digudang dipengaruhi oleh beberapa faktor antara lain jumlah penjualan, jumlah produksi, banyak kerusakan, banyak penarikan barang yang belum terjual.

Data Biaya Produksi

Biaya yang disediakan dalam sekali produksi berkisar Rp. 1.700.000,00 sampai dengan Rp.2.200.000,00 dengan asumsi bahwa biaya tersebut digunakan untuk memproduksi 250 kardus sampai dengan 320 kardus. Demi efisiensi biaya maka perusahaan menetapkan bahwa dalam sekali produksi minimal sebanyak 100 kardus. Rata-rata biaya produksi tiap kardus Rp 6.800,00, harga jual Rp. 10.000,00. Dalam kenyataannya untuk sejumlah persediaan biaya yang sama dapat dihasilkan banyak barang berbeda atau tidak sesuai dengan yang diperkirakan. Hal tersebut disebabkan adanya produk gagal, perubahan harga kemasan gelas, dan pengeluaran lain-lain.

Data kemampuan mesin produksi

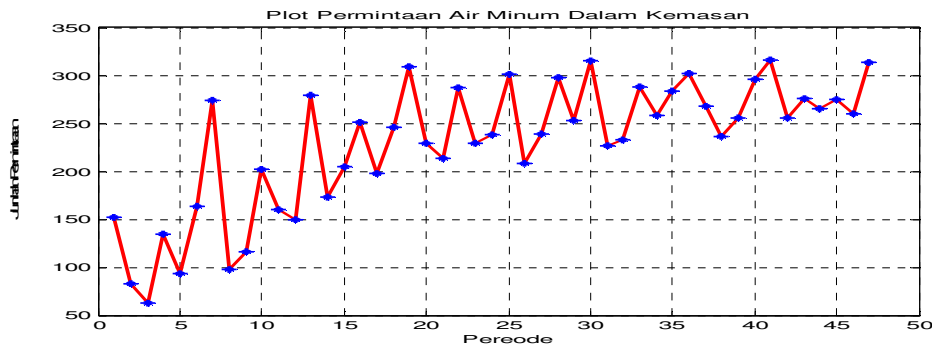
Mesin type produksi air dalam kemasan gelas mempunyai kemampuan beroperasi maksimal 8 jam, rata-rata produk menghasilkan 320 kardus. Sedangkan rata-rata produksi selama 7.5 jam dihasilkan 310 kardus. Penurunan rata-rata jumlah produksi selang waktu 7.5 sampai 8 jam disebabkan penurunan performansi mesin dan mulai meningkatnya produk gagal.

Untuk perawatan, mesin dihentikan beroperasi maksimum antara 7.5 jam sampai dengan 8 jam. Penyetelan lama produksi pada selang waktu 7,5 sampai dengan 8 jam dilakukan saat jumlah permintaan tinggi, persediaan sedikit dan ketersediaan biaya tinggi. Sedangkan selang produksi dibawah 7.5 jam dihentikan pada saat jumlah produksi barang terpenuhi. Dengan kata lain jumlah produksi barang tidak tergantung pada pada variabel kemampuan mesin. Perusahaan menetapkan ketentuan bahwa dalam sekali produksi minimal 100 kardus dengan pertimbangan efisiensi mesin.

Berdasarkan data diatas, sistem inferensi dibuat dengan memperhatikan beberapa batasan yaitu setiap produksi minimal 100 kardus, Jumlah produksi tercukupi oleh biaya yang tersedia yaitu Rp. 1.700.000,00 sampai dengan Rp. 2.500.000,00. Maksimum lama produksi antara 7.5 jam sampai 8 jam atau maksimum jumlah produksi 320 kardus.

Estimasi Jumlah Permintaan

Untuk meningkatkan tingkat akurasi yang lebih tinggi dalam memperkirakan jumlah permintaan periode berikutnya berdasarkan tren pola data permintaan aktual sebelumnya, dilakukan dengan metode regresi. *Software* yang digunakan sebagai alat bantu estimasi adalah matlab 2009a. Hasil plotting data permintaan tabel 1 terdapat dalam gambar 1



Gambar 1: Grafik Permintaan Air Kemasan dalam Gelas Merk Hazora Bulan Januari dan Pebruari 2011

Menghitung ekspektasi kesalahan

Analisa kesalahan hasil estimasi dengan metode regresi jumlah permintaan terdapat pada tabel 2.

Tabel 2 : Tabel Perbandingan MAPE Estimasi Permintaan

| Metode Regresi | MAPE |
|----------------|---------|
| Linier | 19.5702 |
| Kuadratik | 17.0692 |
| Polinomial | 17.0706 |

Dengan demikian metode estimasi yang cocok untuk estimasi jumlah permintaan adalah regresi kuadratik.

Himpunan Semesta Pembicaraan dan Himpunan Fuzzy Variabel Input

Berdasarkan data pada tabel 1 dan uraian data kemampuan mesin, data persediaan biaya dapat ditentukan himpunan semesta pembicaraan dan domain masing-masing himpunan fuzzy seperti pada tabel 2 dan 3

Tabel 2 Penentuan Semesta pembicaraan

| Nama Variabel | Semesta Pembicaraan | Keterangan |
|--------------------------|---------------------|---|
| Permintaan | [75 – 320] | Jumlah estimasi permintaan versi perusahaan tiap kali produksi (kardus) |
| Persediaan Barang | [32-200] | Jumlah persediaan tiap hari (kardus) |
| Persediaan Biaya | [1.700-2.500] | Jumlah biaya yang tersedia tiap hari dikalikan Rp.1000,00 |
| Kemampuan Mesin Produksi | [0 - 8] | Rentang lama produksi (jam) |

Tabel 4.3 Penentuan Domain Himpunan Fuzzy

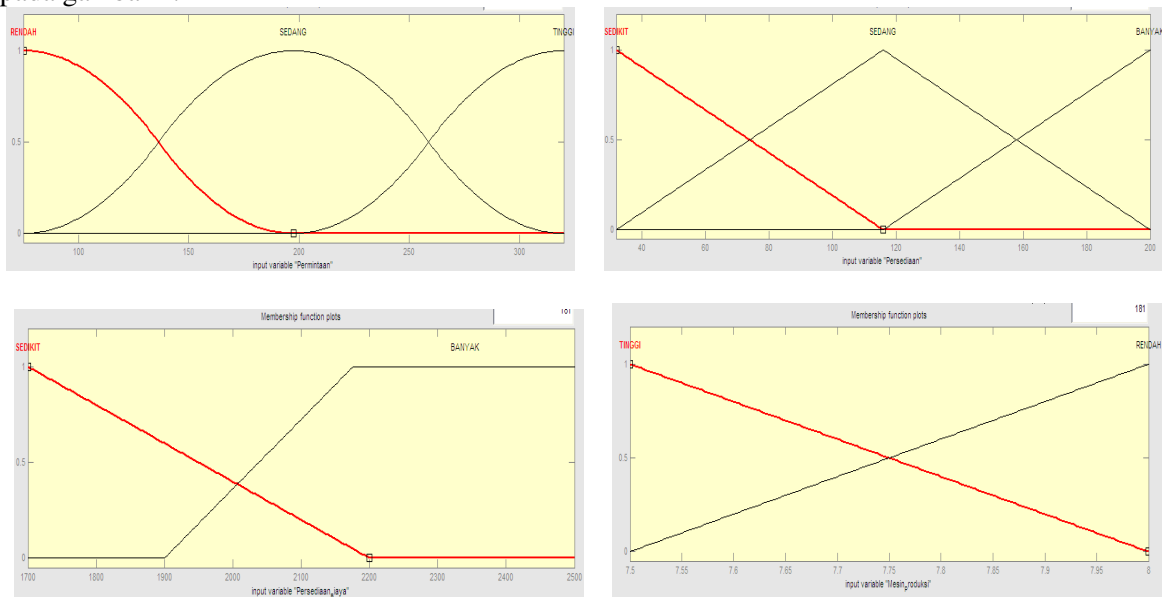
| Nama Variabel | Nama Himpunan Fuzzy | Domain |
|--------------------------|---------------------|-------------|
| Permintaan | RENDAH | [75-200] |
| | SEDANG | [75-320] |
| | BANYAK | [200-320] |
| Persediaan Barang | SEDIKIT | [32-116] |
| | SEDANG | [32-200] |
| | TINGGI | [120-200] |
| Persediaan Biaya | SEDIKIT | [1700-2200] |
| | BANYAK | [1900-2500] |
| Kemampuan Mesin Produksi | TINGGI | [7.5 – 8] |
| | RENDAH | [7.5 – 8] |

Fungsi Keanggotaan Himpunan pada Variabel Input

Karena type data permintaan menunjukkan tren pertumbuhan maka fungsi keanggotaan variabel permintaan digunakan pendekatan fungsi pertumbuhan dan penyusutan. Fungsi keanggotaan himpunan permintaan RENDAH digunakan kurva S-MF, himpunan SEDANG digunakan kurva PI-MF, dan himpunan BANYAK digunakan kurva S-MF.

Fungsi keanggotaan variabel persediaan barang pada himpunan persediaan SEDIKIT digunakan fungsi linier turun, himpunan SEDANG menggunakan kurva segitiga, dan BANYAK menggunakan fungsi linier naik. Fungsi keanggotaan variabel persediaan biaya pada himpunan persediaan SEDIKIT digunakan fungsi linier turun, dan himpunan BANYAK menggunakan kurva bahu kanan.

Fungsi keanggotaan variabel kemampuan mesin untuk himpunan kemampuan TINGGI digunakan fungsi linier turun, dan untuk himpunan RENDAH menggunakan fungsi linier naik. Kondisi ini dikenakan pada saat permintaan banyak, persediaan sedikit sementara persediaan biaya banyak atau sedikit. Fungsi keanggotaan masing-masing himpunan pada variabel input terdapat pada gambar 2.



Gambar 2 ; Fungsi Keanggotaan Himpunan Fuzzy pada Variabel Input

Pembentukan Rule

Rule IF-THEN dibuat dengan mengkombinasikan beberapa kejadian pada bagian anteseden. Penentuan koefisien dan konstanta persamaan linier pada bagian konsekuen ditentukan sedemikian sehingga dapat menghasilkan jumlah produksi yang sesuai dengan keadaan persahaan.

Operasi antar himpunan fuzzy pada variabel input menggunakan operator "And". Nilai α -predikat pada setiap aturan diperoleh setelah memasukkan input dari masing-masing variabel pada bagian anteseden. Nilai jumlah produksi ke-i (z_i) pada output aturan ke-i sesuai dengan persamaan linier yang terdapat pada konsekuen pada masing-masing rule. Hasil pembentukan rule sebagai berikut :

- [R1] IF permintaan RENDAH And persediaan SEDIKIT And biaya SEDIKIT
THEN jumlah produksi = permintaan – persediaan + 100
- [R2] IF permintaan RENDAH And persediaan SEDIKIT And biaya BANYAK
THEN jumlah produksi = permintaan – persediaan + 100
- [R3] IF permintaan RENDAH And persediaan SEDANG And biaya SEDIKIT
THEN jumlah produksi = 100
- [R4] IF permintaan RENDAH And persediaan SEDANG And biaya BANYAK
THEN jumlah produksi = 100
- [R5] IF permintaan RENDAH And persediaan BANYAK And biaya SEDIKIT
THEN jumlah produksi = 100

- [R6] IF permintaan RENDAH And persediaan BANYAK And biaya BANYAK THEN jumlah produksi = 100
- [R7] IF permintaan RENDAH And persediaan SEDIKIT And biaya SEDIKIT THEN jumlah produksi = permintaan
- [R8] IF permintaan RENDAH And persediaan SEDIKIT And biaya BANYAK THEN jumlah produksi = 1.2 permintaan
- [R9] IF permintaan RENDAH And persediaan SEDANG And biaya SEDIKIT THEN jumlah produksi = permintaan – persediaan + 125
- [R10] IF permintaan RENDAH And persediaan SEDANG And biaya BANYAK THEN jumlah produksi = permintaan – persediaan + 125
- [R11] IF permintaan RENDAH And persediaan BANYAK And biaya SEDIKIT THEN jumlah produksi = 100
- [R12] IF permintaan RENDAH And persediaan BANYAK And biaya BANYAK THEN jumlah produksi = 100
- [R13] IF permintaan RENDAH And persediaan SEDIKIT And biaya SEDIKIT THEN jumlah produksi = 250
- [R14] IF permintaan RENDAH And persediaan SEDIKIT And biaya BANYAK And kemampuan mesin TINGGI THEN jumlah produksi = 310
- [R15] IF permintaan RENDAH And persediaan SEDIKIT And biaya BANYAK And kemampuan mesin RENDAH THEN jumlah produksi = 320
- [R16] IF permintaan RENDAH And persediaan SEDANG And biaya SEDIKIT THEN jumlah produksi = 0.147 biaya
- [R17] IF permintaan RENDAH And persediaan SEDANG And biaya BANYAK THEN jumlah produksi = 0.147 biaya
- [R18] IF permintaan RENDAH And persediaan BANYAK And biaya SEDIKIT THEN jumlah produksi = permintaan – persediaan + 100
- [R19] IF permintaan RENDAH And persediaan BANYAK And biaya BANYAK THEN jumlah produksi = permintaan – persediaan + 100

Defuzifikasi

Untuk mendapatkan nilai *crisp* jumlah produksi dilakukan melalui proses defuzifikasi. Proses defuzifikasi dengan metode *mean weighted average* dilakukan dengan bantuan matlab 7.8. Sebagai contoh, untuk menguji jumlah produksi periode ke-2, data input yang diperlukan adalah jumlah perkiraan permintaan periode ke-3 yaitu 100, persediaan barang periode ke-2 yaitu 68, persediaan biaya produksi diasumsikan terdapat biaya minimum periode ke-2 yaitu Rp. 1.700.000,00, dan lama produksi diperkirakan kurang dari 7.2 jam sehingga hasil defuzifikasi menurut metode Sugeno diperoleh jumlah produksi 119 kardus dengan *error* 2.6 %.

Untuk menentukan jumlah produksi dalam upaya penyiapan penjualan pada periode ke-48 maka jumlah permintaan periode ke-48 diperkirakan dengan menggunakan regresi kuadratik dengan asumsi catatan pesanan permintaan periode 48 tidak ada dan kejadian lain yang mempengaruhi jumlah permintaan periode 48 tidak terprediksi. Hasil prediksi jumlah permintaan periode ke-48 adalah 267.3654, persediaan barang periode ke-47 adalah 162, persediaan biaya Rp. 2.100.000, kemampuan mesin 8 jam sehingga dihasilkan jumlah produksi 213 kardus.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan diperoleh kesimpulan bahwa :

- a. Sistem Inferensi fuzzy dengan metode Sugeno orde satu yang telah dibangun dapat memperkirakan jumlah produksi harian air minum dalam kemasan.
- b. Perkiraan jumlah permintaan pada periode berikutnya sebagai acuan penentuan perkiraan jumlah produksi dapat dilakukan dengan metode regresi kuadratik.

SARAN

Dalam upaya meningkatkan ketepatan dalam menentukan perkiraan produksi barang disarankan mengkaji lebih lanjut tentang parameter-parameter yang berpengaruh terhadap jumlah permintaan yang akan dijadikan acuan penentuan jumlah produksi periode berikutnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Cox, Earl. (1994), *The Fuzzy Systems Handbook Handbook* Prscitioner's Guide to Building, Using, and Maintaining : Academic Press,
- Jang, J.S.R, Sun, C.T, Mizutani, E (1997) *Neuro Fuzzy and Computing* , Prentice Hall International, Inc, Upper Saddle River, New Jersey.
- Kusumadewi, S dan Purnomo, Hari. (2010), *Aplikasi Logika Fuzzy untuk Pendukung Keputusan*, Graha Ilmu, Yogyakarta.
- Lipsey. (1995). *Pengantar Ekonomi Mikro. Alih Bahasa A Jaka Wasana dan Kirbrandoko*, Jakarta, Bina Aksara.
- Nasution, Arman Hakim. (2006), *Manajemen Industri*, Andi, Yogyakarta
- Zimmermann, H.J. (2000), *Fuzzy Set Theory and Its Applications*, Kluwer Academic Publishers, London.

KENDALI OPTIMAL PADA PENCEGAHAN WABAH FLU BURUNG DENGAN ELIMINASI, KARANTINA DAN PENGOBATAN

Taslima, Subchan, Erna Apriliani

Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

taslima_man@yahoo.com/subchan@matematika.its.ac.id/april@matematika.its.ac.id

Abstrak

Salah satu penyakit influenza yang berbahaya adalah influenza tipe A (flu burung). Pencegahan penyakit ini menjadi prioritas global karena berakibat kematian pada penderita. Pada paper ini akan diterapkan kendali optimal untuk menentukan kebijakan terbaik dalam mengatasi bahaya flu burung yaitu kebijakan eliminasi untuk populasi unggas, kebijakan karantina dan pengobatan untuk manusia. Kebijakan eliminasi dilakukan dengan upaya pemotongan, pemusnahan, dekontaminasi dan desinfeksi. Sedangkan kebijakan karantina dengan pencegahan penyebaran penyakit flu burung dari satu area ke area yang lain dengan pengawasan secara ketat terhadap setiap pergerakan unggas, peralatan peternakan dan lalu lintas perorangan agar tidak menjadi perantara dalam penyebaran virus. Dalam penelitian ini diperoleh bahwa kebijakan karantina lebih baik dilakukan selama penyebaran penyakit, sedangkan kebijakan eliminasi dan kebijakan pengobatan dilakukan di awal penyebaran penyakit. Selain itu kebijakan karantina biayanya lebih mahal dari pada kebijakan eliminasi dan kebijakan pengobatan. Pencegahan terhadap wabah flu burung tersebut menggunakan metode Prinsip Maksimum Pontryagin.

Kata Kunci : Flu burung, Kendali Optimal, Eliminasi, Karantina, Pengobatan.

PENDAHULUAN

Flu burung atau Avian Influenza sebagai salah satu penyakit yang berbahaya disebabkan oleh virus influenza tipe A. Virus ini termasuk family Orthomyxoviridae. Berdasarkan morfologinya, virus flu burung termasuk kelompok virus yang bersampul yaitu virus yang berbentuk ikosahedral atau heliks tetapi memiliki sampul luar semacam duri. Virus influenza yang terdapat pada manusia adalah H1N1, H2N2, H3N3, H5N1, H9N2, H1N2, H7N7, sedangkan pada unggas H5N1 dan N1N98. Strain yang sangat ganas dan menyebabkan flu burung adalah H5N1 (Rahayu, 2010).

Pertama kali virus flu burung ditemukan di Italia pada tahun 1878. Pandemi flu burung bersiklus sekitar 40 tahun. Sampai saat ini telah terjadi 3 kali pandemi di dunia yaitu di Spanyol pada tahun 1918 korban meninggal sebanyak 40 – 50 juta orang, di Asia pada tahun 1957 korban meninggal sebanyak 4 – 5 juta orang dan di Hongkong pada tahun 1967 korban meninggal sebanyak 1 juta orang. Sedangkan di Indonesia telah terjadi 256 kasus flu burung, dengan 151 orang diantara penderitanya meninggal dunia (Dyatmika, 2005).

Dampak flu burung tidak hanya korban jiwa, tetapi juga kerugian materi. Kerugian materi sangat dirasakan oleh pemilik/peternak unggas dan berpengaruh terhadap industri peternakan. Padahal industri peternakan unggas merupakan salah satu industri yang vital di Indonesia. Hal ini disebabkan kebutuhan daging dan telur unggas yang mempunyai gizi tinggi mengalami peningkatan setiap tahun. Industri perunggasan banyak menyerap tenaga kerja informal. Jika flu burung terjadi, maka unggas yang sudah terjangkit harus dimusnahkan. Pemusnahan unggas ini akan menghentikan industri peternakan dan berdampak pada pengangguran yang bertambah (World Health Organization, 2006).

Upaya pengendalian penyebaran virus flu burung dapat dilakukan dengan 2 cara, yaitu cara preventif dan cara konstruktif. Pemerintah Indonesia telah mengambil beberapa kebijakan preventif, diantaranya eliminasi pada unggas, pengobatan dan karantina pada manusia. Eliminasi H5N1 dapat dilakukan dengan pemusnahan unggas yang terinfeksi flu burung, vaksinasi pada unggas yang sehat. Sedangkan karantina manusia pada suatu daerah artinya semua kegiatan

masyarakat dihentikan dan tidak diperbolehkan keluar masuk kawasan tersebut kecuali pihak yang berkompeten. Tujuan karantina adalah untuk mencegah penyebaran penyakit flu burung mutan ke daerah lain (Rahayu,2010).

Pembasmian unggas harusnya hanya untuk unggas yang terserang virus flu burung. Jika semua unggas dimusnahkan akan berakibat rusaknya ekosistem dan hilangnya plasma nutfah, Begitu juga dengan karantina yang pelaksanaannya memerlukan biaya sangat tinggi. Dalam penelitian ini akan ditentukan bagaimana bentuk kendali, waktu dan biaya optimal pada kendali eliminasi, karantina dan pengobatan untuk pencegahan wabah flu burung, sehingga meminimalkan jumlah individu yang terinfeksi.

METODE PENELITIAN

Ada dua hal yang akan dibahas dalam penelitian ini yaitu analisis kestabilan model dan penyelesaian kendali optimal

Analisis Kestabilan Model

Analisis kestabilan diawali dengan menentukan titik kesetimbangan bebas penyakit maupun kesetimbangan endemik kemudian menentukan matrik Jacobian dan diakhiri dengan mencari nilai eigen dari matrik Jacobian tersebut.

Menyelesaikan Kendali Optimal

Menyelesaikan kendali optimal pada pencegahan wabah flu burung dengan eliminasi, karantina dan pengobatan menggunakan metode Prinsip Maksimum Pontryagin. Prosedur penyelesaian kendali optimal dengan menggunakan Prinsip Maksimum Pontryagin adalah sebagai berikut (Naidu, 2002):

Diberikan persamaan plant: $\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$

Diberikan indeks performansi: $J = S(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} V(x(t), u(t), t) dt$

Dan kondisi batas $x(t_0) = x_0$ dan $x(t_f) = x_f$ bebas.

Maka langkah-langkah penyelesaiannya adalah:

1. Bentuk fungsi Pontryagin $H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = V(x(t), u(t), t) + \lambda'(t)f(x(t), u(t), t)$
2. Minimumkan H terhadap semua vektor kontrol $u(t)$:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial u} \right)_* = 0 \text{ dan diperoleh } u^*(t) = h(x^*(t), \lambda^*(t), t)$$

3. Gunakan hasil dari langkah 2 ke dalam langkah 1 dan tentukan H^* yang optimal.

$$H^*(x^*(t), h(x^*(t), \lambda^*(t), t), \lambda^*(t), t) = H^*(x^*(t), \lambda^*(t), t)$$

4. Selesaikan sekumpulan $2n$ persamaan $\dot{x}^*(t) = + \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_*$ dan $\dot{\lambda}^*(t) = - \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)_*$

Dengan kondisi awal x_0 dan kondisi akhir $\left[H^* + \frac{\partial S}{\partial t} \right]_{t_f} \delta x_f + \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_* - \lambda^*(t) \right]_{t_f} \delta x_f = 0$

5. Untuk memperoleh kendali optimal, substitusikan solusi $x^*(t), \lambda^*(t)$ dari langkah 4 ke dalam ekspresi optimal kendali u^* pada langkah 2.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Model Matematika

Model pencegahan wabah flu burung menurut Eunok Jung,dkk (2009) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= c - bX - (1 - u_1(t))\omega XY \\ \frac{dY}{dt} &= (1 - u_1(t))\omega XY - (b + m)Y \\ \frac{dS}{dt} &= \alpha - \mu S - \beta_1 YS - (1 - u_2(t))\beta_2 HS \\ \frac{dB}{dt} &= \beta_1 YS - (\mu + d_1)B + (1 - u_3(t))\delta B \\ \frac{dH}{dt} &= (1 - u_1(t))\beta_2 HS - (\mu + d_2)H\end{aligned}\quad (1)$$

Dengan : X = burung susceptible, Y = burung terinfeksi flu burung, S = manusia susceptible, B = manusia terinfeksi flu burung liar, H = manusia terinfeksi flu burung mutan.

3.2 Analisa Kestabilan

Titik setimbang bebas penyakit maupun titik setimbang endemik diperoleh dari $\frac{dX}{dt} = 0, \frac{dY}{dt} = 0, \frac{dS}{dt} = 0, \frac{dB}{dt} = 0, \frac{dH}{dt} = 0$. Pada titik setimbang bebas penyakit diasumsikan bahwa tidak ada unggas yang infeksi artinya $Y = 0$, tidak ada manusia terinfeksi flu burung liar artinya $B = 0$ dan tidak ada manusia yang terinfeksi flu burung mutan artinya $H = 0$. Dengan mensubstitusikan $Y = 0, B = 0$ dan $H = 0$ kedalam persamaan (1) akan diperoleh $X = \frac{c}{b}$ dan

$S = \frac{\alpha}{\mu}$. Jadi titik kesetimbangan bebas penyakit tersebut adalah :

$$E_0 = (X, Y, S, B, H) = \left(\frac{c}{b}, 0, \frac{\alpha}{\mu}, 0, 0\right)\quad (2)$$

Untuk menentukan kestabilan titik setimbang bebas penyakit terlebih dahulu dicari matrik Jacobian. Misal didefinisikan :

$$\begin{aligned}\dot{X} &= f_1(X, Y, S, B, H) = c - bX - \omega XY \\ \dot{Y} &= f_2(X, Y, S, B, H) = \omega XY - (b + m)Y \\ \dot{S} &= f_3(X, Y, S, B, H) = \alpha - \mu S - \beta_1 YS - \beta_2 HS \\ \dot{B} &= f_4(X, Y, S, B, H) = \beta_1 YS - (\mu + d_1)B \\ \dot{H} &= f_5(X, Y, S, B, H) = \beta_2 HS - (\mu + d_2)H\end{aligned}$$

Pada titik setimbang $E_0 = \left(\frac{c}{b}, 0, \frac{\alpha}{\mu}, 0, 0\right)$ didapatkan matrik Jacobian sebagai berikut :

$$JE_0 = \begin{bmatrix} -b & -\frac{\omega c}{b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\omega c}{b} - (b+m) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu & 0 & -\frac{\beta_2 \alpha}{\mu} \\ 0 & \frac{\beta_1 \alpha}{\mu} & 0 & -(\mu + d_1 - 1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_2 \alpha}{\mu} - (\mu + d_2) \end{bmatrix}$$

Jenis kestabilan titik E_0 ditentukan dengan menganalisa nilai eigen JE_0 , maka diperoleh

$$\lambda_1 = -b < 0, \quad \lambda_2 = \frac{\omega c}{b} - (b+m), \quad \lambda_3 = -\mu < 0, \quad \lambda_4 = -(\mu + d_1 - 1),$$

$$\lambda_5 = (\mu + d_2) \left(\frac{\beta_2}{\mu + d_2} \frac{\alpha}{\mu} - 1 \right)$$

Sistem stabil jika $\frac{\omega c}{b} < b+m, \mu + d_1 > 1$ dan $\mu + d_2 > 0$.

Titik setimbang endemik dipengaruhi oleh populasi unggas dan manusia yang terinfeksi flu burung berarti $Y \neq 0, B \neq 0, H \neq 0$. Dari persamaan (1) dapat diperoleh titik kesetimbangan endemik yaitu

$$E_1 = (\bar{X}, \bar{Y}, \bar{S}, \bar{B}, \bar{H}) = \left(\frac{b+m}{\omega}, \frac{c}{b+m} - \frac{b}{\omega}, \frac{\mu + d_2}{\beta_2}, \frac{\beta_1(\omega c - b^2 - bm)(\mu + d_2)}{\omega(\mu + d_1 - 1)(b+m)}, \frac{\alpha}{\mu + d_2} - \frac{\mu}{\beta_2} - \frac{\beta_1}{\beta_2} \left(\frac{c\omega - b^2 - bm}{(b+m)\omega} \right) \right) \quad (3)$$

Matrik Jacobian disekitar titik setimbang endemik adalah :

$$JE_1 = \begin{bmatrix} -b - \omega \bar{Y} & -\omega \bar{X} & 0 & 0 & 0 \\ \omega \bar{Y} & \omega \bar{X} - (b+m) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_1 \bar{Y} & -\mu - \beta_1 \bar{Y} - \beta_2 \bar{H} & 0 & -\beta_2 \bar{S} \\ 0 & \beta_1 \bar{S} & \beta_1 \bar{Y} & -(\mu + d_1 - 1) & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 \bar{H} & 0 & \beta_2 \bar{S} - (\mu + d_2) \end{bmatrix}$$

Nilai eigen diperoleh dari $\det (JE_1 - \lambda I) = 0$. Sehingga $\lambda_1 = -\frac{\alpha \beta_2}{\mu + d_2} < 0, \lambda_2 = -(\mu + d_1 - 1),$

$$\lambda_3 = 0, \lambda_4 = \frac{\omega c}{b+m} + \frac{1}{b+m} \sqrt{\omega^2 c^2 + 4(b+m)^2 (b(b+m) - \omega c)}$$

$$\lambda_5 = \frac{\omega c}{b+m} - \frac{1}{b+m} \sqrt{\omega^2 c^2 + 4(b+m)^2 (b(b+m) - \omega c)}$$

Karena $\frac{\omega c}{b+m}$ dan $\frac{1}{b+m} \sqrt{\omega^2 c^2 + 4(b+m)^2 (b(b+m) - \omega c)}$ bernilai real positif maka system tersebut tidak stabil yang menyebabkan terjadinya endemik atau penyebaran virus flu burung liar pada unggas dan manusia. Salah satu cara untuk mengendalikan penyebaran virus secara optimal adalah pengendalian populasi unggas yang terinfeksi flu burung liar dengan eliminasi (u_1), mengkarantina manusia yang terinfeksi flu burung mutan (u_2) serta pengobatan pada manusia yang terinfeksi flu burung liar (u_3).

Kendali Optimal

Tujuan dari kendali optimal adalah untuk meminimalkan jumlah individu yang terinfeksi virus flu burung liar (B) dan flu burung mutan (H) dengan waktu dan biaya yang optimal. Sehingga

$$\text{indeks performansinya } J[u_1, u_2, u_3] = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left[B(t) + H(t) + \frac{B_1}{2} u_1^2(t) + \frac{B_2}{2} u_2^2(t) + \frac{B_3}{2} u_3^2(t) \right] dt \quad (4)$$

Berdasarkan Prinsip Maksimum Pontryagin, yang perlu dilakukan adalah

- Menentukan fungsi hamiltonian

$$H(x(t), u(t), t, \lambda) = f(x(t), u(t), t) + \lambda g(x(t), u(t), t)$$

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2} \left[B(t) + H(t) + \frac{B_1}{2} u_1^2(t) + \frac{B_2}{2} u_2^2(t) + \frac{B_3}{2} u_3^2(t) \right] \\ & + \lambda_1 (c - bX - (1 - u_1(t))\omega XY) + \lambda_2 ((1 - u_1(t))\omega XY - (b + m)) \\ & + \lambda_3 (\alpha - \mu S - \beta_1 YS - (1 - u_2(t))\beta_2 HS) + \lambda_4 (\beta_1 YS - (\mu + d_1)B + (1 - u_3(t))\delta B) \\ & + \lambda_5 ((1 - u_1(t))\beta_2 HS - (\mu + d_2)H). \end{aligned}$$

- Menentukan Kondisi Stasioner

Untuk menentukan kendali dicari kondisi stasioner yaitu $\frac{\partial H}{\partial u_i} = 0$ sehingga

$$u_1(t) = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)\omega XY}{B_1}, \quad u_2(t) = \frac{(\lambda_5 - \lambda_3)\beta_2 SH}{B_2} \quad \text{dan} \quad u_3(t) = \frac{(\lambda_4)\delta B}{B_3}.$$

- Menentukan State dan Co-state

Persamaan State dan co-state diperoleh dari $\dot{X}_i(t) = \frac{\partial H}{\partial X_i(t)}$ dan $\dot{\lambda}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial X_i(t)}$. Dengan

mensubstitusikan kendali yang diperoleh pada saat kondisi stasioner pada state dan co-state maka didapatkan kondisi yang optimal yaitu :

$$\dot{X}^* = c - bX - \left(1 - \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)\omega XY}{B_1}\right)\omega XY$$

$$\dot{Y}^* = \left(1 - \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)\omega XY}{B_1}\right)\omega XY - (b + m)$$

$$\dot{S}^* = \alpha - \mu S - \beta_1 YS - \left(1 - \frac{(\lambda_5 - \lambda_3)\beta_2 SH}{B_2}\right)\beta_2 HS$$

$$\dot{B}^* = (\beta_1 YS - (\mu + d_1)B) + \left(1 - \frac{(\lambda_4)\delta B}{B_3}\right)\delta B$$

$$\dot{H}^* = \left(1 - \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)\omega XY}{B_1}\right)\beta_2 HS - (\mu + d_2)H$$

$$\dot{\lambda}_1^* = \lambda_1 (b + \left(1 - \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)\omega XY}{B_1}\right)\omega XY) + \lambda_2 \left(-\omega \left(1 - \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)\omega XY}{B_1}\right)Y\right)$$

$$\dot{\lambda}_2^* = \lambda_1 \left(\omega \left(1 - \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)\omega XY}{B_1}\right)X\right) + \lambda_2 \left(-\omega X \left(1 - \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)\omega XY}{B_1}\right)\right)$$

$$\dot{\lambda}_3^* = \lambda_3 (\mu + \beta_1 Y + \left(1 - \frac{(\lambda_5 - \lambda_3)\beta_2 SH}{B_2}\right)\beta_2 H) + \lambda_4 (-\beta_1 Y) + \lambda_5 \left(-\beta_2 \left(1 - \frac{(\lambda_5 - \lambda_3)\beta_2 SH}{B_2}\right)H\right)$$

$$\dot{\lambda}_4^* = -(1 + \lambda_4 (\mu + d_1)) + \left(1 - \frac{(\lambda_4)\delta B}{B_3}\right)\delta$$

$$\dot{\lambda}_5^* = \lambda_3 \left(1 - \frac{(\lambda_5 - \lambda_3)\beta_2 SH}{B_2}\right) \beta_2 S + \lambda_5 \left(-\beta_2 \left(1 - \frac{(\lambda_5 - \lambda_3)\beta_2 SH}{B_2}\right) S\right) - 1$$

Karena terdapat 10 sistem persamaan differensial maka penyelesaian kendali optimal sulit diselesaikan secara analitik maka penyelesaian kendali optimal diselesaikan secara numerik, dengan mensimulasikan permasalahan kendali optimal yang akan diselesaikan dengan menggunakan software.

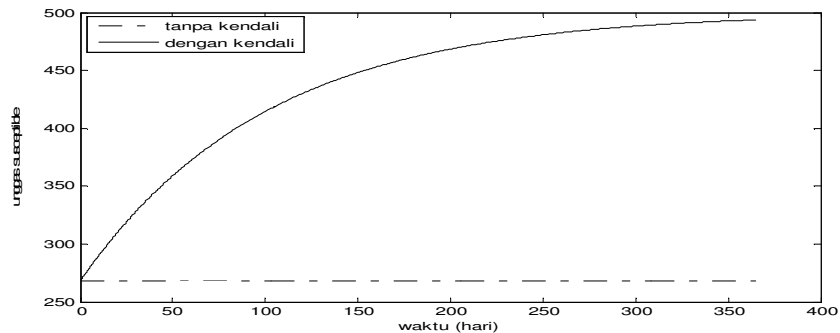
Simulasi dan Hasil Simulasi

Penyelesaian pencegahan wabah flu burung secara numerik dilakukan dengan menggunakan software. Kondisi awal $X(0)=268, Y(0)=21, S(0)=397, B(0)=16, H(0) =1$, batas bawah kendali $(u_1, u_2, u_3) = (0,0,0)$ dan batas atas kendali $(u_1, u_2, u_3) = (1,0.74,1)$. Nilai parameter disajikan dalam tabel berikut :

Tabel 1 : Nilai Parameter

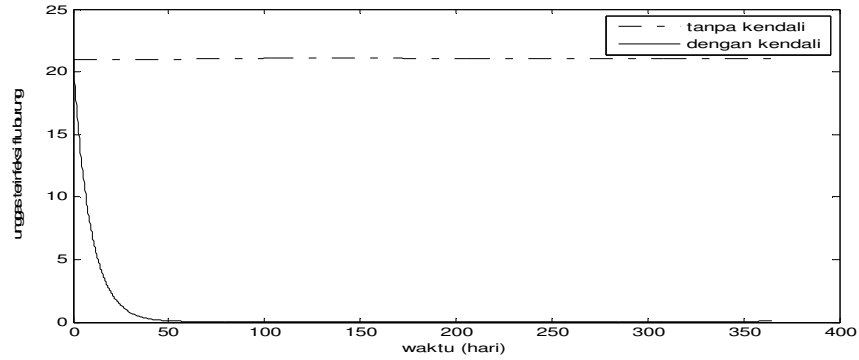
| No | Parameter | Nilai |
|----|-----------|---------|
| 1 | C | 5 |
| 2 | B | 0.01 |
| 3 | M | 0.1 |
| 4 | ω | 0.00041 |
| 5 | α | 2.7 |
| 6 | μ | 0.0027 |
| 7 | d_1 | 0.1 |
| 8 | d_2 | 0.07 |
| 9 | β_1 | 0.0002 |
| 10 | β_2 | 0.00028 |
| 11 | δ | 0.0005 |

(Sumber : Eunok Jung, dkk,2009)



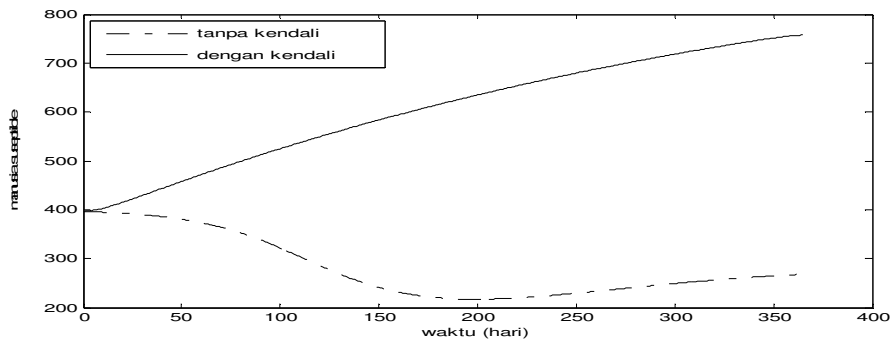
Gambar 1 : Populasi Unggas Susceptible

Pada Gambar 1 dalam waktu 365 hari jumlah unggas yang susceptible/sehat jika tidak dikendalikan tetap berjumlah sekitar 268, sedangkan jumlah unggas dengan kendali eliminasi terus bertambah yaitu 493.64.



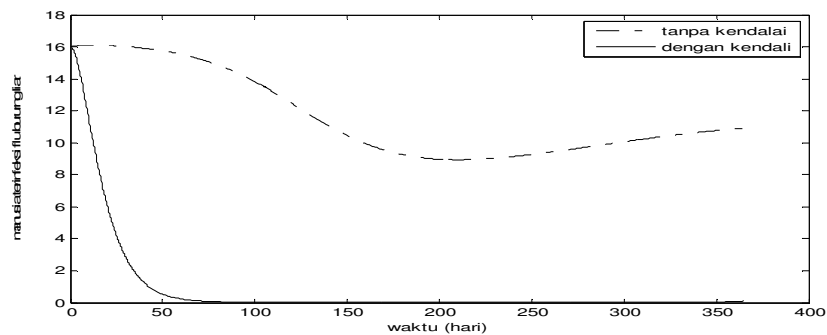
Gambar 2 : Populasi Unggas Terinfeksi Flu Burung

Pada Gambar 2 dalam waktu 365 hari jumlah unggas yang terinfeksi tanpa kendali hampir tetap yaitu 21 Sedangkan jumlah unggas yang terinfeksi jika dikendalikan dengan eliminasi terus berkurang.



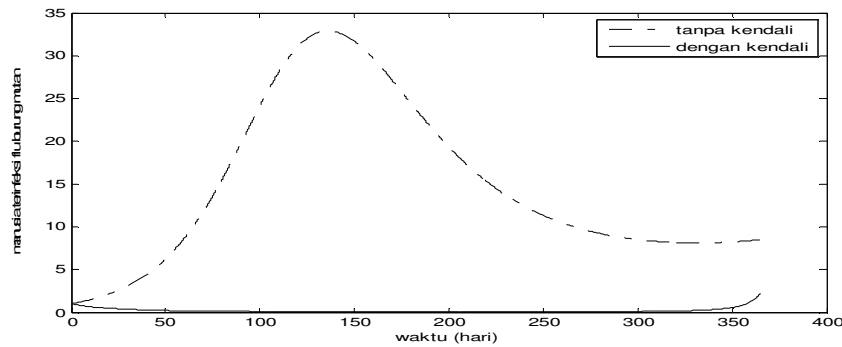
Gambar 3 : Populasi Manusia Susceptible

Pada Gambar 3 dalam waktu 365 hari jumlah manusia yang susceptible/sehat tanpa kendali terus berkurang. Sedangkan jumlah manusia susceptible yang dikendalikan dengan karantina terus bertambah mencapai 757.61.



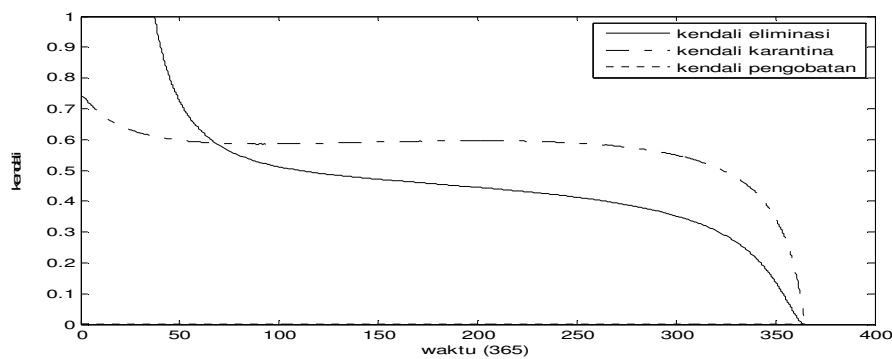
Gambar 4 : Populasi Manusia Terinfeksi Flu Burung Liar

Pada Gambar 4 dalam waktu 365 hari jumlah manusia yang terinfeksi flu burung liar tanpa kendali mengalami peningkatan mulai hari ke 222, tetapi jika dikendalikan dengan karantina dan pengobatan terus mengalami penurunan menuju titik 0.109.



Gambar 5 : Populasi Manusia Terinfeksi Flu Burung Mutan

Pada Gambar 5 dalam waktu 365 hari jumlah manusia yang terinfeksi flu burung mutan tanpa kendali mengalami peningkatan dengan kondisi awal 1.00 menjadi 8.47, sedangkan jika diberi kendali karantina jumlah manusia yang terinfeksi flu burung mutan berkurang.



Gambar 6 : Kendali Eliminasi, Kendali Karantina, Kendali Pengobatan

Pada Gambar 5 dalam waktu 365 hari kendali eliminasi dan pengobatan lebih baik diterapkan diawal pencegahan sedangkan kendali karantina diterapkan selama masa pencegahan.

KESIMPULAN

Model encegahan wabah flu burung untuk titik setimbang bebas penyakit $E_0 = (\frac{c}{b}, 0, \frac{\alpha}{\mu}, 0, 0)$ akan stabil jika $\frac{\omega c}{b} < b + m$, $\mu + d_1 > 1$ dan $\mu + d_2 > 0$, sedangkan untuk

$$E_1 = \left(\frac{b+m}{\omega}, \frac{c}{b+m} - \frac{b}{\omega}, \frac{\mu+d_2}{\beta_2}, \frac{\beta_1(c\omega - b^2 - bm)(\mu+d_2)}{\omega(\mu+d_1-1)(b+m)}, \frac{\alpha}{\mu+d_2} - \frac{\mu}{\beta_2} - \frac{\beta_1}{\beta_2} \left(\frac{c\omega - b^2 - bm}{(b+m)\omega} \right) \right)$$

yaitu titik setimbang endemik tidak stabil.

Kendali eliminasi lebih baik diterapkan diawal pencegahan karena dalam waktu 365 hari, pada hari ke 27 unggas yang terinfeksi flu burung mengalami penurunan dari 21 menjadi 1.07. Kendali karantina diterapkan selama masa pencegahan karena jumlah penurunan manusia yang terinfeksi flu burung mutan sangat lambat dan mengalami peningkatan setelah hari ke 211 menjadi 2.23 yang melebihi kondisi awal yaitu 1.00. Sedangkan untuk kendali pengobatan lebih baik diterapkan diawal pencegahan karena pada hari ke 101 sudah bernilai 0. Biaya kendali karantina 10 kali lebih mahal dibandingkan dengan kendali eliminasi dan 2 kali lebih mahal dari pengobatan.

DAFTAR PUSTAKA

- Dyatmika. (2005). *Informasi Tentang Flu Burung*. http://www.dyatmika.org/id/_fluburung.htm. Diakses pada tanggal 1 Desember 2010.
- Eunok Jung, Shingo Iwani, Yasuhiro Takeuchi, Tae Chang. (2009). “ Optimal Control Strategi for Prevention of Avian Influenza Epidemic ”, *Teoretical Biology*, Vol.260,hal.220-229
- Naidu, D.S.(2002). *Optimal Control Systems*, CRC PRESS, NewYork
- Rahayu,I.D.(2010). *Penyakit Viral (AI dan POX)*. <http://imbang.staff.umm.ac.id> diakses 1 Desember 2010
- World health organization, (2009). H₅N₁ Avian Influenza : Timeline of major events. <http://www.ns.ui.ac.id>. Diakses pada tanggal 1 Desember 2010

PENGARUH FAKTOR PERTUMBUHAN POPULASI TERHADAP EPIDEMI DEMAM BERDARAH DENGUE

Kusbudiono Dan Basuki Widodo

Jurusan Matematika ITS Surabaya

Abstrak

Demam Berdarah Dengue telah menjadi salah satu penyakit yang tergolong epidemik dan endemik serta belum ditemukan obatnya. Pada daerah dengan tingkat kepadatan penduduk tinggi tingkat penyebaran juga akan semakin tinggi. Salah satu model pertumbuhan penduduk adalah model pertumbuhan populasi logistik akan dapat meramalkan tingkat kepadatan penduduk. Selama ini antara pertumbuhan penduduk dengan epidemik suatu penyakit dianggap sebagai sesuatu yang terpisah. Oleh karena itu, pada kesempatan kali ini penulis akan mencoba mengaitkan antara laju pertumbuhan populasi dari model pertumbuhan populasi logistik dengan epidemik penyakit demam berdarah Dengue. Metode penelitian pada tesis ini adalah studi pustaka dan simulasi model, nantinya akan dikaji model pertumbuhan populasi logistik. Selain itu juga akan dibahas kaitan antara pertumbuhan populasi dengan epidemik penyakit demam berdarah Dengue. Hasil dari penelitian ini adalah penyelesaian dan simulasi model pertumbuhan logistik dan model epidemik penyakit demam berdarah Dengue. Selain itu juga dihasilkan bahwa laju pertumbuhan populasi berpengaruh dalam epidemik penyakit demam berdarah Dengue.

Kata kunci: laju pertumbuhan populasi, model pertumbuhan populasi logistik

PENDAHULUAN

Perubahan jumlah populasi populasi setiap waktu merupakan salah satu penanda terjadinya pertumbuhan populasi yang dipengaruhi oleh jumlah kelahiran, kematian dan migrasi. Salah satu model pertumbuhan adalah model pertumbuhan kontinu khususnya model logistik. Dimana model pertumbuhan logistik tersebut tentunya mempunyai kelebihan dan kekurangan. Dengan diketahuinya banyaknya kelahiran, kematian dan migrasi maka laju perubahan populasi dapat dihitung. Kembali pada model pertumbuhan logistik, model ini merupakan pengembangan dari model pertumbuhan eksponensial yang pertama kali dicetuskan oleh Maltus. Model pertumbuhan logistik ini pertama kali dicetuskan oleh Pierre Velhust pada tahun 1838.(Muchyidin, 2009)

Salah satu contoh terapan model matematika yang diambil dalam penelitian ini adalah bidang kesehatan, yaitu terjadinya penyebaran penyakit demam berdarah. Penyakit demam berdarah Dengue merupakan salah satu penyakit menular yang dapat menimbulkan Kejadian Luar Biasa / wabah. Nyamuk penularnya (*Aedes aegypti*) dan virus Dengue tersebar luas, sehingga penularan penyakit demam berdarah dengue terjadi di semua tempat / wilayah yang terdapat nyamuk penular penyakit tersebut. (Agushybana, 2005)

Untuk itu perlu dikembangkan suatu sistem surveilans yang didukung oleh sistem komputer dan teknologi informasi. Sebelum digunakan, diberikan pelatihan kepada para tenaga yang akan mengoperasikannya.(Agushybana, 2005). Salah satu alat untuk menunjang sistem tersebut adalah model matematika yang berbentuk sistem persamaan differensial biasa order satu. Dalam penelitian ini akan dilakukan simulasi dan analisa dengan menyelesaikan model tersebut secara numerik dengan metode Runge-Kutta.

Pada daerah dengan tingkat kepadatan penduduk tinggi maka akan meningkatkan angka kejadian. (Djallaluddin dkk, 2004). Laju kelahiran dan kematian tidak hanya berpengaruh terhadap perubahan jumlah populasi. Akan tetapi keduanya juga berpengaruh terhadap epidemik penyakit.

Salah satunya adalah penyakit demam berdarah Dengue. Selama ini antara pertumbuhan penduduk dengan epidemik suatu penyakit dianggap sebagai sesuatu yang terpisah. Oleh karena itu, pada kesempatan kali ini penulis akan mencoba mengaitkan antara laju pertumbuhan populasi dari model pertumbuhan populasi logistik dengan epidemi penyakit demam berdarah Dengue.

Pada bagian awal akan dikaji macam-macam model pertumbuhan populasi. Selanjutnya dari bahasan mengenai pertumbuhan populasi penduduk ini diperoleh permasalahan sebagai berikut

- a. Bagaimana pengaruh laju pertumbuhan logistik terhadap dinamika penyebaran penyakit demam berdarah Dengue?
- b. Bagaimana penyelesaian dan simulasi model pertumbuhan logistik dan model penyebaran penyakit demam berdarah?

Tujuan utama dari penulisan tugas akhir ini adalah untuk menganalisa model pertumbuhan populasi dan kaitannya dengan epidemi penyakit demam berdarah. Untuk mencapai tujuan tersebut, terlebih dahulu akan dikaji model pertumbuhan populasi kontinu yang didalamnya membahas model pertumbuhan eksponensial dan logistik kemudian dikaji juga model penyebaran demam berdarah. Tujuan berikutnya adalah dari data-data yang diperoleh dilakukan simulasi dengan terlebih dahulu membuat program penyelesaian dari model logistik dan model penyebaran demam berdarah tersebut.

Manfaat yang dapat diperoleh dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

- a. bagi peneliti akan diperoleh tambahan informasi mengenai pengaruh dari laju pertumbuhan penduduk terhadap penyebaran penyakit demam berdarah dengue,
- b. bagi Dinas Kesehatan Kabupaten khususnya puskesmas puskesmas dengan menggunakan metode pada penelitian ini akan diperoleh taksiran jumlah penderita demam berdarah Dengue.

METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini yaitu metode kajian pustaka dengan melakukan studi literature dan pengumpulan referensi mengenai teori-teori yang mendukung penyelesaian penelitian ini, antara lain :

- a. penyakit demam berdarah dengue,
- b. model matematika dari pertumbuhan logistik,
- c. model matematika dari penyebaran penyakit demam berdarah dengue,
- d. penyelesaian dari model matematika penyebaran penyakit demam berdarah.

ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Model Pertumbuhan Populasi Logistik

Model pertumbuhan populasi logistik ini merupakan penyempurnaan dari model pertumbuhan eksponensial diatas. Pada model ini jumlah populasi dipengaruhi oleh besar kecilnya daya dukung lingkungan seperti suplai makanan, tempat tinggal, kualitas bangunan dan lain sebagainya. Dengan hal tersebut diharapkan model ini mempunyai penyimpangan data populasi yang sangat kecil atau mempunyai kemiripan dengan data yang sebenarnya.

Untuk mengkonstruksi model pertumbuhan ini diasumsikan bahwa besarnya perubahan populasi (Δt) dalam selang waktu Δt sebanding dengan:

(1) banyaknya populasi pada saat t , $y(t)$

(2) selang waktu Δt

(3) proporsi “sisanya” banyaknya individu dalam populasi yang belum digunakan $(1 - \frac{y}{K})$. Dengan K

adalah jumlah maksimum banyaknya individu dalam suatu populasi.

Sehingga dari asumsi-asumsi diatas diperoleh hubungan $\Delta y(t) \propto y(t) \left(1 - \frac{y(t)}{K}\right) \Delta t$ yang berarti

$$\Delta y(t) = ry(t) \left(1 - \frac{y}{K} \right) \Delta t \quad (3.1)$$

dengan r merupakan konstanta kesebandingan. Hasil tersebut memberikan laju pertumbuhan populasi logistik sebagai berikut

$$\frac{dy}{dt} = ry(t) \left(1 - \frac{y(t)}{K} \right) \quad (3.2)$$

Dengan cara yang sama pada persamaan pertumbuhan eksponensial didapat solusi khusus persamaan (3.2)

$$y(t) = \frac{Ky_0}{(K - y_0)e^{-rt} + y_0} \quad (3.3)$$

dari persamaan (3.3) untuk $t \rightarrow \infty$ didapat

$$y_{t \rightarrow \infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Ky_0}{(K - y_0)e^{-rt} + y_0} = K \quad (3.4)$$

Hal tersebut berarti untuk jangka waktu yang sangat lama terdapat jumlah maksimum dari populasi tersebut yang membatasi pertumbuhan populasinya.

Sebagai ilustrasi akan dilakukan simulasi model dengan menggunakan data penduduk Indonesia antara tahun 1961 -2010 yang ditunjukkan oleh tabel 1.

Tabel 1. Daftar Jumlah Penduduk Indonesia

| Tahun | Jumlah Penduduk Indonesia |
|-------|---------------------------|
| 1961 | 97.100.000 |
| 1971 | 119.208.229 |
| 1980 | 147.490.298 |
| 1990 | 179.378.946 |
| 2000 | 205.132.458 |
| 2010 | 237.556.363 |

Dari tabel 1. terlihat bahwa dari mulai tahun 1961-2010 jumlah penduduk Indonesia mengalami kenaikan. Secara umum terlihat dari awal tahun pada tabel bila dibandingkan dengan akhir tahun pada tabel telah terjadi kenaikan jumlah penduduk.

Untuk menentukan model logistik dengan data jumlah penduduk Indonesia pada tabel 1, terlebih dahulu harus diketahui nilai K dan r . Salah satu caranya adalah melakukan pelinieran solusi persamaan logistik pada persamaan (3.3). Pelinieran solusi tersebut dapat menggunakan metode *nonlinier least squares estimation* yang memenuhi persamaan berikut:

$$y_i = \frac{\beta_1}{1 + e^{\beta_2 + \beta_3 t}} + \varepsilon_i \quad (3.5)$$

dengan y_i merupakan jumlah populasi pada saat t , β_1 adalah nilai asimtotik pertumbuhan populasi, β_2 jumlah populasi pada saat $t = 0$ dan β_3 kontrol laju pertumbuhan populasi. Pada tabel 1, jumlah penduduk Indonesia masih berada dibawah 400.000.000, dengan demikian dapat dipilih nilai $\beta_1 = 400.000.000$. Selanjutnya dimisalkan $t = 0$ adalah tahun 1961 dengan satuan waktu 10 tahun kemudian substitusikan kedalam persamaan (3.5) dan menggunakan nilai $y_0 = 97.100.000$ dari data tabel 1 serta diasumsikan error adalah 0, maka diperoleh

$$\beta_2 = 1,137 \quad (3.6)$$

dengan cara yang sama, untuk $t_1 = 1$ pada tahun 1971 diperoleh $\beta_3 = -0,281$. Dan dengan memadankan persamaan (3.3) dengan persamaan (3.5) diperoleh

$$K = 400.000.000$$

$$r = 0,281$$
(3.7)

Selanjutnya dengan mensubstitusikan nilai pada persamaan (3.7) kedalam persamaan (3.3) serta mensubstitusikan persamaan (3.6) dan (3.7) kedalam persamaan (3.5), diperoleh

$$y(t) = \frac{400.000.000 * 97.100.000}{(250.000.000 - 97.100.000)e^{-0,281t} + 97.100.000}$$
(3.8)

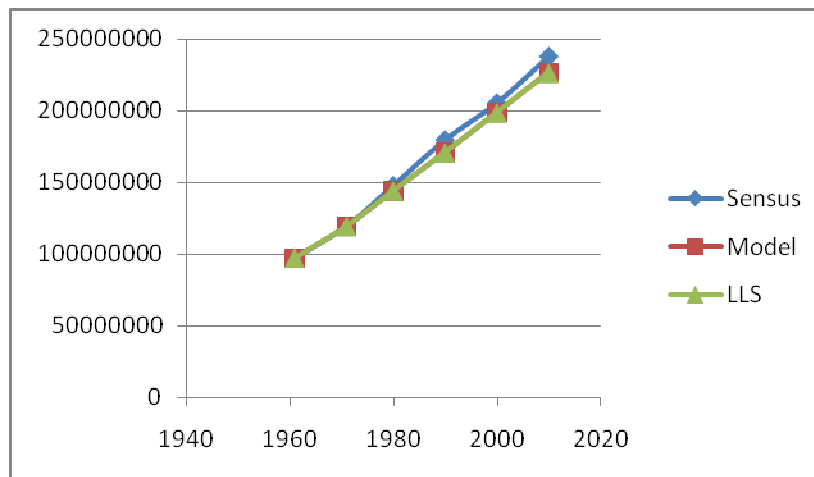
untuk persamaan logistik dan

$$y(t) = \frac{400.000.000}{1 + e^{0,454 - 0,0361t}}$$
(3.9)

untuk persamaan logistic least square.

Tabel 2. Daftar Perbandingan Jumlah Penduduk Indonesia Hasil Sensus dan Hasil Model

| Tahun | Sensus | Model | LLS |
|-------|-------------|-------------|-------------|
| 1961 | 97.100.000 | 97.100.000 | 97.100.000 |
| 1971 | 119.208.229 | 119.189.020 | 119.191.686 |
| 1980 | 147.490.298 | 141.647.836 | 141.650.460 |
| 1990 | 179.378.946 | 163.063.247 | 163.065.670 |
| 2000 | 205.132.458 | 182.269.870 | 182.271.981 |
| 2010 | 237.556.363 | 198.571.521 | 198.573.267 |



Gambar 1. Grafik Perbandingan Jumlah Penduduk Indonesia Hasil Sensus dan Hasil Model

Dari persamaan (3.8) dan (3.9) diatas diperoleh jumlah taksiran model pertumbuhan logistik seperti pada tabel diatas. Dari tabel (2) maupun seperti terlihat dari gambar (1) diatas, model pertumbuhan logistik dan metode LLS cukup signifikan untuk menaksir pertumbuhan populasi antara tahun 1961-2010.

Kajian Model Penyebaran Demam Berdarah Dengue Model Matematika

Model transmisi demam berdarah Dengue yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} S^h &= \alpha N_T - \frac{b\beta_h}{N_T} S^h I^v - \mu_h S^h \\
 \frac{d}{dt} I^h &= \frac{b\beta_h}{N_T} S^h I^v - (\mu_h + r) I^h \\
 \frac{d}{dt} R^h &= r I^h - \mu_h R^h \\
 \frac{d}{dt} S^v &= D - \frac{b\beta_v}{N_T} S^v I^h - \mu_v S^v \\
 \frac{d}{dt} I^v &= \frac{b\beta_v}{N_T} S^v I^h - \mu_v I^v
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Dengan kondisi-kondisi:

$$N_T = S^h + I^h + R^h \text{ dan } N_v = S^v + I^v \tag{3.11}$$

dimana:

- S^h : sub populasi sehat yang dapat terinfeksi demam berdarah Dengue,
- I^h : sub populasi individu yang terinfeksi oleh virus demam berdarah Dengue,
- R^h : sub populasi individu yang sembuh dari penyakit demam berdarah Dengue,
- S^v : sub populasi nyamuk sehat yang rentan terinfeksi,
- I^v : sub populasi nyamuk yang terinfeksi.

Jumlah total populasi diasumsikan konstan untuk kedua populasi manusia dan vektor. Jadi tingkat perubahan bagi manusia total dan populasi vektor sama dengan nol. Untuk populasi manusia diperoleh $\lambda = \mu_h$. Sedangkan jumlah populasi vektor adalah $N_v = \frac{D}{\mu_v}$. Kemudian dengan

memisalkan $S = \frac{S^h}{N_T}, I = \frac{I^h}{N_T}, R = \frac{R^h}{N_T}, S_v = \frac{S^v}{N_v}$ dan $I_v = \frac{I^v}{N_v}$ persamaan (3.10) dinormalkan menjadi

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \lambda - \gamma_h S I_v - \mu_h S \\
 \frac{dI}{dt} &= \gamma_h S I_v - (\mu_h + r) I \\
 \frac{dI_v}{dt} &= \gamma_v (1 - I_v) I - \mu_v I_v
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

dengan $\gamma_v = b\beta_v$ dan $\gamma_h = b\beta_h n$ untuk $n = \frac{D/\mu_v}{N_T}$ dan semuanya memenuhi kondisi $S + I + R = 1$ dan $S_v + I_v = 1$.

Hubungan Pertumbuhan Populasi dengan Epidemologi Demam Berdarah Dengue. Menentukan Laju Pertumbuhan Penduduk

Laju pertumbuhan penduduk berhubungan erat dengan dengan jumlah kelahiran dan kematian pada suatu populasi. Untuk menentukan laju pertumbuhan penduduk yang dapat

digunakan sebagai acuan memprediksi dinamika penduduk dimasa yang akan datang memerlukan data relatif homogen. Selanjutnya dari data laju pertumbuhan ini akan diolah sebagai informasi

pada model epidemi penyakit demam berdarah Dengue. Misalkan $r(t) = \frac{dN/dt}{N}$ merupakan laju pertumbuhan yang bergantung pada waktu. Untuk mengestimasi laju pertumbuhan populasi $r(t)$ dengan interpolasi linier dari data suatu populasi dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut:

- a) Misalkan N_i dan N_{i+1} adalah ukuran sensus yang berurutan dari jumlah populasi saat t_i dan t_{i+1} . Dengan $\Delta N = N_{i+1} - N_i$, $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ dan $\delta N = N(t + \delta t) - N(t)$,
- b) jika $\Delta t = t_i - t_{i+1}$, $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{\delta N}{\delta t}$, maka diperoleh estimasi $r(t) \cong \frac{\Delta N}{\Delta t N(t)}$,
- c) aproksimasi yang baik diperoleh dengan mengganti $N(t)$ dengan $N\left(t + \frac{\delta t}{2}\right)$.

Selanjutnya persamaan pada pernyataan ke-2 diatas dapat ditulis dalam bentuk $r(t) \cong \left(\frac{\Delta t}{\Delta N} N(t)\right)^{-1}$ dan dengan menggunakan deret Taylor diperoleh $N\left(t + \frac{\delta t}{2}\right) = N(t) + \frac{\delta t}{2} \frac{dN}{dt}$.

Dan berdasarkan persamaan diatas, laju pertumbuhan penduduk dapat diaproksimasi dengan persamaan berikut:

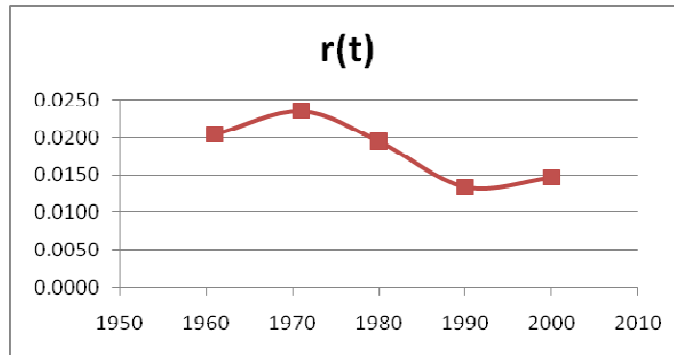
$$r(t) \cong \left(\frac{\delta t}{2} + \frac{N(t)\Delta t}{\Delta N}\right)^{-1} \tag{3.13}$$

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (3.13) dan data pada tabel (1) didapat data $r(t)$ pada tabel 3. Dari tabel (3) terlihat bahwa laju pertumbuhan penduduk Indonesia antara tahun 1961-2010 bernilai positif. Hal tersebut berarti bahwa pada kurun waktu tersebut telah terjadi kenaikan jumlah penduduk. Sedangkan dari gambar (2) tampak bahwa laju pertumbuhan memiliki kecenderungan turun dengan laju pertumbuhan tertinggi terjadi pada tahun 1971 dan terendah terjadi pada tahun 1990. Turunnya laju pertumbuhan ini menggambarkan jumlah penduduk Indonesia meskipun semakin bertambah tetapi pertambahannya semakin sedikit.

Selanjutnya apabila dilihat lebih teliti terlihat laju pertumbuhan penduduk pada tahun 1961-1971 memiliki kecenderungan naik. Sedangkan tahun 1971-1990 memiliki kecenderungan turun. Penurunan laju pertumbuhan penduduk ini dipengaruhi oleh berbagai faktor salah satunya adalah kesadaran dalam merencanakan kelahiran anak. Selain itu juga penundaan usia perkawinan dengan alasan pendidikan dan tentu saja jumlah kematian dan kelahiran juga ikut berkontribusi terhadap penurunan laju pertumbuhan penduduk ini. Akan tetapi mulai tahun 1990 mulai terjadi kenaikan laju pertumbuhan.

Tabel 3. Laju Pertumbuhan Penduduk Indonesia Tahun 1961 – 2010

| Tahun | Jumlah Penduduk | Nilai $r(t)$ |
|-------|-----------------|--------------|
| 1961 | 97.100.000 | 0,0204 |
| 1971 | 119.208.229 | 0,0236 |
| 1980 | 147.490.298 | 0,0195 |
| 1990 | 179.378.946 | 0,0134 |
| 2000 | 205.132.458 | 0,0134 |
| 2010 | 237.556.363 | |



Gambar 2. Grafik Laju Pertumbuhan Penduduk Indonesia

Simulasi Numerik Kaitan Laju Pertumbuhan Penduduk dan Epidemi Demam Berdara Dengue.

Berikut ini disajikan simulasi numerik berikut hasilnya untuk beberapa kondisi parameter tertentu.

Keterangan:

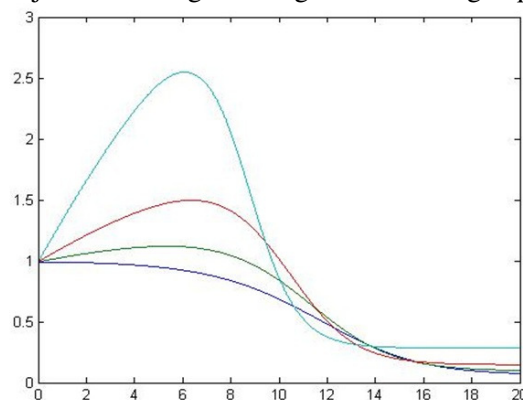
- (1) Garis warna ungu, ketika kelahiran dianggap masih normal.
- (2) Garis warna hijau, ketika kelahiran naik dua kali dari keadaan normal.
- (3) Garis warna merah, ketika kelahiran naik empat kali dari keadaan normal.
- (4) Garis biru, ketika kelahiran naik sepuluh kali dari keadaan normal.

dari gambar (3), dengan menggunakan parameter data saat angka kelahiran dan kematian sama, kemudian sejalan dengan waktu populasi S turun menuju ke titik kesetimbangan. Pada saat kelahiran dinaikkan menjadi dua kali lipatnya, jumlah I dan I_v tidak mengalami kenaikan yang signifikan seperti yang terlihat pada gambar (4) dan gambar (5). Juga terlihat seiring dengan berjalannya waktu jumlah I dan I_v cenderung mengalami kenaikan yang cukup signifikan jika dibandingkan dengan saat kelahiran berada dalam keadaan normal. Begitu pula saat kelahiran dinaikkan menjadi sepuluh kali lipat.

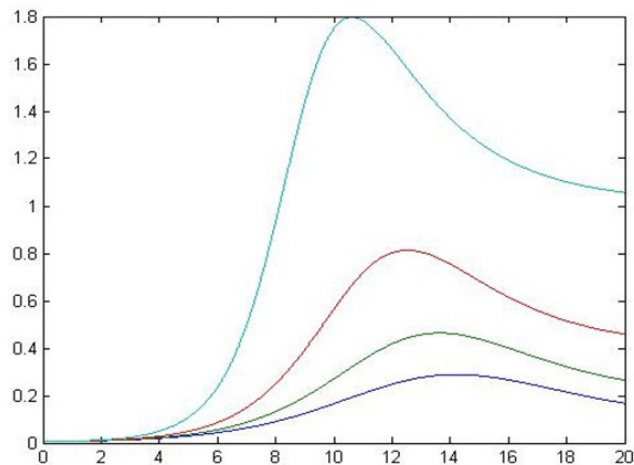
KESIMPULAN

Model pertumbuhan logistik merupakan penyempurnaan dari model ekponensial. Hasil estimasi dengan model ini mempunyai penyimpangan tidak sebesar model ekponensial. Jumlah populasi menurut model ini akan selalu menuju ke suatu nilai yang disebut carrying capacity.

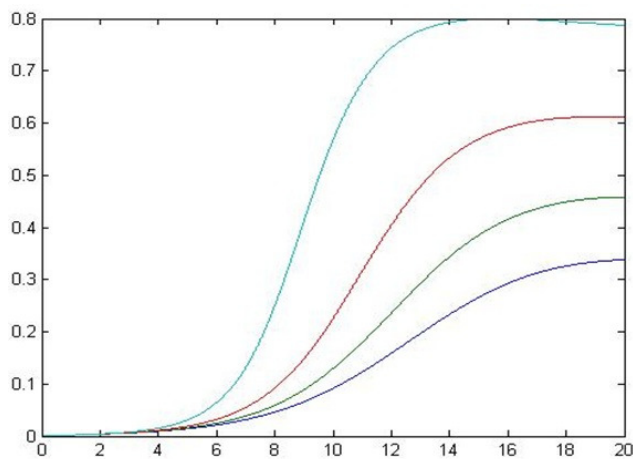
Pada model epidemi demam berdarah dapat disimpulkan bahwa jika laju pertumbuhan membesar, maka peluang jumlah penduduk yang terindikasi terinfeksi demam berdarah juga akan membesar. Namun jika laju pertumbuhan penduduk tinggi, individu menjadi sehat mempunyai peluang yang lebih besar jika dibandingkan dengan model dengan peluang terinfeksi konstan.



Gambar 3. Grafik Simulasi Epidemi Demam Berdarah Untuk S



Gambar 4. Grafik Simulasi Epidem Demam Berdarah Untuk I



Gambar 4. Grafik Simulasi Epidem Demam Berdarah Untuk I_v

SARAN

Untuk menghasilkan estimasi suatu populasi dengan menggunakan model pertumbuhan populasi logistik harus dipilih data jumlah populasi dengan jumlah migrasi yang tidak terlalu besar. Untuk mengkaitkan laju pertumbuhan dengan epidemi demam berdarah, diperlukan data yang lebih lengkap dari data sekarang.

DAFTAR PUSTAKA

Agushybana, F. dan Purnami, C. T. (2007), Sistem Surveilans Demam Berdarah Dengue (DBD) Berbasis Komputer untuk Perencanaan, Pencegahan dan Pemberantasan DBD di Kota Semarang, INOVASI, Vol. 4, hal. 55-60

Dinata, A., (2006), Pengendalian Terpadu Nyamuk Demam Berdarah., <http://www.litbang.depkes.go.id/lokaciamis/artikel/demamberdaraharda.htm>. 21 Nopember 2006

Djallalluddin, Hasni, H.B., Riana, W. dan Lisda, H. (2004), Gambaran Penderita Pada Kejadian Luar Biasa Demam Berdarah Dengue Di Kabupaten Banjar Dan Kota Banjarbaru Tahun 2001., DEXA MEDIA., No. 2, Vol. 17, hal. 8591

Graham, R.R., Juffrie, M., Tan, R., Hayes, C.G., Laksono, I., Ma'roef, C., Sutaryo, Erlin, Porter,

- K.R. dan Halstead, S.B. (1999), A prospective Seroepidemiologic Study on Dengue in Children Four to Nine Years of Age in Yogyakarta, Indonesia. *Studies in 1995-1996*, Am. J. Trop. Med. Hyg., Vol. 61, No. 3, hal. 412-419.
- Guzman, M.G. dan Kouri, G. (2002), *Dengue: an update*, The Lancet Infectious Diseases., Januari 2, 2002.
- Kristina, Isminah dan Wulandari, L. (2004), *Kajian Masalah Kesehatan: Demam Berdarah Dengue*, Badan Penelitian dan Pengembangan Kesehatan, Departemen Kesehatan, Jakarta.
- Muchyidin, A. (2009), *Model Pertumbuhan Populasi dan Kaitannya dengan Epidemi Penyakit Tuberkolosis*, Tesis Magister, Institut Teknologi Bandung, Bandung.
- Nuraini, N., Soewono, E. dan Sidarto, K.A. (2007), *Mathematical Model of Dengue Disease Transmission with Severe DHF Compartment*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc, Vol. 30, No. 2. hal. 143-157
- Pongsumpun, P. (2006), *Transmission Model for Dengue Disease With and Without The Effect of Extrinsic Incubation Period* , KMITL sci. Tech. J., Vol. 6, No. 2. hal. 74-82
- Purnomo, K.D. (2001), *Model Pertumbuhan Populasi dengan Memodifikasi Model Pertumbuhan Logistik*, Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika, Vol. 1, No. 1, hal. 21-29
- Santoso, W. (1994), *Persamaan Differensial Biasa dengan Penerapan Modern*, Erlangga, Jakarta.
- Timuneno, H.M., Utomo, R.H.S. dan Widowati (2007), *Model Pertumbuhan Logistik dengan Waktu Tunda*, Jurnal Matematika, Vol. 11, No. 1, hal. 4351
- Utama, A., (2004), *Dengue, Permasalahan dan Solusinya*, Lembaga Ilmu Pengetahuan Indonesia. World Health Organizaton (1997), *Dengue Haemorrhagic Fever: Diagnosis, Treatment, Prevention and Control*, Geneva.

Kusbudiono / Pengaruh Faktor Pertumbuhan

DIGRAF EKSENTRIK DARI GRAF COCKTAIL PARTY

Nugroho Arif Sudibyo¹, Sri Kuntari², dan Tri Atmojo Kusmayadi³

^{1,2,3}Jurusan Matematika FMIPA UNS
Email: nugroho_sudibyo@yahoo.com

Abstrak

Misal G adalah suatu graf dengan himpunan *vertex* $V(G)$ dan himpunan *edge* $E(G)$. Jarak dari *vertex* u ke *vertex* v di G , dinotasikan $d(u,v)$, adalah panjang dari path terpendek dari *vertex* u ke v . Eksentrisitas *vertex* u dalam graf G adalah jarak maksimum dari *vertex* u ke sebarang *vertex* yang lain di G , dinotasikan $e(u)$. *Vertex* v adalah suatu *vertex* eksentrik dari u jika $d(u,v) = e(u)$. Digraf eksentrik $ED(G)$ dari suatu graf G adalah suatu graf yang mempunyai himpunan *vertex* yang sama dengan himpunan *vertex* G , dan terdapat suatu *arc* (*edge* berarah) yang menghubungkan *vertex* u ke v jika v adalah suatu *vertex* eksentrik dari u . Dalam makalah ini diselidiki digraf eksentrik dari suatu kelas graf yaitu graf *cocktail party* $H_{m,n}$, untuk $m = 2$.

Kata kunci : eksentrisitas, digraf eksentrik, graf *cocktail party*

PENDAHULUAN

Teori graf merupakan cabang ilmu matematika yang menarik dan banyak dikembangkan (lihat [3]). Teori graf dapat diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari, seperti masalah transportasi, masalah lalu lintas, dan lain sebagainya. Sebagai contoh teori graf dapat diaplikasikan untuk menentukan kota terjauh dengan lintasan terpendek dari suatu kota ke kota lain di suatu daerah. Untuk menyelesaikan penentuan lintasan terpendek dapat digunakan suatu konsep digraf eksentrik, dengan *vertex* adalah kota dan jalan yang menghubungkan dua kota adalah *edge*.

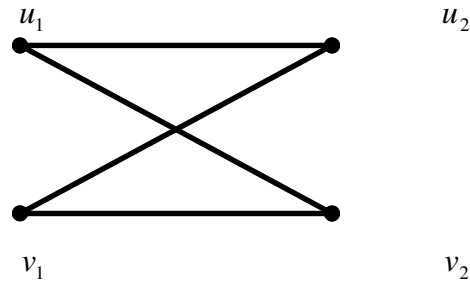
Misalkan G adalah graf yang memiliki himpunan *vertex* $V(G)$ dan himpunan *edge* $E(G)$. Jarak (*distance*) dari *vertex* u ke v di G adalah panjang lintasan (*path*) terpendek dari *vertex* u ke v , dinotasikan dengan $d(u,v)$. Jika tidak ada lintasan yang menghubungkan *vertex* u dan v , maka $d(u,v) = \infty$. Eksentrisitas (*eccentricity*) *vertex* u pada graf G , dinotasikan $e(u)$, adalah jarak terjauh (lintasan terpendek maksimum) dari *vertex* u ke setiap *vertex* di G . Untuk pengertian di atas, dapat dituliskan $e(u) = \max\{d(u,v) \mid v \in V(G)\}$. *Vertex* v adalah *vertex* eksentrik (*eccentric vertex*) dari u jika $d(u,v) = e(u)$.

Digraf eksentrik dari graf G , dinotasikan $ED(G)$, adalah graf yang memiliki himpunan *vertex* yang sama dengan himpunan *vertex* di G , $V(ED(G)) = V(G)$, dan *arc* (*edge* yang berarah) menghubungkan *vertex* u ke v jika v adalah *vertex* eksentrik dari u . Boland dan Miller [1] menjelaskan kesimpulan dari penelitian Fred Buckley bahwa hampir setiap graf G , digraf eksentriknya adalah $ED(G) = \overline{G}^*$, dimana \overline{G}^* adalah komplemen dari G yang setiap *edge*-nya diganti dengan *arc* simetrik. Selanjutnya eksentrik digraf diteliti dan dikembangkan oleh Gimbert *et. al.* [4] kemudian Wang, dan Sun [6] pada tahun 2008. Pada makalah ini akan dibahas digraph eksentrik pada graf *cocktail party* $H_{2,n}$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Sutton dan Miller [5] mendefinisikan graf *cocktail party* $H_{2,n}$, $n \geq 2$, sebagai graf dengan himpunan *vertex* $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{2n}\}$ dipartisi menjadi n himpunan saling asing $V = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ untuk setiap *size* 2 sedemikian sehingga $v_i v_j \in E$ untuk semua

$i, j \in \{1, 2, \dots, 2n\}$ dengan $i \in I_p, j \in I_q, p \neq q$. Graf *cocktail party* $H_{2,n}$ disebut juga sebagai disjoint complement dari n copy graf lengkap K_2 . Berikut adalah contoh graf *cocktail party* $H_{2,2}$, dengan himpunan *vertex* $V(H_{2,2}) = \{u_1, u_2, v_1, v_2\}$.



Berikut ini langkah-langkah mencari digraf eksentrik dari $H_{2,n}$. Langkah pertama, ditentukan jarak $d(u,v)$ dari *vertex* u ke setiap *vertex* v dalam graf dengan menggunakan algoritma *Breadth First Search* (BFS) Moore menurut Chartrand dan Oelermann [2] sebagai berikut.

1. Diambil salah satu *vertex*, misal u , dan dilabeli 0 yang menyatakan jarak dari u ke dirinya sendiri, sedangkan semua *vertex* selain u dilabeli ∞ .
2. Semua *vertex* berlabel ∞ yang *adjacent* dengan u dilabeli 1.
3. Semua *vertex* berlabel ∞ yang *adjacent* dengan *vertex* berlabel 1 dilabeli 2 dan demikian seterusnya sampai *vertex* yang dimaksud, misal v , sudah berlabel hingga. Dalam hal ini, label dari setiap *vertex* menyatakan jarak dari *vertex* u .

Langkah kedua ditentukan eksentrisitas dari *vertex* u dengan memilih maksimal jarak dari *vertex* u tersebut, sehingga diperoleh *vertex* eksentrik v dari u $d(u,v) = e(u)$. Langkah terakhir, dari *vertex* u ke *vertex* eksentriknya dihubungkan oleh *arc*, sehingga diperoleh digraf eksentrik dari graf-graf tersebut. Berikut ini adalah hasil dari digraf eksentrik graf *cocktail party* $H_{2,n}$.

Lema 1. Misalkan $H_{2,n}$ suatu graf *cocktail party* dengan $n \geq 2$, maka eksentrisitas *vertex* u_i adalah $e(u_i) = 2$, untuk $i = 1, 2, \dots, n$ dan eksentrisitas *vertex* v_i adalah $e(v_i) = 2$, untuk $i = 1, 2, \dots, n$.

Bukti. Dengan menggunakan Algoritma BFS Moore dapat diketahui jarak terjauh dari *vertex* u_i ke *vertex* v_i adalah 2, jadi eksentrisitas *vertex* u_i adalah 2. Jarak terjauh dari *vertex* v_i ke *vertex* u_i adalah 2 jadi eksentrisitas *vertex* v_i adalah 2.

Lemma 2. Misalkan $H_{2,n}$ suatu graf *cocktail party* dengan $n \geq 2$, maka *vertex* eksentrik dari *vertex* u_i adalah v_i , untuk $i = 1, 2, \dots, n$ dan *vertex* eksentrik dari *vertex* v_i adalah u_i , untuk $i = 1, 2, \dots, n$.

Bukti. *Vertex* eksentrik dapat dicari dengan melihat eksentrisitas yang diperoleh dari semua *vertex*. Dari Lema 1. eksentrisitas *vertex* u_i adalah 2, maka *vertex* eksentriknya adalah v_i . Selanjutnya eksentrisitas *vertex* v_i adalah 2, maka *vertex* eksentriknya adalah u_i .

Lema 3. Misalkan $H_{2,n}$ suatu graf cocktail party dengan $n \geq 2$, maka digraph eksentriknya adalah digraph dengan himpunan vertex

$$V(ED(H_{2,n})) = \{u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n, \}$$

dan himpunan arc

$$A(ED(H_{2,n})) = \{\overrightarrow{u_i v_i} / i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Bukti. Arc dapat diperoleh dengan menggabungkan setiap vertex dengan vertex eksentriknya dari graf cocktail party $H_{2,n}$. Dari Lema 2, eksentrisitas vertex u_i adalah v_i dan eksentrisitas vertex v_i adalah u_i , jadi u_i adjacent ke v_i dan v_i adjacent ke u_i , sehingga membentuk arc $\overrightarrow{u_i v_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Teorema 4. Misalkan $H_{2,n}$ suatu graf cocktail party dengan $n \geq 2$, maka digraph eksentrik $H_{2,n}$ adalah digraf nK_2 dengan karakteristik himpunan vertex

$$V(ED(H_{2,n})) = \{u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n, \}$$

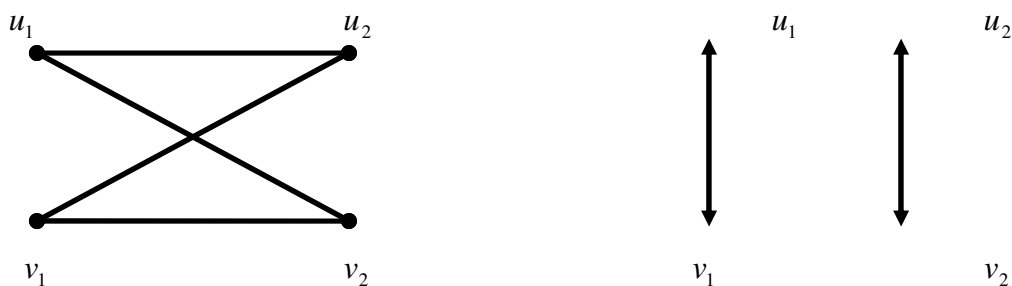
dan himpunan arc

$$A(ED(H_{2,n})) = \{\overleftrightarrow{u_i v_i} / i = 1, 2, \dots, n\}.$$

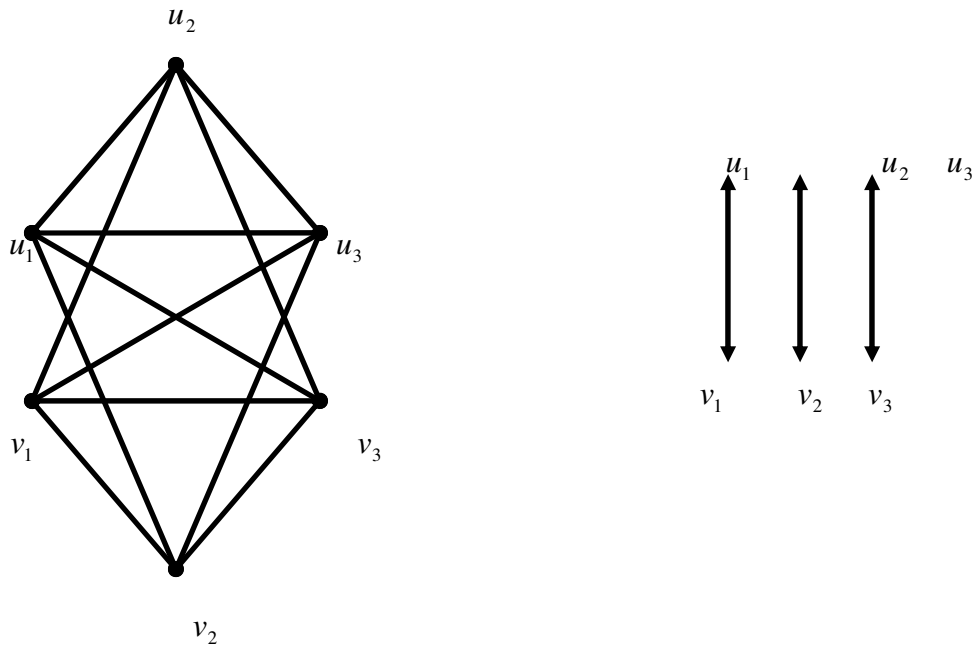
Bukti. Dari Lema 3, eksentrisitas vertex u_i adalah v_i dan eksentrisitas vertex v_i adalah u_i , jadi u_i adjacent ke v_i dan v_i adjacent ke u_i , sehingga membentuk suatu arc $\overleftrightarrow{u_i v_i}$ yang simetris. Berdasarkan himpunan arc, maka himpunan vertex $V(ED(H_{2,n}))$ dapat dibentuk suatu digraf yang lain. Dengan observasi diperoleh bahwa $ED(H_{2,2})$ adalah $2K_2$, $ED(H_{2,3})$ adalah $3K_2$, $ED(H_{2,4})$ adalah $4K_2$, sehingga jelas bahwa $ED(H_{2,n})$ adalah nK_2 dengan himpunan vertex dan edge seperti dikatakan dalam Lema 3.

Berikut ini suatu graf cocktail party $H_{2,2}$ dan $H_{2,3}$ beserta masing-masing digraph eksentriknya disajikan pada Gambar 1.

$H_{2,2}$



$H_{2,3}$



Gambar 1. Graf *cocktail party* $H_{2,2}$ dan $H_{2,3}$ beserta eksentrik digrafnya.

KESIMPULAN

Dari hasil dan pembahasan, digraf eksentrik dari graf *cocktail party* $H_{2,n}$ adalah n copy dari graf lengkap K_2 , nK_2 .

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Boland, J. and M. Miller, The Eccentric Digraph of a Digraph, *Proceeding of AWOCA'01*, Lembang-Bandung, Indonesia, 2001.
- [2] Chartrand, G. and O. R. Oellermann, *Applied and Algorithmic Graph Theory*, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill Inc, California, 1993.
- [3] Gallian, J. A. Dynamic Survey of Graph Labeling, *The Electronic Journal of Combinatorics*, 17, pp 1-246, 2010.
- [4] Gimbert, J, N. Lopez, M. Miller, and J. Ryan, Characterization of eccentric digraphs, *Discrete Mathematics*, Vol. 306, Issue 2, pp.210 - 219, 2006.
- [5] M. Sutton and M. Miller, Mod sum graph labelling of $H_{n,n}$ and K_n , *Australas. J Combin.*, 20, pp 233-240, 1999.
- [6] Wang, H and L. Sun, New results on the eccentric digraphs of the digraphs, *Ars Comb.* 89, 2008.

DIGRAF EKSENTRIK DARI GRAF BUKU

Sri Kuntari¹ NugrohoArif Sudibyo² dan Tri Atmojo Kusmayadi³

^{1,2,3}Jurusan Matematika FMIPA UNS

Abstrak

Diberikan G suatu graf dengan himpunan berhingga *vertex* $V(G)$ dan himpunan *edge* $E(G)$. Jarak dari *vertex* u ke *vertex* v di G , dinotasikan $d(u,v)$, adalah panjang dari *path* terpendek dari *vertex* u ke v . Eksentrisitas *vertex* u dalam graf G adalah jarak maksimum dari *vertex* u ke sebarang *vertex* yang lain di G , dinotasikan $e(u)$. *Vertex* v disebut *vertex* eksentrik dari u jika $d(u,v) = e(u)$. Digraf eksentrik $ED(G)$ dari suatu graf G adalah suatu graf yang mempunyai himpunan *vertex* yang sama dengan himpunan *vertex* G , dan terdapat suatu *arc* (*edge* berarah) yang menghubungkan *vertex* u ke v jika v adalah suatu *vertex* eksentrik dari u . Dalam makalah ini diselidiki digraf eksentrik pada graf buku yang merupakan salah satu kelas graf.

Kata kunci: eksentrisitas, digraf eksentrik, graf buku

PENDAHULUAN

Pengertian dan notasi yang berkaitan dalam makalah ini diambil dari Chartrand dan Lesniak [2] serta Harris *et al.* [8]. Diketahui graf G dengan himpunan *vertex* $V(G)$ dan himpunan *edge* $E(G)$. Jarak dua *vertex* u dan v dalam G , dinotasikan dengan $d(u,v)$, merupakan panjang *path* terpendek dari *vertex* u ke *vertex* v . Jika tidak ada *path* yang menghubungkan kedua *vertex*, $d(u,v) = \infty$. Eksentrisitas dari *vertex* u dalam graf G didefinisikan sebagai jarak maksimum dari *vertex* u ke sembarang *vertex* lainnya dalam G , eksentrisitas *vertex* u dinotasikan sebagai $e(u) = \max\{d(u, v) \mid v \in V(G)\}$. Sedangkan *vertex* v merupakan *vertex* eksentrik dari *vertex* u jika $d(u,v) = e(u)$. Digraf eksentrik dari graf G yaitu $ED(G)$ adalah graf yang mempunyai himpunan *vertex* yang sama dengan G , $V(ED(G)) = V(G)$ dan terdapat *arc* (*edge* berarah) yang menghubungkan setiap *vertex* dalam G ke *vertex* eksentriknya. Suatu *arc* dalam digraf D dikatakan *arc* simetri jika *arc* tersebut menghubungkan *vertex* u dan v , demikian juga sebaliknya.

Penggunaan eksentrisitas di berbagai bidang telah dipelajari oleh banyak peneliti. Bidang tersebut antara lain menentukan batas jaringan struktur protein [12], jaringan ATM [1], dan jaringan radio [4]. Demikian juga perkembangannya di bidang Matematika, diantaranya dapat dilihat pada barisan eksentrik dan *cycle* dalam graf [9], karakterisasi dari digraf eksentrik [7] dan diameter determinasi pada keluarga graf tertentu [5]. Sedangkan penyelidikan digraf eksentrik dari beberapa kelas graf telah dipublikasikan oleh Kusmayadi dkk. [10, 11]. Dalam makalah ini diselidiki digraf eksentrik pada klas graf yang lain yaitu graf buku.

PEMBAHASAN

Graf buku B_m , $m \geq 3$ adalah graf *cartesian product* $S_{m+1} \times P_2$, dengan S_m adalah graf bintang dan P_2 adalah lintasan dengan dua *vertex*, definisi ini diambil dari Gallian [6]. Diperlukan tiga langkah dalam menentukan digraf eksentrik dari graf tersebut. Langkah pertama adalah menentukan jarak dari *vertex* u ke *vertex* v dalam graf G yang merupakan panjang lintasan terpendek dari *vertex* u ke *vertex* v . Tetapi, jika tidak ada lintasan yang menghubungkan kedua *vertex* tersebut, $d(u,v) = \infty$. Selanjutnya untuk menentukan jarak dari *vertex* u ke sembarang *vertex* v dalam graf G digunakan algoritma Breadth First Search (BFS) Moore yang diambil dari Chartrand and Oellermann [3] yaitu

1. diambil salah satu vertex dalam graf G , misal u dan dilabeli 0 yang menyatakan jarak u ke dirinya sendiri, sedangkan semua vertex u dilabeli ∞ ,
2. semua vertex berlabel ∞ yang adjacent dengan u dilabeli 1,
3. semua vertex berlabel ∞ yang adjacent dengan vertex berlabel 1 dilabeli 2, dan seterusnya sampai vertex yang dimaksud misal v berjarak hingga. Label setiap vertex menyatakan jarak dari vertex u .

Langkah kedua menentukan vertex eksentrik dari vertex u , dinotasikan dengan $e(u)$, yaitu vertex dalam graf G yang memiliki jarak maksimum dari u . Vertex v adalah suatu vertex eksentrik dari u jika $d(u,v)=e(u)$. Langkah ketiga, menghubungkan vertex u dengan vertex eksentriknya dengan suatu arc d diperoleh digraph eksentrik dari graf yang diberikan.

Diberikan graf buku $B_n, n \geq 3$ dengan $V(B_n) = \{v_1, v_2, u_1, u_2, \dots, u_{2n}\}$ dan himpunan edge $E(B_n) = \{v_1v_2, v_1u_j, j=1, \dots, 2n, v_2u_j, j=1, \dots, n, u_ju_{n+j}, j=1, \dots, n\}$. Ketiga langkah menentukan digraf eksentrik dari graf buku disajikan dalam lemma dan teorema.

Lemma 1. Diberikan graf buku $B_n, n \geq 3$ maka eksentrisitas dari vertex v_i adalah 2, $i=1, 2$ sedangkan eksentrisitas vertex u_j adalah 3, $j=1, 2, \dots, 2n$.

Bukti. Eksentrisitas dari masing-masing vertex dalam $B_n, n \geq 3$ dapat dengan mudah didapat menggunakan algoritma Breadth First Search (BFS) Moore. ■

Lema 2. Diberikan graf buku $B_n, n \geq 3$ maka vertex eksentrik

$$\begin{cases} v_1 \text{ adalah } u_j & j = 1, 2, \dots, n \\ v_2 \text{ adalah } u_j & j = n+1, n+2, \dots, 2n \\ u_i, i = 1, \dots, n \text{ adalah } u_j & j = n+1, \dots, n+j-1, n+j+1, \dots, 2n \\ u_i, i = n+1, \dots, 2n \text{ adalah } u_j & j = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n \end{cases}$$

Bukti. Bukti. Diperoleh vertex eksentrik dari suatu vertex menggunakan Lemma 1. ■

Lema 3. Diberikan graf buku $B_n, n \geq 3$ maka digraph eksentrik dari B_n adalah digraph yang mempunyai himpunan vertex $V(ED(B_n)) = \{v_1, v_2, u_1, \dots, u_{2n}\}$ dan himpunan arc

$$A(ED(B_n)) = \begin{cases} \overrightarrow{v_1u_j} & j = 1, 2, \dots, n \\ \overleftarrow{u_iv_j} & i = 1, 2, \dots, n \quad j = n+1, \dots, 2n; j \neq n+i \\ \overrightarrow{v_2u_j} & j = n+1, \dots, 2n \end{cases}$$

Bukti. Menggunakan Lema 2, dengan menghubungkan suatu vertex dengan vertex eksentriknya diperoleh arc $\overrightarrow{v_1u_j}, j=1, \dots, n$, arc $\overrightarrow{v_2u_j}, j=n+1, \dots, 2n$ dan arc $\overleftarrow{u_iv_j}, i=1, \dots, n; j=n+1, \dots, 2n; j \neq n+i$. ■

Teorema 4. Diberikan graf buku $B_n, n \geq 3$ maka digraph eksentrik dari B_n adalah digraf $S_n \cup (K_{n,n} - M) \cup S_n$ dengan S_n graf bintang, $K_{n,n}$ graf bipartit lengkap dan matching dari $K_{n,n}$ yaitu $M = \{\overrightarrow{u_iv_j}, i=1, \dots, n; j=n+1, \dots, 2n; j=n+i\}$ dengan himpunan vertex

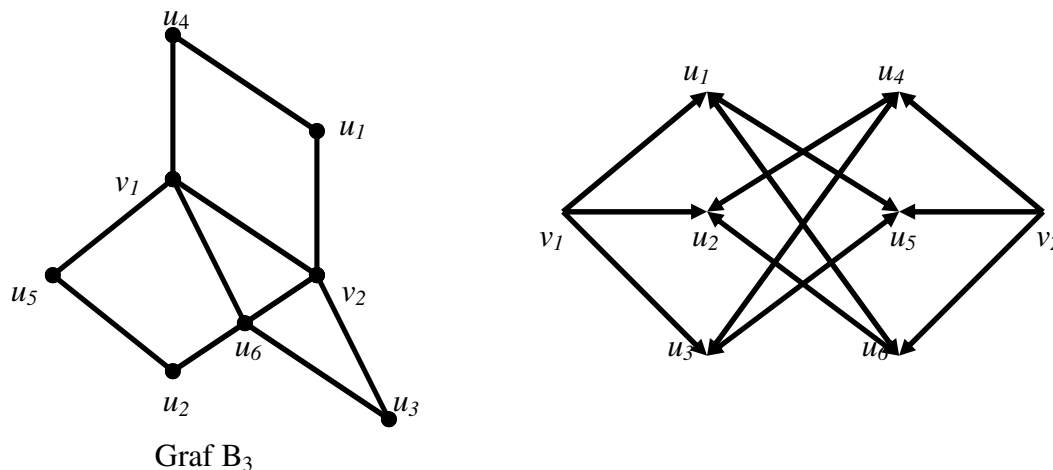
$$V(ED(B_n)) = \begin{cases} V(S_n) = \{v_1, u_1, \dots, u_n\} \\ V(K_{n,n} - M) = \{u_1, u_2, \dots, u_{2n}\} \\ V(S_n) = \{v_2, u_{n+1}, \dots, u_{2n}\} \end{cases}$$

dan himpunan arc

$$A(ED(B_n)) = \begin{cases} A(S_n) = \{\overrightarrow{v_1 u_j}, j = 1, 2, \dots, n\} \\ A(K_{n,n} - M) = \{\overrightarrow{u_i u_j}, i = 1, \dots, n; j = n+1, \dots, 2n; j \neq n+i\} \\ A(S_n) = \{\overrightarrow{v_2 u_j}, j = n+1, \dots, 2n\} \end{cases}$$

Bukti. Dari Lema 3, vertex v_1 adjacent dengan vertex $u_j, j=1, \dots, n$. Vertex u_i saling adjacent dengan vertex u_j untuk $i=1, \dots, n; j= n+1, \dots, 2n$ dan $j \neq n+i$. Arc yang menghubungkan vertex u_i dengan vertex u_j tersebut merupakan arc simetrik. Selanjutnya vertex v_2 adjacent dengan vertex $u_j, j=n+1, \dots, 2n$. Berdasar arc yang terbentuk, digraf eksentrik graf $B_n, n \geq 3$ dapat dikelompokkan menjadi graf bintang S_n mempunyai himpunan vertex $V(S_n) = \{v_1, u_1, \dots, u_n\}$ dan himpunan arc $A(S_n) = \{\overrightarrow{v_1 u_j}, j = 1, 2, \dots, n\}$, graf $K_{n,n} - M$ mempunyai himpunan vertex $V(K_{n,n} - M) = \{u_1, \dots, u_{2n}\}$ dan $A(K_{n,n} - M) = \{\overrightarrow{u_i u_j}, i = 1, \dots, n; j = n+1, \dots, 2n; j \neq n+i\}$ sebagai himpunan arc dengan matching dari $K_{n,n}$ adalah $M = \{\overrightarrow{u_i u_j}, i = 1, \dots, n; j = n+1, \dots, 2n; j = n+i\}$. Serta graf bintang S_n dengan himpunan vertex $V(S_n) = \{v_2, u_1, \dots, u_n\}$ dan himpunan arc $A(S_n) = \{\overrightarrow{v_2 u_j}, j = n+1, \dots, 2n\}$. ■

Selanjutnya diberikan contoh graf buku B_3 beserta digraf eksentriknya yang disajikan dalam Gambar 1.



Gambar 1. Graf B_3 dan Digraf Eksentriknya

KESIMPULAN

Digraf eksentrik dari graf buku adalah digraf $S_n \cup (K_{n,n} - M) \cup S_n$, dengan S_n graf bintang, $K_{n,n}$ graf bipartit lengkap dan M matching dari $K_{n,n}$.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Bermond, J. E., N. Marlin, D Peleg and S. Perennes, Directed Virtual Path Layouts in ATM Networks, *Theoretical Computer Science* 291: 3-28, 2003.
- [2] Cartrand, G. And L. Lesniak, *Graphs and Digraphs* 3rd ed., Chapman and Hall/RCR, New York, 1996.
- [3] Chartrand, G. and O. R. Oellermann, *Applied and Algorithmic Graph Theory*, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill Inc, California, 1993.
- [4] Clementi, A. E. F., A. Monti and R. Silvestri, Distributed Broadcast in Radio Networks of Unknown Topology, *Theoretical Computer Science* 302: 337-364, 2003.
- [5] Corneil, D. G., F.F. Dragan, M. Habib and I. Paul, Diameter Determination on Restricted Graph Families, *Discrete Applied Mathematics* 113:143-166, 2001.
- [6] Galian, J. A., A Dynamic Survey of Graph Labeling, *The Electronic Journal of Combinatorics* 17: 1-246, 2010.
- [7] Gimbert, J., N. Lopez, M. Miller and J. Ryan, Characterization of Eccentric Digraphs, *Discrete Mathematics* 306:210-219, 2006.
- [8] Harris, J. M., J. L. Hirst and M. J. Mossinghoff, *Combinatorics and Graph Theory* 2nd ed.. Springer, New York, 2000.
- [9] Haviar, A., P. Hrnčiar and G. Monoszava, Eccentric Sequence and Cycles in Graphs, *Acta Univ. M. Belii Math* no 11:7-25, 2004.
- [10] Kusmayadi, T. A. and M. A. Rivai, The Eccentric Digraph of Ladder Graph, Prosiding Seminar Nasional Matematika 2010 “ Matematika dalam Riset Teknologi dan Pendidikan “ :16-26, 2010.
- [11] Kusmayadi, T. A. dan F. Fathmawatie, The Eccentric Digraph of a Lintang Graph, *Math-Info* vol 1 no 12: 8-12 Juli 2008.
- [12] Vishveshwara, S., K. V Brinda and N. Kannan, Protein Structure: Insights from Graph Theory, *Journal of Theoretical and Computational Chemistry* vol 1 no1:1-25, 2002.

PENERAPAN GRUP MULTIPLIKATIF ATAS \mathbb{Z}_p^* DALAM PEMBUATAN TANDA TANGAN DIGITAL ELGAMAL

Rininda Ulfa Arizka¹, Agus Maman Abadi²

^{1,2}Jurusan Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Yogyakarta

Abstrak

Tujuan penulisan ini adalah untuk mengetahui penerapan grup multiplikatif atas \mathbb{Z}_p^* dalam pembuatan tanda tangan digital ElGamal. Tanda tangan digital dapat digunakan untuk melakukan pembuktian secara matematis bahwa data tidak mengalami modifikasi secara ilegal, sehingga bisa digunakan sebagai salah satu solusi untuk melakukan verifikasi data. Pembuatan tanda tangan digital pada umumnya didasari atas sistem kriptografi kunci publik. Salah satu sistem kriptografi kunci publik adalah sistem kriptografi ElGamal. Proses pembuatan tanda tangan digital ElGamal melalui proses *hashing*, yaitu perhitungan nilai *hash* dari suatu dokumen. Dengan menggunakan fungsi *hash* ini, maka dokumen yang terdiri dari banyak karakter bisa dimampatkan menjadi ukuran yang pendek, yakni berupa kode. Selanjutnya, teori grup multiplikatif atas \mathbb{Z}_p^* digunakan pada proses pembuatan kunci. Kemudian dokumen yang dikirimkan akan diverifikasi menggunakan kunci publik dan nilai *hash*nya.

Kata kunci : Grup multiplikatif, fungsi *hash*, kriptografi, kunci publik, tanda tangan digital ElGamal.

PENDAHULUAN

Dewasa ini, perkembangan ilmu dan teknologi telah mempengaruhi segala aspek kehidupan, tak terkecuali aspek komunikasi, seperti dalam pengiriman pesan. Semakin berkembangnya teknologi, pengiriman suatu pesan juga menjadi kurang aman. Tidak menutup kemungkinan saat proses pengiriman pesan tersebut ada pihak ketiga yang ingin merubah dari pesan tersebut. Salah satu cara untuk mempertahankan kerahasiaan dari pesan tersebut, maka pesan yang akan dikirimkan disandikan menjadi kode-kode yang tidak dipahami, sehingga bila ada pihak ketiga yang ingin merubah akan kesulitan dalam menterjemahkan isi pesan yang sebenarnya. Namun, hanya dengan menyandikan pesan tersebut, tidak menutup kemungkinan pesan dirubah oleh pihak ke tiga. Untuk memperkuat kerahasiaan serta keaslian dari pesan tersebut, maka berkembanglah tanda tangan digital. Penerima pesan akan percaya bahwa pesan yang dikirimkan masih otentik, karena telah dibubuhkan tanda tangan pada pesan tersebut. Selanjutnya, untuk mengatasi permasalahan di atas, dapat diselesaikan dengan kriptografi.

Kriptografi tidak hanya menyediakan alat untuk keamanan pesan, tetapi juga sekumpulan teknik yang berguna (Rinaldi, 2006 :2). Sistem kriptografi ElGamal dikembangkan pertama kali oleh Taher Gamal pada tahun 1984. Sampai saat ini sistem kriptografi ini masih dipercaya sebagai metode untuk pengamanan pesan. Berdasarkan uraian diatas, dalam penulisan ini, akan dibahas tentang bagaimana menjaga keotentikan suatu dokumen, yaitu dengan cara pembuatan tanda tangan digital dengan menggunakan sistem kriptografi ElGamal atas \mathbb{Z}_p^* , dengan $\mathbb{Z}_p^* = \{1, 2, 3, 4, \dots, p-1\}$ adalah himpunan bilangan bulat modulo p yang saling prima dengan p .

PEMBAHASAN

Berikut akan dibahas mengenai langkah – langkah pembuatan tanda tangan digital ElGamal atas grup \mathbb{Z}_p^* . Untuk lebih jelasnya akan dibahas pengantar tentang grup multiplikatif serta fungsi *hash*.

Grup Multiplikatif atas \mathbb{Z}_p^*

Grup multiplikatif merupakan suatu grup yang dikenai dengan operasi perkalian (*). Pada penulisan ini, dikhususkan dalam grup multiplikatif \mathbb{Z}_p^* . Dimana grup multiplikatif atas \mathbb{Z}_p^* akan sangat berperan dalam proses pembuatan tanda tangan digital, karena bilangan-bilangan yang digunakan dalam pembuatan tanda tangan digital merupakan elemen-elemen yang ada pada grup \mathbb{Z}_p^* . Selain itu, pada proses pembentukan kunci dipilih suatu bilangan g yang merupakan generator dari grup \mathbb{Z}_p^* .

Fungsi Hash Satu Arah

Dalam kriptografi, terdapat sebuah fungsi yang digunakan untuk aplikasi keamanan, seperti otentifikasi dan integritas pesan. Fungsi tersebut ialah fungsi *hash*. Fungsi *Hash* adalah fungsi yang menerima masukan string yang panjangnya sembarang dan menkonversikannya menjadi string keluaran yang panjangnya tetap (Rinaldi, 2006 : 217). Fungsi *hash* bisa menerima inputan string apa saja. Jika string menyatakan pesan (*message*), maka sembarang pesan M yang ukurannya bebas, dimampatkan dengan fungsi *hash* melalui persamaan berikut.

$$MD = H(M) \tag{1}$$

dengan MD adalah nilai *hash* atau *message digest* dari fungsi *hash* H dengan masukan pesan M .

Ada beberapa cara dalam perhitungan suatu *message digest*. Penulis menggunakan operasi aritmatika yang dapat dikerjakan, misalnya menjumlahkan semua nilai huruf pada pesan, yang sebelumnya pesan sudah dikonversi ke dalam kode ASCII. Kemudian dikenakan operasi modulo 256 pada jumlahan tersebut. Kemudian menambahkan 1 pada nilainya. Dituliskan pada persamaan (2).

$$MD = [(m_1 + m_2 + \dots + m_n) \bmod 256] + 1 \tag{2}$$

Berikut diberikan ilustrasi bagaimana mencari nilai *hash* dari suatu dokumen.

Misalkan terdapat pesan singkat yang berisi : “Semnas MIPA UNY”

Berdasarkan pesan tersebut, akan dicari nilai MD (*Message digest*) nya. Langkah pertama yaitu, memecah pesan menjadi beberapa blok . Lalu masing-masing blok dikonversikan ke dalam kode ASCII. Untuk hasil konversinya, dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 1. Konversi Karakter Pesan Ke Kode ASCII

| i | m_i | karakter | ASCII | i | m_i | karakter | ASCII |
|-----|-------|----------|-------|-----|----------|----------|-------|
| 1 | m_1 | S | 83 | 9 | m_9 | I | 73 |
| 2 | m_2 | e | 101 | 10 | m_{10} | P | 80 |
| 3 | m_3 | m | 109 | 11 | m_{11} | A | 65 |
| 4 | m_4 | n | 110 | 12 | m_{12} | <spasi> | 32 |
| 5 | m_5 | a | 97 | 13 | m_{13} | U | 85 |
| 6 | m_6 | s | 115 | 14 | m_{14} | N | 78 |
| 7 | m_7 | <spasi> | 32 | 15 | m_{15} | Y | 89 |
| 8 | m_8 | M | 77 | | | | |

Melihat Tabel 1, dapat diketahui bahwa banyaknya karakter $n = 15$. Lalu menjumlahkan semua karakter yang sudah dikonversi ke dalam kode ASCII menggunakan persamaan (2).

$$\begin{aligned} MD &= [(m_1 + m_2 + \dots + m_{15}) \bmod 256] + 1 \\ &= [(83 + 101 + \dots + 89) \bmod 256] + 1 \\ &= [1226 \bmod 256] + 1 \\ &= 203 \end{aligned}$$

Jadi nilai *hash* dari pesan singkat tersebut adalah 203.

Tanda Tangan Digital ElGamal

Tanda tangan digital merupakan alat yang digunakan untuk menjaga keotentikan dari suatu dokumen. Yang dimaksud tanda tangan digital disini bukanlah tanda tangan yang di-digitalisasi menggunakan alat *scanner*, namun suatu nilai kriptografis yang bergantung pada pesan dan pengirim pesan. Hal ini kontras dengan tanda tangan pada dokumen biasa, yang hanya bergantung pada pengirim, dan selalu sama untuk semua dokumen. Dengan tangan digital, maka integritas data dapat dijamin, disamping itu dapat digunakan untuk membuktikan keabsahan pengirim, dan nirpenyangkalan.

Tanda tangan digital merupakan suatu mekanisme yang memungkinkan pembuat pesan menambahkan sebuah kode-kode yang bertindak sebagai tanda tangannya. Jadi, tanda tangan digital dapat menjamin integritas dan sumber dari sebuah pesan. Tanda tangan digital berkembang dari suatu sistem kriptografi kunci publik. Salah satu sistem kriptografi yang digunakan ialah sistem kriptografi ElGamal. Suatu sistem kriptografi yang didasarkan pada masalah logaritma diskret. Langkah – langkah pembuatan tanda tangan digital ElGamal secara rinci dapat dilihat pada Gambar 1.

| Parameter buatan yang bersifat publik | |
|---|---|
| Seorang pihak yang dapat dipercaya memilih dan kemudian mempublikasikan sebuah bilangan prima besar p dan akar primitif g modulo p | |
| Pengirim (Signer) | Penerima (verifier) |
| Pembuatan Kunci | |
| Memilih kunci privat s , $1 \leq s \leq p-1$ Menghitung $v = g^s \text{ mod } p$ Mempublikasikan kunci publik (p, g, v) | |
| Proses Penandatanganan | |
| Menghitung MD dari pesan Memilih e , yang relatif prima dengan $p-1$ Menghitung : $R = g^e \text{ mod } p$ dan $T = (MD - sR)e^{-1} \text{ mod } (p-1)$ | |
| Proses Verifikasi | |
| | Mengecek bahwa $1 \leq R \leq p-1$ terpenuhi Menghitung $v^R R^T \text{ mod } p$, kemudian diperiksa bahwa $v^R R^T \equiv g^{MD} \text{ mod } p$ |

Gambar 1. Algoritma Tanda Tangan Digital ElGamal (Hoffstein, Jill, and Silverman, 2008 :443)

Contoh penggunaan tanda tangan digital pada suatu dokumen.

Misalkan Bapak Gunawan dan Bapak Masfuri, merupakan dosen di suatu universitas, akan menyampaikan suatu dokumen penting kepada bagian penyerahan nilai mahasiswa. Beliau menitipkan kepada salah seorang mahasiswa mereka untuk disampaikan pada bagian penilaian

mahasiswa. Dikarenakan isi dokumen penting, maka kedua dosen tersebut memberikan tanda tangan pada dokumen tersebut. Berikut isi dari dokumen tersebut.

Dengan ini, diberitahukan bahwa mahasiswa kami yang bernama Wahyu Nur Habibi dengan NIM 07305141001 telah menyelesaikan ujian TA, dan mendapatkan nilai 86,5 dengan indeks A. Demikian telah dilakukan penilaian secara menyeluruh.

Dokumen tersebut telah ditandatangani oleh dua orang, ini berarti terdapat dua kunci publik yang akan diberikan kepada pihak penilaian mahasiswa. Di bawah ini adalah proses pembentukan kunci oleh Bapak Gunawan dan Bapak Masfuri.

Pihak I (Bapak Gunawan)

Bapak Gunawan memilih bilangan besar $p_1 = 15137$, dan $g_1 = 3$. Serta ia memilih $s_1 = 14121$. Bapak Gunawan melakukan perhitungan dengan menggunakan persamaan 3.7, kemudian diperoleh $v_1 = 3^{14121} \bmod 15137 = 15011$. Kunci privat s_1 adalah 14121, dan kunci publik yang diberikan adalah $(p_1, g_1, v_1) = (15137, 3, 15011)$. Berdasar dari isi dokumen tersebut diperoleh nilai *hashnya* (MD) yaitu 111. Dan dipilih nilai $e_1 = 13217$. Selanjutnya adalah proses pembuatan tanda tangan. Pertama bapak Gunawan melakukan perhitungan $R_1 = g_1^{e_1} \bmod p_1 = 3^{13217} \bmod 15137 = 5003$. Kemudian diperoleh $T_1 = (MD - s_1 R_1) e_1^{-1} \bmod (p_1 - 1) = (111 - 14121 \cdot 5003) 13217^{-1} \bmod 15136 = 12332$. Jadi tanda tangan milik Bapak Gunawan adalah $(R_1, T_1) = (5003, 12332)$.

Pihak II (Bapak Masfuri)

Dan Bapak Masfuri memilih bilangan besar $p_2 = 17011$, dan $g_2 = 2$. Serta ia memilih $s_2 = 16982$. Dengan menggunakan persamaan 3.7 Bapak Masfuri akan memperoleh $v_2 = 2^{16982} \bmod 17011 = 4688$. Dengan begitu, kunci privat s_2 adalah 16982, dan kunci publik yang diberikan adalah $(p_2, g_2, v_2) = (17011, 2, 4688)$. Berdasar dari isi dokumen tersebut diperoleh nilai *hashnya* yaitu 111. Dan dipilih nilai $e_2 = 13313$. Pertama bapak Masfuri melakukan perhitungan $R_2 = g_2^{e_2} \bmod p_2 = 2^{13313} \bmod 17011 = 8603$. Kemudian diperoleh $T_2 = (MD - s_2 R_2) e_2^{-1} \bmod (p_2 - 1) = (111 - 16982 \cdot 8603) 13313^{-1} \bmod 17010 = 16885$. Jadi tanda tangan milik Bapak Masfuri adalah $(R_2, T_2) = (8603, 16885)$.

Verifikasi oleh Pihak III (Bagian Penilaian Mahasiswa)

Nilai *hash*(MD) dari dokumen = 111

1. Tanda tangan I (Bp. Gunawan)

Diperoleh $(R_1, T_1) = (5003, 12332)$.

Kunci publik = $(p_1, g_1, v_1) = (15137, 3, 15011)$

Lalu menghitung $v_1^{R_1} R_1^{T_1} \bmod p = 15011^{5003} 5003^{12332} \bmod 15137 = 5783$. Pihak III juga menghitung $g_1^{MD} \bmod p_1 = 3^{111} \bmod 15137 = 5783$. Karena $v_1^{R_1} R_1^{T_1} \equiv g_1^{MD} \bmod p_1$, maka verifikasi telah dilakukan.

2. Tanda tangan II (Bp. Masfuri)

Diperoleh $(R_2, T_2) = (8603, 16885)$.

Kunci publik = $(p_2, g_2, v_2) = (17011, 2, 4688)$

Lalu menghitung $v_2^{R_2} R_2^{T_2} \bmod p_2 = 4688^{8603} 8603^{16885} \bmod 17011 = 12240$. Pihak III juga menghitung $g_2^{MD} \bmod p_2 = 2^{111} \bmod 17011 = 12240$. Karena $v_2^{R_2} R_2^{T_2} \equiv g_2^{MD} \bmod p_2$, maka verifikasi telah dilakukan.

Karena saat proses verifikasi cocok, maka dapat dikatakan bahwa dokumen yang akan diberikan kepada bagian penilaian mahasiswa tersebut sah, berasal dari Bapak Gunawan dan Bapak Masfuri, tanpa ada perubahan isi dokumen dari pihak lain.

Berdasarkan di atas, seorang mahasiswa yang diberi kepercayaan untuk mengantarkan dokumen tersebut, ternyata mengubah isi dari dokumen tersebut. Adapun mahasiswa tersebut hanya mengubah bagian dari isi surat saja. Di bawah ini adalah surat yang telah diubah oleh mahasiswa tersebut.

Dengan ini, diberitahukan bahwa mahasiswa kami yang bernama Dimas Setya Aji dengan NIM 07305141091 telah menyelesaikan ujian TA, dan mendapatkan nilai 86,5 dengan indeks A. Demikian telah dilakukan penilaian secara menyeluruh.

Setelah memperoleh dokumen dari mahasiswa tersebut, bagian Penilaian Mahasiswa akan memverifikasi tanda tangan pada milik Bapak Gunawan = $(R_1, T_1) = (5003, 12332)$ dan Bapak Masfuri = $(R_2, T_2) = (8603, 16885)$.

Verifikasi oleh Pihak III (Bagian Penilaian Mahasiswa)

Nilai $hash(MD)$ dari dokumen = 254

1. Tanda tangan I (Bp. Gunawan)

Diperoleh $(R_1, T_1) = (5003, 12332)$.

Kunci publik = $(p_1, g_1, v_1) = (15137, 3, 15011)$

Lalu menghitung $v_1^{R_1} R_1^{T_1} \bmod p_1 = 15011^{5003} 5003^{12332} \bmod 15137 = 5783$. Selanjutnya juga dihitung $g_1^{MD} \bmod p_1 = 3^{254} \bmod 15137 = 14150$. Karena $v_1^{R_1} R_1^{T_1} \neq g_1^{MD} \bmod p_1$, verifikasi tanda tangan tidak cocok.

2. Tanda tangan II (Bp. Masfuri)

Diperoleh $(R_2, T_2) = (8603, 16885)$.

Kunci publik = $(p_2, g_2, v_2) = (17011, 2, 4688)$

Lalu menghitung $v_2^{R_2} R_2^{T_2} \bmod p_2 = 4688^{8603} 8603^{16885} \bmod 17011 = 12240$. Selanjutnya dihitung $g_2^{MD} \bmod p_2 = 2^{254} \bmod 17011 = 4128$. Karena $v_2^{R_2} R_2^{T_2} \neq g_2^{MD} \bmod p_2$, maka verifikasi tanda tangan tidak cocok.

Karena saat proses verifikasi tidak cocok, maka dapat dikatakan bahwa dokumen yang akan diberikan kepada bagian penilaian mahasiswa tersebut tidak sah, berasal dari Bapak Gunawan dan Bapak Masfuri, dan diindikasikan telah terjadi perubahan isi dokumen yang dikirimkan.

KESIMPULAN

Berdasarkan pada pembahasan diatas dapat disimpulkan bahwa grup multiplikatif atas \mathbb{Z}_p^* dapat diterapkan pada pembuatan tanda tangan digital ElGamal. Proses penting pada tanda tangan digital ElGamal yaitu proses pembentukan kunci, proses penandatanganan serta proses verifikasi.

Pembahasan selanjutnya yang dapat dikaji mengenai metode untuk menghitung nilai $hash$ yang aman dari *collision*. Sehingga bisa lebih aman dari usaha kriptanalisis dalam mengubah isi dari dokumen yang dikirimkan.

DAFTAR PUSTAKA

Buchmann, Johannes A. 2000. Introduction to Cryptography. New York : Springer- Verlag.

Hoofstein, Phiper, and Silverman., 2008, *An Introduction to Mathematical Cryptography*, Springer, New York.

Iskandar, Kusrini, Sismoro, Heri. 2004. *Struktur Data dan Pemrograman dengan Pascal*. Yogyakarta :Andi offset.

Munir Rinaldi. 2006. Kriptografi. Bandung: Informatika Bandung.

Stinson, D.R., 2006, *Cryptography Theory and Practice*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, Florida.

MODEL BLACK LITTERMAN DENGAN PENDEKATAN TEORI SAMPLING

Retno Subekti

Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

Abstrak

Pada model Black Litterman (BL) terdapat parameter τ yang masih tidak jelas penetapannya, sehingga beberapa pengembangan model BL sangat beragam penentuan τ , tergantung peneliti/penulisnya sendiri. Selain dengan pendekatan Bayes, formula model BL dijelaskan oleh Mankert (2003) melalui pendekatan teori sampling sehingga dapat diperlihatkan awal perolehan penentuan. Oleh karena itu penelusuran formula BL pada makalah ini penulis mencoba melengkapi penjelasan yang ditunjukkan oleh Mankert tentang bagaimana penelusuran rumusan /formula model BL dengan pendekatan teori sampling. Paparan difokuskan pada saat menentukan estimasi untuk nilai return hasil kombinasi dari market return dengan view investor tentang return.

Kata kunci: Model Black Litterman, Teori Sampling

PENDAHULUAN

Model pembentukan portofolio semakin berkembang sejak muncul pertama kali di tahun 1952 oleh Harry Markowitz dalam *Journal of Finance*. Markowitz kala itu memanfaatkan data historis dari saham sebagai dasar pembentukan portofolio berdasarkan mean dan variansinya kemudian muncul teori CAPM yang memperhatikan adanya *riskless asset* (asset tak berisiko). Pada tahun 90 an muncul model yang dikenal sebagai model Black Litterman (model BL) oleh Robert Litterman dan Fisher Black. Model ini mengkombinasikan CAPM dengan intuisi/view investor. Model BL sudah sangat beragam pengembangannya hingga saat ini. Baik dalam penelusuran formula maupun penerapannya. Karena dalam jurnal yang pertama kali memuat tulisan tentang model BL ini yaitu pada *Journal of Fixed Income* tahun 1991 Fischer Black dan Robert Litterman dari Goldman Sachs tidak mengemukakan penelusuran rumusannya secara detail. Demikian juga pada tulisan mereka yang juga dipublikasikan pada tahun 1992 dalam *Financial Analysts Journal* (FAJ). Model BL yang mengkombinasikan return equilibrium dari model CAPM dengan views pada jurnal aslinya dikemukakan menggunakan pendekatan bayes. Pada model terdapat parameter τ yang masih tidak jelas penetapannya sehingga terlihat pada beberapa referensi pengembangan model BL, penentuan parameter τ menjadi sangat beragam tergantung peneliti/penulisnya sendiri. Seperti He and Litterman (1999) menggunakan 0,025 untuk τ sedangkan Satchel dan Scowcroft (2000) menyatakan bahwa kebanyakan orang menyatakan τ lebih dekat dengan 1. Sedangkan Mankert (2003) menggunakan formula lain untuk penentuan τ .

Karena variatifnya penentuan τ , pada tulisan tentang model BL dengan pendekatan Bayes [Retno, 2008] penulis menggunakan acuan τ yang diperoleh dari teknik yang dipaparkan oleh Mankert (2006). Oleh karena itu penelusuran formula BL pada makalah ini penulis mencoba melengkapi paparan yang ditunjukkan oleh Mankert tentang bagaimana penelusuran rumusan /formula model BL dengan pendekatan teori sampling. Paparan yang difokuskan adalah pada saat menentukan estimasi untuk nilai return hasil kombinasi dari market return dengan view investor tentang return. Maka masalah optimisasi yang dihadapi kini adalah bagaimana mendapatkan return yang memaksimalkan return kombinasi data pasar ditambah return pandangan yang diamati oleh investor.

Tujuan

Dengan mengetahui bagaimana terbentuknya formula BL melalui sudut pandang yang berbeda yaitu dengan pendekatan teori sampling diharapkan dapat menambah wawasan tentang penelusuran rumusan formula BL selain dengan pendekatan bayes.

PEMBAHASAN

Dalam menanamkan modal seorang investor akan mendiversifikasikan modalnya ke berbagai asset guna menghindari kerugian yang besar jika hanya dialokasikan pada sebuah asset saja. Sekumpulan asset ini dinamakan portofolio. Sehingga bagaimana seorang investor menjatuhkan pilihan asset yang akan dimasukkan ke dalam portofolionya merupakan hal yang sangat penting. Karena pastinya seorang investor menginginkan keuntungan yang maksimal dan jika merugi seminimal mungkin. Oleh karena itu bagaimana si investor akan membentuk sebuah portofolio yang dapat dikatakan optimal menjadi sebuah tujuan pembentukan sebuah model. Munculnya model BL dengan mengkombinasikan data historis dengan data view dari investor dapat ditelusur dengan pendekatan Bayes. Karena menggunakan asumsi prior dan informasi baru sehingga akan memberikan informasi yang lebih ter-update. Pada Mankert (2003) dipaparkan cara mengkombinasikan data historis return dengan views yang ditelusur melalui pendekatan teori sampling.

Model Black Litterman

Dari FAJ Sept/Oct 1992 dalam Global Portfolio Optimization oleh Black dan Litterman menyatakan mean dari distribusi hasil kombinasi return dan views adalah

$$\overline{E(R)} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\pi + P'\Omega^{-1}q] \quad (1)$$

Dengan,

$\overline{E(R)}$ = vector expected return sebagai vector return kombinasi

τ = konstanta

π = return market

Σ = matriks kovariansi returns

P = matriks yang mengidentifikasi bobot views untuk asset yang dinyatakan oleh investor

q = return yang dinyatakan oleh investor

Pendekatan Teori Sampling untuk model BL

Untuk membedakan notasi dengan penelusuran formula model BL dengan pendekatan Bayes maka notasi pada pendekatan teori sampling ini ditulis berbeda untuk π dan q . Pendekatan ini dimulai dengan market return yang ditunjukkan sebagai Π dan dikombinasikan dengan return yang dinyatakan oleh investor sebagai Q .

Market return

Misal terdapat m sampel return sejumlah d aset. Matriks return sebagai berikut

$$r_i = \begin{bmatrix} r_{i1} \\ r_{i2} \\ \vdots \\ r_{id} \end{bmatrix}, \dots, r_m = \begin{bmatrix} r_{m1} \\ r_{m2} \\ \vdots \\ r_{md} \end{bmatrix}$$

Sampling Theory :

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i$$

Maka market return Π

$$\Pi = \bar{r}^M = \begin{bmatrix} \bar{r}^1 \\ \bar{r}^2 \\ \vdots \\ \bar{r}^d \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m r_i$$

Dengan metode maximum likelihood akan dibuktikan rumus penghitungan *market return*. Diasumsikan sampel berdistribusi normal dengan vektor *expected return* μ dan matriks kovariansi Σ .

$$r_i \sim N(\mu, \Sigma), i = 1, 2, \dots, m$$

Vektor mean dari sampel juga berdistribusi normal yaitu

$$\bar{r}^M \sim N\left(\mu, \frac{\Sigma}{m}\right)$$

Fungsi probabilitas return adalah

$$Pdf(r_i) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(r_i - \mu)' \Sigma^{-1}(r_i - \mu)\right\}$$

akan dicari nilai μ , konstanta dalam fungsi di atas diabaikan

$$\varphi(r_i) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(r_i - \mu)' \Sigma^{-1}(r_i - \mu)\right\}$$

Dengan menggunakan metode maksimum likelihood, fungsi likelihoodnya adalah

$$\begin{aligned} L &= e^{-\frac{1}{2}(r_1 - \mu)' \Sigma^{-1}(r_1 - \mu)} \cdot e^{-\frac{1}{2}(r_2 - \mu)' \Sigma^{-1}(r_2 - \mu)} \cdot \dots \cdot e^{-\frac{1}{2}(r_m - \mu)' \Sigma^{-1}(r_m - \mu)} \\ &= \exp\left\{\sum_{i=1}^m -\frac{1}{2}(r_i - \mu)' \Sigma^{-1}(r_i - \mu)\right\} \end{aligned}$$

Fungsi log-likelihood, l , $\ln L$ adalah

$$l = \ln \left[\exp\left\{\sum_{i=1}^m -\frac{1}{2}(r_i - \mu)' \Sigma^{-1}(r_i - \mu)\right\} \right] = \sum_{i=1}^m -\frac{1}{2}(r_i - \mu)' \Sigma^{-1}(r_i - \mu)$$

Selanjutnya l akan diturunkan terhadap masing-masing μ_j dengan $j = 1, 2, \dots, d$ dan disamadengkan nol

$$\frac{\partial l}{\partial \mu_j} = \frac{\partial}{\partial \mu_j} \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (r_i - \mu)' \Sigma^{-1}(r_i - \mu) \right] = 0$$

$$\text{dengan } \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_d \end{bmatrix} \text{ dan } e = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow j$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial \mu_j} \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \begin{pmatrix} r_{i1} - \mu_1 \\ r_{i2} - \mu_2 \\ \vdots \\ r_{id} - \mu_d \end{pmatrix}' \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} r_{i1} - \mu_1 \\ r_{i2} - \mu_2 \\ \vdots \\ r_{id} - \mu_d \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \mu_j} \left[-\frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} r_{11} - \mu_1 \\ r_{12} - \mu_2 \\ \vdots \\ r_{1d} - \mu_d \end{bmatrix}' \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} r_{11} - \mu_1 \\ r_{12} - \mu_2 \\ \vdots \\ r_{1d} - \mu_d \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} r_{m1} - \mu_1 \\ r_{m2} - \mu_2 \\ \vdots \\ r_{md} - \mu_d \end{bmatrix}' \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} r_{m1} - \mu_1 \\ r_{m2} - \mu_2 \\ \vdots \\ r_{md} - \mu_d \end{bmatrix} \right) \right] \end{aligned}$$

Untuk $j = 1$

$$= -\frac{1}{2} \left[- \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} r_{11} - \mu_1 \\ r_{12} - \mu_2 \\ \vdots \\ r_{1d} - \mu_d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_{11} - \mu_1 \\ r_{12} - \mu_2 \\ \vdots \\ r_{1d} - \mu_d \end{bmatrix} \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + (-) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} r_{m1} - \mu_1 \\ r_{m2} - \mu_2 \\ \vdots \\ r_{md} - \mu_d \end{bmatrix} \right. \\ \left. - \begin{bmatrix} r_{m1} - \mu_1 \\ r_{m2} - \mu_2 \\ \vdots \\ r_{md} - \mu_d \end{bmatrix} \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right] = 0$$

Untuk $j = 2$

$$= -\frac{1}{2} \left[- \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} r_{11} - \mu_1 \\ r_{12} - \mu_2 \\ \vdots \\ r_{1d} - \mu_d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_{11} - \mu_1 \\ r_{12} - \mu_2 \\ \vdots \\ r_{1d} - \mu_d \end{bmatrix} \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + (-) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} r_{m1} - \mu_1 \\ r_{m2} - \mu_2 \\ \vdots \\ r_{md} - \mu_d \end{bmatrix} \right. \\ \left. - \begin{bmatrix} r_{m1} - \mu_1 \\ r_{m2} - \mu_2 \\ \vdots \\ r_{md} - \mu_d \end{bmatrix} \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right] = 0$$

Dan seterusnya hingga,

Untuk $j = d$

$$= -\frac{1}{2} \left[- \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} r_{11} - \mu_1 \\ r_{12} - \mu_2 \\ \vdots \\ r_{1d} - \mu_d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_{11} - \mu_1 \\ r_{12} - \mu_2 \\ \vdots \\ r_{1d} - \mu_d \end{bmatrix} \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + \dots + (-) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} r_{m1} - \mu_1 \\ r_{m2} - \mu_2 \\ \vdots \\ r_{md} - \mu_d \end{bmatrix} \right. \\ \left. - \begin{bmatrix} r_{m1} - \mu_1 \\ r_{m2} - \mu_2 \\ \vdots \\ r_{md} - \mu_d \end{bmatrix} \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right] = 0$$

Maka dapat disimpulkan

$$\frac{\partial l}{\partial \mu_j} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (-\Sigma^{-1} e_j' (r_i - \mu^{*M}) - (r_i - \mu^{*M})' e_j \Sigma^{-1}) = 0$$

Karena

$$(r_i - \mu^{*M})' e_j \Sigma^{-1} = ((r_i - \mu^{*M})' e_j \Sigma^{-1}) = \Sigma^{-1} e_j' (r_i - \mu^{*M})$$

maka

$$-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (-\Sigma^{-1} e_j' (r_i - \mu^{*M}) - \Sigma^{-1} e_j' (r_i - \mu^{*M})) = 0$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m 2(-\Sigma^{-1} e_j' (r_i - \mu^{*M})) = 0$$

$$-\Sigma^{-1} e_j' \sum_{i=1}^m (r_i - \mu^{*M}) = 0$$

$$-m \Sigma^{-1} e_j' (r_i - \mu^{*M}) = 0$$

$$\bar{r}^M - \mu^{*M} = 0$$

$$\bar{r}^M = \mu^{*M}$$

berlaku untuk $j = 1, 2, \dots, d$

Jadi

$$\mu^{*M} = \bar{r}^M = \begin{bmatrix} \bar{r}^1 \\ \bar{r}^2 \\ \vdots \\ \bar{r}^d \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m r_i = \Pi$$

$$\mu^{*M} = \Pi \quad (2)$$

Selanjutnya untuk menyatakan view, diasumsikan bahwa investor mengamati n sampel *return*. Investor dapat memiliki pandangan hanya untuk sejumlah k aset dari d aset yang terdapat dalam portofolio. Atau dengan kata lain investor tidak perlu menyatakan pandangannya (*view*) pada tiap-tiap aset pada semua portofolio namun cukup pada sejumlah aset pada portofolio yang menjadi perhatian investor.

P dinyatakan dalam bentuk matriks dimana tiap posisinya menyatakan bobot pada aset tertentu dan portofolio tertentu. Tiap baris matriks mewakili satu *view* pada suatu portofolio dan untuk masing-masing *view*,

$$P = \begin{bmatrix} w_{11} & \dots & w_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{k1} & \dots & w_{kd} \end{bmatrix}$$

w_{ij} menyatakan bobot pada aset i dan *view* pada portofolio j .

Return yang dinyatakan investor dalam tiap pandangan (*view*) dinyatakan dalam bentuk k matriks kolom Q ,

$$Q = P\bar{r}_t \quad (3)$$

Dengan
$$Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \end{bmatrix}$$

Dan Ω merupakan matriks diagonal yang mengekspresikan tingkat kepercayaan investor (*level of confidence*) terhadap tiap – tiap pandangan (*view*).

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \omega_k^2 \end{bmatrix}, \omega_i^2 = p_i \Sigma p_i' \tau$$

$r_j \sim N(\mu, \Sigma)$ merupakan sampel *return* yang menjadi pengamatan investor dan return saham j dari investor adalah $q_j = Pr_j$ dengan $q_j \sim N(P\mu, \Omega)$

Fungsi probabilitas return menurut *view* investor adalah sebagai berikut

$$p(q_j) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (q_j - P\mu)' \Omega^{-1} (q_j - P\mu) \right\}$$

Karena akan dicari nilai maksimum dari μ , maka dalam penyelesaian menggunakan fungsi likelihood, konstanta atau yang tidak memuat μ diabaikan.

$$\varphi(q_j) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} (q_j - P\mu)' \Omega^{-1} (q_j - P\mu) \right\}$$

Fungsi likelihoodnya adalah sebagai berikut

$$L = \varphi(q_1) \varphi(q_2) \dots \varphi(q_n)$$

$$L = \exp \left\{ -\frac{1}{2} (q_1 - P\mu)' \Omega^{-1} (q_1 - P\mu) \right\} + \dots + \left\{ -\frac{1}{2} (q_n - P\mu)' \Omega^{-1} (q_n - P\mu) \right\}$$

$$= \exp \left\{ \sum_{j=1}^n -\frac{1}{2} (q_j - P\mu)' \Omega^{-1} (q_j - P\mu) \right\}$$

Dan fungsi log-likelihoodnya adalah

$$\begin{aligned}
 l &= \ln L = \ln \left[\exp \left\{ \sum_{j=1}^n -\frac{1}{2} (q_j - P\mu)' \Omega^{-1} (q_j - P\mu) \right\} \right] \\
 &= \sum_{j=1}^n -\frac{1}{2} (q_j - P\mu)' \Omega^{-1} (q_j - P\mu) \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (q_j - P\mu)' \Omega^{-1} (q_j - P\mu)
 \end{aligned}$$

Akan dilakukan penurunan fungsi l terhadap μ_i dengan $i = 1, 2, \dots, k$

$$\frac{\partial l}{\partial \mu_i} = \frac{\partial}{\partial \mu_i} \left[-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (q_j - P\mu)' \Omega^{-1} (q_j - P\mu) \right] = 0$$

Mengingat $q_j = Pr_j$ dan

$$q_1 = \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{12} \\ \vdots \\ q_{1d} \end{bmatrix}, \dots, q_n = \begin{bmatrix} q_{n1} \\ q_{n2} \\ \vdots \\ q_{nd} \end{bmatrix}, \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_k \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} w_{11} & \dots & w_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{k1} & \dots & w_{kd} \end{bmatrix}, \Omega = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \omega_k^2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu_i} \left[-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (Pr_j - P\mu)' \Omega^{-1} (Pr_j - P\mu) \right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu_i} \left[-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (P(r_j - \mu))' \Omega^{-1} (P(r_j - \mu)) \right] = 0$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\partial}{\partial \mu_i} \left[-\frac{1}{2} \left(\left(P \begin{bmatrix} r_{11} - \mu_1 \\ r_{12} - \mu_2 \\ \vdots \\ r_{1k} - \mu_k \end{bmatrix} \right)' \Omega^{-1} \left(P \begin{bmatrix} r_{11} - \mu_1 \\ r_{12} - \mu_2 \\ \vdots \\ r_{1k} - \mu_k \end{bmatrix} \right) + \dots \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left(P \begin{bmatrix} r_{n1} - \mu_1 \\ r_{n2} - \mu_2 \\ \vdots \\ r_{nk} - \mu_k \end{bmatrix} \right)' \Omega^{-1} \left(P \begin{bmatrix} r_{n1} - \mu_1 \\ r_{n2} - \mu_2 \\ \vdots \\ r_{nk} - \mu_k \end{bmatrix} \right) \right) \right] = 0
 \end{aligned}$$

Untuk $i = 1$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2} \left(- \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} P' \Omega^{-1} P \begin{bmatrix} r_{11} - \mu_1 \\ r_{12} - \mu_2 \\ \vdots \\ r_{1k} - \mu_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_{11} - \mu_1 \\ r_{12} - \mu_2 \\ \vdots \\ r_{1k} - \mu_k \end{bmatrix} P' \Omega^{-1} P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots \right. \\
 &\quad \left. + (-) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} P' \Omega^{-1} P \begin{bmatrix} r_{n1} - \mu_1 \\ r_{n2} - \mu_2 \\ \vdots \\ r_{nk} - \mu_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_{n1} - \mu_1 \\ r_{n2} - \mu_2 \\ \vdots \\ r_{nk} - \mu_k \end{bmatrix} P' \Omega^{-1} P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right) = 0
 \end{aligned}$$

$i = 2$

$$= -\frac{1}{2} \left(- \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} P' \Omega^{-1} P \begin{bmatrix} r_{11} - \mu_1 \\ r_{12} - \mu_2 \\ \vdots \\ r_{1k} - \mu_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_{11} - \mu_1 \\ r_{12} - \mu_2 \\ \vdots \\ r_{1k} - \mu_k \end{bmatrix}' P' \Omega^{-1} P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots \right. \\ \left. + (-) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} P' \Omega^{-1} P \begin{bmatrix} r_{11} - \mu_1 \\ r_{12} - \mu_2 \\ \vdots \\ r_{1k} - \mu_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_{11} - \mu_1 \\ r_{12} - \mu_2 \\ \vdots \\ r_{1k} - \mu_k \end{bmatrix}' P' \Omega^{-1} P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right) = 0$$

dan seterusnya hingga

$i = k$

$$= -\frac{1}{2} \left(- \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ k \end{bmatrix} P' \Omega^{-1} P \begin{bmatrix} r_{11} - \mu_1 \\ r_{12} - \mu_2 \\ \vdots \\ r_{1k} - \mu_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_{11} - \mu_1 \\ r_{12} - \mu_2 \\ \vdots \\ r_{1k} - \mu_k \end{bmatrix}' P' \Omega^{-1} P \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ k \end{bmatrix} + \dots \right. \\ \left. + (-) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ k \end{bmatrix} P' \Omega^{-1} P \begin{bmatrix} r_{11} - \mu_1 \\ r_{12} - \mu_2 \\ \vdots \\ r_{1k} - \mu_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_{11} - \mu_1 \\ r_{12} - \mu_2 \\ \vdots \\ r_{1k} - \mu_k \end{bmatrix}' P' \Omega^{-1} P \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ k \end{bmatrix} \right) = 0$$

berlaku untuk $i = 1, 2, \dots, k$.

Sehingga dapat disimpulkan bahwa

$$\frac{\partial l}{\partial \mu_i} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (-e_j' P' \Omega^{-1} (r_j - \mu_i^*) - (r_j - \mu_i^*)' P' \Omega^{-1} P e_j) = 0$$

Karena $(r_j - \mu_i^*)' P' \Omega^{-1} P e_j = e_j' P' \Omega^{-1} (r_j - \mu_i^*)$ maka

$$\frac{\partial l}{\partial \mu_i} = \sum_{j=1}^n (e_j' P' \Omega^{-1} P (r_j - \mu_i^*)) = 0$$

Dan $e_j' \sum_{j=1}^n P' \Omega^{-1} P (r_j - \mu_i^*) = e_j' P' \Omega^{-1} \sum_{j=1}^n P (r_j - \mu_i^*) = 0$

$$\sum_{j=1}^n P (r_j - \mu_i^*) = \sum_{j=1}^n P r_j - n P \mu_i^* = 0$$

$$\sum_{j=1}^n P r_j = n P \mu_i^*$$

$$P \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n r_j = P \mu_i^* \text{ maka } P \bar{r}_i = P \mu_i^*$$

$$Q = \mu^* \quad (4)$$

Kombinasi Market return dan Pandangan (view) Investor

Dengan menggunakan pendekatan teori sampling, selanjutnya akan dicari estimasi untuk nilai return hasil kombinasi dari market return dengan view investor tentang return. Maka masalah optimisasi yang dihadapi kini adalah bagaimana mendapatkan return yang memaksimalkan return kombinasi data pasar ditambah return pandangan yang diamati oleh si investor

$$\max_{\mu} \sum_{i=1}^m -\frac{1}{2} (r_i - \mu)' \Sigma^{-1} (r_i - \mu) + \sum_{j=m+1}^{m+n} -\frac{1}{2} (q_j - P\mu)' \Omega^{-1} (q_j - P\mu)$$

dilakukan penurunan terhadap μ_j dan hasilnya disamakan dengan 0

$$\frac{\partial}{\partial \mu^k} \left[\sum_{i=1}^m -\frac{1}{2} (r_i - \mu)' \Sigma^{-1} (r_i - \mu) + \sum_{j=m+1}^{m+n} -\frac{1}{2} (q_j - P\mu)' \Omega^{-1} (q_j - P\mu) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left(-e_k' \Sigma^{-1} (r_i - \mu^*)' - (r_i - \mu^*) \Sigma^{-1} e_k \right) - \frac{1}{2} \sum_{j=m+1}^{m+n} \left(-e_j' P' \Omega^{-1} (q_j - P\mu^*)' - (q_j - P\mu^*)' P' \Omega^{-1} P e_j \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow e_k' (m \Sigma^{-1} (\Pi - \mu^*) + n P' \Omega^{-1} (Q - P\mu^*)) = 0$$

Berlaku untuk $k = 1, 2, \dots, n+m$, selanjutnya diperoleh

$$\frac{m}{n} \Sigma^{-1} (\Pi - \mu^*) + P' \Omega^{-1} (Q - P\mu^*) = 0$$

Ditentukan bahwa $\tau = \frac{n}{m}$

$$\left(\tau^{-1} \Sigma^{-1} \Pi - \tau^{-1} \Sigma^{-1} \mu^* \right) + \left(P' \Omega^{-1} Q - P' \Omega^{-1} P \mu^* \right) = 0$$

$$\mu^* (P' \Omega^{-1} P + (\tau \Sigma)^{-1}) = P' \Omega^{-1} Q + (\tau \Sigma)^{-1} \Pi$$

Maka diperoleh μ^* sebagai expected return baru yang sama dengan $\overline{E(R)}$ yaitu

$$\mu^* = [P' \Omega^{-1} P + (\tau \Sigma)^{-1}]^{-1} [P' \Omega^{-1} Q + (\tau \Sigma)^{-1} \Pi]$$

$$= [(\tau \Sigma)^{-1} + P' \Omega^{-1} P]^{-1} [(\tau \Sigma)^{-1} \Pi + P' \Omega^{-1} Q]$$

DAFTAR PUSTAKA

- Black, Fischer and Litterman, Robert. (1992). *Global Portfolio Optimization*, Financial Analysts Journal ;Sep/Oct 1992 ;48.
- Becker. (2007). *The Mathematics of the Black-Litterman Model, An Introduction for the Practitioner*. Zephyr Associates, Inc.
- Härdle, Wolfgang dan Léopold Simar. (2003). *Applied Multivariate Statistical Analysis*. New York : Springer.
- He, Guangliang dan Robert Litterman. (1999). *The Intuition Behind Black Litterman Model Portfolios*. London : Goldman Sachs & Co Husnan.
- Suad. (2005). *Dasar-dasar Teori Portofolio dan Analisis Sekuritas*. Yogyakarta : UPP AMP YKPN.
- Luenberger, David G.(1998). *Investment Science*. New York:Oxford University Press.
- Mankert, Charlotta. (2003). *The Black Litterman Model-Matematical and Behavioral Finance Approaches Toward Its Use in Practice*. Stockholm: Royal Institute of Technology.
- Meucci. (2005). *Risk and Aset Allocation*. Springer.
- Meuci and Litterman (2006). Beyond Black-Litterman: views on non-normal markets . www.risk.net diakses tanggal 28 Maret 2011.

- Retno, S. (2008) Aplikasi Model Black Litterman dengan Pendekatan Bayes (Studi Kasus : Portofolio dengan 4 saham dari S&P500). Prosiding Seminar Nasional Matematika Jurusan Pendidikan Matematika UNY: 2008.
- Retno, S.(2009). Keunikan Model Black Litterman Dalam Pembentukan Portofolio Prosiding Seminar Nasional Matematika Jurusan Pendidikan Matematika UNY: 2009.
- Rosella Giacometti, et all (2005) Stable distributions in the Black-Litterman approach to asset allocation. <http://www.pstat.ucsb.edu/research/papers/BLapproach2005.pdf> diakses pada tanggal 28 Maret 2010.
- Satchell and Scowcroft. (2000). A Demystification Of The Black–Litterman Model: Anaging Quantitative And Traditional Portfolio Construction. Vol. 1, 2, 138–150 *Journal of Asset Management*.

**MABRUR OK (MODEL ANTRIAN BIJAK PRIORITAS USIA RENTAN
ORIENTASI KEEFEKTIFAN) : SOLUSI AKSELERASI PEMBERANGKATAN
JAMAAH HAJI NASIONAL**

Nabih Ibrahim¹, Yuni Nurfiana W² dan Nur Hera Utami³

¹⁾ Mahasiswa Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Yogyakarta

²⁾ Mahasiswa Program Studi Pendidikan Kimia, FMIPA, Universitas Negeri Yogyakarta,

³⁾ Mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika, FMIPA, Universitas Negeri Yogyakarta,

Abstrak

Jumlah peminat haji Indonesia terus meningkat dari tahun ke tahun. Menurut data laporan dari Kementerian Agama, pada tanggal 25 Februari 2011, pendaftar asal provinsi Sulawesi Selatan terpaksa menunggu 12 tahun, dan banyak provinsi lainnya yang menunggu selama 8 tahun atau lebih. Sistem pemberangkatan haji seperti yang telah berjalan ini dianggap merugikan banyak provinsi. Selain itu model antrian secara *first come first service* yang diterapkan jelas tidak memperhitungkan usia ataupun pengulangan hajinya. Karena itu, diperlukan sebuah disiplin antrian baru yang lebih adil untuk semua provinsi. MABRUR OK tepat untuk menjadi solusi dan relevan untuk akselerasi pemberangkatan haji nasional. MABRUR OK adalah pengaturan teknis menggunakan pemodelan matematika untuk menetapkan antrian yang memprioritaskan pendaftar usia lebih tua dan baru pertama kali haji. Model ini pun membagi kuota provinsi masing-masing lebih adil. Implementasi MABRUR OK akan mendapatkan waktu tunggu maksimum nasional 6 tahun, namun khusus untuk pendaftar usia lanjut dan belum pernah haji maka antrian hanya sekitar 2-3 tahun saja.

Kata kunci: Mabrur OK, antrian, pemodelan matematika, haji

PENDAHULUAN

Badan Pusat Statistik (BPS) mencatat jumlah penduduk Indonesia tahun 2010 mencapai 237.556.363 jiwa. Mayoritas penduduk Indonesia memeluk agama Islam. Sebuah fakta berlandaskan data bahwa salah satu keistimewaan Indonesia yang tercatat sebagai rekor dunia adalah Indonesia sebagai negara dengan penduduk muslim terbesar di dunia. Angka pemeluk agama Islam di Indonesia mencapai 216 juta jiwa atau sekitar 88% dari penduduk Indonesia. Sehingga tak dipungkiri bila Indonesia pun menjadi negara asal jamaah haji terbesar di dunia (KoranBaru.com, 11 Mei 2010).

Haji ke Baitullah merupakan rukun Islam yang kelima dan sangat mulia karena menghimpunkan kesemua rukun-rukun Islam yang lain. Hukum menunaikan ibadah haji diterangkan dalam Al quran surat Ali 'Imran ayat 97.

وَلِلَّهِ عَلَى النَّاسِ حِجُّ الْبَيْتِ مَنِ اسْتَطَاعَ إِلَيْهِ سَبِيلًا وَمَنْ كَفَرَ فَإِنَّ اللَّهَ غَنِيٌّ عَنِ الْعَالَمِينَ

Artinya: "Dan hanya karena Allah-lah haji ke Baitullah itu diwajibkan bagi manusia yang mampu mengadakan perjalanan ke sana. Barangsiapa yang kafir maka sesungguhnya Allah tidak butuh terhadap seluruh alam semesta."

Ayat di atas menegaskan bahwa haji merupakan ibadah wajib bagi yang mampu karena selain mengandalkan kekuatan jasmani dan rohani juga harus didukung kemampuan finansial yang memadai. Proses perjalanan haji menuntut pengorbanan yang besar namun hal ini tidak menurunkan semangat umat Islam untuk melaksanakannya paling tidak sekali seumur hidup.

Setiap tahun umat Islam Indonesia tidak pernah surut melaksanakan ibadah haji di tanah suci Mekkah, meskipun setiap tahun pula Biaya Perjalanan Ibadah Haji (BPIH) mengalami

kenaikan. Menilik data milik Kementerian Agama RI sampai dengan bulan Februari tahun 2011, pendaftar haji secara nasional telah mencapai 1.278.760 jiwa. Sedangkan jumlah penyeter setoran awal biaya penyelenggaraan ibadah haji (BPIH) sampai dengan tanggal 7 April 2011 mencapai 1.342.482 orang (<http://www.radar-bogor.co.id>, 8 April 2011). Jumlah peminat haji dari tahun ke tahun meningkat secara drastis, namun tidak demikian dengan kuota haji. Padahal waktu terpenuhinya memperoleh giliran melaksanakan haji sangat bergantung dengan jumlah pendaftar. Maka tak heran bila sampai saat ini ada beberapa provinsi yang masa tunggu melebihi 10 tahun. Seperti pendaftar haji provinsi Sulawesi Selatan pada bulan Februari 2011 telah mencapai masa tunggu 12 tahun lalu disusul oleh Kalimantan Selatan dengan masa tunggu 11 tahun. Dengan masa tunggu yang relatif lama ini, jamaah usia lanjut pun sangat rawan terhadap kegagalan pemberangkatan ibadah haji. Sumber www.indonesia-monitor.com, edisi 11 Mei 2010 mengungkapkan sebenarnya calon jemaah haji bisa menyelak antrian panjang yakni menyuap oknum pegawai Kementerian Agama dengan uang Rp 8 juta per calon jamaah. Namun hal tersebut jelas merupakan bentuk kecurangan.

Mencermati kasus diatas, perlu adanya solusi analitik sistemik berupa gagasan tertulis mengenai teknik penentuan calon jamaah haji yang akan berangkat dan meminimalkan masa tunggu yang dikemas dalam *MABRUR OK*. Adapun rumusan masalahnya adalah (a) Bagaimanakah menentukan pemberangkatan jamaah haji nasional sehingga dapat memberikan prioritas umur dan memperhatikan pengulangan haji? (b) bagaimanakah relevansi *MABRUR OK* sebagai solusi akselerasi pemberangkatan haji nasional?. Dalam kesempatan ini penulis akan menyoroti pada calon jamaah yang sudah tua dan belum pernah menunaikan ibadah haji. Namun mengingat luasnya permasalahan dan keterbatasan ilmu dari penulis, maka penulisan karya ini dibatasi pada permasalahan kuota haji dan prinsip dalam menentukan pemberangkatannya menggunakan bantuan model antrian matematika.

PEMBAHASAN

1. Pendaftar Haji Nasional Vs Masa Tunggu

Animo masyarakat Indonesia dalam menunaikan ibadah haji tergolong sangat tinggi. Oleh karena itu, daftar tunggu (*waiting list*) untuk menunaikan rukun kelima Islam ini sudah penuh. Berikut ini adalah tabel data *waiting list* skala nasional yang diperoleh dari Kanwil Kemenag Provinsi DIY pada tanggal 25 Februari 2011 pukul 14.00 WIB.

Tabel 1. Daftar Jumlah Penabung, Quota, dan Masa tunggu
Calon Jamaah Haji Nasional

| No | Provinsi | Penabung | Quota | Masa tunggu |
|----|--------------------------|----------|-------|---------------|
| | | | | (dalam Tahun) |
| 1 | Nanggroe Aceh Darussalam | 37765 | 3924 | 9,624108053 |
| 2 | Sumatera Utara | 48689 | 8234 | 5,913164926 |
| 3 | Sumatera Barat | 36200 | 4498 | 8,048021343 |
| 4 | Riau | 35496 | 5044 | 7,037272006 |
| 5 | Jambi | 22414 | 2634 | 8,509491268 |
| 6 | Sumatera Selatan | 41477 | 6360 | 6,521540881 |
| 7 | Bengkulu | 5386 | 1614 | 3,337050805 |
| 8 | Lampung | 28186 | 6282 | 4,486787647 |
| 9 | DKI Jakarta | 39351 | 7084 | 5,554912479 |
| 10 | Jawa Barat | 144230 | 37620 | 3,833864965 |
| 11 | Jawa Tengah | 170289 | 29657 | 5,741949624 |
| 12 | DI Yogyakarta | 21802 | 3091 | 7,053380783 |

| | | | | |
|----|---------------------|---------|--------|-------------|
| 13 | Jawa Timur | 293373 | 34165 | 8,586945705 |
| 14 | Bali | 2575 | 639 | 4,029733959 |
| 15 | Nusa Tenggara Barat | 38455 | 4494 | 8,556964842 |
| 16 | Nusa Tenggara Timur | 2295 | 650 | 3,530769231 |
| 17 | Kalimantan Barat | 6837 | 2339 | 2,923044036 |
| 18 | Kalimantan Tengah | 12379 | 1349 | 9,176426983 |
| 19 | Kalimantan Selatan | 39469 | 3811 | 10,35659932 |
| 20 | Kalimantan Timur | 24972 | 2819 | 8,858460447 |
| 21 | Sulawesi Utara | 2218 | 700 | 3,168571429 |
| 22 | Sulawesi Tengah | 11540 | 1758 | 6,564277588 |
| 23 | Sulawesi Selatan | 82302 | 7221 | 11,39759036 |
| 24 | Sulaweesi Tenggara | 13090 | 1683 | 7,777777778 |
| 25 | Maluku | 2743 | 710 | 3,863380282 |
| 26 | Papua | 5715 | 1065 | 5,366197183 |
| 27 | Bangka Belitung | 6935 | 913 | 7,595837897 |
| 28 | Banten | 43128 | 8541 | 5,049525817 |
| 29 | BPIH – Khusus | 34709 | 17000 | 2,041705882 |
| 30 | Gorontalo | 4307 | 891 | 4,833894501 |
| 31 | Maluku Utara | 3506 | 1065 | 3,292018779 |
| 32 | Kepulauan Riau | 5300 | 992 | 5,342741935 |
| 33 | Sulawesi Barat | 9053 | 1443 | 6,273735274 |
| 34 | Papua Barat | 2574 | 710 | 3,625352113 |
| | TOTAL | 1278760 | 211000 | 6,060473934 |

Masa tunggu calon jamaah haji nasional ditetapkan dengan perhitungan pembagian banyaknya penabung per provinsi dibagi dengan kuota per provinsi. Dengan perhitungan tersebut tampak jelas bahwa provinsi Sulawesi Selatan yang memiliki jumlah penabung mencapai 82.302 jiwa, sedangkan kuota provinsinya hanya 7.221 jamaah, sehingga masa tunggu hajinya mencapai 12 tahun. Disusul kemudian provinsi Kalimantan Selatan yang memiliki jumlah penabung mencapai 39.469, sedangkan kuota hanya 3.911 jamaah, sehingga masa tunggu mencapai 11 tahun. Masa tunggu yang relatif lama bagi jamaah haji di Indonesia sangat rawan terhadap kegagalan pemberangkatan jamaah haji. Pasalnya ada resiko sakit dan meninggal jamaah. Padahal ibadah haji merupakan ibadah wajib bagi yang mampu dan membutuhkan fisik yang prima.

2. Penyelenggaraan Haji Nasional

Untuk meminimalisir kendala dalam penyelenggaraan haji yang hampir tiap tahun ditemukan masalah, terutama dalam hal data calon haji, Kementerian Agama meluncurkan Sistem Komputerisasi Haji Terpadu (Siskohat). Dengan layanan Siskohat, semua proses pemberkasan haji, mulai dari pendaftaran, pembayaran, sampai urusan pada kepulangan haji dari Makkah akan dilakukan di satu tempat sehingga Siskohat berperan memberikan kemudahan dalam hal pelayanan pemberkasan haji.

Namun, jika dicermati secara mendalam Siskohat belum bisa menjamin tercapainya asas penyelenggaraan ibadah haji yang berdasarkan asas keadilan, profesionalitas, dan akuntabilitas dengan prinsip nirlaba. Kuota per provinsi yang ditetapkan pemerintah masih

mengacu seperti penetapan kuota negara oleh pemerintah Arab Saudi yaitu seperseribu dari jumlah penduduk dibagi luas wilayah. Padahal jumlah penduduk Indonesia sendiri tidak seluruhnya muslim dan luas wilayah tidak akan berubah. Prinsip *first come first served* yang diterapkan dalam hal pendaftaran haji juga masih perlu ditinjau ulang. Berdasarkan prinsip *first come first served* maka siapapun yang mendaftar lebih awal tanpa memandang usianya maupun merupakan haji yang ke berapa, dia berhak berangkat haji lebih dahulu sesuai masa tunggu. Oleh karena itu dibutuhkan inovasi dalam sistem pemberangkatan jamaah haji nasional dengan prioritas usia dan memperhatikan pengulangan haji namun tetap sesuai dengan kuota yang disediakan.

3. MABRUR OK

MABRUR OK merupakan kependekan dari Model Antrian Bijak pPrioritas Usia Rentan Orientasi Keefektifan. MABRUR OK merupakan sebuah inovasi penentuan pemberangkatan jamaah haji berdasarkan model antrian yang memprioritaskan usia dan memperhatikan pengulangan haji pendaftarannya. Pedoman yang digunakan adalah pemodelan matematika secara sederhana.

Sebelum melakukan efektifikasi waktu mengantri, berikut ini akan dijelaskan definisi-definisi istilah yang digunakan:

Masa Tunggu (MT)

Masa Tunggu (MT) adalah waktu total yang diperlukan seorang muslim asal Indonesia untuk naik haji. Masa tunggu dihitung dengan sebagai selisih antara tanggal pendaftaran dengan tanggal keberangkatan. Pada Model ini *MT* memiliki satuan tahun.

Skor Antrian (SA)

Model ini menggunakan sistem prioritas, bukan antrian FCFS (*First Come First Serve*). Seperti namanya, model ini memperhitungkan beberapa faktor lain agar sistem antrian dapat berpihak kepada yang lebih membutuhkan. Penentuan siapa yang akan berangkat terlebih dahulu, ditentukan oleh skor antrian (*SA*). Pada model ini direncanakan bahwa calon jama'ah haji akan makin cepat berangkat jika skornya semakin tinggi, sehingga disimpulkan bahwa:

Urutan keberangkatan ditentukan dari urutan ranking skor antrian ... (1.1)

Berdasarkan hasil identifikasi, terdapat beberapa faktor yang akan dijadikan pertimbangan untuk menentukan skor antrian, yaitu:

1. Masa Tunggu Terlalui (MTT)

Masa tunggu terlalui (MTT) adalah masa tunggu yang telah dilalui oleh pengantri untuk mengantri pada sistem antrian. Waktu dihitung dengan sebagai selisih antara tanggal pendaftaran dengan tanggal hari ini. Pada model ini MTT memiliki satuan hari. Satuan hari dipilih agar skor yang dimiliki oleh masing-masing pendaftar semakin beragam. Karena hanya digunakan untuk menghitung skor antrian (*SA*), satuan hari tidak digunakan pada proses selanjutnya.

Antrian dirasa perlu mempertimbangkan masa tunggu. Calon jama'ah haji yang sudah menunggu lama diharapkan akan berangkat terlebih dahulu, dengan pernyataan (1.1), bahwa jika nilai waktu tunggu (MTT) tinggi maka nilai skor antrian (*SA*) juga tinggi, sehingga dapat disimpulkan:

Masa tunggu terlalui sebanding dengan skor antrian(1.2)

2. Usia calon jama'ah (UCJ)

Usia calon jama'ah (*UCJ*) dihitung dengan sebagai selisih antara tanggal lahir calon jamaah dengan tanggal hari ini. Pada Model ini *UCJ* memiliki satuan hari. Satuan hari dipilih agar skor yang dimiliki oleh masing-masing pendaftar semakin beragam. Karena hanya digunakan untuk menghitung skor antrian (*SA*), satuan hari tidak digunakan pada proses selanjutnya.

Antrian dirasa perlu mempertimbangkan usia calon jama'ah. Calon jama'ah haji yang sudah tua diharapkan akan berangkat terlebih dahulu, dengan pernyataan (1.1), bahwa jika nilai usia calon jama'ah (UCJ) tinggi maka nilai skor antrian (SA) juga tinggi, sehingga dapat disimpulkan:

$$Usia\ calon\ jama'ah\ sebanding\ dengan\ skor\ antrian\ \dots\dots\dots(1.3)$$

3. Frekuensi Haji (FH)

Frekuensi Haji (FH) didefinisikan banyaknya prosesi ibadah haji yang akan dilakukan. Frekuensi Haji merupakan bilangan asli, misal seseorang mendaftar haji untuk pertama kalinya maka $FH = 1$. Sedangkan jika seseorang mendaftar haji untuk ke n kalinya maka $FH = n$.

Antrian dirasa perlu mempertimbangkan Frekuensi Haji. Calon jama'ah haji yang sudah sering haji diharapkan kurang diprioritaskan untuk berangkat, dengan pernyataan (1.1), bahwa jika nilai usia Frekuensi Haji (FH) tinggi maka nilai skor antrian (SA) rendah, sehingga dapat disimpulkan:

$$Frekuensi\ Haji\ berbanding\ terbalik\ dengan\ skor\ antrian\ \dots(1.4)$$

Dari analisis (1.2) dapat dirumuskan ke dalam persamaan matematika:

$$SA = K_1 \cdot MTT \tag{2.1}$$

dengan SA = Skor antrian, tanpa satuan
 MTT = Waktu tunggu (dalam hari), satuan tidak digunakan.

Sehingga K_1 adalah suatu konstanta penyusun skor, yang tidak memiliki satuan.

Dari analisis (1.3) dapat dirumuskan ke dalam persamaan matematika:

$$SA = K_2 \cdot UCJ \tag{2.2}$$

dengan SA = Skor antrian, tanpa satuan
 UCJ = Usia Calon Jama'ah (dalam hari), satuan tidak digunakan.

Sehingga K_2 adalah suatu konstanta penyusun skor, yang tidak memiliki satuan.

Dari analisis (1.4) dapat dirumuskan ke dalam persamaan matematika:

$$SA = \frac{K_3}{FH} \tag{2.3}$$

dengan SA = Skor antrian, tanpa satuan
 FH = Frekwensi Haji, tanpa satuan.

Sehingga K_2 adalah suatu konstanta penyusun skor, yang tidak memiliki satuan.

Penyelesaian dengan alat matematika melalui tiga tahap yaitu: (1) mendapatkan rumus pembentuk skor antrian, (2) penggunaan rumus pemrogramannya pada *software*, (3) mendapatkan rumus waktu tunggu.

Mendapatkan Skor Antrian (SA)

Dengan menyusun sebuah konstanta baru, maka kita dapat menggabungkan persamaan (2.1) dan (2.2) menjadi:

$$SA = K_{1,2} \cdot WT \cdot UCJ \tag{2.4}$$

dengan

SA = Skor antrian, tanpa satuan
 WT = Waktu tunggu (dalam hari), satuan tidak digunakan.
 UCJ = Usia Calon Jama'ah (dalam hari), satuan tidak digunakan.

Sehingga $K_{1,2}$ adalah suatu konstanta penyusun skor, yang tidak memiliki satuan.

Selanjutnya, dilakukan substitusi persamaan (2.1) ke (2.6) maka diperoleh:

$$SA = \frac{WT \cdot UCJ}{FH} \quad (2.5)$$

Dengan:

- SA = Skor antrian, tanpa satuan
 WT = Waktu tunggu (dalam hari), satuan tidak digunakan.
 UCJ = Usia Calon Jama'ah (dalam hari), satuan tidak digunakan.
 FH = Frekwensi Haji, tanpa satuan.

4. Urutan Keberangkatan Haji

Perhitungan skor antrian (SA) dari ratusan ribu bahkan jutaan orang membutuhkan waktu yang sangat lama, oleh karena itu, dengan menggunakan rumus yang telah dibuat pada bagian sebelumnya, dapat disusun program untuk mengolah data skor antrian (SA). Proram yang dirasa umum dan praktis penggunaannya adalah *Microsoft Excel*. Berikut ini disajikan tabel rumus yang akan digunakan pada *Microsoft Excel*, sebagai pembahasan model yang diperoleh ke dalam bahasa *Microsoft Excel*.

Tabel 2. Pengisian *Microsoft Excel*

| No Kolom | Judul Kolom | Rumus | Keterangan |
|----------|----------------|--------------------------|--|
| 1 | No | - | Telah Jelas |
| 2 | Nama | - | Nama Calon Jama'ah Haji |
| 3 | Tanggal Daftar | =DATE(YYYY;MM;HH) | Agar data dapat diolah |
| 4 | Sekarang | =NOW() | Otomatis berubah setiap hari |
| 5 | Waktu Tunggu | =EDATE(D3;0)-EDATE(C3;0) | Selisish antara tanggal daftara dan sekarang |
| 6 | Tanggal Lahir | =DATE(YYYY;MM;HH) | Sama dengan no.3 |
| 7 | Usia | =EDATE(D3;0)-EDATE(F3;0) | Selisish antara tanggal lahir dan sekarang |
| 8 | Frekuensi Haji | - | Haji keberpa yang akan didaftarkan |
| 9 | Skor Antrian | | Dari Model |

Tahapan-tahapan dalam menentukan MABRUR OK adalah:

1. Penentuan kuota per provinsi.

Dasar penentuan kuota dalam MABRUR OK ini berbeda dari siskohat. Penentuan kuota tidak didasarkan pada luas wilayah namun disesuaikan dengan pendaftar di provinsi tersebut. Karena jika menggunakan dasar luas wilayah, kadang kuota itu tidak sebanding dengan jumlah peminat dan menimbulkan kesenjangan. Model matematika untuk menghitung kuota adalah sebagai berikut:

$$Kuota \text{ per provinsi} = \frac{Jumlah \text{ Kuota Nasional} \times Jumlah \text{ Penabung Wilayah}}{Jumlah \text{ Penabung Nasional}}$$

Jika data disubstitusi dengan asumsi untuk tahun 2011 seperti yang diungkapkan Menteri Agama Suryadharma Ali bahwa pada tahun 2011, pemerintah mengupayakan naiknya kuota haji Indonesia minimal menjadi 238 ribu orang, sesuai hasil sensus penduduk tahun 2010 (www.republica.co.id, 28 Januari 2011). Sehingga dapat dihitung kuota per provinsi dengan rumus berikut:

$$Kuota \text{ per provinsi} = \frac{238000 \times Jumlah \text{ Penabung Wilayah}}{1278760}$$

Sedangkan hasil perhitungannya seperti tertera di tabel berikut.

Tabel 3. Kuota Per Provinsi dengan Sistem MABRUR OK

| No | Provinsi | Penabung | Quota |
|--------------|--------------------------|----------|--------|
| 1 | Nanggroe Aceh Darussalam | 37765 | 7029 |
| 2 | Sumatera Utara | 48689 | 9062 |
| 3 | Sumatera Barat | 36200 | 6737 |
| 4 | Riau | 35496 | 6606 |
| 5 | Jambi | 22414 | 4172 |
| 6 | Sumatera Selatan | 41477 | 7720 |
| 7 | Bengkulu | 5386 | 1002 |
| 8 | Lampung | 28186 | 5246 |
| 9 | DKI Jakarta | 39351 | 7324 |
| 10 | Jawa Barat | 144230 | 26844 |
| 11 | Jawa Tengah | 170289 | 31694 |
| 12 | DI Yogyakarta | 21802 | 4058 |
| 13 | Jawa Timur | 293373 | 54602 |
| 14 | Bali | 2575 | 479 |
| 15 | Nusa Tenggara Barat | 38455 | 7157 |
| 16 | Nusa Tenggara Timur | 2295 | 427 |
| 17 | Kalimantan Barat | 6837 | 1272 |
| 18 | Kalimantan Tengah | 12379 | 2304 |
| 19 | Kalimantan Selatan | 39469 | 7346 |
| 20 | Kalimantan Timur | 24972 | 4648 |
| 21 | Sulawesi Utara | 2218 | 413 |
| 22 | Sulawesi Tengah | 11540 | 2148 |
| 23 | Sulawesi Selatan | 82302 | 15318 |
| 24 | Sulaweesi Tenggara | 13090 | 2436 |
| 25 | Maluku | 2743 | 511 |
| 26 | Papua | 5715 | 1064 |
| 27 | Bangka Belitung | 6935 | 1291 |
| 28 | Banten | 43128 | 8027 |
| 29 | BPIH – Khusus | 34709 | 6460 |
| 30 | Gorontalo | 4307 | 802 |
| 31 | Maluku Utara | 3506 | 653 |
| 32 | Kepulauan Riau | 5300 | 986 |
| 33 | Sulawesi Barat | 9053 | 1685 |
| 34 | Papua Barat | 2574 | 479 |
| TOTAL | | 1278760 | 238000 |

2. Penentuan masa tunggu.
Perhitungan masa tunggu pendaftar dirumuskan yaitu

$$= \frac{\text{umur pendaftar termuda}}{\text{umur pendaftar}} \times \text{masa tunggu maksimal}$$
 Adapun masa tunggu maksimal dapat dihitung dengan rumus $= \frac{\text{jumlah pendaftar}}{\text{kuota}}$

Meskipun masih jauh dari cukup, tetapi dengan sistem MABRUR OK, WNI yang sudah tua dengan usia di atas 55 tahun dan merupakan haji pertamanya, maka dapat mengantri hanya dalam 2-3 tahun saya. Dengan mengasumsikan rata-rata pendaftar berumur 40 tahun dan pendaftar golongan muda berusia 20-30 tahun maka pendaftar berusia 20 tahun diletakkan

pada antrian bagian akhir dengan masa tunggu maksimal 6 tahun. Sehingga pelamar berumur 50 tahun ke atas, masa tunggunya 2-3 tahun. Berikut tabel masa tunggu menggunakan MABRUR OK.

Tabel 4. Masa Tunggu MABRUR OK

| No | Provinsi | Penabung | Quota | Masa Tunggu (Dalam tahun) |
|----|--------------------------|----------|--------|---------------------------|
| 1 | Nanggroe Aceh Darussalam | 37765 | 6294 | 6 |
| 2 | Sumatera Utara | 48689 | 8115 | 6 |
| 3 | Sumatera Barat | 36200 | 6033 | 6 |
| 4 | Riau | 35496 | 5916 | 6 |
| 5 | Jambi | 22414 | 3736 | 6 |
| 6 | Sumatera Selatan | 41477 | 6913 | 6 |
| 7 | Bengkulu | 5386 | 898 | 6 |
| 8 | Lampung | 28186 | 4698 | 6 |
| 9 | DKI Jakarta | 39351 | 6559 | 6 |
| 10 | Jawa Barat | 144230 | 24038 | 6 |
| 11 | Jawa Tengah | 170289 | 28382 | 6 |
| 12 | DI Yogyakarta | 21802 | 3634 | 6 |
| 13 | Jawa Timur | 293373 | 48896 | 6 |
| 14 | Bali | 2575 | 429 | 6 |
| 15 | Nusa Tenggara Barat | 38455 | 6409 | 6 |
| 16 | Nusa Tenggara Timur | 2295 | 383 | 6 |
| 17 | Kalimantan Barat | 6837 | 1140 | 6 |
| 18 | Kalimantan Tengah | 12379 | 2063 | 6 |
| 19 | Kalimantan Selatan | 39469 | 6578 | 6 |
| 20 | Kalimantan Timur | 24972 | 4162 | 6 |
| 21 | Sulawesi Utara | 2218 | 370 | 6 |
| 22 | Sulawesi Tengah | 11540 | 1923 | 6 |
| 23 | Sulawesi Selatan | 82302 | 13717 | 6 |
| 24 | Sulaweesi Tenggara | 13090 | 2182 | 6 |
| 25 | Maluku | 2743 | 457 | 6 |
| 26 | Papua | 5715 | 953 | 6 |
| 27 | Bangka Belitung | 6935 | 1156 | 6 |
| 28 | Banten | 43128 | 7188 | 6 |
| 29 | BPIH – Khusus | 34709 | 5785 | 6 |
| 30 | Gorontalo | 4307 | 718 | 6 |
| 31 | Maluku Utara | 3506 | 584 | 6 |
| 32 | Kepulauan Riau | 5300 | 883 | 6 |
| 33 | Sulawesi Barat | 9053 | 1509 | 6 |
| 34 | Papua Barat | 2574 | 429 | 6 |
| | | 1278760 | 213127 | |

Tanpa adanya penambahan kuota, masa tunggu maksimum hanya sekitar 6 tahun. Jika waktu ingin dikurangi masa tunggunya maka perlu pertumbuhan kuota 1,45% per tahun untuk meringkas masa tunggu maksimal menjadi 5 tahun, 7,66% untuk meringkas masa tunggu maksimal menjadi 4 tahun, dan 21,44% untuk meringkas menjadi maksimal 3 tahun. Ini sangat mungkin terjadi mengingat pada 2011 telah terjadi pertumbuhan kuota sebesar 12,8%. Jika pertumbuhan ini dipertahankan maka masa tunggu dapat mencapai 3-4 tahun dan bahkan 1-2 tahun untuk orang-orang tua yang akan haji untuk pertama kalinya. (Hal ini akan dibahas lebih lanjut pada bagian prioritas usia jamaah haji).

3. Prioritas usia jamaah haji

Banyaknya calon jamaah haji yang sudah tua, mengakibatkan mereka perlu diprioritaskan. Ada sebuah teknik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah ini. Teknik itu adalah scoring umur dan pembobotan skala haji dengan rumus sebagai berikut

$$\text{Nilai} = \frac{\text{Tanggal Daftar} - \text{Tanggal Lahir}}{\text{Haji ke}}$$

Jamaah haji dengan nilai tertinggi (rangking 1 sampai rangking sejumlah kuota) merupakan jamaah haji yang berhak diberangkatkan di tahun itu. Sebagai contoh akan dipilih 3 dar 10 orang yang akan mendaftar haji dengan data sebagai berikut di tabel 4.

Tabel 4. Data Pendaftaran, Tanggal Lahir, dan Frekuensi haji Jamaah Haji

| No | Nama | Tgl Daftar | Tanggal Lahir | Haji Ke | Nilai |
|----|------------|------------------|------------------|---------|----------|
| 1 | Penabung A | 25 Mei 2006 | 08 Maret 1985 | 1 | 16509120 |
| 2 | Penabung B | 21 April 2007 | 23 Juni 1970 | 1 | 20937740 |
| 3 | Penabung C | 04 Juni 2006 | 06 Maret 1965 | 2 | 14527675 |
| 4 | Penabung D | 08 Juli 2010 | 16 April 1978 | 1 | 2821410 |
| 5 | Penabung E | 23 Juni 2005 | 07 Nopember 1981 | 1 | 22223580 |
| 6 | Penabung F | 04 Nopember 2008 | 09 Agustus 1972 | 1 | 11913372 |
| 7 | Penabung G | 09 Februari 2006 | 06 Januari 1975 | 1 | 24357690 |
| 8 | Penabung H | 04 Desember 2006 | 31 Maret 1976 | 1 | 19727344 |
| 9 | Penabung I | 23 Oktober 2006 | 06 Desember 1954 | 1 | 32634882 |
| 10 | Penabung J | 04 Januari 2009 | 07 Juli 1975 | 2 | 5110350 |

Dengan menggunakan MABRUR OK maka data awal dapat diolah dan menghasilkan nilai seperti pada kolom paling kanan tabel 4. Setelah nilai diurutkan dengan prioritas usia dan pengulangan maka yang akan berangkat adalah penabung I, penabung G, dan penabung E seperti terlihat pada tabel 5. Sehingga Penabung I diprioritaskan karena, usia sudah cukup tua, dan sudah lama menunggu.

Tabel 5. Data Urutan Keberangkatan Jamaah Haji dengan MABRUR OK

| No | Nama | Tgl Daftar | Tanggal Lahir | Haji ke | Nilai |
|----|------------|------------------|------------------|---------|----------|
| 9 | Penabung I | 23 Oktober 2006 | 06 Desember 1954 | 1 | 32634882 |
| 7 | Penabung G | 09 Februari 2006 | 06 Januari 1975 | 1 | 24357690 |
| 5 | Penabung E | 23 Juni 2005 | 07 Nopember 1981 | 1 | 22223580 |
| 2 | Penabung B | 21 April 2007 | 23 Juni 1970 | 1 | 20937740 |
| 8 | Penabung H | 04 Desember 2006 | 31 Maret 1976 | 1 | 19727344 |
| 1 | Penabung A | 25 Mei 2006 | 08 Maret 1985 | 1 | 16509120 |
| 3 | Penabung C | 04 Juni 2006 | 06 Maret 1965 | 2 | 14527675 |
| 6 | Penabung F | 04 Nopember 2008 | 09 Agustus 1972 | 1 | 11913372 |
| 10 | Penabung J | 04 Januari 2009 | 07 Juli 1975 | 2 | 5110350 |
| 4 | Penabung D | 08 Juli 2010 | 16 April 1978 | 1 | 2821410 |

KESIMPULAN

1. Pemberangkatan jamaah haji nasional yang dapat memberikan prioritas umur dan memperhatikan pengulangan haji dapat ditentukan melalui MABRUR OK dengan menggunakan pemodelan matematika
2. MABRUR OK memberikan relevansi sebagai solusi akselerasi pemberangkatan haji nasional. Studi kasus: masa tunggu terlama berdasarkan cara pemerintah untuk tahun ini adalah 12 tahun. Tapi dengan MABRUR OK, masa tunggu terlama adalah 6 tahun meski kuotanya tetap. Sedangkan untuk usia tua masa tunggu terlama hanya 2-3 tahun

DAFTAR PUSTAKA

Kementerian Agama RI. 2011. *Data Pendaftar dan Kuota Haji 2011*. Diambil pada tanggal 25 Februari 2011 pukul 14.00 WIB.

Krisman Purwoko. 2011. *Kuota Haji Indonesia 2011 Diupayakan 238 Ribu Jamaah*. <http://www.republika.co.id/> diakses pada 1 Maret 2011.

Susanta, B. dan Bambang Soedijono. 1989. *Materi Pokok Model Matematik*. Jakarta : Karunika.

Thantri Kesumanda. 2010. *Untuk Percepat Berangkat Haji Banyak Markus Gentayangan di Depag*. <http://www.indonesia-monitor.com>, diakses pada 1 Maret 2011

www.indonesia.go.id, 4 Februari 2011 diakses pada 1 Maret 2011

www.KoranBaru.com, 11 Mei 2010 diakses pada 1 Maret 2011

www.republica.co.id, 28 Januari 2011 diakses pada 1 Maret 2011

PERAMALAN SUHU UDARA DI YOGYAKARTA DENGAN MENGGUNAKAN MODEL FUZZY

Jayus Priyana¹, Agus Maman Abadi²

¹Alumni Jurusan Pendidikan Matematika Universitas Negeri Yogyakarta.

²Jurusan Pendidikan Matematika Universitas Negeri Yogyakarta.

Abstrak

Tujuan penulisan ini adalah untuk menentukan peramalan suhu udara di Yogyakarta dengan menggunakan model *fuzzy*. Proses peramalan suhu udara di Yogyakarta didasarkan pada model *fuzzy* dengan metode *table look-up scheme*. Pemodelan ini didasarkan pada data sampel suhu udara dan perawanan di Yogyakarta. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa kombinasi model *fuzzy* dengan dua *input*, dengan fungsi keanggotaan Gaussian, mesin *inferensi* minimum, mempunyai tingkat prediksi yang lebih baik dibandingkan dengan model *fuzzy* yang dibentuk dengan kombinasi yang lain.

Kata kunci: peramalan suhu udara, model *fuzzy*

PENDAHULUAN

Perubahan iklim dan cuaca akhir-akhir ini merupakan fenomena alam yang hampir tidak dapat dihindari. Salah satu penyebab perubahan iklim dan cuaca adalah suhu udara (*temperature*). Suhu udara memegang peranan penting di berbagai bidang. Dalam bidang pertanian suhu udara adalah faktor lingkungan yang penting karena berpengaruh pada pertumbuhan tanaman dan berperan hampir pada semua proses pertumbuhan. Dalam bidang kesehatan suhu udara yang cukup fluktuatif juga dapat menyebabkan timbulnya berbagai penyakit. Dalam bidang penerbangan perubahan suhu udara juga berpengaruh terhadap jadwal penerbangan pesawat dan keperluan *start engine* yaitu pada saat pesawat *take off* sehingga proses transportasi udara menjadi terganggu (Hasbullah, 2002).

Tingkat fluktuasi suhu udara merupakan salah satu hal penting yang sulit untuk diprediksi. Banyak upaya yang telah dilakukan untuk memprediksikan fluktuasi suhu udara. Berbagai metode peramalan suhu udara telah berkembang seiring dengan adanya permasalahan yang ditimbulkan. Metode tersebut antara lain metode Box-Jenkin, metode regresi, *fuzzy linier regression*, dan metode peramalan yang lain. Metode Box-Jenkin merupakan suatu teknik peramalan yang didasarkan pada perilaku data variabel yang diamati saja, yaitu memprediksi suatu data dengan menggunakan data numerik dari objek yang diamati. Dengan menggunakan dasar yang sama dengan teknik Box-Jenkin dalam hal data yang diproses, penulis tertarik membahas model *fuzzy* pada data *time series* yaitu model *fuzzy* yang menggunakan data numerik dari objek yang diamati. Pembentukan sistem *fuzzy* dapat dilakukan dengan berbagai metode, antara lain tabel *look-up scheme*, metode kuadrat terkecil, *gradient descent*, dan *clustering*. Pada Penelitian ini digunakan sistem *fuzzy* yang terdiri dari *fuzzifier singel tone*, basis aturan *fuzzy*, *defuzzifier* rata-rata pusat, mesin *inferensi* pergandaan dan minimum, dan implikasi Mamdani dengan fungsi keanggotaan Gaussian dan segitiga.

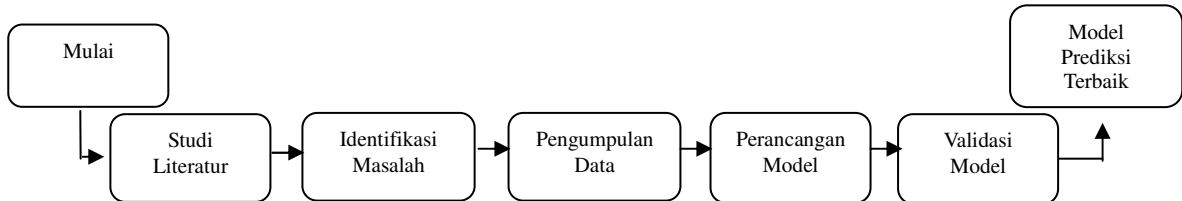
Penulis tertarik untuk meneliti lebih dalam mengenai peramalan suhu udara menggunakan model *fuzzy*, khususnya di Yogyakarta, dengan menggunakan suhu udara sebelumnya dan tingkat perawanan, selanjutnya membandingkan hasil yang didapat dengan data hasil prediksi Badan Meteorologi Klimatologi dan Geofisika (BMKG) untuk mendapatkan model terbaik dengan memperhatikan tingkat kesalahannya dari nilai MSE (mean square error) dari data suhu udara.

Diharapkan dengan adanya metode peramalan ini memberikan sebuah cara baru dalam

pengembangan-pengembangan model prediksi suhu udara dan bisa dijadikan dasar untuk pengembangan penelitian berikutnya.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini dimulai dengan proses pengambilan data suhu udara dan perawanan dari BMKG Yogyakarta, kemudian membentuk model fuzzy dengan metode *table look-up scheme*.

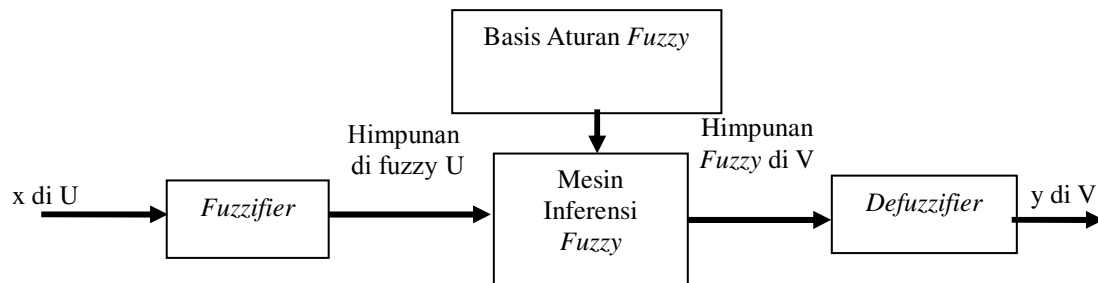


PEMBAHASAN

Pada pokok bahasan ini diberikan penjelasan pembentukan model *fuzzy* untuk data *time series* dengan sistem *fuzzy* yang dibentuk menggunakan tabel *look-up scheme*, langkah-langkah penyusunan model *fuzzy* untuk data *time series*, dan aplikasi model *fuzzy* untuk data *time series* pada data suhu udara harian kota Yogyakarta dari bulan September – Desember 2010.

Sistem Fuzzy

Proses pada sistem *fuzzy* yaitu dari *input* yang berupa data real diubah oleh *fuzzifier* (tahap *fuzzifikasi*) menjadi nilai *fuzzy* di U kemudian diolah oleh mesin *inferensi fuzzy* dengan aturan dasar *fuzzy* yang selanjutnya ditegaskan kembali dengan *defuzzifier* (tahap *defuzzifikasi*) menjadi nilai tegas (*output*). Berikut disajikan sistem *fuzzy* dalam bentuk bagan.



Gambar 1. Susunan Sistem Fuzzy dengan Fuzzifier dan Defuzzifier

Sistem *fuzzy* memiliki beberapa keistimewaan (Wang, 1994), yaitu:

- Sistem *fuzzy* ini cocok digunakan pada sistem pemodelan karena variabelnya bernilai real.
- Sistem *fuzzy* ini menyediakan kerangka yang digunakan untuk menggabungkan aturan-aturan *fuzzy* JIKA-MAKA yang bersumber dari pengalaman manusia.
- Terdapat berbagai pilihan dalam menentukan *fuzzifier* dan *defuzzifier* sehingga dapat diperoleh sistem *fuzzy* yang paling sesuai untuk model.

Pada tulisan ini dibuat 2 sistem *fuzzy* yaitu sistem *fuzzy* yang menggunakan mesin *inferensi* pergandaan dan mesin *inferensi* minimum.

Model Fuzzy untuk Data Time Series

Misalkan $\{x(1), x(2), \dots, x(k)\}$ adalah sebuah data *time series* dalam peramalan untuk menentukan nilai dari data di waktu yang akan datang. Data *time series* dapat dirumuskan sebagai $[x(k-n+1), x(k-n+2), x(k-n+3), \dots, x(k)]$. Untuk menentukan $x(k+1)$, dengan cara menentukan

pemetaan dari $[x(k-n+1), x(k-n+2), x(k-n+3), \dots, x(k)] \in \mathbb{R}^n$ ke $[x(k+1)] \in \mathbb{R}$ dengan k dan n bilangan bulat positif. Dari data di atas dibentuk $k-n$ pasangan *input-output* yaitu :

$$\begin{array}{l} [x(k-n), x(k-n+1), \dots, x(k-1); x(k)] \\ [x(k-n-1), x(k-n), \dots, x(k-2); x(k-1)] \\ \vdots \\ [x(1), x(2), \dots, x(n); x(n+1)] \end{array} \quad (3.1)$$

Selanjutnya $k-n$ pasang *input-output* tersebut digunakan untuk membentuk sistem *fuzzy* menggunakan tabel *look-up scheme*, dengan *input* $[x(k-n-l), x(k-n+1-l), \dots, x(k-1-l)]$ dan *output* $x(k-l)$ untuk $l=0,1,2,\dots,k-n-1$.

Berikut lima langkah pemodelan *fuzzy* dengan metode tabel *look-up scheme*.

Langkah 1. Mendefinisikan himpunan *fuzzy* untuk setiap variable *input* dan *output*.

Misalkan data *time series* berada pada interval $[\alpha, \beta]$, maka dibentuk himpunan *fuzzy* di dalam interval tersebut baik untuk data *input* maupun data *output*. Dalam tulisan ini derajat keanggotaan ditentukan menggunakan fungsi keanggotaan segitiga dan Gaussian dengan nilai parameter (σ) dibuat sama besar untuk setiap himpunan *fuzzy*. Misalnya, Untuk setiap $[\alpha_i, \beta_i], i = 1, 2, \dots, n$ didefinisikan himpunan *fuzzy* A_i , baik pada *input* maupun *output*-nya. Data *input* dan data *output* terletak pada interval yang sama, maka banyaknya himpunan *fuzzy* pada *input* dan *output* yang didefinisikan dibuat sama.

Langkah 2. Membangun satu aturan *fuzzy* dari setiap pasangan *input-output*.

- Menghitung derajat keanggotaan dari setiap data dan memilih derajat keanggotaan yang terbesar. Derajat keanggotaan dari setiap data dihitung menggunakan program Matlab.
- Memperoleh satu aturan (*rule*) dari setiap pasang *input-output*.

Misalkan aturan-aturan yang terbentuk dari setiap pasang *input-output* adalah:

Jika $x_{(k-n)}$ adalah A_1 dan ... dan $x_{(k-1)}$ adalah A_n maka $x_{(k)}$ adalah A_3 .

Jika $x_{(k-n-1)}$ adalah A_4 dan ... dan $x_{(k-2)}$ adalah A_n maka $x_{(k-1)}$ adalah A_{10} .

\vdots

Jika x_1 adalah A_2 dan ... dan $x_{(n)}$ adalah A_{n-1} maka $x_{(n+1)}$ adalah A_{11} .

Langkah 3. Menghitung derajat keanggotaan dari setiap aturan yang terbentuk.

Derajat keanggotaan dari setiap aturan dihitung menggunakan program Matlab.

Langkah 4. Membentuk basis aturan *fuzzy*.

Menyeleksi aturan-aturan pada langkah 2 yang memiliki bagian anteseden yang sama untuk menentukan daerah *output*-nya, dengan cara memilih aturan yang mempunyai derajat keanggotaan tertinggi. Maksimal banyaknya aturan yang terbentuk, sama dengan banyaknya kombinasi himpunan *fuzzy* dari *input-input* yang telah didefinisikan.

Langkah 5. Membuat sistem *fuzzy* yang didasarkan pada basis aturan *fuzzy* yang terbentuk pada langkah 4.

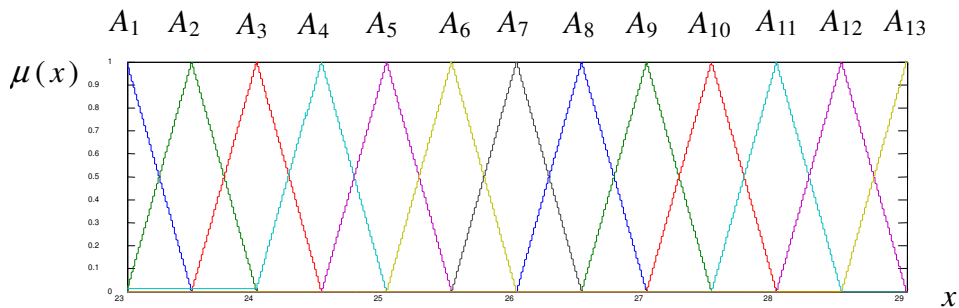
Aplikasi Pemodelan Fuzzy untuk Data Time Series pada Data Suhu Udara

Berikut ini akan dimodelkan peramalan suhu udara di Yogyakarta dengan metode *table look-up*. Pemodelan ini didasarkan pada data suhu udara dan perawanan harian di Yogyakarta. Data diambil dari bulan September-Desember Tahun 2010 di BMKG Yogyakarta. Kemudian 80 data pertama digunakan untuk pemodelan dan 42 data berikutnya digunakan untuk validasi model.

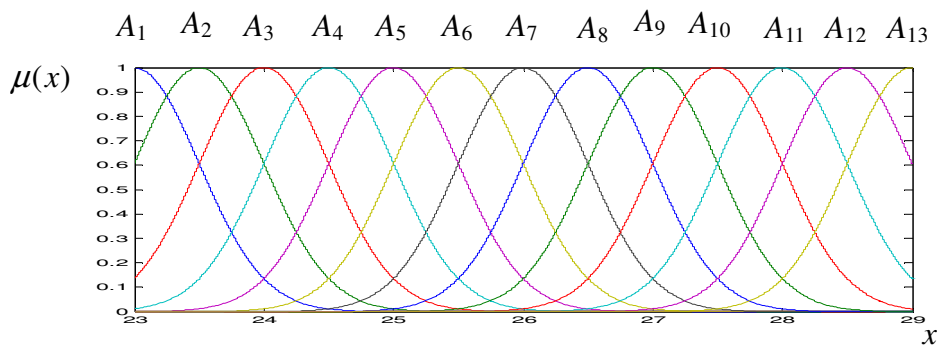
Adapun langkah-langkah peramalan suhu udara di Yogyakarta dengan metode *table look-up scheme* dilakukan sebagai berikut:

Langkah 1. Didefinisikan himpunan *fuzzy* untuk setiap variabel *input* dan *output*.

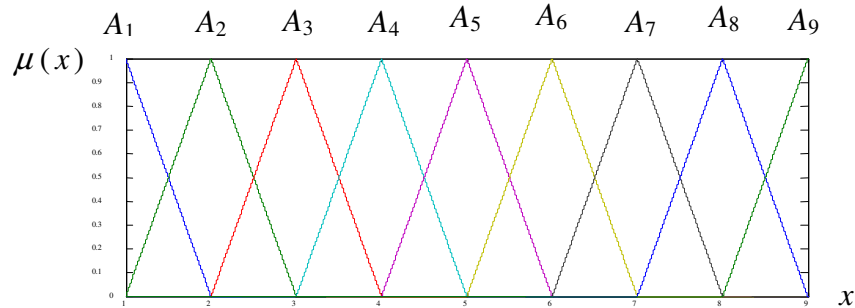
Pada variabel *input* suhu udara didefinisikan 13 himpunan *fuzzy* dan pada variable tingkat perawanan didefinisikan 9 himpunan *fuzzy* dengan fungsi keanggotaan segitiga dan Gaussian. Grafik fungsi keanggotaan dapat dilihat pada Gambar 2, Gambar 3, Gambar 4, Gambar 5.



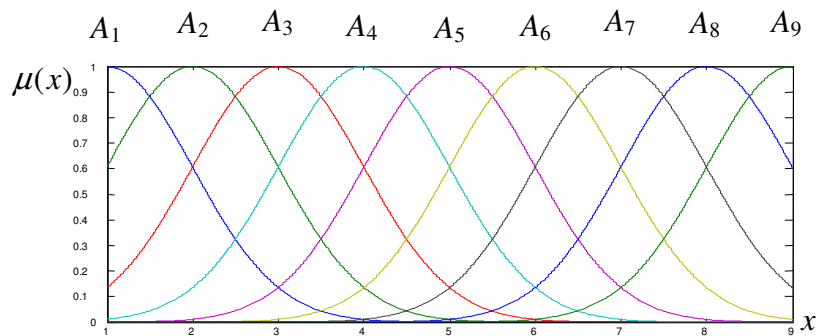
Gambar 2. Grafik 13 Himpunan Fuzzy pada [23,29] untuk Data Suhu Udara dengan Fungsi Keanggotaan Segitiga



Gambar 3. Grafik dari 13 Himpunan Fuzzy pada [23,29] untuk Data Suhu Udara dengan Fungsi Keanggotaan Gaussian



Gambar 4. Grafik dari 9 Himpunan *Fuzzy* pada [1,9] untuk Data Perawanan dengan Fungsi Keanggotaan segitiga



Gambar 5. Grafik dari 9 Himpunan *Fuzzy* pada [1,9] untuk Data Perawanan dengan Fungsi Keanggotaan Gaussian

Langkah 2. Membangun aturan *fuzzy* dari setiap pasangan *input* dan *output*.

Mendapatkan satu aturan JIKA-MAKA *fuzzy* dari setiap pasang *input-output* dan untuk menghitung derajat keanggotaan digunakan program Matlab.

Langkah 3. Menghitung derajat keanggotaan dari setiap aturan *fuzzy* yang terbentuk.

Derajat keanggotaan dari setiap aturan JIKA-MAKA *fuzzy* yang terbentuk dari langkah 2 dihitung dengan menggunakan program Matlab.

Langkah 4. Membentuk basis aturan *fuzzy*.

Basis aturan *fuzzy* diperoleh dari penyeleksian aturan *fuzzy* yang memiliki bagian anteseden yang sama tapi bagian konsekuen yang berbeda, dengan memilih aturan yang memiliki derajat keanggotaan terbesar. Penyeleksian aturan pada tulisan ini dilakukan secara manual.

Langkah 5. Membentuk sistem *fuzzy*

Basis aturan *fuzzy* yang diperoleh dari langkah 4 yaitu basis aturan *fuzzy* dengan 3 *input-1 output*, 2 *input-1 output*, 1 *input-1 output* menggunakan fungsi keanggotaan segitiga dan fungsi keanggotaan Gaussian. Setelah dilakukan kombinasi model, diperoleh **16 model fuzzy** untuk data *time series* dengan uraian sebagai berikut :

HASIL PEMODELAN DAN ANALISIS MODEL

Hasil Pemodelan

Hasil dari model peramalan data suhu udara harian di Yogyakarta bulan September-Desember 2010 menggunakan model *fuzzy* untuk data *times series* diberikan pada Tabel 8 dan Tabel 9. Dengan MSE (1) = *Mean square error* untuk seluruh data dan MSE (2)= *Mean square error* untuk data prediksi.

Tabel 8. Tingkat Kesalahan pada Peramalan Suhu Udara Berdasarkan Suhu Udara Sebelumnya

| Model | Banyak Himpunan Samar | Banyak <i>input</i> | Mesin <i>inferensi</i> | Fungsi Keanggotaan | MSE (1) | MSE (2) |
|--------|-----------------------|---------------------|------------------------|--------------------|---------|----------------|
| (i) | 13 | 1 | Pergandaan | Segitiga | 3.8538 | 3.7057 |
| (ii) | 13 | 2 | Pergandaan | Segitiga | 5.4856 | 5.7179 |
| (iii) | 13 | 3 | Pergandaan | Segitiga | 49.4 | 20.385 |
| (iv) | 13 | 1 | Minimum | Segitiga | 1.0243 | 1.2327 |
| (v) | 13 | 2 | Minimum | Segitiga | 1.0129 | 0.95696 |
| (vi) | 13 | 3 | Minimum | Segitiga | 0.86538 | 0.92346 |
| (vii) | 13 | 1 | Pergandaan | Gaussian | 1.0243 | 1.3625 |
| (viii) | 13 | 2 | Pergandaan | Gaussian | 0.68174 | 0.67594 |
| (ix) | 13 | 3 | Pergandaan | Gaussian | 0.66757 | 0.70547 |
| (x) | 13 | 1 | Minimum | Gaussian | 1.0243 | 1.2327 |
| (xi) | 13 | 2 | Minimum | Gaussian | 0.69061 | 0.67204 |
| (xii) | 13 | 3 | Minimum | Gaussian | 0.70991 | 0.70004 |

Tabel 9. Tingkat Kesalahan Pada Peramalan Suhu Udara Berdasarkan Suhu Udara Dan Perawanan

| Model | Banyak HS | Banyak <i>input</i> | Mesin <i>inferensi</i> | Fungsi keanggotaan | MSE (1) | MSE (2) |
|--------|-----------|---------------------|------------------------|--------------------|---------|---------|
| (xiii) | 13&9 | 2 | Pergandaan | Segitiga | 57.043 | 40.359 |
| (xiv) | 13&9 | 2 | Pergandaan | Gaussian | 1.1297 | 1.3357 |
| (xiv) | 13&9 | 2 | Minimum | Segitiga | 0.79618 | 0.87075 |
| (xvi) | 13&9 | 2 | Minimum | Gaussian | 1.0209 | 1.2435 |

Analisis Model

Tabel (8) dan Tabel (9) menunjukkan perbandingan MSE (*Mean Square Error*) dari setiap model dengan analisis sebagai berikut :

- a. Dengan memperhatikan nilai MSE dari model yang menggunakan sistem *fuzzy* dengan fungsi keanggotaan segitiga dan mesin *inferensi* pergandaan, maka model (i) akan lebih baik digunakan sebagai model prediksi dibandingkan model (ii) dan (iii).
- b. Dengan memperhatikan nilai MSE dari model yang menggunakan sistem *fuzzy* dengan fungsi keanggotaan segitiga dan mesin *inferensi* minimum, maka model (vi) akan lebih baik digunakan sebagai model prediksi dibandingkan model (iv) dan (v).
- c. Dengan memperhatikan nilai MSE dari model yang menggunakan sistem *fuzzy* dengan fungsi keanggotaan Gaussian dan mesin *inferensi* pergandaan, maka model (viii) akan lebih baik digunakan sebagai model prediksi dibandingkan model (vii) dan (ix).
- d. Dengan memperhatikan nilai MSE dari model yang menggunakan sistem *fuzzy* dengan fungsi keanggotaan Gaussian dan mesin *inferensi* minimum, maka model (xi) akan lebih baik digunakan sebagai model prediksi dari pada model (x) dan (xii)
- e. Dengan memperhatikan nilai MSE dari model yang terdapat pada Tabel 8 maka model prediksi yang terbaik adalah model (iv) yaitu model prediksi yang menggunakan fungsi keanggotaan

segitiga dengan mesin inferensi minimum yaitu dengan nilai MSE paling kecil.

- f. Dengan memperhatikan nilai MSE dari seluruh model yang terdapat pada Tabel 8 dan Tabel 9 maka model prediksi yang terbaik adalah model (xi) yaitu model prediksi *fuzzy* dengan 2 input mesin *inferensi* minimum, fungsi keanggotaan Gaussian dengan nilai $MSE(2)=0.67204$. Selanjutnya model inilah yang akan digunakan sebagai model prediksi suhu udara.

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan model *fuzzy* yang diaplikasikan pada data suhu udara dan perawanan harian kota Yogyakarta bulan September – Desember 2010, dengan menggunakan sistem samar yang dibentuk menggunakan table *look-up scheme*, maka diperoleh beberapa model *fuzzy*.

Model *fuzzy* untuk data *time series* pada data suhu udara harian bulan September – Desember 2010, berbentuk 3 *input-1 output*, 2 *input-1 output*, dan 1 *input-1 output*. Selanjutnya diperoleh 16 model *fuzzy* untuk data *time series*. Model terbaik diantara model tersebut adalah model dengan kriteria nilai MSE paling kecil untuk data prediksi suhu udara yaitu model *fuzzy* dengan 2 *input-1 output*, 13 himpunan samar, mesin *inferensi* minimum dan fungsi keanggotaan Gaussian. Prediksi suhu udara dengan menggunakan model *fuzzy* tersebut mempunyai nilai MSE sebesar 0.67204.

Perlu diadakan penelitian lebih lanjut untuk menghasilkan metode peramalan yang lebih baik.

DAFTAR PUSTAKA

- Abraham Bovas, Ledolter Johannes. 1983. *Statistical Method for Forecasting*. New York: John Willey&Sons.
- Agus Maman.A, Ali Muhson. 2005. *Pemodelan Tingkat Inflasi di Indonesia Dengan Menggunakan Sistem Fuzzy*. Jurnal Ekonomi & Pendidikan, Volum 2 Nomor 2, Desember 2005.
- Agus Karyanto. 2002. *Siklus Hidrologi Pembentukan Awan Dan Hujan*. Lampung: UNILA.
- Amstong. J Scott. 2002. *Principle of Forecasting: A Handbook for Researchers and Partitioners*. New York: Kluwer Academic Publisher.
- Arga,W. IR.1985. *Analisa Runtun Waktu Teori dan Aplikasi jilid 1*.Yogyakarta: BPFE.
- Badan Meteorologi Klimatologi Dan Geofisika Stasiun Geofisika Yogyakarta .BMKG Yogyakarta. Diambil tanggal 28 Januari 2011.
- Cut Meurah Regariana. 2005. *Atmosfer(Cuaca Dan Iklim)X.05*. Diklat geografi kelas X. Yogyakarta : Universitas Muhammadiyah Yogyakarta.
- Gunawan Nawawi. 2001. *Pengendalian iklim mikro*. Jakarta: Departemen Pendidikan Nasional.
- Hasbullah Thabrani. 2002. *Resiko Kesehatan Akibat Perubahan Cuaca, fakultas kesehatan masyarakat universitas indonesia*. Jakarta: Universitas Indonesia.
- Klir, George J., Ute St. Clair., Bo Yuan. 1997. *Fuzzy Set Theory Foundation and Applications*. New Jersey: Prentice-Hall International Inc.
- Mayer, Walker J.1984. *Concept of mathematical modeling*. New York: Mc Grow-Hill company.
- Muh. Altin Massinai . 2005. *Analisis Liputan Awan Berdasarkan Citra Satelit Penginderaan Jauh*. Makassar : Universitas Hasanuddin.

Jayus Priyana / Prediksi Suhu Udara

- M Fahrudin Muna. 2010. *Perancangan Perangkat Lunak Prediksi Cuaca Menggunakan Metode Txlaps Berbasis Sistem Cerdas Implementasi Wilayah Yogyakarta:UGM.Skripsi.*
- Prasetyo, Wahyu Agung. 2004. *Tips dan Trik Matlab.* Yogyakarta: Andi.
- Roger G.Barry, Richard J.Chorley. 2004. *Atmosphere, Weather And Climate.* New York: Routledge Taylor And Francise Group.
- Sihana . 2007. *Analisis Sistem Thermal. Diktat, Jurusan Teknik Fisika.* Yogyakarta :Universitas Gadjah Mada.
- Sri Kusumadewi. 2002. *Analisis Design dan Sistem Fuzzy Menggunakan Toolbox Matlab.* Yogyakarta : Graha Ilmu.
- Susilo, Frans SJ. 2003. *Pengantar Himpunan & Logika Kabur serta aplikasinya.* Yogyakarta : Universitas Sanata Dharma.
- Tejakusumah. 1982. *Unsur Cuaca dan Iklim.* Jakarta: Yudistira.
- Wang, Li Xin. 1994. *Adaptive Fuzzy Systems and Control – Design and Stability Analysis.* New Jersey: Prentice-Hall International Inc.
- Wang, Li Xin. 1997. *A Course in Fuzy Systems and Control.* New Jersey : Prentice-Hall International.
- William W. S. Wei. 1994. *Time series Analysis.*New York:Addisson Wesley.

DOUBLE GLAZING DESIGN UNTUK EFISIENSI ENERGI PADA ALAT RUMAH TANGGA

Dwi Lestari

Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA
Universitas Negeri Yogyakarta
Email: weestar91@yahoo.com

Abstrak

Di kehidupan sehari-hari, masyarakat tidak lepas dari penggunaan alat rumah tangga khususnya alat elektronik. Semakin maju teknologi, berbagai alat elektronik di desain sehingga memiliki kualitas terbaik. Pada makalah ini akan dibahas mengenai desain alat rumah tangga yakni oven listrik dengan *double glazing* untuk efisiensi energi panas yang mengalir (*heat transfer*). Model yang digunakan adalah model aliran panas, *Newton's law of cooling* dan *Fourier's law of heat conduction*. Dengan pemasangan kaca berlapis diharapkan mampu mengurangi tingkat kehilangan energi panas alat rumah tangga tersebut.

Kata kunci: *double glazing design, heat transfer*

PENDAHULUAN

Berbagai macam alat rumah tangga digunakan masyarakat untuk memenuhi kebutuhannya. Penggunaan alat elektronik untuk keperluan rumah tangga meningkat pesat seiring majunya teknologi. Begitu pula produsen untuk alat elektronik berusaha membuat alat tersebut dengan kualitas terbaik. Alat elektronik yang akan dibahas disini adalah oven listrik. Oven merupakan alat rumah tangga yang digunakan untuk memanggang atau memanaskan makanan pada suhu tertentu. Cara kerja Oven listrik yaitu merubah tenaga listrik menjadi tenaga panas. Adapun bagian-bagian dari oven listrik berupa tungku gas oven bagian bawah listrik, tungku gas oven bagian atas listrik, alat pemutar panggangan, kaca oven, pematik otomatis dan lampu.

Salah satu bagian dari oven listrik adalah kaca oven. Berbagai jenis kaca tentu dapat dipilih sebagai penyusun oven. Namun disini pembahasan lebih pada desain pemasangan kaca berlapis pada oven. Hal ini berkaitan dengan energi panas yang dihasilkan oleh tenaga listrik. Berdasarkan kajian tentang pemasangan kaca berlapis pada jendela untuk efisiensi aliran panas, hal ini akan diterapkan pada oven listrik. Tujuan dari pemasangan kaca berlapis yakni untuk menghemat energi panas yang hilang sehingga dapat menghemat energi listrik.

Pemasangan kaca berlapis berkaitan dengan aliran panas melibatkan persamaan matematis berupa persamaan panas dalam kondisi setimbang, *Newton's law of cooling*, dan aliran panas (*heat flux*). Dengan pemasangan kaca berlapis diharapkan dapat mengurangi tingkat kehilangan energi panas pada oven listrik.

PEMBAHASAN

Model Matematis

Masalah panas diawali dari suhu pada kedudukan awal kemudian menjadi lebih panas atau lebih dingin akibat perubahan suhu. Jika suhunya tidak sama, maka terjadi aliran panas dari suhu tinggi ke suhu lebih rendah. Menurut *Fourier's law of heat conduction*, diberikan aliran panas sebagai berikut

$$J(x) = -k \frac{dU(x)}{dx}, \quad (1)$$

dengan k konstanta konduksi.

Persamaan panas pada kondisi setimbang yakni

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0. \quad (2)$$

Persamaan (2) merupakan persamaan diferensial orde dua dengan solusi sebagai berikut

$$U(x) = Ax + B, \quad (3)$$

A dan B konstanta.

Diberikan syarat batas saat $x=0$, yakni

$$U(0) = u_i, \quad (4)$$

dengan u_i suhu di dalam ruang yang besarnya dapat diatur, sedangkan saat $x=l$

$$J(l) = h(U(l) - u_o), \quad (5)$$

h merupakan koefisien transfer panas.

Menurut Fourier's law of heat conduction diperoleh

$$J(x) = -k \frac{dU(x)}{dx} = -kA, \quad (6)$$

dan saat $x=l$

$$-kA = h(Al + B - u_o). \quad (7)$$

Pada saat $x=0$, diperoleh $B=u_i$ sehingga Persamaan (7) menjadi

$$-\frac{k}{h} A = (Al + u_i - u_o), \quad (8)$$

diperoleh

$$A = \frac{-(u_i - u_o)}{l + \frac{k}{h}}. \quad (9)$$

Jadi solusi pada kondisi setimbangnya adalah

$$U(x) = u_i - \frac{(u_i - u_o)}{l + \frac{k}{h}} x, \quad (10)$$

dan Persamaan (1) menjadi

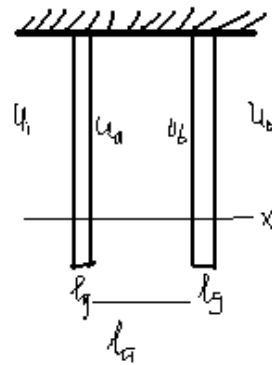
$$J(x) = \frac{(u_i - u_o)}{\frac{l}{k} + \frac{1}{h}} \quad (11)$$

dimana $u_i > u_o$.

Efisiensi Energi

Perhitungan efisiensi energi pada model yang diterapkan untuk oven listrik menggunakan asumsi: jenis kaca standar, berlaku Newton's law of cooling dan Fourier's law of colling, model aliran panas satu arah/satu dimensi.

Misal u_i suhu di dalam ruang dan u_o suhu di luar ruang, dengan $u_i > u_o$. Selanjutnya, l_g ketebalan setiap lapisan kaca dan l_a lebar celah udara atau ruang antar lapisan kaca, u_a dan u_b suhu pada masing-masing sisi celah udara. Desain lapisan kaca dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 1. Desain kaca berlapis dua.

Aliran panas J merupakan besarnya panas yang dipindahkan melalui sebuah unit area (per unit waktu) dari bidang yang tegak lurus dengan arah sumbu x . Pembahasan di sini lebih pada perilaku sistem pada kedudukan aliran panas setimbang, dimana J konstan. Aliran panas J diberikan dengan rumus seperti Persamaan (11), yakni

$$J = \frac{u_i - u_0}{R}, \quad (12)$$

dengan $R=2R_g+R_a$, total daya tahan panas.

Nilai R merupakan jumlah dari daya tahan panas yakni dua lapisan kaca R_g dan satu rongga udara R_a . Aliran panas pada kaca berlapis ganda perlu dibandingkan terhadap aliran panas pada kaca lapisan tunggal ($l_a=0$), sehingga lapisan mempunyai ketebalan $2l_g$. Aliran panas pada lapisan tunggal, yakni

$$J_s = \frac{u_i - u_0}{2R_g}. \quad (13)$$

Selanjutnya, didefinisikan kehilangan panas relatif sebagai berikut

$$\Delta = \frac{J_s - J}{J_s} = \frac{R_a}{2R_g + R_a}. \quad (14)$$

Untuk kasus 1, jika diasumsikan suhu kaca hampir sama dengan suhu udara maka

$$R_g = \frac{l_g}{k_g}, \quad (15)$$

$$R_a = \frac{l_a}{k_a}$$

dengan l_g : lebar satu lapisan kaca
 k_g : daya konduksi kaca
 l_a : jarak antara dua lapisan kaca / celah udara
 k_a : daya konduksi udara

dengan nilai pendekatan sesuai tabel berikut.

Tabel 1. Daya konduksi panas menurut standar SI

| Jenis bahan | K (J/ms ⁰ C) | Jenis bahan | k(J/ms ⁰ C) |
|------------------------|-------------------------|-------------|------------------------|
| Tembaga | 386 | Batu bata | 0,38 – 0,52 |
| Aluminium | 206 | Asbes | 0,113 |
| Besi | 73 | Beton | 0,128 |
| Stainless steel | 14 | Kaca | 0,81 |
| Air (0 ⁰ C) | 0,57 | Kayu | 0,15 |
| Udara | 0,05 | Polystyrene | 0,157 |

Berdasarkan tabel 1, nilai $k_g = 0,81 \text{ J/ms}^0\text{C}$, $k_a = 0,05 \text{ J/ms}^0\text{C}$, $\frac{k_g}{k_a} \approx 16$ dan misalkan $\frac{l_a}{l_g} = r$, diperoleh

$$\Delta_1 = \frac{R_a}{2R_g + R_a} = \frac{r}{r + \frac{1}{8}} \quad (16)$$

Untuk nilai $r = 1$, penurunan hilangnya panas sebesar 88%, $r = 4$ penurunan hilangnya panas sebesar 97% dan $r = 8$ penurunan hilangnya panas tidak jauh berbeda dengan $r = 4$ yakni sebesar 98%. Oleh karena itu dipilih nilai $r = 4$ yang artinya jika $l_a \approx 4l_g$ maka prosentase kehilangan panas dapat direduksi sebesar 97%.

Untuk kasus 2 dan 3 memperhatikan Newton's law of cooling. Oleh karena itu, daya tahan panas ditingkatkan oleh besarnya nilai $\frac{1}{h}$ untuk setiap kontak kaca dengan udara, dengan h koefisien Newton cooling.

Kasus 2, Newton's law of cooling hanya pada kontak kaca dengan udara (kontak dengan celah udara diabaikan) sehingga

$$R_g = \frac{l_g}{k_g} + \frac{1}{h}, \quad \frac{k_g}{k_a} = 16, \quad \frac{l_a}{l_g} = r, \quad (17)$$

diperoleh

$$\Delta_2 = \frac{16r}{2\sigma + 16r + 2}, \quad \sigma = \frac{k_g}{hl_g} \quad (18)$$

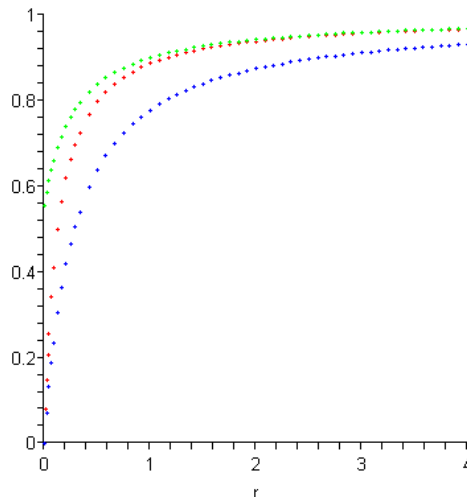
Kasus 3, Newton's law of cooling pada kontak kaca dengan celah udara dan dari celah udara ke kaca sehingga

$$R_a = \frac{l_a}{k_a} + \frac{2}{h}, \quad (19)$$

diperoleh

$$\Delta_3 = \frac{2\sigma + 16r}{2\sigma + 16r + 2}, \quad \sigma = \frac{k_g}{hl_g} \quad (20)$$

Misalnya diambil nilai $h = 10\text{W/m}^2\text{ }^0\text{C}$ dan $l_g = 4 \text{ mm} = 0,004\text{m}$, $l_a = 16 \text{ mm} = 0,016\text{m}$, efisiensi penurunan kehilangan panas disajikan pada Gambar 2.



Gambar 2. Hubungan antara rasio r dan efisiensi hilangnya panas.
(merah: Δ_1 , biru: Δ_2 , hijau: Δ_3)

Berdasarkan Gambar 2, dapat dilihat hubungan antara besarnya rasio lebar kaca dan lebar celah udara dengan efisiensi hilangnya panas. Semakin nilai r besar artinya celah udara semakin lebar terlihat efisiensinya meningkat.

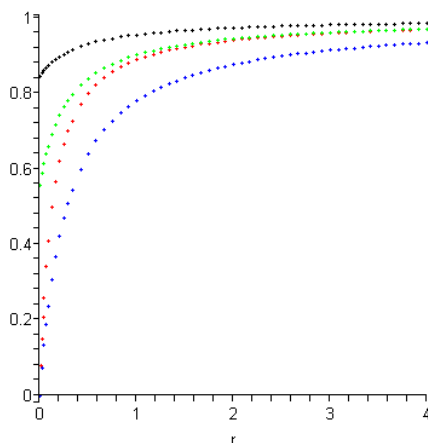
Untuk kasus 4, pemasangan kaca berlapis tiga dengan asumsi seperti kasus 3, diperoleh

$$\Delta_4 = \frac{R_g + 2R_a}{3R_g + 2R_a}, \quad \text{dengan } R_a = \frac{l_a}{k_a} + \frac{4}{h}, \quad (21)$$

sehingga

$$\Delta_4 = \frac{8\sigma + 32r + 1}{8\sigma + 32r + 3}.$$

Gambar untuk kasus 4 tampak sebagai berikut.



Gambar 3. Hubungan antara rasio r dan efisiensi hilangnya panas.
(merah: Δ_1 , biru: Δ_2 , hijau: Δ_3 , hitam: Δ_4)

Jadi, hasil perhitungan beberapa kasus di atas dapat digunakan sebagai pertimbangan untuk

pemasangan kaca berlapis pada oven listrik. Namun demikian untuk memilih nilai r harus memperhatikan faktor-faktor lain juga seperti biaya produksi oven listrik dengan kaca berlapis.

KESIMPULAN

Berbagai jenis alat elektronik untuk keperluan rumah tangga, salah satunya oven listrik. Desain oven listrik dengan kaca berlapis diharapkan dapat mengurangi tingkat energi panas yang hilang. Model yang dibahas menggunakan teori model aliran panas, *Newton's law of cooling* dan *Fourier's law of heat conduction*. Perhitungan efisiensi energi pada alat tersebut tentu saja dengan beberapa asumsi yang diperlukan. Untuk penelitian selanjutnya dapat diperhitungkan mengenai efisiensi biaya produksi untuk desain oven listrik dengan kaca berlapis (*double glazing*).

DAFTAR PUSTAKA

Barnes, Belinda dan Glenn R Fulford, 2002, *Mathematical Modelling with Case Studies*, Taylor & Francis, London and New York.

Humi, Mayer dan William B Miller, 1992, *Boundary Value Problems and Partial Differential Equations*, Publishing company, Boston.

Ross, Shepley L., 1984, *Differential equations*. 3rded, JohnWiley and Sons, Inc, Singapore.

Yang, Yunhua, 2003, *Natural Convective Flow and Heat Transfer in Vertical and Inclined Glazing Cavities*, Thesis, Department of Mechanical and Industrial Engineering, University of Massachusetts Amherst.

<http://electronicsfurnitureinfo.com/new/dapur-gas-kaca>.

Gambar

Kaca 2 lapis



Kaca 3 lapis



SIMULASI *GRANULAR DYNAMICS* DIMENSI DUA PARTIKEL DENGAN UKURAN BERVARIASI

Moh. Hasan

Jurusan Matematika – FMIPA – Universitas Jember

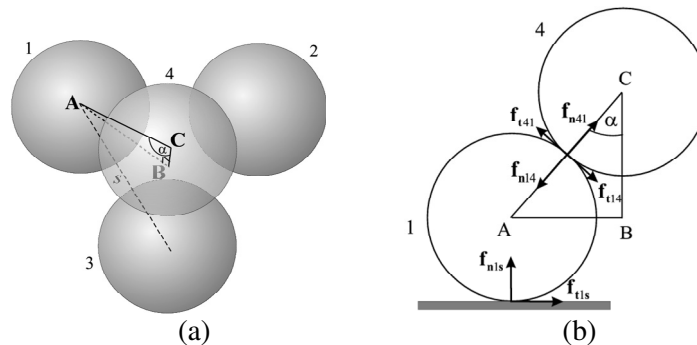
Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji aspek dinamik dan statik dari proses deposisi partikel dengan ukuran bervariasi. Simulasi dilakukan dengan menerapkan model *Granular Dynamics* yang berupa persamaan diferensial order dua sebagai representasi gaya tumbukan secara simultan antara suatu partikel dengan partikel-partikel disekelilingnya. Persamaan tersebut diselesaikan secara numerik dengan menggunakan metode Gear Predictor-Corrector (GPC) orde empat. Hasil penelitian menunjukkan bahwa berbeda dengan proses deposisi partikel dengan ukuran sama (monodisperse materials), dinamika proses deposisi partikel dengan ukuran bervariasi (polydisperse materials) tidak didominasi oleh *surface avalanche* maupun *internal landslide*. Kajian mengenai aspek statik menunjukkan bahwa struktur dari gundukan (pile) tidak berbentuk *close packed* dan bentuk jaringan gaya tidak teratur.

Kata kunci: *Granular dynamics*, deposisi partikel, Metode *Predictor-Corrector*

PENDAHULUAN

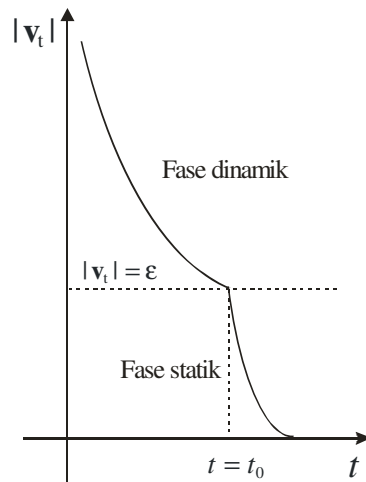
Dalam kehidupan sehari-hari banyak dijumpai aktifitas yang melibatkan partikel/material butiran (granular materials), misal penimbunan (deposisi) pasir. Pada proses tersebut, seiring dengan berjalannya waktu, partikel dapat bergerak setelah itu berhenti (stabil) sebagai akibat adanya gaya (gaya gesekan). Partikel pada posisi stabil dapat bergerak lagi (dinamik) setelah mendapatkan gaya tumbukan dengan partikel lain. Tumbukan antar partikel dan gaya yang bekerja diilustrasikan pada Gambar 1.



Gambar 1. Tumbukan partikel (a) dan gaya yang bekerja (b)

Gambar 1a mengilustrasikan kejadian tumbukan antara partikel 1, 2, dan 3, yang diam diatas permukaan, dengan partikel 4, yang dijatuhkan secara simetris. Gambar 1b menjelaskan secara skematik tumbukan yang terjadi antara partikel 1 dan 4, dan antara partikel 1 dengan permukaan lantai. Dari Gambar 1b dapat dilihat bahwa gaya tumbukan terdiri atas gaya normal dan gaya gesekan (tangensial). Fokus kajian umumnya diarahkan pada gaya gesekan. Hal ini dapat dimaklumi karena tantangan yang menarik adalah memecahkan permasalahan ketidakjelasan gaya gesekan (gaya Coulomb) pada fase statik. Disisi lain, pada simulasi dinamik kejelasan gaya gesekan ini mutlak diperlukan.

Hasan dan van Opheusden (2007) mengajukan model gaya tumbukan yang mengakomodasikan fenomena “stick-slip”. Model tersebut telah berhasil mendeskripsikan fenomena *multiple transisition* kelakuan partikel pada proses deposisi partikel, yakni dari dinamik ke statik dan dari statik ke dinamik. Mirip dengan yang dikembangkan oleh Matuttis *et al* (2000), dalam fase statik digunakan spring bayangan, namun pada model ini mengikutsertakan faktor redaman. Selanjutnya, pemberlakuan fase statik tidak didasarkan pada terjadinya tumbukan, melainkan pada kriteria ambang batas (disebut “kriteria ε ”) sebagai berikut: (i) ketika harga mutlak dari kecepatan relatif pada arah tangensial kurang dari ε , fase statik berlaku (Gambar 2). Jika sebaliknya, diterapkan fase dinamik. Ketika gaya spring melebihi batasan gaya Coulomb, spring dilepaskan dan fase dinamik berlaku. Selama dalam fase statik, gaya gesekan diberikan oleh spring dengan redaman, sedangkan pada fase dinamik, gaya gesekan proporsional terhadap gaya normal.



Gambar 2. Ilustrasi transisi gerak (fase dinamik ke fase statik)

Model gaya gesekan tersebut dirumuskan dalam bentuk

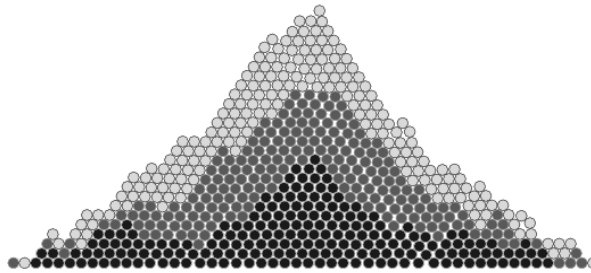
$$\mathbf{f}_t = \begin{cases} -(k_t \boldsymbol{\delta}_t + \gamma_t \mathbf{v}_t), & |\mathbf{v}_t| \leq \varepsilon \text{ (fase statik)} \\ -\hat{\mathbf{v}}_t \mu_d |\mathbf{f}_n|, & |\mathbf{v}_t| > \varepsilon \text{ (fase dinamik)} \end{cases} \quad (1)$$

dengan γ_t , μ_s , dan μ_d masing-masing merupakan koefisien redaman, koefisien gesekan statis dan koefisien gesekan dinamis, k_t menyatakan konstanta spring, dan $\boldsymbol{\delta}_t = \int_{t_0} \mathbf{v}_t(\tau) d\tau$ merepresentasikan total simpangan pada arah gaya gesekan (tangensial) yang dibangun selama kurun waktu $t - t_0$. Dalam hal ini, t_0 menyatakan waktu mulai berlakunya fase statik.

Kemungkinan terjadinya osilasi dalam fase statik dihindari dengan menerapkan redaman kritis, *i.e.*, $\gamma_t = 2\sqrt{mk_t}$. Pada permulaan fase dinamik kecepatan partikel relatif kecil. Untuk menghindari sistem masuk kembali ke fase statik, gaya gesekan dirancang berlawanan dengan kecepatan ketika mengaplikasikan “ ε ”. Selama kecepatan terus meningkat fase dinamik tetap dipertahankan. Pada transisi dari fase statik ke dinamik, spring bayangan ditiadakan seluruhnya, sehingga semua informasi tentang arah dan besaran pada spring terhapus dari memori. Kesederhanaan model ini adalah bahwa selain “ ε ” dipenuhi, sistem hanya menerapkan gaya

gesekan dinamik yang bebas dari faktor kecepatan. Model yang juga bebas dari kecepatan digunakan oleh Baxter *et al* (1997) dan Zhou *et al* (2001), tetapi keduanya menerapkan spring bayangan secara berbeda dengan persamaan (1).

Model pada persamaan (1) telah digunakan untuk menyimulasikan proses deposisi koin berbentuk lingkaran dengan ukuran seragam (monodisperse materials). Salah satu contoh hasil simulasi penimbunan partikel pada dimensi dua disajikan dalam Gambar 3. Pada simulasi tersebut sekelompok partikel (3 kelompok) diberi warna yang berbeda. Dari Gambar 3 terlihat bahwa bentuk gundukannya mendekati bentuk segitiga, dengan partikel yang dijatuhkan belakangan dapat menduduki posisi paling bawah dengan mendesak partikel yang dijatuhkan sebelumnya menjauh kesamping.



Gambar 3. Hasil simulasi dua dimensi

Pada sistem yang menggunakan koin dengan ukuran sama, setiap partikel memiliki jari-jari yang sama. Akibatnya, penentuan kriteria terjadinya tumbukan juga sama, yakni apabila jarak antara pusat partikel i dan j (d_{ij}) kurang dari diameter, σ ($d_{ij} < \sigma$). Disamping itu, suatu partikel kemungkinan dapat bertumbukan sebanyak-banyaknya dengan 6 buah dan 12 buah partikel masing-masing untuk dimensi dua dan dimensi tiga, yakni ketika struktur partikel dalam kondisi *close packed*, seperti terlihat pada beberapa bagian Gambar 3.

Kenyataannya, dalam proses deposisi, ukuran partikel yang digunakan bervariasi, sehingga kriteria terjadinya tumbukan juga bervariasi. Konsekuensinya, Kalkulasi penentuan gaya tumbukan juga semakin panjang karena kriteria tumbukan tersebut harus dihitung pada setiap individu partikel. Demikian juga dengan jumlah partikel yang mungkin akan bertumbukan bisa lebih dari 6 buah untuk sistem dimensi dua. Namun untuk mendapatkan hasil yang lebih realistis, kajian terhadap sistem yang ukuran partikelnya bervariasi menjadi penting.

Berdasarkan uraian diatas, permasalahan dalam penelitian ini adalah bagaimanakah kelakuan dinamik, bentuk/struktur gundukan (pile), dan jaringan gaya (*force network*) pada deposisi partikel dengan ukuran bervariasi ?. Informasi tentang hal-hal tersebut sangat berguna untuk mendeskripsikan aspek dinamik, baik pada sekala makro (misal longsoran dan patahan selama proses pembentukan gundukan) maupun pada sekala mikro (misal reposisi partikel). Hasil kajian ini juga berguna untuk mendeskripsikan aspek statik yang antara lain mencakup struktur sistem, sudut kemiringan (*angle of repose*), dan jaringan gaya (*force network*).

METODE PENELITIAN

Penelitian ini merupakan kelanjutan dari penelitian yang hasilnya telah dipublikasikan sebelumnya (Hasan dan van Opheusden (2007)). Dengan demikian model Granular Dynamics yang digunakan adalah sama, yakni seperti yang dirumuskan dalam persamaan (1). Prosedur untuk solusi numerik juga sama, yakni menggunakan metode GPC orde 4. Metode tersebut terdiri atas tiga tahapan: prediksi, evaluasi, dan koreksi. Andaikan \mathbf{r}_i , \mathbf{v}_i , \mathbf{a}_i , \mathbf{b}_i , dan \mathbf{c}_i masing-masing merepresentasikan posisi partikel i dan turunan pertama, kedua, ketiga, dan keempat. Kalkulasi

yang harus dilaksanakan pada masing-masing tahap dijelaskan secara rinci berikut ini.

Tahap Prediksi

Memprediksi posisi partikel dan turunan-turunannya pada waktu $t + \Delta t$ menggunakan Deret Taylor orde 4 yang didasarkan pada posisi partikel dan turunan-turunannya pada waktu t . Langkah ini menghasilkan:

$$\mathbf{r}_i^P(t + \Delta t) = \mathbf{r}_i(t) + a_1 \mathbf{v}_i(t) + a_2 \mathbf{a}_i(t) + a_3 \mathbf{b}_i(t) + a_4 \mathbf{c}_i(t), \quad (2a)$$

$$\mathbf{v}_i^P(t + \Delta t) = \mathbf{v}_i(t) + a_1 \mathbf{a}_i(t) + a_2 \mathbf{b}_i(t) + a_3 \mathbf{c}_i(t), \quad (2b)$$

$$\mathbf{a}_i^P(t + \Delta t) = \mathbf{a}_i(t) + a_1 \mathbf{b}_i(t) + a_2 \mathbf{c}_i(t), \quad (2c)$$

$$\mathbf{b}_i^P(t + \Delta t) = \mathbf{b}_i(t) + a_1 \mathbf{c}_i(t), \quad (2d)$$

$$\mathbf{c}_i^P(t + \Delta t) = \mathbf{c}_i(t), \quad (2e)$$

dengan $a_1 = \Delta t$, $a_2 = a_1 \Delta t / 2$, $a_3 = a_2 \Delta t / 3$, dan $a_4 = a_3 \Delta t / 4$.

Tahap Evaluasi

Mengevaluasi gaya pada setiap partikel pada waktu $t + \Delta t$ menggunakan nilai hasil prediksi. Hal ini akan memberikan besaran percepatan terkoreksi $\mathbf{a}_i^C(t + \Delta t)$ yang selanjutnya akan dibandingkan dengan percepatan hasil prediksi untuk menentukan besarnya kesalahan pada tahap prediksi, yakni:

$$\Delta \mathbf{a}_i(t + \Delta t) = \mathbf{a}_i^C(t + \Delta t) - \mathbf{a}_i^P(t + \Delta t). \quad (3)$$

Tahap Koreksi

Hasil kalkulasi pada persamaan (3) digunakan untuk mengoreksi hasil prediksi untuk mendapatkan nilai posisi dan turunan-turunannya (persamaan (2a-d)) yang lebih baik. Rumusan untuk menentukan nilai terkoreksi dari beberapa besaran dimaksud diberikan oleh:

$$\mathbf{r}_i^C(t + \Delta t) = \mathbf{r}_i^P(t + \Delta t) + a_r \Delta \mathbf{a}_i(t + \Delta t), \quad (4a)$$

$$\mathbf{v}_i^C(t + \Delta t) = \mathbf{v}_i^P(t + \Delta t) + a_v \Delta \mathbf{a}_i(t + \Delta t), \quad (4b)$$

$$\mathbf{b}_i^C(t + \Delta t) = \mathbf{b}_i^P(t + \Delta t) + a_b \Delta \mathbf{a}_i(t + \Delta t), \quad (4c)$$

$$\mathbf{c}_i^C(t + \Delta t) = \mathbf{c}_i^P(t + \Delta t) + a_c \Delta \mathbf{a}_i(t + \Delta t), \quad (4d)$$

dengan $a_r = (19/90)a_2$, $a_v = (3/4)a_2/a_1$, $a_b = (1/2)a_2/a_3$, dan $a_c = (1/12)a_2/a_4$.

Meskipun model dan prosedur numerik sama dengan kasus *monodisperse materials*, namun penyelesaian kasus *polydisperse materials*, masih memerlukan modifikasi terhadap *software* (program dalam Bahasa Fortran). Modifikasi dimaksud antara lain terkait dengan rumusan kriteria tumbukan antar partikel dan penerapannya dilaksanakan pada setiap iterasi. Modifikasi juga perlu dilaksanakan dalam *updating* array daftar tetangga (*neighbourlist*) dari setiap partikel. Setelah modifikasi *software*, dilaksanakan simulasi terhadap model dengan bervariasi karakteristik partikel, antara lain faktor kelentingan dan kekasaran permukaan partikel.

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

a. Modifikasi Software

Berbeda dengan model MD yang sering menggunakan *periodic boundary condition* (PBC) dalam memprediksikan trayektori partikel, model GD menggunakan *real boundary condition*. Disamping itu, model GD memperhitungkan gravitasi bumi sebagai salah satu gaya yang bekerja pada partikel, sehingga dalam GD gaya yang bekerja pada partikel terdiri atas gaya gravitasi bumi

dan gaya tumbukan. Ketika partikel i bertumbukan dengan partikel j , maka gaya tumbukan yang bekerja pada kedua partikel tersebut (Gambar 1b) mencakup gaya normal dan gaya tangensial (gesekan). Gaya normal pada partikel i diberikan oleh:

$$\mathbf{f}_{nij} = -k_n \delta_{nij} - \gamma_n \mathbf{v}_{nij}, \quad (5)$$

dengan δ_{nij} dan \mathbf{v}_{nij} masing-masing menotasikan kompresi dan kecepatan relatif normal terhadap permukaan terjadinya tumbukan, k_n dan γ_n menyatakan kontanta kekenyalan material dan damping. Sedangkan rumusan model gaya gesekan diberikan dalam persamaan (1). Dengan demikian gaya yang bekerja pada partikel i diberikan oleh:

$$\mathbf{f}_i = m\mathbf{g} + \sum_{\text{kontak}} (\mathbf{f}_{nij} + \mathbf{f}_{ij}), \quad (6)$$

dengan \mathbf{f}_i = total gaya partikel i , m = massa partikel i , dan \mathbf{g} = gaya gravitasi. Total gaya tumbukan tersebut merupakan resultan dari seluruh kemungkinan kontak antara partikel i dengan partikel lainnya. Persamaan (6) dapat dituliskan dalam bentuk

$$\ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{g} + \frac{1}{m} \sum_{\text{kontak}} (\mathbf{f}_{nij} + \mathbf{f}_{ij}). \quad (7)$$

Persamaan (7) merupakan persamaan diferensial biasa order 2. Namun karena unsur kedua pada ruas kanan merupakan akumulasi dari gaya tumbukan, maka cukup sulit mendapatkan solusi analitiknya, sehingga solusi secara numerik merupakan alternatif solusi tersebut.

Ingredient utama dari metode GPC orde 4 adalah resultan gaya yang bekerja pada setiap partikel yang mencakup gaya gravitasi dan gaya tumbukan. Penentuan gaya tumbukan memiliki porsi terbesar dari keseluruhan kalkulasi karena pada setiap iterasi diperlukan identifikasi terhadap semua kemungkinan terjadinya tumbukan antara satu partikel dengan partikel-partikel lainnya. Andaikan suatu sistem memiliki sebanyak n partikel, maka terdapat sebanyak $(n-1)$ partikel yang harus di cek apakah partikel-partikel tersebut akan bertumbukan dengan partikel i . Dengan demikian pada setiap iterasi harus dilakukan $(n-1)^2$ kali pengecekan/pencarian, sehingga untuk sebanyak k iterasi, perhitungan gaya dilakukan sebanyak $k(n-1)^2$.

b. Simulasi dan Analisis

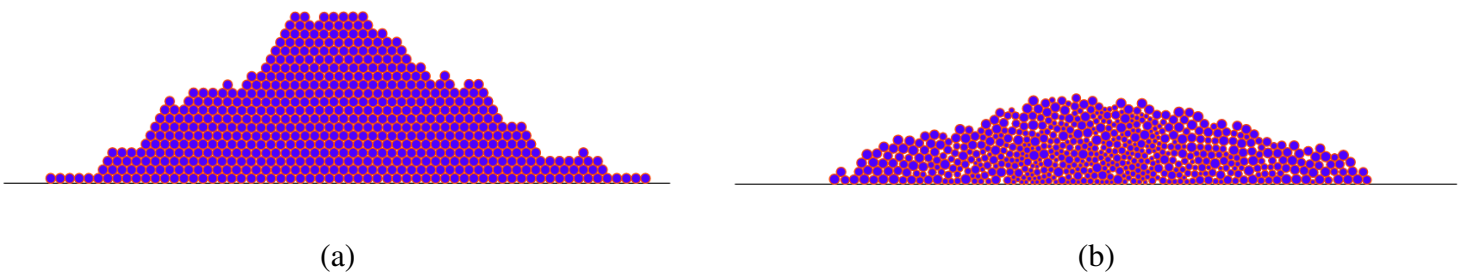
Pada kasus *monodisperse* telah ditunjukkan bahwa *software* yang dihasilkan cukup valid untuk mengaproksimasi solusi proses deposisi koin dan/atau bola. Dengan demikian hasil modifikasi *software* tersebut untuk kasus *polydisperse* juga diyakini cukup valid sebagai aproksimasi solusinya, untuk selanjutnya digunakan menyimulasikan proses deposisi untuk kasus *polydisperse* partikel. Simulasi dilaksanakan dengan memvariasikan karakteristik partikel dan media yang mencakup kekenyalan dan kekasaran permukaan. Sedangkan parameter yang tidak berubah adalah massa $m = 0.05$ kg, kontanta spring $k_n = k_t = 10^5$ kg/s, ambang batas kecepatan pada fase statik $\epsilon = 10^{-3}$ m/s, dan skala waktu $\Delta t = 10^{-5}$ s.

Dalam simulasi ini, proses deposisi partikel dilaksanakan dengan menjatuhkan partikel satu persatu dari suatu ketinggian tertentu, h . Dengan demikian, besaran yang tidak nol dari konfigurasi awal sistem hanyalah kecepatan awal, \mathbf{v}_0 , yang nilainya ditentukan secara random. Secara umum, kajian terhadap simulasi proses deposisi material difokuskan pada dua substansi kajian, yakni aspek dinamik (dinamika proses deposisi) dan aspek statik (struktur partikel setelah sistem dalam keadaan stabil). Untuk mendapatkan hasil pengukuran yang *reliable*, untuk suatu sistem, pengulangan terhadap perlakuan dilaksanakan sebanyak lima kali. Pengulangan tersebut dilakukan dengan memvariasikan kecepatan awal melalui variasi “seed” dalam membangun bilangan random. Analisis hasil simulasi disajikan secara singkat sebagai berikut.

Aspek Dinamik

Observasi terhadap simulasi proses deposisi 600 *monodisperse* partikel dan *polydisperse* partikel (ukuran partikel yang digunakan dibangun secara random dengan ukuran diameter, terendah adalah 0,02 m dan tertinggi 0,05 m) yang dijatuhkan pada suatu hamparan dimensi dua menunjukkan bahwa adanya perbedaan kelakuan dinamik antara kedua sistem tersebut. Pada sistem *polydisperse*, jarang terjadi *surface avalanche* maupun *internal landslide*. Hal ini disebabkan karena partikel dengan ukuran yang lebih kecil cenderung masuk ke bawah melalui celah diantara partikel yang berukuran lebih besar. Akibatnya, pada bagian tengah gundukan didominasi oleh partikel-partikel berukuran kecil, dan partikel yang berukuran besar terdesak ke bagian/lapisan luar, sehingga gundukan yang dibangun oleh sistem *polydisperse* umumnya lebih pendek dibandingkan dengan sistem *monodisperse* seperti ditunjukkan dalam Gambar 4.

Aspek Statik

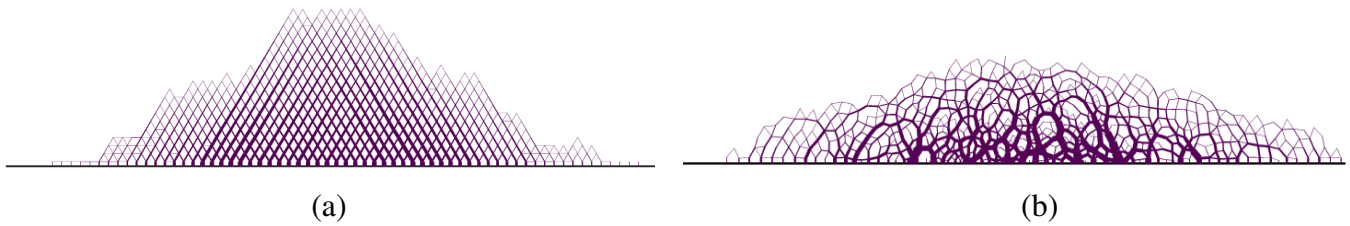


Gambar 4. Hasil simulasi 600 partikel pada sistem *monodisperse* (a) dan *polydisperse* (b)

Penerapan model gaya tumbukan persamaan (7) untuk menyimulasikan proses deposisi tidak selamanya menghasilkan gundukan. Karakteristik partikel yang digunakan menjadi faktor yang cukup signifikan dalam menentukan hasil simulasi; untuk partikel yang tingkat kekasaran permukaannya kecil, partikel mudah *sliding* dan tersebar pada hamparan sehingga gundukan seperti pada Gambar 4 tidak dapat terbentuk. Terbentuknya gundukan dimungkinkan jika koefisien gesekan lebih dari 0.15.

Dari Gambar 4 terlihat bahwa gundukan yang dihasilkan oleh sistem *monodisperse* dan sistem *polydisperse* berbeda; *angle of repose* pada sistem yang pertama (Gambar 4a) lebih besar dibandingkan dengan sistem yang kedua (Gambar 4b). Struktur gundukan yang dihasilkan juga berbeda; pada sistem *monodisperse*, struktur gundukannya cukup teratur mendekati *close packed structure*, sedangkan pada sistem *polydisperse*, strukturnya tidak teratur dan banyak rongga didalamnya. Sistem yang seperti ini justru banyak dijumpai dalam kehidupan sehari-hari, misal struktur tanah.

Secara intuitif, dari gundukan-gundukan tersebut dapat diduga bahwa partikel-partikel yang berada dibawah menanggung beban yang jauh lebih berat dibandingkan dengan partikel yang ada di bagian atas. Analisis terhadap gaya normal masing-masing individu partikel menghasilkan suatu jaringan gaya (*force network*). Gambar 5 merupakan *force network* dari gundukan yang dihasilkan pada sistem *monodisperse* dan *polydisperse* yang disajikan pada Gambar 4; Gambar 5a dan 5b masing-masing bersesuaian dengan Gambar 4a dan 4b. Dari Gambar 5a terlihat bahwa *force network* untuk sistem *monodisperse* membentuk pola yang teratur, yakni didominasi oleh bangun jajaran genjang (*diamond*), sedangkan *force network* untuk sistem *polydisperse* tidak membentuk mempunyai keteraturan pola. Tebal garis pada *force network* tersebut mengindikasikan besarnya gaya. Dari Gambar 5 tersebut terlihat bahwa pada bagian bawah didominasi oleh garis tebal,



Gambar 5. *Force network* pada sistem *monodisperse* (a) dan *polydisperse* (b)

sebaliknya pada bagian atas didominasi oleh garis tipis. Dengan kata lain, gambar tersebut memberikan informasi bahwa intuisi yang menyatakan bahwa partikel bagian bawah menanggung beban yang besar adalah benar.

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil simulasi yang telah dibahas sebelumnya dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. selama proses deposisi berlangsung, mekanisme dinamika pembentukan gundukan pada sistem *monodisperse* didominasi oleh *surface avalanche*, sedangkan pada sistem *polydisperse*, selain *surface avalanche*, pembentukan gundukan juga ditentukan oleh *internal arrangement* dari partikel yang berukuran relatif kecil;
2. sistem *monodisperse* menghasilkan gundukan dengan *angle of repose* lebih besar dibandingkan dengan sistem *polydisperse*;
3. pada sistem *monodisperse* struktur partikelnya mendekati *close packed structure* sehingga pola *force network*-nya didominasi oleh bangun jajaran genjang, sedangkan pada sistem *polydisperse* struktur partikelnya tidak teratur (banyak rongga didalamnya) sehingga pola *force network*-nya tidak teratur.

Hasil penelitian ini telah dapat menjelaskan kelakuan dinamik selama deposisi partikel berlangsung dan struktur gundukan (mencakup *angle of repose* dan *force network*) yang terbentuk setelah proses deposisi selesai. Hasil simulasi juga telah dapat menunjukkan adanya perbedaan kelakuan dinamik dan struktur gundukan antara sistem *monodisperse* dan *polydisperse* partikel. Namun demikian, model gaya yang digunakan masih belum mengakomodasi gaya rotasi, sehingga masih perlu dikembangkan model *Granular Dynamics* yang lebih realistis.

DAFTAR PUSTAKA

- Baxter, J., Tuzun, U., Burnell, J. & Heyes, D.M., 1997. Granular dynamics simulations of two-dimensional heap formation, *Phys. Rev. E* **55**.
- Hasan, M. & van Opheusden, 2007, A model for Static and dynamic phenomena in deposition process, *Journal of the Indonesian Mathematical Society*, **2**.
- Matuttis, H.G., Luding, S. & Herrmann, H.J., 2000. Discrete element simulations of dense packing and heaps made of spherical and non-spherical particles, *Powder Technology*. **109**.
- Zhou, Y.C., Xu, B.H. dan Yu, A.B., 2001. Numerical investigation of the angle of repose of monosized spheres, *Phys. Rev. E* **64**.

SISTEM PERSAMAAN LINEAR PADA ALJABAR MIN-PLUS

Musthofa

Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY
musthofa@uny.ac.id

Abstrak

Himpunan semua bilangan real $R \cup \{+\infty\}$ yang dilengkapi dengan operasi minimum sebagai operasi penjumlahan dan operasi penjumlahan sebagai operasi pergandaan membentuk struktur aljabar yang dinamakan semiring idempoten. Karena operasi penjumlahan pada semiring idempoten tidak mempunyai invers, maka metode yang digunakan pada lapangan atau ring untuk menentukan solusi persamaan $ax = b$ tidak dapat diterapkan. Untuk itu, dalam makalah ini akan dibahas metode untuk menentukan solusi persamaan linear berbentuk $AX = B$ atas aljabar min-plus.

Kata kunci: persamaan linear, semiring idempoten, aljabar min-plus

PENDAHULUAN

Aljabar min-plus, yaitu $R \cup \{+\infty\}$ dengan R adalah himpunan semua bilangan real yang dilengkapi dengan operasi minimum dan operasi penjumlahan, memiliki beberapa aplikasi antara lain dalam memodelkan jaringan telekomunikasi, lalu lintas dan *video smoothing*. Melalui aljabar min-plus masalah nonlinear dapat diselesaikan seperti masalah linear dalam aljabar linear. Sebagai contoh diketahui dua bis transportasi umum berangkat dari terminal keberangkatan yang berbeda, tetapi menuju suatu terminal tujuan yang sama. Selanjutnya dari terminal tujuan ini, akan berangkat bis ke-tiga setelah salah satu dari dua bis tersebut tiba. Jika waktu keberangkatan kedua bis tersebut berturut-turut adalah x_1, x_2 dan waktu perjalanan berturut-turut adalah a_1 dan a_2 , maka waktu keberangkatan bis ke-tiga (x_3) dapat disajikan sebagai $x_3 = \min(x_1 + a_1, x_2 + a_2)$. Dalam aljabar min-plus, persamaan ini dapat disajikan sebagai $x_3 = (x_1 \otimes a_1) \oplus (x_2 \otimes a_2)$, dengan \oplus menyatakan operasi minimum dan \otimes menyatakan operasi penjumlahan. Persamaan tersebut analog dengan persamaan $x_3 = ax_1 + a_2x_2$ dalam aljabar linear.

Perbedaan yang cukup berarti dari struktur aljabar min-plus dengan struktur aljabar lain seperti lapangan atau ring terletak pada tidak adanya invers terhadap operasi \oplus pada aljabar min-plus. Oleh karena itu, pada persamaan $a \oplus x = a \oplus y$, tidak dapat langsung disimpulkan $x = y$. Hal ini mengakibatkan metode untuk menyelesaikan persamaan $a \oplus x = b$ pada aljabar min-plus sangat berbeda dengan metode menyelesaikan persamaan linear pada lapangan atau ring. Ditinjau dari struktur aljabar, $R \cup \{+\infty\}$ terhadap operasi minimum merupakan monoid komutatif dengan elemen identitas $\{+\infty\}$. Akibatnya untuk menyelesaikan persamaan $a \oplus x = b$ pada aljabar min-plus digunakan konsep urutan pada lattice.

Selanjutnya persamaan $a \oplus x = b$ dapat diperluas menjadi sistem persamaan linear, misalnya

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 \oplus a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 \oplus a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \quad (1)$$

Dalam hal ini, symbol operasi \otimes tidak dituliskan seperti halnya pada $2 \times a$ yang ditulis sebagai $2a$. Persamaan (1) dapat ditulis dalam bentuk matrik sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Berdasarkan uraian di atas, dalam makalah ini akan dibahas hal-hal sebagai berikut:

1. Metode menentukan solusi persamaan $Ax = b$ pada aljabar min-plus.
2. Cara menentukan ada tidaknya solusi persamaan $Ax = b$ pada aljabar min-plus.

PEMBAHASAN

Aljabar Min-plus

Aljabar min-plus merupakan himpunan $R \cup \{+\infty\}$ yang dilengkapi dengan operasi minimum, dinotasikan dengan \oplus , dan operasi penjumlahan yang dinotasikan dengan \otimes . Selanjutnya $(R \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes)$ dinotasikan dengan R_{\min} . Jadi, dalam R_{\min} : $3 \oplus 4 = \min(3, 4) = 3$ dan $3 \otimes 4 = 3 + 4 = 7$. Sifat-sifat yang berlaku dalam R_{\min} antara lain :

- a) $x \oplus (y \oplus z) = \min(x, \min(y, z)) = \min(\min(x, y), z) = (x \oplus y) \oplus z$
- b) $x \oplus \{+\infty\} = \min(x, +\infty) = x$
- c) $x \otimes \{+\infty\} = x + \{+\infty\} = \{+\infty\}$
- d) $x \otimes 0 = x + 0 = x$
- e) $x \otimes (y \otimes z) = x + (y + z) = (x + y) + z = (x \otimes y) \otimes z$
- f) $x \otimes y = x + y = y + x = y \otimes x$
- g) $x \otimes (-x) = x + (-x) = 0$
- h) $x \otimes (y \oplus z) = x + (\min(y, z)) = \min(x + y, x + z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$

Dari sifat-sifat di atas, terlihat bahwa $\{+\infty\}$ merupakan elemen netral terhadap operasi \oplus dan 0 merupakan elemen netral terhadap operasi \otimes . Oleh karena itu, ditinjau dari struktur aljabar R_{\min} merupakan semiring, yaitu :

- i. $(R \cup \{+\infty\}, \oplus)$ merupakan monoid komutatif dengan elemen netral $\{+\infty\}$
- ii. $(R \cup \{+\infty\}, \otimes)$ merupakan monoid dengan elemen netral 0
- iii. Operasi \otimes terhadap \oplus bersifat distributif
- iv. Elemen netral terhadap operasi \oplus , yaitu $\{+\infty\}$ bersifat menyerap terhadap operasi \otimes . Jadi $x \otimes \{+\infty\} = \{+\infty\} \otimes x = \{+\infty\}, \forall x \in R_{\min}$

Lebih khusus, R_{\min} merupakan semifield, yaitu :

- i. R_{\min} merupakan semiring
- ii. (R, \otimes) merupakan grup komutatif

Selanjutnya karena operasi \oplus bersifat idempotent, yaitu $x \oplus x = x$, untuk setiap $x \in R_{\min}$, maka R_{\min} merupakan semifield idempotent. Dalam teorema di bawah ini ditunjukkan bahwa sifat idempotent mengakibatkan tidak adanya invers terhadap operasi tersebut.

Teorema 1. *Jika pada suatu semiring S operasi \oplus pada bersifat idempotent, maka elemen invers terhadap operasi \oplus tidak ada.*

Bukti :

Misalkan S semiring dengan elemen netral terhadap operasi \oplus adalah ε . Ambil sebarang $x \neq \varepsilon \in S$. Andaikan terdapat $y \in S$ sehingga $x \oplus y = y \oplus x$. Karena \oplus bersifat idempotent, maka

$$x = x \oplus \varepsilon = x \oplus (x \oplus y) = (x \oplus x) \oplus y = x \oplus y = \varepsilon.$$

Kontradiksi dengan $x \neq \varepsilon$.

Matriks atas Aljabar Min-plus

Dalam uraian di atas, telah dibahas bahwa aljabar min-plus $(R \cup \{+\infty\}, \min, +)$ merupakan semifield idempotent. Selanjutnya seperti pada lapangan, jika diberikan suatu semifield idempotent R_{\min} , dapat dibentuk matriks dengan entri-entri-nya elemen-elemen R_{\min} . Operasi \oplus dan \otimes pada matriks yang telah terbentuk didefinisikan sebagai berikut:

$$(1) (A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$$

$$(2) (A \otimes B)_{ij} = \oplus_k (A_{ik} \otimes B_{kj})$$

Contoh 2.

Jika $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, maka

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \oplus -2 & 2 \oplus 3 \\ -2 \oplus 1 & 1 \oplus 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0+(-2)) \oplus (2+1) & (0+3) \oplus (2+2) \\ (-2+(-2)) \oplus (1+1) & (-2+3) \oplus (1+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya didefinisikan $(R_{\min})^{n \times n}$ sebagai himpunan semua matriks berukuran $n \times n$ dengan entri-entrinya elemen R_{\min} . Elemen netral terhadap operasi \oplus dan elemen netral terhadap operasi \otimes dalam $(R_{\min})^{n \times n}$ berturut-turut adalah matriks E dengan $(E)_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{jika } i = j \\ +\infty, & \text{jika } i \neq j \end{cases}$ dan

matriks ε dengan $(\varepsilon)_{ij} = +\infty$, untuk setiap i dan j . Jadi,

- (1) $(E \otimes A) = (A \otimes E) = A$ untuk setiap $A \in (R_{\min})^{n \times n}$;
- (2) $(\varepsilon \oplus A) = (A \oplus \varepsilon) = A$, untuk setiap $A \in (R_{\min})^{n \times n}$.

Berikut ini beberapa sifat matriks atas aljabar min-plus :

Sifat 3. Jika $A, B, C \in (R_{\min})^{n \times n}$ maka berlaku :

- (1) $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$
- (2) $A \oplus B = B \oplus A$
- (3) $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$
- (4) $A \otimes (B \oplus C) = (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$
- (5) $(A \oplus B) \otimes C = (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$
- (6) $A \oplus A = A$

Bukti :

$$1. [A \oplus (B \oplus C)]_{ij} = A_{ij} \oplus (B_{ij} \oplus C_{ij}) = (A_{ij} \oplus B_{ij}) \oplus C_{ij} = [(A \oplus B) \oplus C]_{ij}.$$

$$2. [A \oplus B]_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij} = B_{ij} \oplus A_{ij} = [B \oplus A]_{ij}.$$

$$\begin{aligned} 3. [A \otimes (B \otimes C)]_{ij} &= \bigoplus_{k=1}^n A_{ik} \left(\bigoplus_{l=1}^n B_{kl} \otimes C_{lj} \right) \\ &= \bigoplus_{k=1}^n \bigoplus_{l=1}^n A_{ik} \otimes B_{kl} \otimes C_{lj} \\ &= \bigoplus_{k=1}^n \left(\bigoplus_{l=1}^n A_{ik} \otimes B_{kl} \right) \otimes C_{lj} \\ &= [(A \otimes B) \otimes C]_{ij} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. [A \otimes (B \oplus C)]_{ij} &= \bigoplus_{k=1}^n A_{ik} (B_{kj} \oplus C_{kj}) \\ &= \bigoplus_{k=1}^n ((A_{ik} \otimes B_{kj}) \oplus (A_{ik} \otimes C_{kj})) \\ &= \left(\bigoplus_{k=1}^n (A_{ik} \otimes B_{kj}) \right) \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^n A_{ik} \otimes C_{kj} \right) \\ &= [(A \otimes B) \oplus (A \otimes C)]_{ij} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. [(A \oplus B) \otimes C]_{ij} &= \bigoplus_{k=1}^n (A_{ik} \oplus B_{ik}) C_{kj} \\
 &= \bigoplus_{k=1}^n ((A_{ik} \otimes C_{kj}) \oplus (B_{ik} \otimes C_{kj})) \\
 &= \bigoplus_{k=1}^n (A_{ik} \otimes C_{kj}) \oplus \bigoplus_{k=1}^n (B_{ik} \otimes C_{kj}) \\
 &= [(A \otimes C) \oplus (B \otimes C)]_{ij}
 \end{aligned}$$

$$6. [A \oplus A]_{ij} = A_{ij} \oplus A_{ij} = A_{ij}.$$

Berdasarkan sifat-sifat di atas, $(R_{\min})^{n \times n}$ bukan merupakan semifield, tetapi merupakan semiring idempotent.

Lattice

Lattice berkaitan dengan konsep tentang urutan. Konsep ini akan digunakan untuk menyelesaikan persamaan linear berbentuk $a x = b$ pada aljabar min-plus.

Definisi 4. Diberikan E sebarang himpunan tak kosong dan \leq relasi biner pada E . Relasi \leq dikatakan relasi urutan parsial jika memenuhi:

1. $\forall x \in E, x \leq x$ (refleksif)
2. $\forall x, y \in E$, jika $x \leq y$ dan $y \leq x$, maka $x = y$ (antisimetris)
3. $\forall x, y, z \in E$, jika $x \leq y$ dan $y \leq z$, maka $x \leq z$ (transitif)

Contoh 5.

1. Relasi “=” pada setiap himpunan merupakan relasi urutan parsial.
2. Relasi “|” pada \mathbb{N} = himpunan bilangan asli, yaitu $\forall a, b \in \mathbb{N}, a | b$, jika dan hanya jika terdapat $c \in \mathbb{N}$, sehingga $b = ac$ yang disebut dengan relasi keterbagian merupakan relasi urutan parsial.
3. Misal $M_{n \times n}(R)$ menyatakan himpunan semua matriks berukuran $n \times n$, dengan entri-entri-entri-nya di dalam R . Relasi \leq pada $M_{n \times n}(R)$ yang didefinisikan sebagai:
 $\forall A, B \in M_{n \times n}(R), A \leq B \Leftrightarrow a_{ij} \leq b_{ij}$, untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$ dan $j = 1, 2, \dots, n$ merupakan relasi urutan parsial.

Definisi 6. Suatu himpunan tak kosong E yang dilengkapi relasi urutan parsial “ \leq ” pada E dinamakan Poset (Partially Ordered Set) dan dinotasikan dengan (E, \leq) .

Selanjutnya pada poset akan didefinisikan batas atas dan batas atas terkecil dari sebagai berikut.

Definisi 7. Diberikan (E, \leq) poset dan $\{a, b\} \subseteq E$. Suatu $c \in E$ dinamakan batas atas dari $\{a, b\}$ jika $a \leq c$ dan $b \leq c$. suatu $d \in E$ dinamakan batas atas terkecil dari $\{a, b\}$ jika :

- (i) d merupakan batas atas dari $\{a, b\}$ dan
- (ii) jika $c \in E$ batas atas dari $\{a, b\}$ maka $d \leq c$.

Selanjutnya batas atas terkecil dari $\{a, b\}$ dinotasikan dengan $a \vee b$.

Analog dengan batas atas, di bawah ini diberikan definisi batas bawah dan batas bawah terkecil.

Definisi 8. Diberikan (E, \leq) poset dan $\{a, b\} \subseteq E$. Suatu $c \in E$ dinamakan batas bawah dari $\{a, b\}$ jika $c \leq a$ dan $c \leq b$. suatu $d \in E$ dinamakan batas bawah terbesar dari $\{a, b\}$ jika :

- (i) d merupakan batas bawah dari $\{a, b\}$ dan
- (ii) jika $c \in E$ batas bawah dari $\{a, b\}$ maka $c \leq d$.

Selanjutnya batas bawah terbesar dari $\{a, b\}$ dinotasikan dengan $a \wedge b$.

Contoh 9. Diketahui $N =$ himpunan semua bilangan asli. Didefinisikan relasi \leq pada N sebagai berikut: Untuk setiap $a, b \in N$, $a \leq b$ jika dan hanya jika a membagi habis b . Batas atas dari $\{4, 6\} \subset N$ antara lain 12, 24, dan 36. Dalam hal ini, 12 merupakan batas atas terkecil dari $\{4, 6\}$.

Berkaitan dengan batas bawah dan batas atas, di bawah ini diberikan definisi elemen maximal, elemen maximum dan elemen top.

Definisi 10. Diberikan (E, \leq) poset dan $A \subseteq E$.

- (i) Suatu $a \in A$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in A$ berakibat $x \leq a$ dinamakan elemen maximum dari A .
- (ii) Suatu $a \in A$ dinamakan elemen maximal dari A jika terdapat $x \in A$ sehingga $a \leq x$, maka $a = x$.
- (iii) Suatu $x \in E$ sehingga untuk setiap $y \in E$ berlaku $y \leq x$ dinamakan elemen top dan dinotasikan dengan \top .

Elemen top pada poset (E, \leq) , jika ada, maka elemen tersebut tunggal. Hal ini sebagai akibat dari sifat anti simetris, yaitu misalkan x dan y semuanya elemen top. Diperoleh $x \leq y$ dan $y \leq x$, sehingga menurut sifat anti simetris pada (E, \leq) berakibat $x = y$. Demikian juga jika terdapat elemen maximum pada $A \subseteq E$, maka elemen maximum tersebut tunggal. Disamping itu, jika $A = E$, maka elemen top dari E adalah elemen maximum dari A .

Contoh 11. Misal $S = \{1, 2, 3\}$ dan $T = \{A / A \subset S\}$. Didefinisikan relasi \leq pada T sebagai berikut : untuk setiap $A, B \in T$, $A \leq B$ jika dan hanya jika $A \subset B$. Diperoleh $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$ dan $\{1, 3\}$ semuanya merupakan elemen maximal. Dalam hal ini T tidak mempunyai elemen maximum.

Contoh 12. Misal $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Jika didefinisikan relasi \leq pada E sebagai relasi urutan biasa, maka (E, \leq) merupakan poset dengan elemen top adalah 5. Jika $A = \{1, 2, 3\} \subset E$, maka elemen maximum dari (A, \leq) adalah 3.

Definisi 13. Suatu poset (L, \leq) disebut lattice jika $a \wedge b$ dan $a \vee b$ ada untuk setiap $a, b \in L$.

Contoh 14. Misal $L = [0, 1] = \{x \in R / 0 \leq x \leq 1\}$. Jika \leq didefinisikan sebagai relasi urutan biasa, maka (L, \leq) merupakan poset. Lebih lanjut, untuk setiap $\{a, b\} \in L$, $\max(a, b)$ merupakan batas atas terkecil dari $\{a, b\}$ dan $\min(a, b)$ merupakan batas bawah terbesar dari $\{a, b\}$. Jadi (L, \leq) merupakan lattice.

Selanjutnya di bawah ini akan diberikan suatu sifat bahwa pada sebarang semiring idempotent S dapat didefinisikan suatu relasi " \leq " sehingga (S, \leq) merupakan poset.

Teorema 15. Diketahui (S, \oplus, \cdot) semiring idempoten. Jika \leq merupakan relasi pada S yang didefinisikan dengan: untuk setiap $a, b \in S$, $a \leq b$ jika dan hanya jika $a \oplus b = b$, maka \leq merupakan relasi urutan parsial.

Bukti :

Akan ditunjukkan \leq bersifat refleksif, antisimetris dan transitif. Karena $\forall a \in S$, $a \oplus a = a$, maka $a \leq a$, yaitu \leq refleksif. Jika $a \leq b$ dan $b \leq a$, maka $a \oplus b = b$ dan $b \oplus a = a$. Sehingga diperoleh $a = b$, yaitu \leq antisimetris. Jika $a \leq b$ dan $b \leq c$, maka $a \oplus b = b$ dan $b \oplus c = c$. Akibatnya, $a \oplus c = a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c = b \oplus c = c$, yaitu $a \leq c$. Jadi \leq transitif. Terbukti \leq merupakan relasi urutan parsial, sehingga (S, \leq) merupakan poset.

Selanjutnya akan ditunjukkan jika S merupakan semifield idempoten, maka S merupakan lattice. Untuk itu terlebih dahulu dibahas dua teorema di bawah ini.

Teorema 16. Jika (S, \oplus, \otimes) semifield idempoten dan a^{-1} menyatakan invers dari a terhadap operasi \otimes , maka berlaku $a \leq b \Rightarrow b^{-1} \leq a^{-1}$

Bukti :

$$\begin{aligned}
 a \leq b &\Rightarrow a \oplus b = b \\
 &\Rightarrow (a \oplus b) \otimes (a^{-1} \otimes b^{-1}) = b \otimes (a^{-1} \otimes b^{-1}) \\
 &\Rightarrow (a \otimes a^{-1} \otimes b^{-1}) \oplus (b \otimes a^{-1} \otimes b^{-1}) = b \otimes a^{-1} \otimes b^{-1} \\
 &\Rightarrow b^{-1} \oplus a^{-1} = a^{-1} \\
 &\Rightarrow b^{-1} \leq a^{-1}.
 \end{aligned}$$

Teorema 17. Jika S semifield idempoten, maka pernyataan berikut ekuivalen:

- (1) $a \leq b \Rightarrow b^{-1} \leq a^{-1}$
- (2) $(a \wedge b)^{-1} = a^{-1} \vee b^{-1}$
- (3) $(a \vee b)^{-1} = a^{-1} \wedge b^{-1}$

Bukti :

(1) \Rightarrow (2)

Karena $a \wedge b \leq b$ & $a \wedge b \leq a$, maka menurut (1) $b^{-1} \geq (a \wedge b)^{-1}$ & $a^{-1} \geq (a \wedge b)^{-1}$, sehingga $a^{-1} \vee b^{-1} \geq (a \wedge b)^{-1}$. Akibatnya, $(a^{-1} \vee b^{-1})^{-1} \leq [(a \wedge b)^{-1}]^{-1} = a \wedge b$ (3)

Karena $a^{-1} \leq a^{-1} \vee b^{-1}$ dan $b^{-1} \leq a^{-1} \vee b^{-1}$, maka $(a^{-1} \vee b^{-1})^{-1} \geq a$ & $(a^{-1} \vee b^{-1})^{-1} \geq b$, sehingga $(a^{-1} \vee b^{-1})^{-1} \geq a \wedge b$ (4)

Dari persamaan (3) dan (4) diperoleh $(a^{-1} \vee b^{-1})^{-1} = a \wedge b$, sehingga $a^{-1} \vee b^{-1} = (a \wedge b)^{-1}$.

(2) \Rightarrow (3)

Karena $(a \wedge b)^{-1} = a^{-1} \vee b^{-1}$, maka diperoleh $(a^{-1} \wedge b^{-1})^{-1} = (a^{-1})^{-1} \vee (b^{-1})^{-1} = a \vee b$.

Diperoleh $(a \vee b)^{-1} = [(a^{-1} \wedge b^{-1})^{-1}]^{-1} = a^{-1} \wedge b^{-1}$.

(3) \Rightarrow (1)

Diketahui $(a \vee b)^{-1} = a^{-1} \wedge b^{-1}$ dan misalkan $a \leq b$. Akan ditunjukkan $b^{-1} \leq a^{-1}$. Karena $a \leq b$, maka $a \vee b = b$. Akibatnya $(a \vee b)^{-1} = a^{-1} \wedge b^{-1} = b^{-1}$, yaitu $b^{-1} \leq a^{-1}$.

Teorema 18. Jika S semifield idempoten, maka (S, \leq) merupakan lattice.

Bukti :

Ambil sebarang $a, b \in S$. Diperoleh $a \oplus (a \oplus b) = (a \oplus a) \oplus b = a \oplus b$, dan $b \oplus (a \oplus b) = b \oplus (b \oplus a) = (b \oplus b) \oplus a = b \oplus a$. Jadi $a \leq a \oplus b$ dan $b \leq a \oplus b$, yaitu $a \oplus b$ merupakan batas atas dari a dan b . Andaikan ada c sedemikian sehingga $a \leq c$ dan $b \leq c$, maka $a \oplus c = c$ dan $b \oplus c = c$. Sehingga $(a \oplus b) \oplus c = c$, yaitu $a \oplus b \leq c$. Jadi $a \oplus b = a \vee b$. Karena S semifield, maka $(a \wedge b) = (a^{-1} \vee b^{-1})^{-1} = (a^{-1} \oplus b^{-1})^{-1}$ untuk $a, b \neq \varepsilon$. Jika a atau b sama dengan nol (ε), maka $a \wedge b = \varepsilon$. Jadi terbukti S merupakan lattice.

Berdasarkan teorema di atas, karena aljabar min-plus merupakan semifield idempotent, maka aljabar min-plus merupakan lattice. Berikut ini konsep yang akan digunakan untuk menyelesaikan persamaan linear pada aljabar min-plus.

Definisi 19. Suatu pemetaan f pada himpunan terurut parsial dikatakan isoton jika

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

Contoh 20.

$f: R_{\min} \rightarrow R_{\min}$ dengan $f(x) = x \otimes 10$ merupakan pemetaan isoton, yaitu untuk setiap $x, y \in R_{\min}$ berlaku $x \leq y \Rightarrow f(x) = x \otimes 10 = x + 5 \leq y + 10 = y \otimes 10 = f(y)$

Definisi 21. Suatu pemetaan isoton $f: D \rightarrow E$ dengan D dan E masing-masing himpunan terurut parsial dikatakan pemetaan residuated jika untuk setiap $b \in E$, maka $\{x / f(x) \leq b\}$ mempunyai elemen maximum, dinotasikan dengan $f^{\#}(b)$. Pemetaan isoton $f^{\#}: E \rightarrow D$ disebut residual dari f .

Contoh 22. Pada contoh 20 di atas, f merupakan pemetaan residuated, sebab untuk setiap $y \in R_{\min}$, $\{x / f(x) = x \otimes 10 \leq y\}$ mempunyai elemen maximum, yaitu $x = f^{\#}(y) = y - 10$.

Hubungan antara f dan $f^\#$ seperti yang dibahas dalam Bacelli, dkk (2001) adalah sebagai berikut:

$$f \circ f^\# \leq I \quad (5)$$

$$f^\# \circ f \geq I \quad (6)$$

Selanjutnya residual dari $f^\#(b)$ digunakan untuk menentukan ada tidaknya solusi dari persamaan $f(x) = b$, dinyatakan dalam teorema sebagai berikut:

Teorema 23. *Jika $f : D \rightarrow E$ pemetaan residuated, maka persamaan $f(x) = b$ mempunyai solusi jika dan hanya jika $f(f^\#(b)) = b$.*

Bukti :

(\Leftarrow)

Diketahui $f(f^\#(b)) = b$, maka persamaan $f(x) = b$ mempunyai solusi, yaitu $x = f^\#(b)$

(\Rightarrow)

Diketahui $f(x) = b$ mempunyai solusi, misalkan x_1 . Diperoleh $f(x_1) = b$. Karena $f^\#(b)$ adalah elemen maksimum dalam $\{x / f(x) \leq b\}$, maka $x_1 \leq f^\#(b)$. Karena f isoton maka $f(x_1) \leq f(f^\#(b))$. Menurut (1a), $f(f^\#(b)) \leq b$, akibatnya $b = f(x_1) \leq f(f^\#(b)) \leq b$, yaitu $f(f^\#(b)) = b$.

Penyelesaian Persamaan $Ax = b$ pada Aljabar Min-plus

Untuk menentukan solusi persamaan $Ax = b$ pada aljabar min-plus, terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa pemetaan $A : R_{\min}^n \rightarrow R_{\min}^n$, yaitu $A \in (R_{\min})^{n \times n}$ merupakan pemetaan residuated.

Teorema 24. *$A : R_{\min}^n \rightarrow R_{\min}^n$ merupakan pemetaan residuated.*

Bukti :

$$\text{Jika } x \in R_{\min}, \text{ maka } Ax = \begin{bmatrix} A_{11}(x_1) \oplus A_{12}(x_2) \oplus \dots \oplus A_{1n}(x_n) \\ A_{21}(x_1) \oplus A_{22}(x_2) \oplus \dots \oplus A_{2n}(x_n) \\ \dots \\ A_{n1}(x_1) \oplus A_{n2}(x_2) \oplus \dots \oplus A_{nm}(x_n) \end{bmatrix}. \text{ Dibentuk } f_j(x_j) = \begin{bmatrix} A_{1j}(x_j) \\ A_{2j}(x_j) \\ \dots \\ A_{nj}(x_j) \end{bmatrix}, \text{ maka}$$

$$Ax = \bigoplus_{j=1}^n f_j(x_j). \text{ Untuk setiap } j, \text{ jika } x_{j_h} \leq x_{j_k} \Rightarrow f_j(x_{j_h}) \leq f_j(x_{j_k}). \text{ Oleh karena itu } A$$

merupakan pemetaan isoton. Disamping itu untuk setiap j , $\{x_j / f_j(x_j) \leq b\}$ mempunyai elemen maksimum, yaitu $x_j = \{b_1 - A_{1j} \wedge b_2 - A_{2j} \wedge \dots \wedge b_n - A_{nj}\}$. Diperoleh A pemetaan residuated. Dengan kata lain, A dapat dipandang sebagai suatu pemetaan residuated dari R_{\min}^n ke R_{\min}^n . Berdasarkan uraian ini, yaitu karena $x_j = \{b_1 - A_{1j} \wedge b_2 - A_{2j} \wedge \dots \wedge b_n - A_{nj}\}$, maka residual dari A adalah $[A^\#(b)]_j = \bigwedge_{i=1}^n (b_j - A_{ij})$.

Hasil di atas digunakan untuk menentukan solusi persamaan $Ax = b$ pada aljabar min-plus sebagai berikut.

Teorema 25. *Jika $A \in (R_{\min})^{n \times n}$, dan $b \in R_{\min}^n$, maka persamaan $Ax = b$ mempunyai solusi jika dan hanya jika $A(A^\#(b)) = b$.*

Bukti :

(\Leftarrow)

Diketahui $A(A^\#(b)) = b$. Jadi persamaan $Ax = b$ mempunyai penyelesaian, yaitu $x = A^\#(b)$

(\Rightarrow)

Misalkan persamaan $Ax = b$ mempunyai solusi x^\bullet . diperoleh $Ax^\bullet = b$, sehingga $Ax^\bullet \leq b$. Karena $A^\#(b)$ merupakan elemen maksimum dalam $\{x / Ax \leq b\}$ maka $x^\bullet \leq A^\#(b)$. Diperoleh

$$Ax^\bullet \leq A(A^\#(b)) \Leftrightarrow b = Ax^\bullet \leq A(A^\#(b)) \quad (7)$$

Selanjutnya menurut persamaan (5), $A(A^\#(b)) \leq b$ (8)

Dari persamaan (7) dan (8) diperoleh $A(A^\#(b)) = b$.

Contoh 26. Tentukan apakah persamaan $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ pada aljabar min-plus mempunyai solusi atau tidak.

Penyelesaian :

Misal $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ dan $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$$A^\#(b_1) = \bigwedge_{i=1}^2 (b_1 - A_{i1}) = (b_1 - A_{11} \wedge b_1 - A_{21}) = (0 - 1) \wedge (0 - 2) = -1 \wedge -2 = -1$$

$$A^\#(b_2) = \bigwedge_{i=1}^2 (b_2 - A_{i2}) = (b_2 - A_{12} \wedge b_2 - A_{22}) = (0 - 0) \wedge (0 - 3) = -1 \wedge -3 = -1$$

Diperoleh $A^\#(b) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Karena $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, maka persamaan di atas tidak mempunyai solusi.

Contoh 27. Tentukan apakah persamaan $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ pada aljabar min-plus mempunyai solusi atau tidak.

Penyelesaian :

Misal $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ dan $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

$$A^\#(b_1) = \bigwedge_{i=1}^2 (b_1 - A_{i1}) = (b_1 - A_{11} \wedge b_1 - A_{21}) = (2 - 1) \wedge (4 - 2) = 1 \wedge 2 = 2$$

$$A^\#(b_2) = \bigwedge_{i=1}^2 (b_2 - A_{i2}) = (b_2 - A_{12} \wedge b_2 - A_{22}) = (2 - 0) \wedge (4 - 3) = 2 \wedge 1 = 2$$

Diperoleh $A^\#(b) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Karena $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, maka persamaan di atas mempunyai solusi, yaitu $x_1 = 2$ dan $x_2 = 2$. Solusi persamaan di atas tidaklah tunggal, yaitu terdapat solusi yang lain, antara lain $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, dan $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$.

KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas, dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Aljabar min-plus merupakan semifield idempotent.
2. Matriks atas aljabar min-plus merupakan semiring idempotent.
3. Untuk setiap semiring idempotent dapat didefinisikan suatu relasi urutan parsial.
4. Setiap semifield idempotent merupakan lattice.
5. Persamaan $Ax = b$, pada aljabar min-plus mempunyai solusi jika dan hanya jika $A^\#(b)$ dengan $[A^\#(b)]_j = \bigwedge_{i=1}^n (b_j - A_{ij})$ merupakan solusi persamaan tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

- Baccelli, F, Cohen, G, Olsder, G.J, Quadrat,J.P. 1992. *Synchronization and Linearity*. John Wiley and Sons, New York.
- Blyth,T.S.2005. *Lattices and Algebraic Ordered Structures*. Springer,London.
- Farhi, N, Goursat M, and Quadrat, J.P. Tanpa tahun. *Road Traffic Models Using Petri Net and Min-plus Algebra*. Inria. Perancis. Didownload pada tanggal 5 Mei 2011.
- Le Boudec, J.Y, Thiran, P. Tanpa tahun. *Min-plus System Theory Applied to Communication Network*. Swiss. Didownload pada tanggal 5 Mei 2011.
- Le Boudec, J.Y, Thiran, P. Tanpa tahun. *Network Calculus*. <http://icawww.epfl.ch>. Didownload pada tanggal 5 Mei 2011.

SIMULASI MODEL DISPERSI POLUTAN KARBON MONOKSIDA DI PINTU MASUK TOL

(Studi Kasus *Line Source* Di Ruas Tol Dupak, Surabaya)

¹Endrayana Putut L.E., ²Basuki Widodo

¹Mahasiswa Pasca Sarjana Matematika, Jurusan Matematika, Institut Teknologi Sepuluh
Nopember, Surabaya

Kampus ITS Keputih Sukolilo, Surabaya 60111 – Indonesia

²Dosen Jurusan Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya

Kampus ITS Keputih Sukolilo, Surabaya 60111 – Indonesia

Email : ¹ endrayanaputut29@gmail.com, ² b_widodo@matematika.its.ac.id

Abstrak

Polusi udara adalah masalah yang sangat penting karena berkaitan dengan emisi kendaraan bermotor, yang mengandung SO₂, CO₂, CO, NO_x, dan gas – gas lainnya. Simulasi model dispersi udara adalah salah satu cara/metode untuk mempelajari kualitas udara yang sangat dibutuhkan dalam hal ini. Hal utama yang dibahas dalam penelitian ini adalah dispersi emisi CO dari kendaraan bermotor roda empat yang memasuki pintu masuk tol Dupak, Surabaya. Di dalam penelitian ini digunakan *Gaussian model line source* untuk simulasi model dispersi polutan CO. Perhitungan konsentrasi CO menggunakan rumus :

$$C(x, z) = \frac{Q}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} u \sigma_z} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{h^2}{\sigma_z^2}\right)$$

Dalam proses simulasi komputer, perlu dikembangkan program di dalam perhitungan konsentrasi CO. Hal ini penting untuk mengetahui secara singkat hasil perhitungan numerik dari model dispersi CO di tol Dupak. Karena itu diperlukan bahasa pemrograman Fortran dan software Surfer, yang mana software ini akan digunakan untuk visualisasi hasil dari perhitungan numerik menggunakan bahasa pemrograman Fortran tersebut. Hasil ini kemudian digunakan pada bagian analisis dan pembahasan.

Kata kunci: model dispersi udara, *Gaussian model line source*, tol Dupak, CO

PENDAHULUAN

Surabaya merupakan ibu kota propinsi Jawa Timur dan salah satu kota besar di Indonesia memiliki penduduk yang beragam sosial ekonominya. Surabaya memiliki lima wilayah kerja Pembantu Walikotamadya, yaitu pusat, timur, selatan, barat dan utara. Surabaya yang berpenduduk sekitar 3 juta jiwa mempunyai letak geografis 112° 36' BT sampai dengan 112° 54' BT dan 7° 9' LS sampai dengan 7° 21' LS, berada pada ketinggian 3 – 6 meter diatas permukaan laut. Luas wilayah kota Surabaya adalah 374,36 km². Surabaya memiliki suhu maksimum 35,4° C dan suhu minimum 23,4° C. Curah hujan maksimum yang pernah terjadi 355,7 mm dan curah hujan minimum adalah 299 mm.

Surabaya sebagai kota industri, dagang, maritim dan pendidikan memiliki beban yang cukup berat dalam hal volume kendaraan bermotor dan industri penghasil CO. Karbon monoksida (CO) adalah suatu gas yang tidak berwarna, tidak berbau dan juga tidak berasa (Fardiaz, 1992). Gas CO sebagian besar berasal dari pembakaran bahan bakar fosil dengan udara, berupa gas buangan yang sangat beracun (Mobbs, 1995). Kota besar yang padat lalu lintasnya akan banyak menghasilkan gas CO sehingga kadar CO dalam udara relatif tinggi dibandingkan dengan daerah pedesaan. Kendaraan bermotor merupakan sumber polutan CO yang utama yakni sekitar 59,2% . Kendaraan berbahan bakar bensin menghasilkan gas CO yang lebih banyak daripada kendaraan berbahan bakar solar (Bardeschi *dkk*,1991).Konsentrasi CO di udara pada tempat tertentu dipengaruhi oleh kecepatan emisi (pelepasan) CO di udara dan kecepatan dispersi dan pembersihan CO dari udara. Pada daerah perkotaan kecepatan pembersihan CO dari udara sangat lambat, oleh karena itu kecepatan dispersi dan pembersihan CO dari udara sangat menentukan konsentrasi CO di udara.

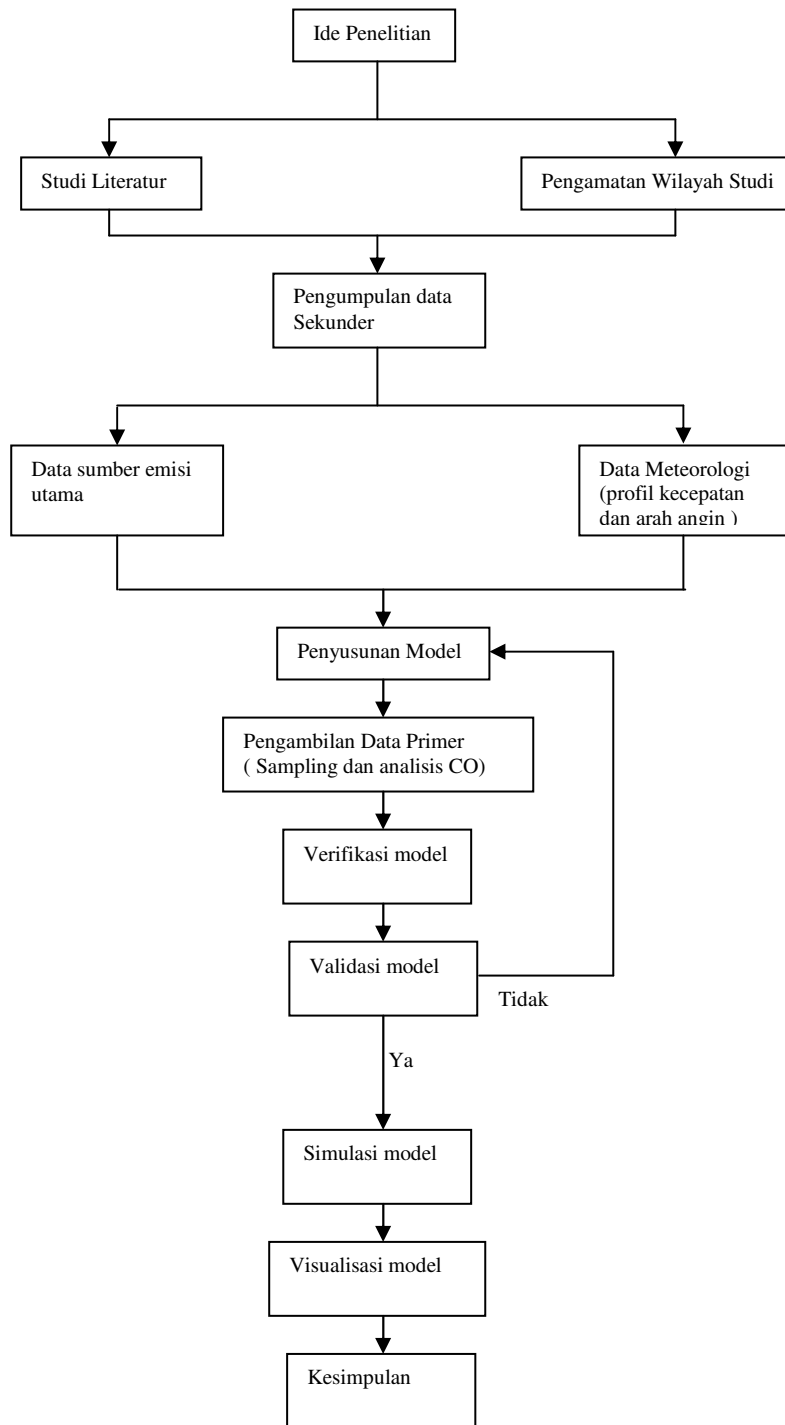
Kecepatan dispersi dipengaruhi langsung oleh faktor-faktor meteorologi seperti kecepatan dan arah angin, turbulensi udara, dan stabilitas atmosfer. Di kota-kota besar, meskipun turbulensi ditimbulkan karena adanya kendaraan yang bergerak dan aliran udara di atas dan di sekeliling bangunan, tetapi karena keterbatasan ruangan maka gerakan udara sangat terbatas sehingga konsentrasi CO di udara dapat meningkat. Senyawa CO dapat bereaksi dengan hemoglobin darah membentuk karboksi hemoglobin (Hb-CO) yang tidak bisa mengangkut oksigen dalam sirkulasi darah (Mukono, 1997). Kemampuan CO dalam mengikat Hb ternyata 210 kali lebih kuat di bandingkan oksigen, sehingga oksigen akan kalah bersaing (Atmakusumah *dkk*, 1996). Seseorang yang teracuni gas CO akan mengalami gejala sakit kepala, gangguan mental (*mental dullness*), pusing, lemah, mual, muntah, kehilangan kontrol otot, diikuti dengan penurunan denyut nadi dan frekuensi pernapasan, pingsan, dan bahkan meninggal. Kasus pingsan atau bahkan meninggal akan terjadi bila kadar Hb-CO dalam darah mencapai 60 persen dari total Hb darah atau lebih. CO dengan konsentrasi 250 ppm dapat membuat orang pingsan. Bahkan pada konsentrasi 1.000 ppm, dapat menyebabkan kematian seketika. Pemerintah Indonesia juga sangat serius terhadap hal ini dengan mengeluarkan Keputusan Menteri Negara Lingkungan Hidup Nomor: KEP-35/MENLH/10/1993 tentang ambang batas emisi gas buang kendaraan bermotor, kandungan CO pada mobil ditentukan maksimum 4,5 persen dan 2.400 ppm untuk gas hidrokarbon (<http://www.santoslolowang.com>).

Pemerintah kota Surabaya telah melakukan usaha untuk mendukung keputusan ini di dalam mengatasi masalah pencemaran udara, terutama polutan CO, seperti pembangunan taman kota, penghijauan di kiri dan kanan jalan, namun masalah polusi udara, CO, belum dapat teratasi secara maksimal. Beberapa tempat yang memiliki konsentrasi CO yang cukup tinggi adalah perempatan jalan, jalan protokol, pintu masuk tol, kawasan industri. Di Surabaya terdapat beberapa pintu masuk tol, antara lain pintu masuk tol Waru, pintu masuk tol Dupak, pintu masuk tol Perak.

Di pintu masuk tol seringkali terdapat kemacetan kendaraan bermotor, yang tentunya menghasilkan banyak sekali gas CO. Di pintu masuk tol seringkali terdapat kemacetan kendaraan bermotor, yang tentunya menghasilkan banyak sekali gas CO. Oleh karena itu penelitian – penelitian tentang masalah polusi CO ini terus dikembangkan untuk mendukung kebijakan pemerintah kota Surabaya dalam mengatasi masalah polusi CO. Beberapa masalah yang dibahas di dalam penelitian ini antara lain, bagaimanakah *Gaussian Model Line Source* dapat dirumuskan dari modifikasi persamaan *Gaussian Plume Model* dan apakah hasil solusi *Gaussian Model Line Source* valid terhadap data primer yang diperoleh dari hasil pengamatan langsung di lapangan. Pada penelitian ini digunakan model matematika *Gaussian Model Line Source* untuk mengetahui pola dispersi dan konsentrasi CO di pintu masuk tol Dupak 3 Surabaya. Hasil dari penelitian ini diharapkan dapat memberikan informasi kepada pemerintah kota Surabaya yang dapat digunakan sebagai dasar pengambil kebijakan atau peraturan daerah berkenaan dengan ambang batas emisi CO yang dihasilkan oleh kendaraan bermotor minimal beroda empat dan memberikan hasil penelitian kepada pihak terkait mengenai pola dispersi polutan CO, sehingga dapat diterapkan dalam rangka penyempurnaan upaya pengelolaan kualitas udara di kota Surabaya.

Tabel 1. Komposisi gas buang kendaraan bermotor (dalam ppm)

| | Polutan | Berhenti | Dipercepat | Berjalan | Diperlambat |
|--------------------|---------|----------|------------|----------|-------------|
| Bahan bakar bensin | CO | 69000 | 29000 | 27000 | 39000 |
| | HC | 5300 | 1600 | 1000 | 10000 |
| | NO | 30 | 650 | 650 | 20 |
| | Aldehid | 30 | 10 | 10 | 390 |
| Bahan bakar solar | CO | - | 1000 | - | - |
| | HC | 400 | 200 | 100 | 300 |
| | NO | 60 | 350 | 240 | 30 |
| | Aldehid | 10 | 20 | 10 | 30 |



Gambar 1 Diagram Alir Penelitian

Batasan Masalah dan Asumsi

Adapun batasan masalahnya adalah sebagai berikut :

- Penerapan *Gaussian Model Line Source* hanya pada polutan CO.
- Sumber polutan adalah kendaraan bermotor roda empat berbahan bakar bensin.
- Lingkup kajian adalah pintu masuk tol Dupak 3, Surabaya.
- Atmosfer udara yang ditinjau adalah atmosfer udara ambien di atas kota Surabaya.
- Tinggi penerima (*receptor*) tertentu, yaitu z bernilai konstan.
- Data meteorologi (suhu udara, kelembaban udara, kecepatan angin, arah angin) yang digunakan di dalam penelitian ini diperoleh dari BMKG Tanjung Perak, Surabaya.

- g. Data primer yakni data konsentrasi CO dari pengambilan sampling langsung di lapangan selama 1 (satu) minggu pada bulan Maret 2011 dengan menggunakan peralatan inpanger.
- h. Data jumlah kendaraan yang masuk di dalam pintu tol Dupak 3 diperoleh dari pengamatan langsung antara bulan Maret – April 2011 dengan menggunakan peralatan *manual counter*.

Beberapa asumsi yang digunakan di dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

- a. *Line source* untuk sumber polutannya adalah lurus.
- b. Data meteorologi adalah valid.
- c. Tidak ada kontribusi polutan dari pabrik di sekitar pintu masuk tol Dupak 3, Surabaya.
- d. Diasumsikan bahwa arah angin di sepanjang tol Dupak yang mengarah ke pintu tol adalah *crosswind*.
- e. Elevasi muka tanah dan topografi daerah penyebaran polutan sama dengan elevasi sumber polutan.
- f. Polutan CO tidak bersifat reaktif, yaitu tidak mengalami perubahan fisis dan kimia akibat bereaksi dengan partikel lain. Laju perubahan bentuk serta penghilangannya tidak diperhitungkan.

PEMBAHASAN

Pemodelan kualitas udara adalah suatu metodologi numeris, berdasarkan pada prinsip – prinsip fisika, untuk mengestimasi konsentrasi polutan dalam ruang dan waktu sebagai fungsi dari distribusi emisi dan dipengaruhi oleh kondisi meteorologi dan geofisika (Hassan *dkk*,2000). Sehingga semua perencanaan pembangunan harus memiliki beberapa evaluasi atau prediksi untuk masa mendatang. Pemodelan kualitas udara membantu untuk memprediksi dampak dari proyek – proyek yang berdampak terhadap lingkungan udara. Apabila hal – hal yang berkenaan dengan emisi udara tersedia, maka pemodelan kualitas udara akan sangat membantu sekali, suatu model dapat menyediakan sebuah indikasi yang relevan tentang distribusi polutan secara lebih cepat dan lebih murah daripada mengamati di lapangan. Sehingga model – model kualitas udara adalah alat yang penting untuk menjaga kualitas udara lingkungan.

(i) Model *Gaussian Plume* dari Penyebaran Polutan

Formulasi persamaan *Gaussian plume* berdasar pada sistem berikut :

$$u \frac{\partial C}{\partial x} = \varepsilon_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \varepsilon_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \quad (1)$$

dengan

C = konsentrasi polutan(kg/m^3)

\bar{u} = kecepatan angin rata – rata(m/s)

ε_y = konstanta difusi searah sumbu Y

ε_z = konstanta difusi searah sumbu Z

Dengan kondisi- kondisi batas :

$$(i) \quad C(0, y, z) = \frac{Q}{u} \cdot \sigma(y) \cdot \sigma(z - h) \quad (2)$$

dengan Q adalah kekuatan sumber titik polutan dalam satuan gm/s . Kondisi ini ekuivalen dengan kondisi fisis bahwa fluks per satuan waktu melintang sebuah bidang yang tegak lurus arah angin (sejajar dengan bidang YZ) adalah sama dengan laju emisi Q (sumber terletak pada $(0,0,h)$), yaitu :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u} C(x, y, z) dy dz = Q \quad (3)$$

h adalah tinggi dari sumber, dipilih $h = 0$ dalam solusi (5) di bawah ini dan simbol – simbol lain mempunyai arti umum.

- (ii) $C \rightarrow 0$ apabila $y \rightarrow \pm \infty$

$$(iii) \frac{\partial C}{\partial z} = 0 \text{ pada saat } z = 0 \quad (4)$$

(iv) $C \rightarrow 0$ apabila $z \rightarrow \infty$

Solusi dari (1) yang memenuhi (2),(3),(4) adalah

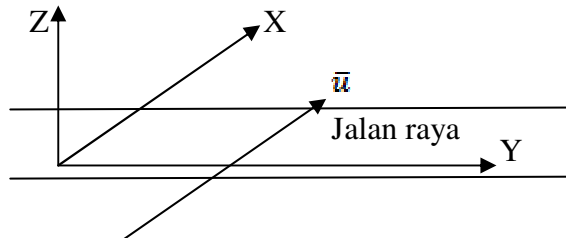
$$C(x, y, z) = \frac{Q}{2\pi u \sigma_y \sigma_z} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{\sigma_y^2} + \frac{z^2}{\sigma_z^2}\right)\right) \quad (5)$$

dengan

$$\varepsilon_y = \frac{\bar{u} \sigma_y^2}{2x} \text{ dan } \varepsilon_z = \frac{\bar{u} \sigma_z^2}{2x}$$

yang menunjukkan bahwa pola konsentrasi mengikuti distribusi normal dengan σ_y dan σ_z sebagai parameter dispersi.

(ii) Model *Gaussian Line Source*



Gambar 2. Arah angin tegak lurus jalan raya

Di dalam beberapa situasi, seperti deretan pabrik – pabrik sepanjang jalan atau lalu lintas yang padat sepanjang ruas jalan atau jalan tol, masalah polusi dapat dimodelkan sebagai suatu emisi kontinu *line source* tak hingga. Beberapa penelitian telah dilakukan menggunakan model *Gaussian line source* ini. Irfan (2006) menggunakan model *Gaussian line source* untuk menggambarkan pola penyebaran pencemar PM_{10} . Dewi (2005) juga menggunakan *Gaussian line source model* untuk dalam perumusan strategi pengelolaan pencemar gas CO dari aktifitas transportasi di jalan Akhmad Yani, Surabaya. Persamaan konsentrasi yang digunakan adalah

$$C(x, z) = \frac{q}{(p+1)u_* kx} \exp\left(-\frac{z_1^{-p} u_1 z^{p+1}}{(p+1)^2 u_* kx}\right)$$

Sathinukarat dan Satayopas (2003) menggunakan *Gaussian model line source* untuk menggambarkan pola dispersi polutan CO di Chiang Mai, Thailand. Hassan, dkk.(2000) melakukan penelitian tentang pola dispersi CO di kota Bandar Seri Begawan, Brunei Darussalam menggunakan *Gaussian model line source*. Kelemahan dari beberapa penelitian di atas adalah menggunakan data kecepatan angin dari Badan Meteorologi, seharusnya kecepatan angin dihitung di lokasi pengamatan. Selain itu beberapa data meteorologi yang digunakan tidak yang terbaru, sehingga seiring dengan perkembangan cuaca saat ini seharusnya data terbaru yang digunakan.

Dalam penelitian ini, *Gaussian model line source* ini adalah perkembangan dari model *Gaussian plume* dengan mengasumsikan bahwa sebuah *line source* adalah deret *point source* yang *mutually independent*, yang masing – masing menghasilkan kepulan polutan. Sehingga konsentrasi pada suatu titik di sisi jalan dihitung sebagai jumlah konsentrasi dari deret titik – titik sumber pada jalan tersebut. Jika angin bertiup searah sumbu-X dalam hal ini tegak lurus pada jalan raya, sumbu Y adalah sepanjang jalan raya, maka konsentrasi polutan tidak bergantung pada Y, karena disini hanya memperhatikan bahwa gerakan polutan hanya oleh angin yang *crosswind* saja, sehingga variabel Y tidak diperhitungkan, artinya konsentrasi polutan pada sumbu Y diasumsikan sama. Difusi dapat diabaikan pada arah *downwind* (arah darimana angin bertiup), sehingga pada saat arah angin adalah normal terhadap garis emisi, konsentrasi level *ground downwind* diperoleh dari persamaan (5) yaitu sebagai berikut :

$$C(x, y, z) = \frac{Q}{2\pi u \sigma_y \sigma_z} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{h^2}{\sigma_z^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right) dy \quad (6)$$

dengan Q adalah kekuatan *line source* dalam gm/s.m dan h adalah ketinggian emisi. Dari persamaan (6) didapat

$$C(x, z) = \frac{Q}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} u \sigma_z} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{h^2}{\sigma_z^2}\right) \quad (7)$$

Nilai Q dapat dicari dengan menghitung jumlah kendaraan dalam satu jam dikalikan dengan kecepatan rata-rata emisi gas buang kendaraan (2×10^2 g/s), kemudian dibagi dengan kecepatan rata-rata kendaraan dalam m/detik (Wark dan Warner, 1976), dalam penelitian ini nilai Q adalah 0,5 g/s.

(iii) Data meteorologi

Data meteorologi yang digunakan adalah kecepatan angin, arah angin, dan tutupan awan selama periode sampling. Data kecepatan angin diperoleh dari pengamatan di lapangan menggunakan *anemometer*, arah angin diperoleh dari BMKG Tanjung Perak, Surabaya.

Tabel 2. Data meteorologi sampling dan data dari BMKG

| Tanggal | Waktu | arah angin | stabilitas | v rata (m/s) | v prop |
|---------|---------------|------------|------------|--------------|--------|
| 19-Mar | 07.00 - 08.00 | Barat | B | 0,1 | 0,0072 |
| | 16.00 -17.00 | Barat | B | 1,4 | 0,1011 |
| 20-Mar | 10.00 - 11.00 | Barat | B | 3 | 0,2166 |
| | 18.00 - 19.00 | Barat | B | 0,1 | 0,0072 |
| 21-Mar | 09.00 - 10.00 | Barat | B | 0,1 | 0,0072 |
| | 15.00 - 16.00 | Barat | B | 2,15 | 0,1552 |
| 22-Mar | 08.00 - 09.00 | Barat | B | 0,1 | 0,0072 |
| | 17.00 - 18.00 | Barat | B | 0,3 | 0,0217 |
| 23-Mar | 06.00 - 07.00 | Barat | B | 0,1 | 0,0072 |
| | 14.00 - 15.00 | Barat | B | 1,85 | 0,1336 |
| 24-Mar | 12.00 -13.00 | Barat | B | 2,05 | 0,1480 |
| 25-Mar | 11.00 - 12.00 | Barat | B | 1,55 | 0,1119 |
| | 19.00 - 20.00 | Barat | E | 0,7 | 0,0505 |
| | 20.00 - 21.00 | Barat | E | 0,35 | 0,0253 |
| TOTAL | | | | 13,85 | 1 |

(iv) Hasil penelitian

Karena kekuatan sumber ditentukan dalam satuan gm/s, sedangkan konsentrasi yang diukur dari pengamatan lapangan adalah dalam ppm, maka rumus konversinya:

$$C(ppm) = \frac{(Chitung).24,5}{40.10^4} \quad (8)$$



Gambar 2.

Visualisasi distribusi CO dengan menggunakan software Surfer

Dengan menggunakan rumus (8) diperoleh hasil perhitungan sebagai berikut :

Tabel 3. Hasil perhitungan konsentrasi CO dari sampling

| No | Tanggal | Jam | ppm (C_{O_i}) | ppm hitung(C_{M_i}) |
|----|-----------|---------------|-------------------|-------------------------|
| 1 | 19-Mar-11 | 07.00 - 08.00 | 0,893 | 1,1025 |
| 2 | 19-Mar-11 | 16.00 - 17.00 | 1,787 | 1,715 |
| 3 | 20-Mar-11 | 10.00 - 11.00 | 0,67 | 0,49 |
| 4 | 20-Mar-11 | 18.00 - 19.00 | 1,117 | 1,1025 |
| 5 | 21-Mar-11 | 09.00 - 10.00 | 2,233 | 1,715 |
| 6 | 21-Mar-11 | 15.00 - 16.00 | 0,893 | 1,1025 |
| 7 | 22-Mar-11 | 08.00 - 09.00 | 0,893 | 1,1025 |
| 8 | 22-Mar-11 | 17.00 - 18.00 | 1,787 | 1,715 |
| 9 | 23-Mar-11 | 06.00 - 07.00 | 0,447 | 0,49 |
| 10 | 23-Mar-11 | 14.00 - 15.00 | 2,457 | 1,715 |
| 11 | 24-Mar-11 | 12.00 - 13.00 | 2,01 | 1,715 |
| 12 | 25-Mar-11 | 11.00 - 12.00 | 2,233 | 1,715 |
| 13 | 25-Mar-11 | 19.00 - 20.00 | 1,787 | 1,1025 |
| 14 | 25-Mar-11 | 20.00 - 21.00 | 0,447 | 0,49 |

Analisis secara statistika dari nilai konsentrasi hasil perhitungan dan hasil pengamatan digunakan untuk mengevaluasi model. Dalam penelitian ini metode kesalahan akar kuadrat terkecil (*root mean square error*) digunakan untuk mengevaluasi model. *Root mean square error* (RMSE) ditentukan untuk masing – masing pasangan nilai hasil perhitungan dan nilai observasi. Keakuratan suatu model dapat diestimasi dengan membandingkan konsentrasi prediksi dan konsentrasi perhitungan dalam area studi, menggunakan formula berikut :

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (C_{M_i} - C_{O_i})^2} \quad (9)$$

dengan

RMSE = *Root Mean Square Error*

C_{M_i} = konsentrasi hasil perhitungan ke-i

C_{O_i} = konsentrasi dari data sekunder ke-i

n = banyak data

i = 1, 2, ... , n

Dari penelitian ini diperoleh nilai RMSE adalah 0,36067.

KESIMPULAN

Kesimpulan dari penelitian ini adalah model Gaussian Line Source dapat diterapkan untuk mengetahui penyebaran polutan karbon monoksida di pintu masuk tol. Konsentrasi CO tertinggi adalah di sekitar pintu masuk tol, karena kendaraan mengurangi kecepatannya dan relatif berhenti. Hal ini yang menyebabkan konsentrasi CO meningkat. Semakin jauh dari pintu masuk dan searah arah angin, konsentrasi CO makin berkurang. Dari visualisasi tampak bahwa konsentrasi maksimum adalah $28000 \mu\text{g}/\text{m}^3$ (1,715 ppm) dan minimum adalah $8000 \mu\text{g}/\text{m}^3$ (0,49 ppm). Hal ini masih dalam tahap aman karena maksimum adalah 20 ppm.

DAFTAR PUSTAKA

- Atkinson, R., Bremner, S., Anderson, H., Strachan, D., Bland, J.M., (1999), “Short- term Association between Emergency Hospital Admissions for Respiratory and Cardiovascular Disease and Outdoor Air Pollution in London”, *Arch Environ health* 54(6): 399-411
- Atmakusumah, Maskun, I., Djajanto, W.(1996), *Mengangkat Masalah Lingkungan Ke Media Massa*, Yayasan Obor Indonesia
- Bardeschi, A., Colluci A., Gianelle, V., Gnagnetti, M., Tamponi, M., Tebaldi, G. (1991) Analysis of the impact on air quality of motor vehicle traffic in the Milan urban area. *Atmospheric Environment*, Vol. 25B No. 3, hal. 415 – 428.
- Costabile, F., Allegrini, I. (2008) A new approach to link transport emission and air quality: An intelligent transport system based on the control of traffic air pollution. *Environmental Modelling and Software*, Vol.23, hal. 258 – 267.
- Dewi, R. (2005), *Penerapan Gaussian Line Source Model Dalam Perumusan Strategi Pengelolaan Pencemar Gas CO Dari Aktifitas Transportasi Di Sepanjang Jalan Akhmad Yani Kota Surabaya*, Tesis Magister, Jurusan Teknik Lingkungan, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya, Surabaya.

Fardiaz, Srikandi (1992), *Polusi Air dan Udara*. Kanisius, Yogyakarta

Hassan Hasnah, Singh, M.P., Gribben, R.J., Srivastava, L.M., Radojevic, M., Latif Azahar (2000), "Application of a line source air quality model to the study of traffic carbon monoxide in Brunei Darussalam". *ASEAN Journal on Science and Technology for Development*, Vol. 17 No 1.

Hewitt, C.N. dan Jackson, A.V., (2003), *Handbook of atmospheric science: principles and applications*, Wiley - Blackwell, Inc., New York.

<http://www.surabaya.go.id/regulasi/index.php?catid=4> , diakses tanggal 8 Februari 2011

Keputusan Menteri Negara Lingkungan Hidup Nomor: KEP-35/MENLH/10/1993
<http://www.santoslolowang.com>, diakses tanggal 9 Februari 2011

Mobbs, Steven (1995). *MSc in Computational Fluid Dynamics Atmospheric Dispersion*. Lecture handouts, Environmental Engineering, The University of Leeds, England.

Mukono, H.J. (1997), *Pencemaran Udara dan Pengaruhnya Terhadap Gangguan Saluran Pernapasan*, Airlangga University Press, Surabaya.

Rao, S.T., Sistla C., Pagnotti V., Petersen W.B., Irwin J.S. and Turner D.B. (1985), "Evaluation of the performance of RAM with the regional air pollution study data base". *Atmospheric Environment*, Vol.19, hal. 29-245.

Roemer, W., Hoek, G., Brunekreef, B., (1993), "Effect of Ambient Winter Air Pollution on Respiratory Health of Children with Chronic Respiratory Symptoms", *Am Rev Respir Dis*; 147: 1187-124.

Singh, M.P.(1997). Lecture notes delivered in the Workshop on Air Pollution Modelling conducted at the University of Brunei Darussalam, Brunei Darussalam.

Soedomo, Moestikahadi, (2001), *Pencemaran Udara*. ITB, Bandung

Soenarmo, S, H., (1999), *Diktat Kuliah Meteorologi Pencemaran Udara*, Penerbit ITB, Bandung

Sutini, (2009), *Simulasi Model Matematika Dari Dispersi Pencemaran SO₂ Di Kawasan Industri PT. Semen Gresik*, Tesis, Jurusan Matematika, ITS, Surabaya.

Wark, K., Warner, C.,(1976), *Air Pollution*. Harper & Row. Publishers, New York.

SIFAT-SIFAT INVARIAN PADA INVERSI

Himmawati Puji Lestari, Caturiyati

Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

Email: himmawatipl@yahoo.com, wcaturiyati@yahoo.com

Abstrak

Inversi merupakan pencerminan terhadap suatu lingkaran sedemikian sehingga hasil kali jarak antara titik yang dicerminkan ke pusat lingkaran dengan jarak bayangannya ke pusat lingkaran sama dengan kuadrat jari-jari lingkaran. Dengan mengkaji bayangan suatu objek terhadap inversi, dalam tulisan ini akan ditentukan sifat-sifat invarian terhadap inversi, terutama titik tetap, garis tetap dan lingkaran tetap.

Kata kunci: inversi, invarian, titik tetap, garis tetap, lingkaran tetap

PENDAHULUAN

Hal-hal mendasar yang dibahas dalam transformasi geometri adalah bayangan suatu objek terhadap transformasi dan sifat-sifat transformasi dilihat dari sifat-sifat bayangannya. Salah satu sifat yang penting adalah sifat invarian, yaitu bayangan suatu objek terhadap transformasi adalah objek itu sendiri.

Inversi merupakan salah satu transformasi geometri yang jarang dibahas jika dibandingkan jenis-jenis transformasi yang lain. Inversi merupakan pencerminan di bidang terhadap suatu lingkaran. Dalam tulisan ini akan dibahas invers dari suatu titik, garis, dan lingkaran terhadap suatu inverse. Selanjutnya akan ditentukan titik invariant, garis invariant, dan lingkaran invariant terhadap suatu inversi.

Definisi 1

Diberikan lingkaran yang berpusat di titik O dan berjari-jari r , $O(r)$ di R^2 . Inversi pada lingkaran ini adalah pemetaan $t: R^2 \setminus \{O\} \rightarrow R^2 \setminus \{O\}$ yang didefinisikan oleh

$$t(A) = A'$$

dengan A' terletak pada garis lurus yang melalui O dan A , sepihak dengan A terhadap O , dan memenuhi $OA \cdot OA' = r^2$.

Selanjutnya lingkaran $O(r)$ disebut lingkaran inversi, titik O disebut pusat inversi, r disebut jari-jari inversi, r^2 disebut kuasa inversi, dan titik A' disebut invers titik A terhadap $O(r)$. Inversi dengan pusat O dan kuasa $r^2 > 0$ dinotasikan $I(O, r^2)$.

Definisi di atas mengakibatkan bahwa untuk setiap titik A pada bidang selain titik O terdapat dikorespondensikan dengan tunggal suatu invers titik A' , dan jika A' adalah invers A , maka A adalah invers dari A' . Karena tidak ada titik yang berkorespondensi dengan pusat inversi O , maka bukan merupakan suatu transformasi dari himpunan R^2 yang terdiri dari semua titik pada bidang. Agar inversi membentuk suatu transformasi, dapat dilakukan dengan dua cara. Pertama, dengan mengambil $R^2 \setminus \{O\}$ himpunan semua titik pada bidang kecuali titik O , maka inversi merupakan suatu transformasi pada $R^2 \setminus \{O\}$. Kedua, dengan menambahkan pada himpunan S , suatu "single ideal point at

infinity Z menjadi himpunan $R^{2'}$ yang akan berkorespondensi dengan pusat inversi. Pada tulisan ini, untuk membentuk transformasi dilakukan dengan cara yang pertama.

Berikut akan dibahas bagaimana menentukan bayangan suatu titik terhadap suatu inversi.

Teorema 1

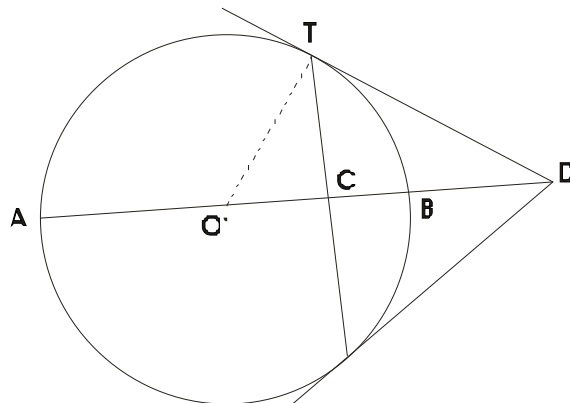
Suatu titik D di luar lingkaran inversi dan suatu titik C yang merupakan titik potong dari tali busur singgung dari titik D pada lingkaran inversi dan garis diametral \overline{OD} merupakan titik-titik invers.

Bukti

Harus dibuktikan bahwa $OD \cdot OC = r^2$.

Pandang $\triangle OTD$ yang siku siku di T .

Dari sifat “tali busur singgung tegak lurus garis diametral” berarti $TC \perp OD$. Menurut sifat pada segitiga siku siku diperoleh bahwa $OD \cdot OC = OT^2 = r^2$.



Gambar 1. Invers suatu titik

Dari persamaan $OA \cdot OA' = r^2$ pada definisi, terlihat bahwa (Kunkel, 2003):

1. jika titik A' invers dari titik A , maka titik A adalah invers dari A' ;
2. jika titik A titik interior lingkaran, maka A' adalah titik eksterior lingkaran;
3. jika titik A titik eksterior lingkaran, maka titik A' titik interior;
4. jika titik A adalah titik pada lingkaran inversi, maka begitu juga titik A' .

Corollary 2

Jika titik P berada di lingkaran inversi, maka inversnya adalah titik itu sendiri.

Bukti

Jika terdapat titik P pada lingkaran inversi, maka $OP = r$. Dengan demikian, invers dari P adalah P' sedemikian sehingga P' berada pada garis OP dan $OP \cdot OP' = r^2$, yaitu $OP' = r$. Jadi P' berada pada titik P .

Selanjutnya akan dibahas bagaimana menentukan invers dari suatu garis terhadap suatu inversi. Berdasarkan kedudukan garis tersebut terhadap lingkaran inversi, akan ditentukan invers garis yang melalui pusat inversi, garis yang memotong lingkaran inversi

tetapi tidak melalui pusat lingkaran inversi, dan garis yang tidak mempunyai titik persekutuan dengan lingkaran inversi.

Teorema 3 (Kozai, 2009:8)

Invers dari sebuah garis yang melalui pusat lingkaran inversi adalah garis itu sendiri.

Bukti

Misal garis l melalui pusat inversi O . Misalkan P sebarang titik pada garis l yang tidak sama dengan O . Maka invers dari P adalah P' sedemikian sehingga P' berada di garis OP dan memenuhi $OP \cdot OP' = r^2$. Di pihak lain, $OP = l$. Dengan demikian, invers dari sebarang dua titik yang tidak sama dengan O juga berada pada l . Jadi bayangan suatu garis yang melalui pusat inversi adalah garis itu sendiri.

Dari Teorema 3 diperoleh garis invarian terhadap suatu inversi, yaitu garis yang melalui pusat lingkaran invers. Selanjutnya akan ditentukan invers dari suatu garis yang tidak melalui pusat inversi O .

Teorema 4 (Eves, 1972)

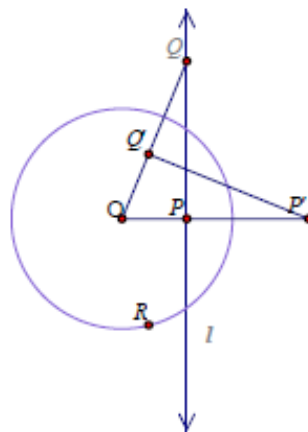
Diberikan lingkaran $O(r)$. Invers dari suatu garis l yang tidak melalui O terhadap $I(O, r^2)$ adalah suatu lingkaran yang melalui O dan diameternya yang melalui O tegak lurus dengan l .

Bukti

Misalkan l memotong $O(r)$ tidak di O . Misalkan P adalah titik potong sinar garis OP dengan l yang saling tegak lurus dan titik Q terletak pada l . Maka $OP \cdot OP' = r^2$ dan $OQ \cdot OQ' = r^2$.

Segitiga $\triangle OPQ$ sebangun dengan $\triangle OQ'P'$, dan $\angle OPQ$ sehingga $\angle OQ'P'$ juga siku-siku. Dengan demikian, $\angle OQ'P'$ merupakan sudut keliling lingkaran dengan OP' sebagai diameter, sehingga Q' berada pada lingkaran yang berdiameter OP' . Jadi invers garis l berada pada lingkaran yang berdiameter OP' .

Dengan membalik konstruksi, setiap titik pada garis l mempunyai invers yang berupa titik pada lingkaran berdiameter OP' .



Gambar 2. Invers suatu garis

Teorema 5

Invers lingkaran C melalui O terhadap $I(O, r^2)$ adalah suatu garis l yang tidak melalui O dan tegak lurus dengan diameter C melalui O .

Bukti

Misalkan titik A adalah suatu titik pada lingkaran C yang merupakan pasangan titik ujung diameter yang titik ujung lainnya adalah O . Misalkan juga P sebarang titik pada lingkaran C yang berbeda dengan titik O dan A . Misal titik A' dan P' invers dari A dan P . Maka berlaku

$$OA \cdot OA' = OP \cdot OP'$$

sehingga $OP'/OA' = OA/OP$ dan segitiga $OP'A'$ sebangun dengan segitiga OAP . Diperoleh $\angle OA'P' = \angle OPA = 90^\circ$.

Dengan demikian P' terletak pada garis l yang melalui A' dan tegak lurus dengan OA . Sebaliknya, jika P' sebarang titik pada garis l yang berbeda dengan titik A' , misalkan OP' memotong lingkaran C di P . Maka pastilah P' merupakan invers dari P .

Berdasarkan Corollary 2, diperoleh bahwa lingkaran inversi merupakan lingkaran invarian terhadap inversi.

KESIMPULAN

Berdasarkan uraian tersebut diperoleh beberapa simpulan bahwa inversi memiliki sifat invarian, yaitu

1. titik invarian adalah titik-titik pada lingkaran inversi,
2. garis invarian adalah garis yang melalui titik pusat lingkaran inversi,
3. lingkaran invarian adalah lingkaran inversi itu sendiri.

DAFTAR PUSTAKA

Eves, Howard. (1972). *A Survey of Geometry*. Boston : Allyn and Bacon.

Kozai, Kenji., & Libeskind, Shlomo. 2009. *Circle Inversions and Applications to Euclidean Geometry*.: diakses melalui <http://jwilson.coe.uga.edu> pada tanggal 10 Januari 2011.

Stephen Hugget. (2004). *Inversive Geometry*. http://homepage.mac.com/stephen_huggett/home.html. Didownload pada 26 Juli 2006.

Paul Kunkel (2003). *Inversion Geometry*. whistling@whistleralley.com . Didownload pada 25 Mei 2007.

PELABELAN JUMLAH EKSKLUSIF PADA GRAF TANGGA L_n

Debby Sanjaya, Petter John, Muhammad Haryono

Program Magister, Departemen Matematika, Universitas Indonesia, Indonesia

Abstrak

Suatu graf terhubung disebut graf jumlah, sebagaimana yang dikemukakan oleh Harary [1] tahun 1990, jika terdapat suatu pelabelan jumlah L dari V ke himpunan bilangan bulat positif yang berbeda S ; $xy \in E$ jika dan hanya jika terdapat suatu simpul $w \in V$ sedemikian sehingga berlaku $L(w) = L(x) + L(y) \in S$. Dalam kasus ini w disebut simpul bekerja. L menjadi pelabelan jumlah eksklusif jika graf G tidak mengandung simpul bekerja. Banyak minimum dari simpul terisolasi yang ditambahkan ke graf G sehingga labelnya eksklusif disebut bilangan jumlah eksklusif, dinotasikan dengan $\varepsilon(G)$. Pada makalah ini akan ditunjukkan konstruksi pelabelan jumlah eksklusif graf tangga yang memiliki $\varepsilon(L_n) = 3$ untuk $n \geq 3$

Kata kunci: pelabelan jumlah eksklusif, graf tangga

PENDAHULUAN

Suatu pelabelan jumlah L dari graf G adalah pemetaan dari himpunan simpul di G ke himpunan bilangan bulat positif yang berbeda sedemikian sehingga x dan y bertetangga jika dan hanya jika terdapat vertek lain pada graf dengan label $L(x) + L(y)$. Suatu simpul yang labelnya adalah jumlah dari label dua simpul yang lain di G disebut simpul bekerja

Sembarang graf G dapat dibuat menjadi graf jumlah dengan menambahkan satu atau lebih dari simpul terisolasi, jika diperlukan. Simpul dengan label tertinggi tidak dapat dihubungkan dengan simpul lain. Lebih lanjut, graf jumlah akan memiliki paling sedikit satu simpul terisolasi. Bilangan terkecil dari banyak vertek terisolasi yang diperlukan untuk membuat graf G suatu graf jumlah disebut bilangan jumlah graf G , dinotasikan dengan $\sigma(G)$.

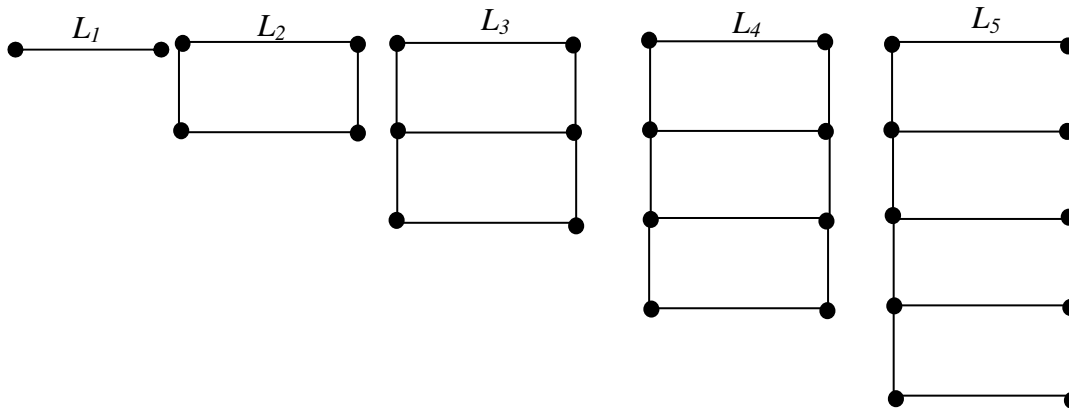
Sejak Harary [1] memperkenalkan konsep graf jumlah di tahun 1990, peneliti – peneliti telah menemukan keberhasilan pelabelan jumlah dari beberapa jenis graf. Tetapi ide membuat pelabelan eksklusif ditahun 2005 sebagai perluasan dari pelabelan jumlah oleh Miller, dkk [3]

Pelabelan jumlah L dari graf G disebut eksklusif jika tidak terdapat simpul bekerja di G . Bilangan jumlah pada jenis pelabelan ini disebut bilangan eksklusif dan dinotasikan dengan $\varepsilon(G)$.

Motivasi menemukan pelabelan jumlah eksklusif baru dan sebagai persyaratan untuk pembelajaran pelabelan graf, pada makalah ini dibahas pelabelan jumlah eksklusif untuk graf tangga L_n . Bilangan jumlah eksklusif $\varepsilon(L_n)$ akan diberikan sebagai kesimpulan.

Pelabelan Jumlah Eksklusif untuk Graf Tangga L_n

Graf tangga L_n adalah graf sederhana tak berarah dengan simpul $2n$ dan $n + 2(n - 1)$ busur. Graf tangga L_n didefinisikan sebagai produk kartesian dari K_2 dan P_n . Ketika dibentuk kelihatan seperti tangga dengan n anak tangga. Dengan cara yang sama kita dapat mengatakan bahwa terdapat dua himpunan dari simpul P_n pada setiap sisi tangga dan kedua sisi dari tangga dihubungkan dengan anak tangga. Gambar 2.1 menunjukkan graf tangga L_n dengan $n \leq 5$



Gambar 2.1 Graf $L_1, L_2, L_3, L_4,$ dan L_5

Pelabelan eksklusif untuk graf L_1 dapat dipandang sebagai pelabelan jumlah eksklusif untuk graf lintasan P_2 . Arti lain dari L_2 sama dengan graf lingkaran C_4 . Selanjutnya untuk pelabelan berikut diasumsikan bahwa $n \geq 3$

Sebelum membentuk pelabelan untuk graf tangga perlu ditentukan batasan bilangan jumlah eksklusif. Misal derajat maksimum dari simpul pada graf G dinotasikan dengan $\Delta(G)$. Miller, dkk [3] mengamati bahwa $\varepsilon(G) \geq \Delta(G)$ untuk sembarang graf G .

Pada graf tangga L_n , dengan $n \geq 3, \Delta(L_n) = 3$. Sehingga diperoleh lemma berikut.

Lemma 1. Untuk $n \geq 3, \varepsilon(L_n) \geq 3$.

Untuk mengkonstruksi suatu pelabelan eksklusif graf tangga $L_n (V, E)$, simpul – simpul V dibagi dua barisan yang terdiri dari simpul – simpul $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ dimana setiap simpul berurutan dihubungkan dan $v_i u_i \in E$ untuk $1 \leq i \leq n$. Setiap barisan mewakili satu sisi dari tangga. Labe simpul sebagai berikut, untuk $1 \leq i \leq n$,

$$v_i = \begin{cases} x + d(i - 1) & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ x + d(2n - i) & \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

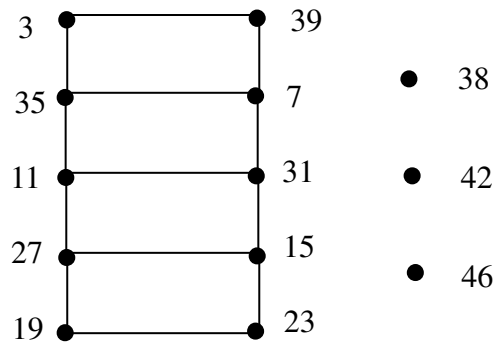
$$u_i = \begin{cases} x + d(2n - i) & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ x + d(i - 1) & \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases}$$

dengan d adalah bilangan bulat genap positif dan x adalah bilangan bulat ganjil positif dengan $x \geq \frac{d}{2}$. Pola pelabelan ini mengikuti barisan aritmatikan $v_1, u_2, v_3, u_4, \dots, v_n, u_{n-1}, v_{n-2}, u_1$ dengan suku pertama x dan beda d .

Sekarang kita menghitung jumlah masing – masing pasangan simpul yang saling bertangga.

1. $v_i + v_{i+1} = \begin{cases} 2x + 2d(i - 1) & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ 2x + 2dn & \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases}$
2. $u_i + u_{i+1} = \begin{cases} 2x + 2dn & \text{untuk } i \text{ ganjil} \\ 2x + 2d(i - 1) & \text{untuk } i \text{ genap} \end{cases}$
3. $v_i + u_i = 2x + d(2n - 1)$

Dapat dilihat bahwa ketiga jumlah berbeda, hal itu mensyaratkan ketiganya merupakan simpul terisolasi dengan label $2x + 2d(n - 1), 2x + 2nd$, dan $2x + d(2n - 1)$. Berdasarkan Lemma 1 pelabelan ini merupakan pelabelan jumlah eksklusif optimal pada graf L_n . Gambar 2.2 menunjukkan contoh pelabelan jumlah eksklusif untuk L_5 dengan $x = 3$ dan $d = 4$.



Gambar 2.2 : Pelabelan jumlah eksklusif pada graf L_5

Semua simpul – simpul pada graf tangga L_n dilabel dengan bilangan ganjil. Lebih lanjut tidak ada simpul yang simpulnya merupakan dapat dijumlah dari label dua simpul dari graf tangga. Dan juga tidak ada label simpul pada graf tangga dapat dijumlahkan dari dua label dari simpul terisolasi, karena semua simpul terisolasi dilabel dengan bilangan genap. Sekarang, perlu diperhatikan bahwa label simpul terkecil dari graf tangga adalah x dan label terkecil dari simpul terisolasi adalah $2x + 2d(n - 1)$. Dengan batasan $x > \frac{d}{2}$ didapatkan bahwa jumlah dari satu label simpul dari graf tangga dan satu label dari simpul terisolasi melebihi label simpul terbesar dari graf tangga, yaitu $x + d(2n - 1)$.

$$x > \frac{d}{2}$$

$$2x - d > 0$$

$$(2x - d) + (x + (2n - 1)) > x + d(2n - 1)$$

$$x + (2x - 2d(n - 1)) > x + d(2n - 1)$$

Sehingga tidak ada simpul dari graf tangga yang dapat menjadi simpul bekerja. Sekarang diketahui dengan jelas bahwa simpul – simpul terisolasi adalah simpul bekerja dalam pelabelan ini. Semua label simpul bekerja adalah genap, oleh karena itu tidak dapat menjadi jumlah dari label simpul bekerja dan label simpul pada tangga, yang mana ganjil. Ini artinya bahwa semua simpul pada tangga dan simpul terisolasi tidak terhubung. Perhatikan bahwa pola tiga label dari simpul terisolasi merupakan barisan naik arimatika, $2x + 2d(n - 1)$, $2x + d(2n - 1)$, dan $2x + 2dn$. Dengan perhitungan sederhana dapat ditemukan bahwa jumlah dua label terkecil tidak sama dengan label terbesar. Sehingga, dapat dikatakan tidak ada busur antara simpul – simpul terisolasi, atau

$$2x + 2d(n - 1) + (2x + d(2n - 1)) \neq 2x + 2dn$$

Akhirnya, akan ditunjukkan bahwa tidak ada penambahan busur antara simpul – simpul terisolasi. Ada empat kasus untuk diperiksa

1. Tidak ada penambahan busur antara v_i dan v_j jika i dan j berada pada paritas berbeda.

Misalkan bahwa v_i dan v_j terhubung. Jika i dan j berada pada paritas berbeda, maka penambahan label dari v_i dan v_j akan memberikan hasil $i + j = 2n$, $i + j = 2n + 1$, atau $i + j = 2n + 2$. Hal ini kontradiksi dengan $i, j \leq n$

2. Tidak ada penambahan busur antara v_i dan v_j jika i dan j berada pada paritas sama.

Jika i dan j berada pada paritas sama, jumlah dari v_i dan u_j adalah

$$v_i + u_j = \begin{cases} 2x + d(2n + i - j - 1) & \text{untuk } i, j \text{ ganjil} \\ 2x + d(2n + i - j - 1) & \text{untuk } i, j \text{ genap} \end{cases}$$

Hanya ketika $i = j$ maka jumlah $v_i + v_j$ ada sebagai label dari satu simpul bekerja

3. Tidak ada penambahan antara v_i dan v_j jika i dan j tidak berurutan

Jumlah dari v_i dan v_j haruslah salah satu dari hasil berikut

$$v_i + v_j = \begin{cases} 2x + d(i + j - 2) & \text{untuk } i, j \text{ ganjil} \\ 2x + d(2n - i - j) & \text{untuk } i, j \text{ genap} \\ 2x + d(2n + i - j - 1) & \text{untuk } i \text{ ganjil, } j \text{ genap} \\ 2x + d(2n - i + j - 1) & \text{untuk } i \text{ genap, } j \text{ ganjil} \end{cases}$$

Simpul $w = v_i + v_j$ merupakan simpul bekerja hanya ketika i dan j tidak berurutan

4. Dengan cara yang sama, dapat ditunjukkan tidak ada penambahan busur antara u_i dan u_j jika i dan j tidak berurutan.

Disini, dibuktikan bahwa simpul – simpul terisolasi menunjukkan tidak mengakibatkan penambahan busur.

Kita baru saja membuktikan bahwa pelabelan dari L_n adalah pelabelan jumlah eksklusif yang disimpulkan dalam teorema berikut.

Teorema 2. Bilangan jumlah eksklusif dari graf tangga adalah $\varepsilon(L_n) = 3$, untuk $n \geq 3$.

KESIMPULAN

Melalui pelabelan yang disampaikan di makalah ini, disimpulkan bahwa sembarang graf tangga L_n adalah graf jumlah eksklusif dengan bilangan jumlah eksklusifnya adalah tiga

UCAPAN TERIMAKASIH

Terimakasih kepada Ibu Kiki A. Sugeng, yang telah memperkenalkan, mengarahkan, memberi semangat, dan mendukung dari awal sampai akhir kepada kami untuk mengembangkan pemahaman dari masalah yang diberikan. Akhirnya, kami mengucapkan penghargaan yang setinggi – tingginya kepada semua pihak yang telah mendukung kami dalam menyelesaikan paper ini.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] F. Harary, Sum graph and difference graph, *Congressus Numerantium* 72.(1990) 101-108
- [2] F. Harary, Sum graphs over all the integers, *Discrete Mathematics* 124 (1994) 99-105
- [3] M. Miller, Patel, Ryan, A. Sugeng, Slamin and Mauritius Tuga, Exclusive sum labeling of graph, *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing* 55 (2005) 137-148

TRANSFORMASI HOPF-COLE PADA APPROKSIMASI DIFUSI UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN TRANSFER RADIASI DALAM *INVERSE* *PROBLEM* PENCITRAAN KANKER OTAK

Jumini¹, Erna Apriliani², Mahmud Yunus³

MTsN Balen Bojonegoro, Mahasiswa S2 Matematika ITS Surabaya¹

Juminimtk@yahoo.com

Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, ITS Surabaya²

Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, ITS Surabaya³

Abstrak

Persamaan transfer radiasi atau *Radiative Transfer Equation* (RTE) adalah persamaan differensial integral yang mendeskripsikan transfer energi photon yang bergerak menyinari jaringan otot halus yang tembus cahaya, seperti otak. Penyinaran digunakan untuk pencitraan jaringan dan mendapatkan informasi tentang kelainan jaringan otot seperti kanker otak. Pencitraan kanker otak adalah salah satu contoh *inverse problem*. Pada makalah ini dikaji persamaan transfer radiasi dan menyelesaikannya dengan menerapkan metode aproksimasi difusi dan transformasi Hopf-Cole. Kedua metode tersebut digunakan untuk menghitung batas pengukuran kepadatan photon, koefisien absorpsi dan difusi pada otak. Dari hasil simulasi diketahui bahwa penyelesaian *inverse problem* pencitraan kanker otak dengan metode transformasi Hopf-Cole lebih stabil jika dibandingkan penyelesaian dengan metode aproksimasi difusi.

Kata kunci: Aproksimasi Difusi, *Inverse Problem*, Transformasi Hopf-Cole.

PENDAHULUAN

Otak adalah pusat kehidupan. Segala aktivitas kehidupan, hingga yang sekecil-kecilnya, hanya bisa terjadi melalui mekanisme yang diatur oleh otak. Dalam waktu yang bersamaan otak harus menjalankan beribu-ribu aktivitas sekaligus. Seperti bagian tubuh lain, otak bisa terkena tumor atau kanker. Bedanya, jika pada bagian tubuh lain tumor jinak kadang tidak mengganggu dan tidak berbahaya, di otak tumor jinakpun bisa sangat mengganggu dan membahayakan nyawa.

Begitu pentingnya fungsi otak, maka harus segera diambil tindakan jika terjadi gejala-gejala kanker otak. Tindakan awal adalah harus dilakukan tes pencitraan dengan salah satu cara yang sudah ada yaitu *Computed Axial Tomography* (CAT), *Event-related optical signal* (EROS), *Magnetic resonance imaging* (MRI), *Functional magnetic resonance imaging* (fMRI), *Electroencephalography* (EEG), *Magnetoencephalography* (MEG), *Positron emission tomography* (PET), *Single photon emission computed tomography* (SPECT). Semua cara tersebut mempunyai kelebihan tetapi juga mempunyai kelemahan diantaranya membutuhkan biaya yang besar.

Optical tomography telah diakui sebagai suatu tehnik diagnostik yang ideal karena biayanya rendah dan sangat sedikit efek sampingnya (Tahir, 2007). Selanjutnya tehnik pencitraan ini dikenal dengan *Diffuse optical imaging* (DOI) atau *Diffuse optical tomography* (DOT). DOT, adalah salah satu contoh *inverse problem*, yang merupakan suatu alat diagnostik yang potensial untuk mendeteksi pertumbuhan jaringan otot halus yang tembus cahaya. Dalam hal ini pengukuran pengaburan dan pemancaran cahaya infra merah pada permukaan tubuh digunakan untuk mengestimasi sifat internal optik pada tubuh dan rekonstruksi gambar dari media yang disinari (Kaipio dan Somersalo, 2004). Pencitraan *optical tomography* dilakukan untuk mendapatkan informasi tentang kelainan jaringan otot seperti kanker payudara dan tumor otak (Tahir, 2007).

Penyinaran pada jaringan dapat dimodelkan sebagai fenomena perpindahan photon. Secara umum model perpindahan photon adalah persamaan transfer radiasi (*Radiative Transfer Equation* (RTE)). Transfer radiasi adalah fenomena fisik transfer energi dalam bentuk radiasi

elektromagnetik. Penyebaran radiasi melalui medium dipengaruhi oleh absorpsi, emisi dan proses pengaburan. Persamaan tranfer radiasi dapat menjelaskan interaksi ini secara matematis yang merupakan persamaan deferensial integral dan mempunyai ketergantungan pada difusi dan parameter absorpsi sebagai koefisien pokok yang tidak diketahui. Dalam masalah ini akan diprediksi batas pengukuran pada kepadatan photon, koefisien absorpsi dan difusi dalam jaringan.

Telah diketahui secara umum bahwa aproksimasi difusi berdasarkan *invers problem* pada *optical tomography* secara eksponensial tidak stabil (Natterer, 2001). Dalam tulisan ini akan dikaji persamaan transfer radiasi dan menyelesaikan persamaan tersebut dengan aproksimasi difusi untuk menghitung batas pengukuran photon, koefisien absorpsi dan difusi pada pencitraan kanker otak. Untuk memperbaiki kestabilan penyelesaian invers problem dengan aproksimasi difusi akan digunakan transformasi Hopf-Cole. Adapun manfaat penelitian ini adalah didapatkan penyelesaian invers problem pencitraan kanker otak baik dengan Aproksimasi difusi maupun dengan transformasi Hopf-Cole. Penerapan aproksimasi difusi dan transformasi Hopf-Cole pada persamaan transfer radiasi dibatasi untuk medium background konstan yang homogen berdimensi satu.

METODE PENELITIAN

Langkah awal dalam penelitian ini adalah mengkaji persamaan transfer radiasi (*Radiative Transfer Equation* (RTE)). RTE adalah sebuah persamaan differensial yang mendiskripsikan radiasi $L(\vec{r}, \hat{s}, t)$. Persamaan ini dapat diturunkan melalui hukum kekekalan energi. Singkatnya, RTE menunjukkan sinar dari energi cahaya yang hilang melalui penyerapan dan penyebaran dari sinar dan tambahan sumber cahaya dalam jaringan yang akan dibuat gambarnya. RTE (persamaan Boltzman) ditulis sebagai berikut (Wang dan Wu, 2007) :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial L(\vec{r}, \hat{s}, t)}{\partial t} = -\hat{s} \cdot \nabla L(\vec{r}, \hat{s}, t) - \mu_t L(\vec{r}, \hat{s}, t) + \mu_s \int_{4\pi} L(\vec{r}, \hat{s}', t) P(\hat{s}', \hat{s}) d\Omega' + Q(\vec{r}, \hat{s}, t) \quad (1)$$

Dengan keterangan sebagai berikut:

- c adalah kecepatan cahaya yang masuk dalam jaringan, ditentukan dengan indeks refraksi relatif
- $\mu_t = \mu_a + \mu_s$, koefisien punahan
- $P(\hat{s}', \hat{s})$ adalah fungsi keadaan yang merepresentasikan probabilitas dari cahaya dengan arah propagasi \hat{s} yang disebarkan pada sudut solid $d\Omega$ mengelilingi \hat{s} . Dalam sebagian besar kasus, fungsi keadaan hanya bergantung pada sudut antara penyebaran \hat{s}' dan penyerapan cahaya dengan arah \hat{s} . Dengan kata lain $P(\hat{s}', \hat{s}) = P(\hat{s}' \cdot \hat{s})$. Penyebaran yang tidak isotropi dapat diekspresikan sebagai berikut:

$$g = \int_{s=4\pi} (\hat{s}' \cdot \hat{s}) P(\hat{s}' \cdot \hat{s}) d\Omega$$

- $Q(\vec{r}, \hat{s}, t)$ mendiskripsikan sumber cahaya.

Langkah kedua setelah dikaji persamaan tranfer radiasi adalah dilakukan metode aproksimasi. Pada umumnya RTE sulit diselesaikan tanpa didahului dengan aproksimasi. Aproksimasi yang digunakan disini adalah aproksimasi difusi yang pada akhirnya didapatkan persamaan difusi.

Langkah ketiga dalam penelitian ini adalah transformasi Hopf-Cole untuk memperbaiki kestabilan aproksimasi difusi pada invers problem pencitraan kanker otak dan menemukan solusi analitik untuk medium background konstan yang homogen berdimensi satu. Secara umum transformasi Hopf-Cole adalah transformasi yang digunakan untuk mencari penyelesaian dari persamaan differensial parsial non linear ke dalam penyelesaian persamaan differensial parsial linear.

Selanjutnya akan dilakukan simulasi hubungan antara parameter estimasi dengan fungsional biaya menggunakan software matlab untuk mengetahui perbandingan tingkat kestabilan penyelesaian *inverse problem* dengan metode aproksimasi difusi dan transformasi Hopf-Cole.

PEMBAHASAN

Salah satu tehnik pencitraan otak adalah dengan *Diffuse Optical Tomography* (DOT). DOT merupakan alat *non-invasive* yang digunakan untuk mendeteksi dan merekonstruksi sifat optik didalam media yang sangat hambur misalnya untuk mendeteksi kanker otak. DOT menggunakan cahaya near-infra merah untuk menyelidiki bagian dalam tubuh seperti otak yaitu pada pergantian oksigen atau keadaan fisiologis lainnya. Tidak seperti sinar-X, energi photon yang rendah tidak berjalan dalam lintasan yang lurus, melainkan perambatannya menyebar (*diffuse*) sehingga memberikan sedikit informasi. Untuk mengatasi hal ini DOT menggunakan detektor pada permukaan otak dan kemudian memproses informasi ini dengan model statistik dari transport photon untuk membuat gambar 3-D. Forward model dalam DOT dideskripsikan sebagai model perambatan photon pada jaringan otak yang diberikan dengan aproksimasi difusi pada persamaan transfer radiasi Boltzmann. Beberapa besaran penting berdasar pada definisi radiasi adalah (Ambrocio, 2008):

a. Spektrum radiasi

Spektrum radiasi L_ν adalah aliran energi per satuan daerah normal per satuan sudut padat per satuan waktu per satuan frekuensi massa luas bidang.

b. Radiasi

Radiasi L didefinisikan sebagai spektrum radiasi yang mengintegrasikan sebuah batasan range frekuensi $[\nu, \nu + \Delta\nu]$

$$L(\vec{r}, \hat{s}, t) = L_\nu(\vec{r}, \hat{s}, t) \Delta\nu \quad (2)$$

Dengan \vec{r} menunjukkan posisi, \hat{s} menunjukkan arah vektor satuan dan t menunjukkan waktu.

c. Intensitas cahaya

$$\Phi(\vec{r}, t) = \int_{s=4\pi} L(\vec{r}, \hat{s}, t) d\Omega \quad (3)$$

Dengan $d\Omega$ menunjukkan defernsial sudut padat

d. Kepadatan aliran cahaya

Kepadatan aliran cahaya J adalah jaringan aliran energi per daerah per satuan waktu.

$$J(\vec{r}, t) = \int_{s=4\pi} \hat{s} L(\vec{r}, \hat{s}, t) d\Omega \quad (4)$$

Pada aproksimasi difusi diasumsikan bahwa penyinaran cahaya near-infra merah pada otak adalah isotropik yaitu penyebarannya merata disetiap komponen jaringan otak.. Untuk mempelajari radiasi dalam batas difusi, radiasi direpresentasikan sebagai sebuah ekspansi *spherical harmonic* sebagai berikut:

$$L(\vec{r}, \hat{s}, t) \approx \sum_{n=0}^1 \sum_{m=-n}^n L_{n,m}(\vec{r}, t) Y_{n,m}(\hat{s}) \quad (5)$$

Dengan $Y_{n,m}$ menunjukkan *spherical harmonic* dan $L_{n,m}$ menunjukkan koefisien ekspansi. Komponen isotropik dari L sesuai dengan $n=0$ dan $m=0$. Pada saat $n=1$ dan $m=-1,0,1$ ada komponen yang tidak isotropik. Dengan substitusi persamaan (5) ke persamaan (3) akan diperoleh persamaan (6) yang berarti syarat isotropik adalah intinsiras cahaya dibagi dengan sudut padat penuh 4π .

$$L_{0,0}(\vec{r},t)Y_{0,0}(\hat{s}) = \frac{\Phi(\vec{r},t)}{4\pi} \quad (6)$$

Perkalian persamaan (5) dengan persamaan \hat{s} dan mensubstitusikannya ke persamaan (4) akan didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$\sum_{m=-1}^1 L_{1,m}(\vec{r},t)Y_{1,m}(\hat{s}) = \frac{3}{4\pi} J(\vec{r},t).\hat{s} \quad (7)$$

Dari persamaan (6) dan (7) maka persamaan ekspansi *spherical harmonik* pada persamaan (5) akan menjadi:

$$L(\vec{r},\hat{s},t) = \frac{1}{4\pi} \Phi(\vec{r},t) + \frac{3}{4\pi} J(\vec{r},t) \quad (8)$$

Substitusi persamaan (8) ke persamaan transfer radiasi persamaan (1) dan mengintegrasikannya diperoleh persamaan differensial skalar sebagai berikut:

$$\frac{\partial \Phi(\vec{r},t)}{c\partial t} + \mu_\alpha \Phi(\vec{r},t) + \nabla J(\vec{r},t) = Q(\vec{r},t) \quad (9)$$

Substitusi persamaan (8) ke dalam persamaan transfer radiasi, persamaan (1) dan mengalikan kedua ruas persamaan dengan \hat{s} , kemudian mengintegrasikannya, diperoleh:

$$\frac{\partial J(\vec{r},t)}{c\partial t} + (\mu_\alpha + \mu'_s)J(\vec{r},t) + \frac{1}{3}\nabla \Phi(\vec{r},t) = 0 \quad (10)$$

Diasumsikan nilai $\frac{\partial J(\vec{r},t)}{c\partial t}$ sangat kecil maka persamaan (10) menjadi:

$$J(\vec{r},t) = -D\nabla \Phi(\vec{r},t) \quad (11)$$

Substitusi persamaan (11) ke dalam persamaan (9) diperoleh persamaan difusi yang bergantung pada waktu sebagai berikut:

$$\frac{\partial \Phi(\vec{r},t)}{c\partial t} + \mu_\alpha \Phi(\vec{r},t) - \nabla [D\nabla \Phi(\vec{r},t)] = Q(\vec{r},t) \quad (12)$$

$D = \frac{1}{3(\mu_\alpha + \mu'_s)}$ adalah koefisien difusi dan $\mu'_s = (1-g)\mu_s$ adalah reduksi koefisien penyebaran. Selanjutnya, aproksimasi difusi pada persamaan transfer radiasi dapat ditulis pada kasus yang tidak tergantung pada waktu sebagai berikut:

$$-\vec{\nabla} D(\vec{r})\vec{\nabla} \Phi(\vec{r}) + \mu_\alpha(\vec{r})\Phi(\vec{r}) = Q(\vec{r}) \quad (13)$$

Dalam penelitian ini jika diasumsikan Ω adalah otak yang menjadi domain dalam pembahasan pada permukaan $\partial\Omega$, maka dapat didefinisikan invers problemnya adalah sebagai berikut: diberikan data Φ yaitu intensitas cahaya, maka akan ditemukan koefisien difusi D dan koefisien penyerapan μ_α . Koefisien difusi D dan koefisien penyerapan μ_α selanjutnya disebut q . Objek dari invers atau parameter estimasi dalam masalah ini dipilih sebuah parameter q^*

dengan meminimumkan kriteria eror atau fungsional biaya. Secara khusus fungsional biaya J_λ diberikan sebagai berikut (Khan, 2007):

$$J_\lambda(q) = \sum_{i=1}^N |\Phi(\zeta_i, q) - z_i|^2 + \lambda \|q - q_0\|^2$$

Dengan ζ_i berada dalam $\partial\Omega$ dan N adalah banyaknya pengukuran, z_i pengukuran kepadatan photon pada batas yaitu pada permukaan kepala dan λ adalah parameter regularisasi.

Sebagai contoh, dalam satu dimensi dengan $\Omega = [0, l]$, aproksimasi difusi dengan background tetap adalah persamaan Strum-Louville sebagai berikut:

$$-\nabla^2 \Phi + q^2 \Phi = 0 \quad (14)$$

Dengan $q^2 = \frac{\mu_\alpha}{D}$ adalah konstan, dan kondisi batas Rubin sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \Phi(0) - \alpha \nabla \Phi(0) &= 0 \\ \Phi(l) - \alpha \nabla \Phi(l) &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Dalam masalah ini invers problemnya adalah mengestimasi skalar q dari pengukuran kepadatan photon z yang diukur pada $x=0$ atau $x=l$

Transformasi Hopf-Cole dimulai dengan transformasi Φ sebagai berikut (Evan, 1998):

$$\nabla \psi = D \nabla (\ln(\Phi)) \quad (16)$$

Persamaan (16) adalah transformasi Hopf-Cole kemudian persamaan (14) dan (15) berubah menjadi:

$$-\nabla^2 \psi - \frac{|\nabla \psi|^2}{D} + q^2 D = 0 \quad (17)$$

Dengan $q^2 = \frac{\mu_\alpha}{D}$ adalah konstan, dengan kondisi batas rubin:

$$\begin{aligned} \alpha \nabla \psi(0) &= D \\ \alpha \nabla \psi(l) &= -D \end{aligned} \quad (18)$$

Persamaan (14) dan (15) dapat diselesaikan secara analitik dan solusi untuk $x < \eta$ adalah:

$$\Phi(x, \eta; q) = \frac{(e^{q\eta} - \gamma e^{-q\eta})(e^{q\eta} - \beta e^{-q\eta})}{2qD(\beta - \gamma)} \quad (19)$$

Dengan keterangan:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{e^{2lq}}{\beta} \\ \beta &= \frac{1 - \alpha q}{1 + \alpha q} \end{aligned}$$

Jika pengukuran dilakukan pada $x=0$, maka inverse problemnya adalah mengestimasi q dari data z yang diukur pada $x=0$. Dengan demikian parameter pada pemetaan output diberikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 Tq &= C(\Phi(x, \eta; q)) \\
 &= \Phi(0, \eta; q) \\
 &= \frac{(e^{q\eta} - \gamma e^{-q\eta})(1 + \beta)}{2(\beta - \gamma)}
 \end{aligned} \tag{20}$$

Persamaan (10) merupakan fungsi nonlinear dari parameter q yang diharapkan. Dengan cara yang sama penyelesaian dari persamaan (7) dan (8) adalah sebagai berikut:

$$\psi(x; q) = D \ln(\beta - e^{2qx}) - qDx \tag{21}$$

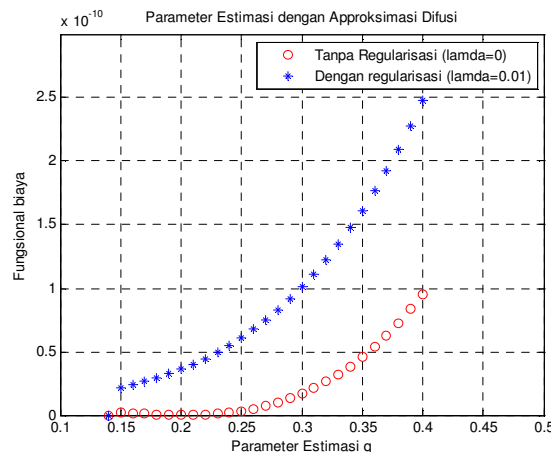
Dan untuk pengukuran pada $x=0$, parameter pada pemetaan output diberikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \tilde{T}q &= C\psi(x; q) \\
 &= \psi(0; q) \\
 &= D \ln(\beta - 1)
 \end{aligned} \tag{22}$$

Selanjutnya dilakukan simulasi hubungan antara fungsional biaya $J_\lambda(q)$ untuk medium background tetap yang homogen dalam satu dimensi dengan parameter estimasi q menggunakan software matlab. Pada simulasi ini diberikan kondisi batas Rubin dengan $\mu_\alpha = 0,012mm^{-1}$ dan $D = 0,33mm$. Sehingga estimasi awal untuk $q_0 = 0,1907mm^{-1}$. Untuk metode aproksimasi difusi, besarnya fungsional biaya dapat dihitung dengan rumus:

$$J_\lambda q = |\Phi(0; q) - \Phi(0; q_0)|^2 + \lambda |q - q_0|^2$$

Dengan $\Phi(0; q)$ adalah fungsi solusi analitik pada persamaan (19). Simulasi pada gambar 1 menggunakan dua parameter regularisasi λ yaitu $\lambda = 0$ (tanpa regularisasi) dan $\lambda = 0.01$.



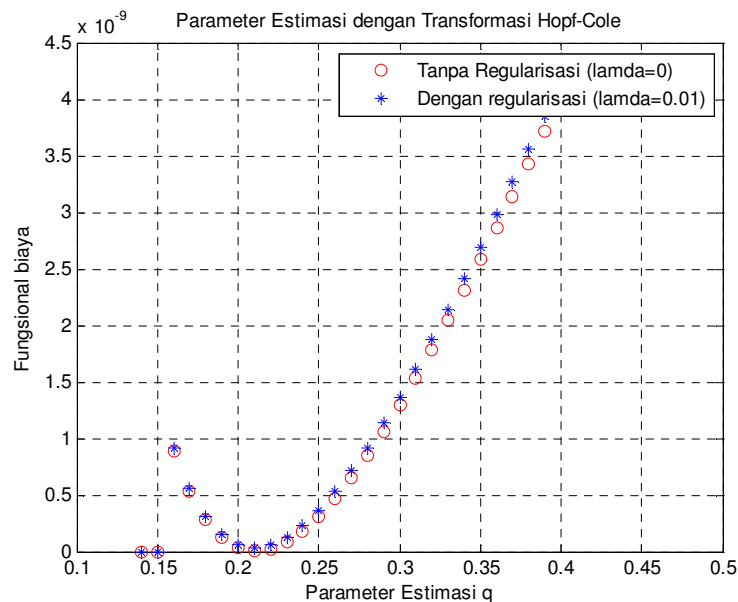
Gambar 1. Parameter estimasi q dengan aproksimasi difusi

Pada gambar 1, grafik merah menunjukkan besarnya fungsional biaya dengan $\lambda = 0$ (tanpa regularisasi) dan grafik biru menunjukkan besarnya fungsional biaya dengan regularisasi $\lambda = 0.01$. Pada gambar 1 juga terlihat bahwa parameter regularisasi sangat berpengaruh terhadap besarnya fungsional biaya, hal ini dibuktikan dengan grafik merah yang menyimpang jauh dengan grafik biru, hal ini juga menandakan bahwa metode aproksimasi difusi kurang stabil dalam penyelesaian invers problem.

Sedangkan untuk metode transformasi Hopf-Cole, besarnya fungsional biaya dapat dihitung dengan rumus:

$$J_{\lambda} q = |\psi(0; q) - \psi(0; q_0)|^2 + \lambda |q - q_0|^2$$

Dengan $\psi(0; q)$ adalah fungsi solusi analitik pada persamaan (21). Simulasi ini menggunakan dua parameter regularisasi λ yaitu $\lambda = 0$ (tanpa regularisasi) dan $\lambda = 0.01$. Hasil simulasi pada gambar 2 menunjukkan bahwa dengan regularisasi atau tanpa regularisasi, grafik fungsional biaya tidak akan menyimpang jauh, artinya regularisasi tidak mempengaruhi besarnya fungsional biaya. Dengan kata lain, metode transformasi Hopf-Cole akan memperbaiki dan menstabilkan penyelesaian invers problem jika dibandingkan dengan metode aproksimasi difusi.



Gambar 2 Parameter estimasi q menggunakan Transformasi Hopf-Cole

KESIMPULAN

penyelesaian *inverse problem* pencitraan kanker otak dengan metode transformasi Hopf-Cole lebih stabil jika dibandingkan penyelesaian dengan metode aproksimasi difusi. Hal ini bisa diketahui dari simulasi bahwa grafik hubungan parameter estimasi dengan fungsional biaya baik menggunakan parameter regularisasi atau tanpa regularisasi untuk transformasi Hopf-Cole tidak terjadi banyak perubahan atau sama-sama cekung, jika dibandingkan dengan aproksimasi difusi.

DAFTAR PUSTAKA

Ambrocio, E, (2008), " A Self-Consistent Obstacle Scattering Theory for the Diffusion Approximation of the Radiative Transport Equation", *A Technical report submitted in partial fulfillment of the requirement for degree of Master of Science*, University of California, Merced

- Evan, LC, (1998), *Partial Differential Equation*, American Mathematical Society, volume 19, Amerika
- Kaipio, J dan Somersalo, E, (2004), *Statistical and Computational Invers Problem*, 160, Helsinki dan Kuopio.
- Khan, T, R, (2007), “ Invers Problem In Optical Tomography Using Diffusion Approximation and Hopf-Cole Transformation”, *Departement of Mathematical Science, Clemson University, SC 29634-0975, Clemson*
- Natterer, F, (2001), *Mathematical Methods in Image Recontruction*, Siam
- Tahir, K, (2007), “*Optical Tomography*”,
<http://www.imperial.ac.uk/research/photonics/reseach/topics/tomog> diakses pada tanggal 17 Desember 2010.
- Wang, LV, dan Wu, HI, (2007), *Biomedical Optics*, Wiley. ISBN 9780471743040

PROTOKOL PERJANJIAN KUNCI BERDASARKAN MASALAH KONJUGASI ATAS GRUP NON-KOMUTATIF

M. Zaki Riyanto

*Pendidikan Matematika, JPMIPA, FKIP
Universitas Ahmad Dahlan, Yogyakarta
Email: zaki@mail.ugm.ac.id*

Abstrak

Protokol perjanjian kunci merupakan suatu skema dalam kriptografi yang digunakan untuk mengatasi masalah perjanjian kunci rahasia. Kunci rahasia tersebut digunakan pada proses enkripsi-dekripsi di antara dua pihak yang berkomunikasi. Secara umum, tingkat keamanan dari protokol perjanjian kunci diletakkan pada tingkat kesulitan dari suatu permasalahan matematis. Salah satu protokol perjanjian kunci yang telah dikenal luas adalah perjanjian kunci Diffie-Hellman yang didasarkan pada masalah logaritma diskrit pada suatu grup siklik. Dalam makalah ini, diperkenalkan suatu protokol perjanjian kunci yang tingkat keamanannya diletakkan pada permasalahan konjugasi atas grup non-komutatif. Contoh grup non-komutatif yang digunakan dalam makalah ini adalah grup matriks invertibel atas lapangan hingga. Selanjutnya, diberikan penerapannya pada sistem kriptografi Cipher Hill.

Kata kunci: kriptografi, perjanjian kunci, protokol, teori grup

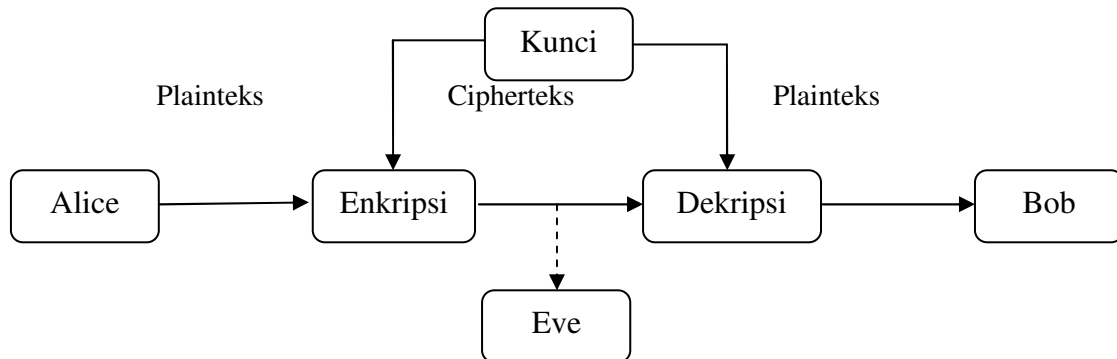
PENDAHULUAN

Perkembangan teknologi informasi dewasa ini telah berpengaruh pada hampir semua aspek kehidupan manusia, tak terkecuali dalam hal berkomunikasi. Dengan adanya internet, komunikasi jarak jauh dapat dilakukan dengan cepat dan murah. Namun di sisi lain, ternyata internet tidak terlalu aman karena merupakan jalur komunikasi umum yang dapat digunakan oleh siapapun sehingga sangat rawan terhadap penyadapan. Oleh karena itu, keamanan informasi menjadi faktor utama yang harus dipenuhi.

Salah satu solusinya adalah kriptografi. Kriptografi adalah suatu ilmu yang mempelajari teknik-teknik matematika yang berhubungan dengan aspek keamanan informasi, seperti kerahasiaan data, keabsahan data, integritas data, serta autentikasi data (Menezes dkk, 1996). Tetapi tidak semua aspek keamanan informasi dapat diselesaikan dengan kriptografi. Kriptografi dapat pula diartikan sebagai ilmu atau seni untuk menjaga keamanan pesan. Ketika suatu pesan dikirim dari suatu tempat ke tempat lain, isi pesan tersebut mungkin dapat disadap oleh pihak lain yang tidak berhak untuk mengetahui isi pesan tersebut. Untuk menjaga pesan, maka pesan tersebut dapat diubah menjadi suatu kode yang tidak dapat dimengerti oleh pihak lain. Enkripsi adalah suatu proses penyandian yang melakukan perubahan suatu pesan, dari yang dapat dimengerti, disebut dengan plainteks, menjadi suatu kode yang sulit dimengerti, disebut dengan cipherteks. Sedangkan proses kebalikannya untuk mengubah cipherteks menjadi plainteks disebut dekripsi. Proses enkripsi dan dekripsi memerlukan suatu mekanisme dan kunci tertentu.

Sistem kriptografi atau sering disebut dengan cipher merupakan suatu sistem atau kumpulan aturan-aturan yang digunakan untuk melakukan enkripsi dan dekripsi. Sistem kriptografi simetris adalah sistem kriptografi yang menggunakan kunci enkripsi dan dekripsi yang sama. Sistem ini mengharuskan dua pihak yang berkomunikasi menyepakati suatu kunci rahasia yang sama sebelum keduanya saling berkomunikasi. Keamanan dari sistem ini tergantung pada kunci, membocorkan kunci berarti bahwa orang lain yang berhasil mendapatkan kunci dapat mendekripsi

cipherteks. Sistem kriptografi ini sering disebut dengan sistem kriptografi kunci rahasia, seperti dijelaskan pada gambar berikut ini.



Gambar 1. Sistem Kriptografi Simetris

Pada Gambar 1 di atas, ada dua pihak yaitu Alice dan Bob yang berkomunikasi secara rahasia menggunakan sistem kriptografi simetris. Komunikasi dilakukan melalui jalur komunikasi yang tidak dapat dijamin keamanannya. Untuk dapat melakukan komunikasi secara rahasia, Alice dan Bob harus menyetujui suatu kunci rahasia yang sama. Akan tetapi, ada pihak ketiga yaitu Eve yang berada di antara kedua pihak yang berusaha untuk mendapatkan informasi rahasia yang dikirimkan. Contoh sistem kriptografi simetris adalah Cipher Hill, AES dan DES. Pada makalah ini hanya diberikan penjelasan mengenai Cipher Hill. Untuk penjelasan dari beberapa sistem kriptografi simetris dapat ditemukan dalam Menezes dkk (1996) dan Stinson (2006).

Cipher Hill merupakan suatu sistem kriptografi simetris yang proses enkripsi dan dekripsinya menggunakan operasi matriks yang didefinisikan atas suatu lapangan hingga. Diberikan F adalah lapangan hingga, didefinisikan himpunan semua matriks atas F berukuran $n \times n$, yaitu

$$M_n(F) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \mid a_{ij} \in F, 1 \leq i, j \leq n \right\}.$$

Selanjutnya, didefinisikan himpunan semua kunci yaitu himpunan semua matriks di $M_n(F)$ yang invertibel atau yang mempunyai determinan tidak nol, yaitu

$$GL_n(F) = \{A \in M_n(F) \mid \det(A) \neq 0\}.$$

Himpunan $GL_n(F)$ merupakan grup non-komutatif terhadap operasi perkalian matriks. Himpunan semua plainteks dan cipherteks diberikan dalam vektor kolom yaitu

$$F^n = \left\{ \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \mid p_1, \dots, p_n \in F \right\}. \quad \text{Diberikan plainteks } P = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \in F^n \quad \text{dan kunci}$$

$K = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in GL_n(F)$. Proses enkripsi diberikan dalam fungsi

$$e_K(P) = KP = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix},$$

dengan $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in F^n$ adalah cipherteks. Proses dekripsi diberikan dalam fungsi

$$d_K(C) = K^{-1}C = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}.$$

Untuk contoh dari Cipher Hill akan diberikan pada pembahasan selanjutnya mengenai protokol perjanjian kunci. Misalkan Alice ingin mengirimkan pesan rahasia berupa plainteks P melalui jalur komunikasi yang tidak aman, maka Alice harus menentukan kunci K dan melakukan enkripsi sehingga diperoleh cipherteks C . Kemudian cipherteks C dikirimkan kepada Bob.

Protokol Perjanjian Kunci

Apabila Alice dan Bob menggunakan sistem kriptografi simetris, masalah utama yang muncul adalah keduanya harus menyepakati kunci yang sama, padahal keduanya tidak dapat bertemu secara langsung. Apabila kunci K dikirimkan kepada Bob, maka pihak Eve dapat mengetahui kunci K .

Salah satu cara yang dapat digunakan untuk mengatasi masalah ini adalah menggunakan protokol perjanjian kunci (*key establishment protocol*). Protokol perjanjian kunci bertujuan agar kedua belah pihak dapat menentukan kunci yang sama walaupun dilakukan melalui jalur komunikasi yang tidak aman. Salah satu contoh protokol perjanjian kunci yang paling sederhana dan telah dikenal secara luas adalah protokol perjanjian kunci Diffie-Hellman yang ditemukan pada tahun 1976.

| Alice atau Bob mempublikasikan suatu grup siklik berhingga G dengan elemen pembangun $g \in G$. | |
|--|--|
| Alice | Bob |
| 1. Alice memilih secara rahasia $a \in \mathbb{Z}$ | 1. Bob memilih secara rahasia $b \in \mathbb{Z}$ |
| 2. Alice menghitung g^a | 2. Bob menghitung g^b |
| 3. Alice mengirim g^a kepada Bob | 3. Bob mengirim g^b kepada Alice |
| 4. Alice menerima g^b dari Bob | 4. Bob menerima g^a dari Alice |
| 5. Alice menghitung $K_A = (g^b)^a = g^{ba}$ | 5. Bob menghitung $K_B = (g^a)^b = g^{ab}$ |
| Alice dan Bob telah menyepakati kunci rahasia $K = K_A = K_B$ | |

Gambar 2. Skema Protokol Perjanjian Kunci Diffie-Hellman

Karena setiap grup siklik merupakan grup komutatif, maka $ab = ba$, sehingga diperoleh $K = K_A = K_B$. Misalkan Alice dan Bob telah berhasil menyepakati kunci rahasia yang sama yaitu K . Selanjutnya, kunci rahasia K yang telah disepakati digunakan untuk melakukan proses enkripsi-dekripsi. Di lain pihak, Eve sebagai pihak penyerang hanya dapat mengetahui nilai g , g^a dan g^b . Untuk mendapatkan kunci yang telah disepakati Alice dan Bob, Eve harus menentukan nilai a atau b . Dengan kata lain, Eve harus menyelesaikan masalah logaritma diskrit pada G , yaitu menentukan a apabila nilai g dan g^a diketahui. Tingkat keamanan dari protokol perjanjian kunci Diffie-Hellman didasarkan pada masalah logaritma diskrit pada grup siklik.

Protokol Perjanjian Kunci dan Masalah Konjugasi

Pada protokol perjanjian kunci Diffie-Hellman digunakan grup siklik yang merupakan grup komutatif. Dalam makalah ini diperkenalkan konsep mengenai protokol perjanjian kunci yang menggunakan grup non-komutatif. Untuk dapat menggunakan grup non-komutatif, protokol perjanjian kunci harus dapat dikonstruksi menggunakan suatu permasalahan matematis yang ada pada grup non-komutatif, yaitu masalah konjugasi yang diberikan sebagai berikut.

Diberikan suatu grup G dan $w, x \in G$. Masalah konjugasi didefinisikan sebagai permasalahan menentukan $a \in G$ sedemikian hingga $a^{-1}wa = x$. Myasnikov dkk (2008) telah menyelidiki bahwa untuk mencari solusi penyelesaiannya dibutuhkan perhitungan-perhitungan rekursif dan enumerasi pada setiap elemen di G . Oleh karena itu, penentuan grup G yang non-komutatif dan order dari G yang besar turut menentukan tingkat kesulitan dalam menyelesaikan masalah konjugasi. Myasnikov dkk (2008) memberikan skema protokol perjanjian kunci yang didasarkan pada masalah konjugasi atas grup non-komutatif sebagai berikut.

| | |
|--|---|
| Alice atau Bob mempublikasikan suatu grup non-komutatif G , suatu elemen $w \in G$ dan H suatu subgrup komutatif dari G | |
| Alice | Bob |
| 1. Alice memilih secara rahasia $a \in H$ | 1. Bob memilih secara rahasia $b \in H$ |
| 2. Alice menghitung $x = a^{-1}wa$ | 2. Bob menghitung $y = b^{-1}wb$ |
| 3. Alice mengirim x kepada Bob | 3. Bob mengirim y kepada Alice |
| 4. Alice menerima y dari Bob | 4. Bob menerima x dari Alice |
| 5. Alice menghitung $K_A = a^{-1}ya$ | 5. Bob menghitung $K_B = b^{-1}xb$ |
| Alice dan Bob telah menyepakati kunci rahasia $K = K_A = K_B$ | |

Gambar 3. Skema Protokol Perjanjian Kunci Berdasarkan Masalah Konjugasi atas Grup Non-komutatif (Myasnikov, 2008)

Dapat ditunjukkan bahwa Alice dan Bob berhasil menyepakati kunci rahasia yang sama. Diketahui $a, b \in H$ dan H merupakan subgrup komutatif dari G , sehingga $ab = ba$. Selanjutnya, diketahui $x = a^{-1}wa$ dan $y = b^{-1}wb$, diperoleh

$$K_A = a^{-1}ya = a^{-1}b^{-1}wba = (ba)^{-1}w(ba) = (ab)^{-1}w(ab) = b^{-1}a^{-1}wab = b^{-1}xb = K_B .$$

Berikut ini diberikan sebuah contoh yang sangat sederhana mengenai sistem kriptografi Cipher Hill dan protokol perjanjian kunci berdasarkan masalah konjugasi atas suatu grup non-komutatif.

Misalkan Alice dan Bob menggunakan grup non-komutatif

$$GL_2(\mathbb{Z}_{29}) = \{A \in M_2(\mathbb{Z}_{29}) \mid \det(A) \neq 0\}$$

dengan $\mathbb{Z}_{29} = \{0,1,2,\dots,28\}$ merupakan lapangan hingga. Alice ingin mengirimkan pesan rahasia "SECRET" kepada Bob menggunakan sistem kriptografi Cipher Hill. Apabila Alice mengenkripsi pesan tersebut menggunakan suatu kunci dan menghasilkan cipherteks, maka cipherteks yang dikirimkan kepada Bob tidak dapat dibuka oleh Bob, sebab Bob tidak mengetahui kunci yang digunakan oleh Alice. Alice tidak boleh mengirimkan kunci kepada Bob, karena ada Eve sebagai pihak penyerang yang dapat menyadap dan mendapatkan apapun yang melewati jalur komunikasi. Oleh karena itu, Alice dan Bob harus melakukan suatu perjanjian kunci. Misalkan diberikan dalam gambar berikut ini.

| Alice atau Bob mempublikasikan suatu grup non-komutatif $GL_2(\mathbb{Z}_{29})$, | |
|---|--|
| $w = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}_{29})$ dan $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^m \mid m \in \mathbb{Z} \right\}$ subgrup komutatif dari $GL_2(\mathbb{Z}_{29})$ | |
| Alice | Bob |
| 1. Alice memilih secara rahasia $a = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} \in H$ | 1. Bob memilih secara rahasia $b = \begin{pmatrix} 8 & 25 \\ 23 & 2 \end{pmatrix} \in H$ |
| 2. Alice menghitung $x = a^{-1}wa$ $= \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 20 & 12 \\ 18 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 17 & 20 \\ 2 & 21 \end{pmatrix}$ | 2. Bob menghitung $y = b^{-1}wb$ $= \begin{pmatrix} 8 & 25 \\ 23 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 25 \\ 23 & 2 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 21 & 28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 25 \\ 23 & 2 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 27 & 5 \\ 25 & 11 \end{pmatrix}$ |
| 3. Alice mengirim x kepada Bob 4. Alice menerima y dari Bob 5. Alice menghitung $K_A = a^{-1}ya$ $= \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 27 & 5 \\ 25 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 20 & 12 \\ 18 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 27 & 5 \\ 25 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 22 & 19 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$ | 3. Bob mengirim y kepada Alice 4. Bob menerima x dari Alice 5. Bob menghitung $K_B = b^{-1}xb$ $= \begin{pmatrix} 8 & 25 \\ 23 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 17 & 20 \\ 2 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 25 \\ 23 & 2 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 21 & 28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & 20 \\ 2 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 & 21 \\ 17 & 13 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 22 & 19 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$ |
| Alice dan Bob telah menyepakati kunci rahasia $K = K_A = K_B = \begin{pmatrix} 22 & 19 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$ | |

Gambar 4. Contoh Perhitungan Protokol Perjanjian Kunci

Setelah Alice dan Bob berhasil menyepakati kunci rahasia $K = \begin{pmatrix} 22 & 19 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$, selanjutnya Alice akan mengenkripsi pesan “SECRET” menggunakan Cipher Hill dengan kunci K . Diberikan tabel korespondensi antara karakter dengan elemen-elemen dari $\mathbb{Z}_{29} = \{0, 1, 2, \dots, 28\}$ sebagai berikut.

Tabel 1. Korespondensi karakter dengan bilangan

| | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0 ↔ A | 1 ↔ B | 2 ↔ C | 3 ↔ D | 4 ↔ E |
| 5 ↔ F | 6 ↔ G | 7 ↔ H | 8 ↔ I | 9 ↔ J |
| 10 ↔ K | 11 ↔ L | 12 ↔ M | 13 ↔ N | 14 ↔ O |
| 15 ↔ P | 16 ↔ Q | 17 ↔ R | 18 ↔ S | 19 ↔ T |
| 20 ↔ U | 21 ↔ V | 22 ↔ W | 23 ↔ X | 24 ↔ Y |
| 25 ↔ Z | 26 ↔ . | 27 ↔ , | 28 ↔ - | |

Pesan “SECRET” dipotong-potong menjadi “SE-CR-ET”. Menggunakan Tabel 1 dapat diperoleh tiga plainteks, misalkan P_1 berkorespondensi dengan “SE”, P_2 berkorespondensi dengan “CR” dan P_3 berkorespondensi dengan “ET”, yaitu

$$P_1 = \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 17 \end{pmatrix} \text{ dan } P_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya, Alice melakukan enkripsi pada ketiga plainteks menggunakan kunci $K = \begin{pmatrix} 22 & 19 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$, yaitu

$$e_K(P_1) = KP_1 = \begin{pmatrix} 22 & 19 \\ 11 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e_K(P_2) = KP_2 = \begin{pmatrix} 22 & 19 \\ 11 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$e_K(P_3) = KP_3 = \begin{pmatrix} 22 & 19 \\ 11 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dari perhitungan di atas, diperoleh cipherteks $C_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 19 \\ 4 \end{pmatrix}$ dan $C_3 = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix}$. Cipherteks

C_1 berkorespondensi dengan “IB”, cipherteks C_2 berkorespondensi dengan “TE” dan C_3 berkorespondensi dengan “OA”. Dengan demikian, Alice telah mengenkripsi pesan “SECRET” menjadi “IBTEOA” dan selanjutnya dikirimkan kepada Bob.

Misalkan Bob telah menerima cipherteks “IBTEOA”. Cipherteks ini dipotong-potong menjadi “IB-TE-OA” yang berkorespondensi dengan $C_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} 19 \\ 4 \end{pmatrix}$ dan $C_3 = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bob melakukan dekripsi menggunakan kunci yang telah diperoleh dari perjanjian kunci dengan Alice, yaitu $K = \begin{pmatrix} 22 & 19 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$. Proses dekripsi dilakukan sebagai berikut

$$d_K(C_1) = K^{-1}C_1 = \begin{pmatrix} 22 & 19 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 24 \\ 20 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$d_K(C_2) = K^{-1}C_2 = \begin{pmatrix} 22 & 19 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 19 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 24 \\ 20 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 19 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$d_K(C_3) = K^{-1}C_3 = \begin{pmatrix} 22 & 19 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 24 \\ 20 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 19 \end{pmatrix}$$

Bob berhasil mendapatkan plainteks yang dikirimkan oleh Alice, yaitu $P_1 = \begin{pmatrix} 18 \\ 4 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 17 \end{pmatrix}$ dan $P_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 19 \end{pmatrix}$ yang berkorespondensi dengan pesan “SECRET”.

KESIMPULAN

Untuk menjaga keamanan pengiriman pesan rahasia, pesan dapat dirubah menjadi suatu kode yang tidak dapat dimengerti oleh pihak penyadap. Salah caranya adalah dengan menggunakan sistem kriptografi simetris. Pada sistem kriptografi simetris, proses enkripsi dan dekripsi dilakukan menggunakan kunci rahasia yang sama. Oleh karena itu, kedua pihak yang berkomunikasi harus melakukan kesepakatan kunci yang sama. Protokol perjanjian kunci digunakan untuk mengatasi permasalahan dalam melakukan kesepakatan kunci yang akan digunakan untuk proses enkripsi dan dekripsi.

Protokol perjanjian kunci yang selama ini dikenal masih dilakukan atas suatu grup komutatif. Pada grup non-komutatif dapat dikonstruksi suatu protokol perjanjian kunci yang didasarkan pada masalah konjugasi. Tingkat kesulitan dalam menyelesaikan masalah konjugasi pada grup non-komutatif menentukan tingkat keamanan dari protokol perjanjian kunci. Oleh karena itu, perlu dilakukan penelitian mengenai metode-metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah konjugasi pada grup non-komutatif. Selain itu, juga perlu diteliti grup-grup non-komutatif yang dapat digunakan untuk protokol perjanjian kunci.

DAFTAR PUSTAKA

Menezes Alfred J., Paul C. van Oorschot dan Scott A. Vanstone, 1996, *Handbook of Applied Cryptography*, CRC Press, USA.

Myasnikov Alexei, Vladimir Shpilrain dan Alexander Ushakov, 2008, *Group-based Cryptography*, Birkhauser Verlag, Basel Switzerland.

Stinson Douglas R., 2006, *Cryptography: Theory and Practice Third Edition*, Capman and Hall/CRC Press, Boca Raton, Florida.

**PEWILAYAHAN CURAH HUJAN
DI KABUPATEN INDRAMAYU DENGAN METODE GEROMBOL
(BERDASARKAN DATA MEDIAN TAHUN 1980-2000)**

**Dewi Retno Sari Saputro¹, Ahmad Ansori Mattjik², Rizaldi Boer³,
Aji Hamim Wigena², Anik Djuraidah²**

¹*Mahasiswa S3 Statistika Program Pascasarjana IPB, Jurusan Matematika FMIPA UNS,
dewi_rss@yahoo.com*

²*Departemen Statistika FMIPA IPB*

³*Departemen Geofisika dan Meteorologi FMIPA IPB*

Abstrak

Berdasarkan data amatan curah hujan tahun 1980-2000 di Kabupaten Indramayu, terdapat data pencilan di setiap bulannya dengan persentase tertinggi 8,29%, terjadi pada bulan Agustus. Berbeda dengan penelitian terdahulu, dalam penelitian ini dilakukan pengelompokan ZOM berdasarkan data median curah hujan di 27 stasiun penakar hujan di Indramayu. Teknik pembentukan ZOM ini dilakukan dengan algoritma gerombol dengan sebelumnya melakukan analisis komponen utama (AKU) untuk mereduksi peubah datanya, metode pautan lengkap (*complete linkage*) dan perhitungan jaraknya menggunakan jarak Euclid. Proses pewilayahan curah hujan diperoleh lima AKU dengan total keragaman yang dapat dijelaskan melalui lima komponen utama tersebut sebesar 84,99% dan menghasilkan 3 pewilayahan baru. Berdasarkan pola dan sebaran pada pewilayahan tersebut, rata-rata curah hujan tertinggi terjadi pada bulan Januari di wilayah 3. Daerah dengan rata-rata curah hujan tahunan terbesar terjadi di wilayah 2 yang merupakan bagian barat daya dan selatan serta berbatasan dengan Kabupaten Sumedang dan Majalengka.

Kata kunci: pencilan, median curah hujan, Zona Musim (ZOM), analisis Komponen Utama (AKU), analisis gerombol, Complete linkage, Euclidean.

PENDAHULUAN

Daerah prakiraan musim (DPM) merupakan daerah dengan tipe hujan yang memiliki perbedaan yang jelas antara periode musim kemarau dan musim hujan berdasarkan pola hujan bulanannya selama satu tahun dan ditentukan menurut hasil penelitian pemetaan tipe hujan di Indonesia (Nuryadi 1998 diacu dalam Suciantini 2004). DPM yang dimiliki oleh BMG saat ini berjumlah 101 DPM dengan 63 DPM berada di Jawa dan di luar Jawa. Istilah DPM ini sekarang lebih dikenal dengan istilah ZOM (zona musim). Tidak seluruh wilayah di Indonesia termasuk dalam daerah prakiraan musim BMG, karena sulitnya penentuan permulaan musim sehingga terjadi kerancuan informasi setiap penerbitan prakiraan musim.

Menurut BMG, berdasarkan data tahun 1961-1990, DPM untuk Indramayu sebelum tahun 2002 dibagi dalam dua DPM yaitu DPM 6 (Indramayu bagian utara) dan DPM 7 (Indramayu bagian selatan) Haryoko 2004). DPM 6 meliputi wilayah bagian utara Indramayu, dengan luas area sekitar 122.025 ha dan wilayah bagian selatan Indramayu dengan luas area sekitar 81.986 ha tergabung dalam DPM7. Keragaman curah hujan pada kedua DPM relatif masih tinggi, sehingga prakiraan yang dikeluarkan oleh BMG untuk kedua DPM tersebut seringkali tidak dapat mewakili kondisi pada luasan yang lebih kecil, dalam hal ini wilayah kecamatan.

Haryoko (2004) melakukan pewilayahan curah hujan baru dan menghasilkan pewilayahan baru sebanyak 6 DPM. Setiap DPM diwakili oleh sebuah pola yang dianggap mewakili region yang dimaksud. Penggunaan 6 DPM tersebut dianggap masih mempunyai keragaman yang cukup tinggi, oleh karena itu, Suciantini (2004) melakukan pewilayahan curah hujan yang baru dan menghasilkan pewilayahan baru 8 DPM. Penelitian lainnya yakni Amanah (2010), yang melakukan pewilayahan baru menjadi 2 kelompok/ZOM berdasarkan regresi kuantil.

Berbeda dengan penelitian terdahulu, penelitian ini dilakukan untuk mengelompokkan ZOM berdasarkan data median curah hujan tahun 1980-2000 di 27 stasiun penakar hujan di Indramayu. Data median ini digunakan mengingat, terdapat beberapa data pencilan.

METODOLOGI PENELITIAN

Data yang dipergunakan merupakan data curah hujan di Kabupaten Indramayu tahun 1980-2000 yang tersebar dalam 27 stasiun penakar hujan, dan posisi stasiun curah hujan (*latitude dan longitude*). Data ini diperoleh dari Lab Geofisika dan Metereologi, Departemen Metereologi dan Geofisika, FMIPA IPB dan juga dari Badan Metereologi, Klimatologi dan Geofisika (BMKG).

Metode yang digunakan pada penelitian ini dengan metode *agglomerative hierarchical*, dan metode pemisahan (*divide hierarchical*) dengan setiap objek dianggap sebagai satu gerombol kemudian antar gerombol yang jaraknya berdekatan bergabung menjadi satu gerombol. Tahap ini diulang hingga mendapatkan gerombol akhir yang beranggotakan seluruh objek pengamatan. Setiap penggabungan selalu disertai dengan perbaikan matriks jarak yang dipergunakan sebagai ukuran kedekatan anatar gerombol. Dalam penelitian ini, metode perbaikan jaraknya menggunakan metode pautan lengkap (*complete linkage*) yaitu jarak antar dua gerombol diukur menggunakan jarak terjauh antara satu objek dalam satu gerombol dengan satu objek dalam gerombol lainnya. Secara garis besar langkah-langkah dalam penelitian ini dinyatakan sebagai berikut.

- Menyusun data median curah hujan, selanjutnya membuat karakteristik datanya.
- Melakukan analisis komponen utama (*principal component analysis/PCA*) digunakan untuk mereduksi dimensi suatu data tanpa mengurangi karakteristik data tersebut secara signifikan.
- Melakukan analisis pewilayahan dengan metode *agglomerative hierarchical* dan *devisi hierarchical* yang dapat dinyatakan dalam bentuk dendrogram. Ukuran kedekatan dihitung berdasarkan jarak Euclidean dari dua pengamatan dan yang berdimensi p.

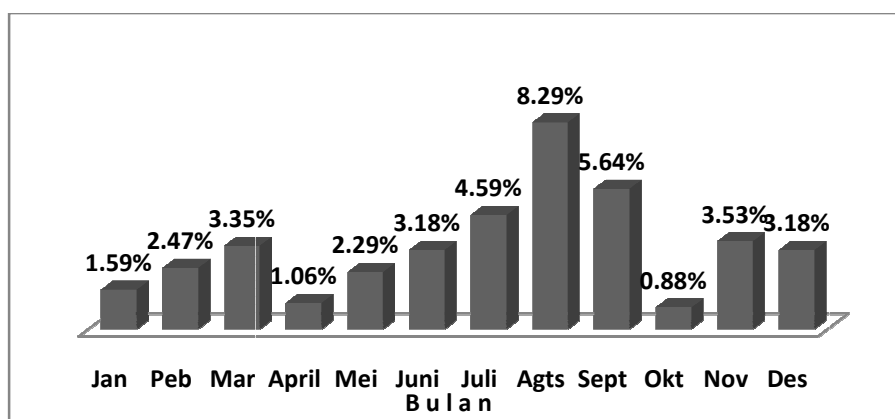
dengan : jarak antara objek ke-i dan ke-j

- Melakukan analisis hasil.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Karakteristik Data

Berdasarkan karakteritik data curah hujan di Kabupaten Indramayu, diperoleh deskripsi data pencilan seperti berikut.



Gambar 1. Data pencilan curah hujan berdasarkan data tahun 1980-2000

Pencilan terbesar terjadi di bulan Agustus dan September dengan persentase 8.29% dan 5.64% dan terjadi pada puncak bulan kering (Saputro dkk. 2011). Adanya pencilan tersebut berpengaruh terhadap analisis lanjutan yang akan dilakukan, terutama untuk pewilayahan curah hujan, oleh karena itu dalam penelitian ini dipergunakan data median curah hujan. Lebih lanjut, pada Tabel 1 diberikan deskripsi umum curah hujan di Kabupaten Indramayu.

Tabel 1 Deskripsi data curah hujan Indramayu

| | Min | Maks | Rata-rata | Std. Deviation |
|-----------|--------|--------|-----------|----------------|
| Januari | 189.00 | 461.00 | 284.70 | 57.14 |
| Pebruari | 132.00 | 245.00 | 182.22 | 29.00 |
| Maret | 77.00 | 246.00 | 141.30 | 41.02 |
| April | 59.00 | 192.00 | 136.44 | 32.36 |
| Mei | 32.00 | 109.00 | 69.96 | 20.43 |
| Juni | 17.00 | 103.00 | 49.30 | 20.00 |
| Juli | .00 | 33.00 | 16.78 | 8.74 |
| Agustus | .00 | 19.00 | 6.74 | 6.60 |
| September | .00 | 23.00 | 5.19 | 5.80 |
| Oktober | 24.00 | 126.00 | 57.59 | 25.19 |
| November | 67.00 | 211.00 | 149.26 | 36.79 |
| Desember | 96.00 | 287.00 | 190.07 | 44.28 |

Curah hujan tertinggi di bulan Januari dengan rata-rata 284,70 mm sebagai puncak musim hujan dan curah hujan terendah di bulan September dengan rata-rata 5,19 mm sebagai puncak musim kering. Simpangan baku tertinggi terjadi di bulan Januari, artinya terdapat keragaman curah hujan antar stasiun penakar hujan di Kabupaten Indramayu. Selanjutnya, agar data dapat diproses dalam analisis komponen utama diperlukan uji KMO dan Bartlett. Hasilnya menyatakan bahwa nilai ujiannya sebesar 0,52, oleh karena itu data yang ada dapat dianalisis dengan analisis komponen utama.

Analisis Komponen Utama

Analisis komponen utama (AKU) merupakan suatu tehnik statistik untuk mengubah dari sebagian besar variabel asli yang digunakan yang saling berkorelasi satu dengan yang lainnya hingga diperoleh peubah baru (komponen utama) yang lebih kecil dan saling bebas (tidak berkorelasi lagi) dan menyimpan sebagian besar informasi yang terkandung pada peubah asal (Johnson & Wichern 1982, Jolliffe 2002). Berdasarkan analisis eksplorasi terhadap data curah hujan ini, terdapat korelasi antar stasiun pengamatan/penakar curah hujan, oleh karena itu dilakukan AKU.

Kajian tentang AKU banyak ditemukan di analisis peubah ganda, karena AKU sering dipergunakan sebagai analisis lainnya seperti analisis regresi, analisis gerombol. AKU menjadi populer karena tiga hal, yaitu 1) memiliki kombinasi linier dengan *mean square error* optimal dalam meringkas serangkaian vektor berdimensi rendah dan kemudian membentuknya kembali 2) parameter model dapat dihitung secara langsung dari data dan 3) peringkasan dan penghilangan mudah dioperasikan untuk menunjukkan parameter model (Chen 2002). Secara aljabar linier, komponen utamanya merupakan kombinasi linier tertentu dari p peubah acak x_1, x_2, \dots, x_p . Secara geometris kombinasi linier ini merupakan sistem koordinat baru yang didapat dari rotasi sistem semula dengan x_1, x_2, \dots, x_p sebagai sumbu koordinat. Sumbu baru tersebut merupakan arah dengan variabilitas maksimum dan memberikan kovariansi yang lebih sederhana. Menurut Johnson dan Dean, AKU terkonsentrasi pada penjelasan struktur variansi dan kovariansi melalui suatu kombinasi linear peubah asal, dengan tujuan utama melakukan reduksi data dan membuat interpretasi. Meskipun memiliki beberapa keunggulan, model AKU memiliki beberapa kelemahan, yakni algoritma AKU didasarkan pada asumsi bahwa data tidak mengandung pencilan (Chen 2002). AKU dibentuk berdasarkan pada matriks kovarian yang sensitif terhadap keberadaan data pencilan (Hubert et al 2005). Dengan demikian AKU tidak bersifat kekar terhadap pencilan. Kajian

untuk mengatasi hal ini dapat dilakukan dengan AKU kekar (Anisa 2010). Dalam penelitian ini, hal yang berbeda dengan yang dilakukan Anisa (2010) tersebut yakni data yang dipergunakan dalam kajian ini menggunakan data median curah hujan sehingga pewilayahan baru diharapkan akan kekar terhadap data pencilan.

Selanjutnya, berdasarkan AKU tersebut dihasilkan *loading factor* untuk peubah komponen 1, 2, 3, 4 dan 5 serta dinyatakan pada Tabel 2. Total keragaman yang dapat dijelaskan melalui lima komponen utama tersebut sebesar 84.99%.

Tabel 2 Komponen matriks sebelum dilakukan rotasi

| | Component | | | | |
|-----------|-------------|--------------|-------------|-------|-------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Januari | .654 | .445 | -.149 | .199 | -.360 |
| Pebruari | .764 | .256 | -.198 | .355 | -.065 |
| Maret | .700 | -.547 | -.237 | -.039 | -.017 |
| April | .885 | -.210 | -.238 | .078 | .148 |
| Mei | .309 | .831 | .018 | -.090 | .155 |
| Juni | .622 | .480 | .150 | .178 | .340 |
| Juli | .511 | .461 | .470 | -.263 | .217 |
| Agustus | .535 | .148 | .494 | -.417 | -.427 |
| September | .059 | -.179 | .767 | .507 | -.164 |
| Oktober | .387 | -.668 | .486 | -.074 | .252 |
| November | .717 | -.550 | .041 | .004 | .005 |
| Desember | .835 | -.150 | -.290 | -.208 | -.080 |

Pada bulan Juli, korelasi dengan komponen 1 sebesar 0.511 dan korelasi dgn komponen 3 sebesar 0.47 menunjukkan korelasi yg tidak berbeda secara jelas. Demikian juga untuk bulan Agustus korelasi dengan komponen 1 sebesar 0.535 dan korelasi dgn komponen 3 sebesar 0.494 menunjukkan korelasi yg tidak berbeda secara jelas. Sedangkan komponen bulan lainnya, sudah tampak berbeda jelas korelasi terhadap komponennya. Berdasarkan hal tersebut, diperlukan rotasi, rotasi yang dipergunakan dengan *Varimax*. Hasil rotasi dengan *varimax* ditunjukkan seperti pada Tabel 3 berikut.

Tabel 3 Komponen matriks setelah dilakukan rotasi dengan *varimax*

| | Component | | | | |
|-----------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Januari | .199 | .290 | .798 | -.030 | .235 |
| Pebruari | .440 | .373 | .694 | .051 | -.047 |
| Maret | .905 | -.113 | .110 | -.033 | .049 |
| April | .864 | .266 | .301 | -.050 | -.035 |
| Mei | -.234 | .748 | .356 | -.240 | .144 |
| Juni | .204 | .798 | .311 | .105 | -.028 |
| Juli | .078 | .782 | -.003 | .087 | .430 |
| Agustus | .192 | .236 | .130 | .150 | .882 |
| September | -.038 | .012 | .012 | .944 | .118 |
| Oktober | .648 | .047 | -.482 | .475 | .145 |
| November | .870 | -.017 | .028 | .201 | .138 |
| Desember | .781 | .147 | .308 | -.258 | .245 |

Setelah dilakukan rotasi, nampak lebih jelas korelasi setiap bulannya dengan masing-masing komponennya. Faktor *loading* 4 dan 5 menggambarkan bulan kering, *factor loading* 1 dan 3 menggambarkan bulan basah, serta *factor loading* 2 menggambarkan bulan lembab/transisi.

Analisis Gerombol

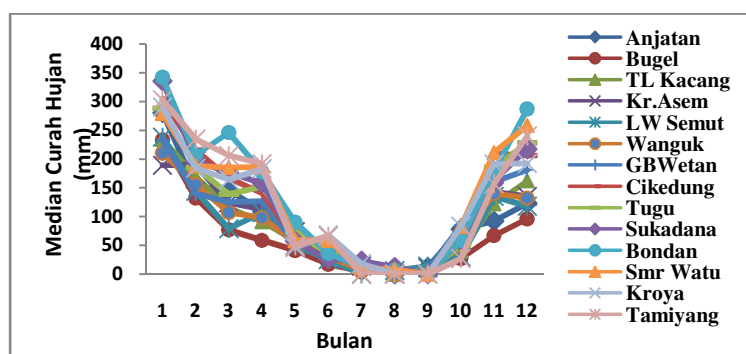
Berdasarkan reduksi empat komponen dengan AKU, selanjutnya dilakukan analisis gerombol. Algoritma gerombol harus dapat memaksimalkan perbedaan relatif gerombol terhadap variasi dalam gerombol. Dua metode paling umum dalam algoritma gerombol yaitu metode hirarkhi dan metode nonhirarkhi. Penentuan metode mana yang akan dipakai tergantung kepada peneliti dan konteks penelitian dengan tidak mengabaikan substansi, teori dan konsep yang berlaku. Seperti telah disebutkan di metodologi penelitian, penelitian ini menggunakan metode penggabungan (*agglomerative hierarchical*) dan metode pemisahan (*divide hierarchical*).

Dalam metode aglomerasi tiap observasi pada mulanya dianggap sebagai gerombol tersendiri sehingga terdapat gerombol sebanyak jumlah observasi. Kemudian dua gerombol yang terdekat kesamaannya digabung menjadi suatu gerombol baru, sehingga jumlah gerombol berkurang satu pada tiap tahap. Proses ini dilakukan hingga tiap observasi menjadi gerombol sendiri-sendiri. Hal penting dalam metode hirarkhi bahwa hasil pada tahap sebelumnya selalu bersarang di dalam hasil pada tahap berikutnya, membentuk sebuah pohon. Metode aglomerasi dalam pembentukan gerombol ini, yaitu pautan lengkap disebut juga pendekatan tetangga terjauh yang menghitung jarak maksimum. Beberapa metode penggabungan yang seringkali digunakan dalam pembentukan gerombol ini yaitu *complete linkage*, *average linkage*, *Wards* (Bunkers et al. 1996); *complete linkage* (BMG 2003); *Ward dan Centroid* (Wigena 2006). Akhirnya, dengan aglomerasi pautan lengkap dan jarak *Euclidean* diperoleh pewilayahan curah hujan seperti pada Tabel 4 berikut.

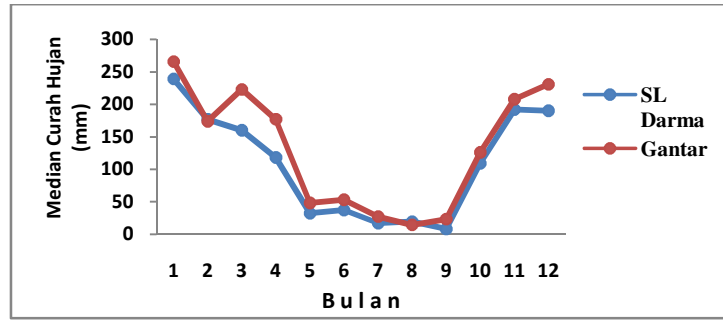
Tabel 4 Pewilayahan curah hujan

| Wilayah | Stasiun Curah Hujan |
|---------|--|
| 1 | Anjatan, Bugel TL Kacang Kr.Asem LW Semut Wanguk GBWetan Cikedung Tugu Sukadana Bondan Smr Watu Kroya Tamiyang |
| 2 | SL Darma, Gantar |
| 3 | Jatibarang Juntinyuat Ked Bunder Lohbener Sudi Mampir Krangkeng SudiKamp Losarang Cidempet Bangkir Indramayu |

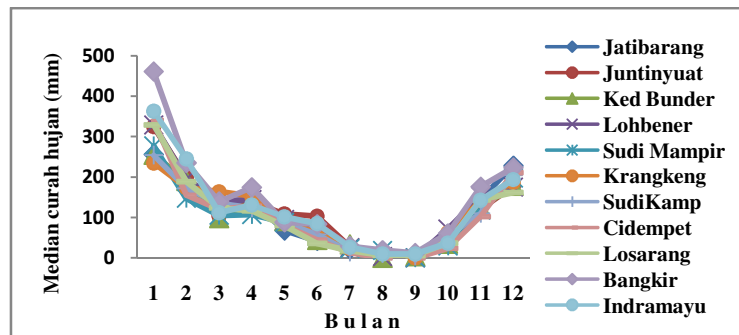
Dilakukan juga uji dengan prosedur Pillai, Wilks Lamda, Hotelling dan Roy's, hasilnya menunjukkan bahwa penggerombolan tersebut berbeda nyata, Pola curah hujan dengan pewilayahan baru ditunjukkan seperti pada Gambar 2-4 berikut.



Gambar 2 Pola curah hujan di wilayah 1 (ZOM 1)

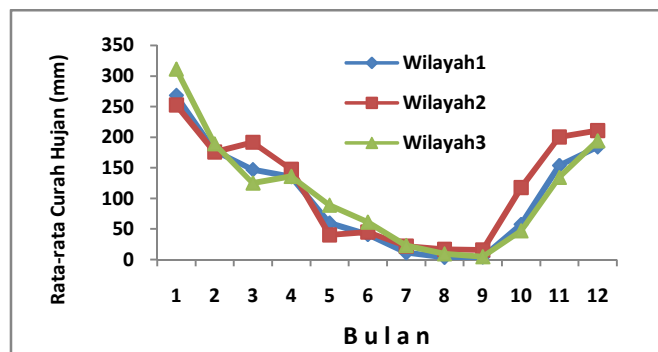


Gambar 3 Pola curah hujan di wilayah 2 (ZOM 2)



Gambar 4 Pola curah hujan di wilayah 3 (ZOM 3)

Pewilayahan ini sesuai dengan hasil penelitian pola curah hujan di Indonesia oleh Aldrian dan Susanto (2003) bahwa untuk wilayah di pulau Jawa bertipe curah hujan *monsoon*, yaitu curah hujan tertinggi yang terjadi pada bulan Januari atau Desember dan curah hujan terendah Juni-Agustus (Kadarsah 2007). Pada Gambar 5 merupakan penggabungan ketiga wilayah. Peta secara lengkap ada di lampiran.



Gambar 5 Pola curah hujan wilayah 1, 2 dan 3

Sepanjang bulan Agustus-Desember, wilayah 3 menunjukkan wilayah yg memiliki rata-rata curah hujan lebih rendah dibandingkan dua wilayah lainnya, sedangkan pada bulan Jan-Pebruari dan Mei-Juni memiliki curah hujan yang lebih tinggi dibandingkan dua wilayah lainnya (Gambar 5). Rata-rata curah hujan tertinggi terjadi pada bulan Januari di wilayah 3. Daerah dengan rata-rata curah hujan tahunan terbesar terjadi di wilayah 2 yang terletak di bagian barat daya dan selatan serta berbatasan dengan Kabupaten Sumedang dan Majalengka. Hal ini juga sesuai dengan hasil penelitian Haryoko (2004).

Akhirnya dapat disusun kategori wilayah bulan basah, lembab dan kering seperti ditunjukkan pada Tabel 5. Adapun kriteria yang digunakan untuk menentukan bulan kering, bulan lembab, dan bulan basah berdasarkan Schmidh-Fergusson dengan katagori sebagai berikut bulan kering (BK) : bulan dengan curah hujan < 60 mm, bulan lembab (BL) : bulan dengan curah hujan antara 60 sampai dengan 100 mm, bulan basah (BB) : bulan dengan curah hujan > 100 mm.

Tabel 5 Pembagian wilayah dan kategori bulan basah, lembab dan kering

| | Bulan Basah | Bulan Lembab | Bulan Kering |
|--|--------------------|--------------|--------------|
| Wilayah I | | | |
| Anjatan, Bugel, TL Kacang, Kr.Asem, LW Semut, Wanguk, GBWetan, Cikedung, Kroya, Sukadana, Smr Watu, Tugu, Bondan, Tamiyang | Jan-April, Nov-Des | | Mei-Okt |
| Wilayah II | | | |
| SL Darma, Gantar | Jan-April, Okt-Des | | Mei-Sept |
| Wilayah III | | | |
| Cidempet, Losarang, Bangkir, Indramayu Jatibarang, Juntinyuat, Ked Bunder, Lohbener, Sudi Mampir, Krangkeng, SudiKamp | Jan-April, Nov-Des | Mei-Juni | Juli-Okt |

KESIMPULAN

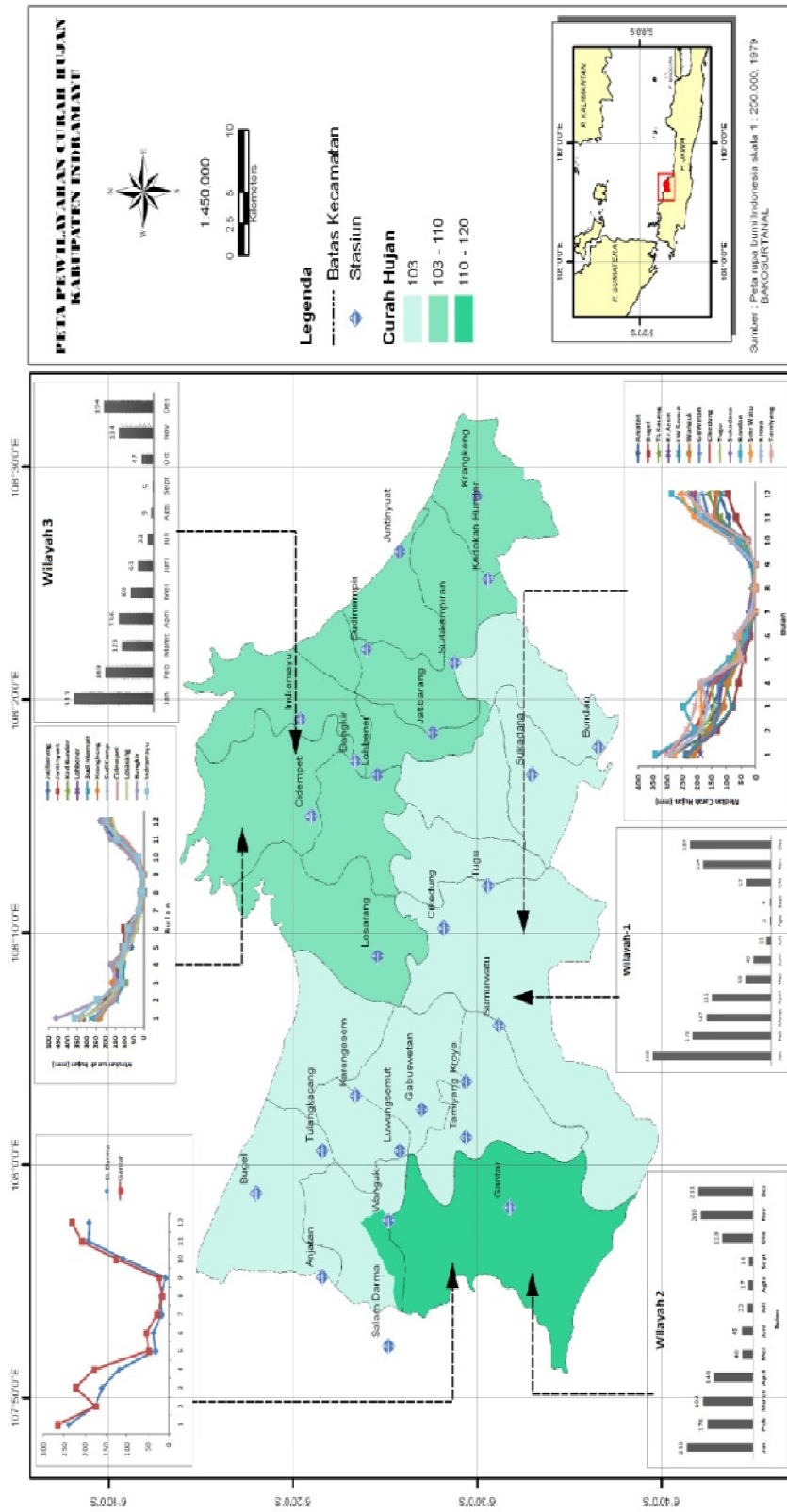
Proses pewilayahan curah hujan diperoleh dengan lima AKU, total keragaman yang dapat dijelaskan melalui lima komponen utama tersebut sebesar 84.99% dan tiga wilayah curah hujan dengan metode *complete linkage* dan perhitungan jaraknya Euclidean. Adapun tiga pengelompokkan wilayah tersebut yaitu wilayah 1 : Anjatan, Bugel, TL Kacang, Kr.Asem, LW Semut, Wanguk, GBWetan, Cikedung, Tugu, Sukadana, Bondan, Smr Watu, Kroya, dan Tamiyang, wilayah 2: SL Darma dan Gantar serta wilayah 3 : Jatibarang, Juntinyuat, Ked Bunder, Lohbener, Sudi Mampir, Krangkeng, SudiKamp, Losarang, Cidempet, Bangkir, dan Indramayu. Berdasarkan pola dan sebarannya, rata-rata curah hujan tertinggi terjadi pada bulan Januari di wilayah 3. Daerah dengan rata-rata curah hujan tahunan terbesar terjadi di wilayah 2, memiliki bulan basah yang lebih panjang dari dua wilayah lainnya. Wilayah 2 ini, berada di bagian barat daya dan selatan serta berbatasan dengan Kabupaten Sumedang dan Majalengka.

DAFTAR PUSTAKA

- Aldrian E, Susanto RD . 2003. Identification Of Three Dominant Rainfall Regions Within Indonesia and Their Relationship To Sea Surface Temperature. *International Journal Of Climatology* **23**: 1435–1452 (2003)
- Amanah SA. 2010. Eksplorasi Pola Curah Hujan Kabupaten Indramayu menggunakan Regresi Kuantil [skripsi]. Bogor: Departemen Statistika, Institut Pertanian Bogor.
- Agusta, Y. 2007. K-means Penerapan Permasalahan dan Metode Terkait, *Jurnal Sistem dan Informatika*, Vol. 3, hal 47-60
- Barnett V, Lewis T. 1994. *Outlier in Statistical Data*. Chichester: John Willey & Sons, Ltd.
- [BMG] Badan Metereologi dan Geofisika. 2003. Pewilayahan Daerah Tipe Hujan dan Evaluasi Musim Kemarau 2003 serta Prakiraan Sementara Musim Hujan 2003/2004 Kabupaten Indramayu. Jakarta. BMG

- Chatfield C. 1984, *The Analysis of Time Series : An Introduction*. London: Chapman and Hall.
- Chen H. 2002. Principal Component Analysis with Missing Data and Outliers. <http://www.caip.rutgers.edu/riul/research/tutorial/tutorialrpca.pdf> [April 2011]
- Haryoko U. 2004. Pewilayahan Hujan untuk Menentukan Pola Hujan (Studi Kasus di Indramayu).
- Hubert M, Rousseuw PJ, Vanden-Branden K. 2005. ROBPCA: A New Approach to Robust Principal Component Analysis. *Technometrics*, 47: 64-79
- Johnson, RA & Wichern, DW. 2002. *Applied Multivariate Statistical Analysis*, New York: Prentice Hall,
- Jolliffe IT. 2002. *Principal Component Analysis*. 2nd Ed. New York: Springer-Verlag, Inc.
- Kadarsah. 2007. Tiga Pola Curah Hujan Indonesia <http://www.kadarsah.wordpress.com/2007/06/29/tiga-daerah-iklim-indonesia/>. [20 Juli 2009]
- Rahma A. 2010. Penggunaan Analisis Komponen Utama Kekar dan Regresi Kekar dalam Pendugaan Curah Hujan Lokal di Indramayu [skripsi]. Bogor: Departemen Statistika, Institut Pertanian Bogor.
- Saputro DRS, Mattjik AA, Boer R. Wigena AH, & Djuraidah A. 2011. Pendugaan Data Tidak Lengkap Curah Hujan di Kabupaten Indramayu dengan Kriging dan Rata-rata Bergerak (Berdasarkan Data tahun 1980-2000) [belum dipublikasi].
- Suciantini. 2004. Evaluasi Prakiraan Sifat Hujan dan Penyusunan Model Prediksi Musim: Studi Kasus Kabupaten Indramayu [tesis]. Bogor: Program Pascasarjana, Institut Pertanian Bogor.
- Wigena A.H. 2006. Pemodelan Statistical Downscaling dengan Regresi Projection Pursuit untuk Peramalan Curah Hujan Bulanan Kasus Curah Hujan Bulanan di Indramayu [disertasi]. Bogor : Program Pascasarjana, Institut Pertanian Bogor (IPB).

LAMPIRAN



PREDICTION-CFA PADA CFA REGIONAL

Resa Septiani Pontoh

Jurusan Statistika, FMIPA, Universitas Padjadjaran

Email: resa.pontoh@yahoo.com

Abstrak

Banyak peneliti menggunakan data kategori pada penelitiannya. Salah satu metode yang digunakan adalah Analisis Konfigurasi Frekuensi. Pada analisis tersebut nantinya akan dilihat suatu pola konfigurasi apakah nilainya akan lebih besar dari yang diharapkan (*type*) atau lebih sedikit dari yang diharapkan (*antitype*). Analisis Konfigurasi Frekuensi adalah metode *nonparametric* yang digunakan untuk menunjukkan nilai suatu tanda/pola yang berbeda dari frekwensi yang ada pada analisis *multivariate* (Lienert, 1969; Krauth and Linert, 1973, 1982; Lienert dan Oeveste, 1985). Suatu pola yang terjadi lebih sering dari yang telah diekspektasikan disebut dengan *type* dan yang terjadi lebih jarang dari yang diekspektasikan disebut dengan *antitype*. Pada analisis variabel kategori, *covariates* dapat dijelaskan bersamaan dengan variabel yang terstratifikasi (Graham, 1995) serta dalam contoh lain, bisa juga dikatakan bahwa *covariates* adalah juga variabel kontinu. Penggunaan *covariates* biasanya menghasilkan frekwensi estimasi dari suatu sel yang nilainya berdekatan dengan frekwensi yang diobservasi karena lebih banyak informasi yang digunakan dalam proses estimasi (Von Eye dan Niedermeier, 1999). Penelitian ini akan menggunakan metode Analisis Konfigurasi Frekuensi yang akan diaplikasikan pada *categorical covariates* dan dilakukan pada data yang terstratifikasi.

Kata kunci: *Prediction-CFA*, CFA Regional, Data Kategori

PENDAHULUAN

Configural Frequency Analysis adalah metode nonparametric yang digunakan untuk menunjukkan nilai suatu tanda/pola yang berbeda dari frekwensi yang ada pada analisis *multivariate* (Lienert, 1969; Krauth and Linert, 1973, 1982; Lienert dan Oeveste, 1985). Suatu pola yang terjadi lebih sering dari yang telah diekspektasikan disebut dengan *type* dan yang terjadi lebih jarang dari yang diekspektasikan disebut dengan *antitype*.

Pada CFA, terdapat dua model yang sering digunakan yaitu Model CFA Global dan Model CFA Regional. Model CFA Regional tentu saja berbeda dengan model CFA global. Hal fundamental yang terlihat adalah bahwa Model CFA Global menganggap semua variabel berstatus sama dalam arti pada model tersebut tidak dibedakan antara prediktor dan kriteria sedangkan Model CFA Regional menunjukkan perbedaan status beberapa variabel yang ada.

Pada pengaplikasiannya, Model CFA Regional ini sering sekali terjadi jika dibandingkan dengan Model CFA Global. Pengelompokan variabel sering terjadi bahkan pengelompokan tersebut biasanya dibedakan antara variabel prediktor dan variabel kriteria. Salah satu metode yang sering digunakan pada model CFA Regional adalah Prediction CFA. Metode ini akan menganalisis kelompok variabel yang ada apakah terdapat perbedaan secara signifikan antara frekuensi hasil pengamatan (*observed frequencies*) dengan frekuensi yang diharapkan (*expected frequencies*).

Peneliti sangat tertarik untuk membahas lebih lanjut mengenai metode *Prediction-CFA* pada model CFA Regional ini. Oleh karena itu, penelitian ini akan melihat bagaimana tahapan penggunaan metode Prediction-CFA dan bagaimana pengaplikasiannya pada data riil.

PEMBAHASAN

Dalam Configural Frequency Analysis, terdapat dua metode yang sering digunakan oleh para peneliti yaitu CFA Global dan CFA Regional. Kedua metode ini memiliki tahapan yang menarik untuk dikaji pada CFA Regional adalah Metode *Prediction-CFA* karna memiliki cara pengelompokan yang berbeda dari CFA Global.

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya bahwa *Configural frequency Analysis* adalah suatu metode yang digunakan untuk mengidentifikasi pola (konfigurasi) dari variabel kategori apakah terjadi ketidakcocokan (*discrepancies*) dengan apa yang telah diekspektasikan sebelumnya. *Prediction-CFA* juga melihat adanya *Discrepancies* tersebut. *Discrepancies* ini terjadi jika :

1. Suatu peristiwa lebih sering terjadi atau jumlah peristiwa yang terjadi lebih besar dari yang diharapkan atau diekspektasikan (*CFA type*), dan
2. Suatu peristiwa lebih jarang terjadi atau jumlah peristiwa yang terjadi lebih kecil dari yang diharapkan atau diekspektasikan (*CFA antitype*).

Jenis data yang digunakan dalam *CFA* adalah pasangan kategori. Hal ini didasarkan atas pengertian dari konfigurasi (Lienert, 1969) yaitu pasangan kategori yang menjelaskan suatu sel dari suatu tabel silang. Dengan kata lain, maka *Prediction-CFA* pun adalah merupakan pasangan kategori yang nantinya akan dijelaskan dalam bentuk tabel silang.

CFA maupun *Prediction-CFA* dapat dapat dipergunakan untuk menjawab beberapa pertanyaan di bawah ini:

1. Bagaimana cara membandingkan antara frekuensi hasil pengamatan (*observed frequencies*) dengan frekuensi yang diharapkan (*expected frequencies*)?

Jawaban dari pertanyaan di atas adalah bergantung pada pemilihan *base model* yang akan digunakan untuk melihat perbandingan nilai dari frekuensi-frekuensi tersebut dimana nantinya akan diperoleh interpretasi mengenai ada tidaknya perbedaan antara frekuensi pengamatan suatu sel dan frekuensi harapan sel tersebut. Frekuensi harapan suatu sel ditaksir berdasarkan *base model* yang ditetapkan untuk menggambarkan hubungan diantara variabel. Dari kedua hal di atas, akan terlihat adanya suatu perbedaan nilai antara frekuensi pengamatan suatu sel dan frekuensi harapan sel tersebut apakah frekuensi pengamatan suatu sel lebih besar ataukah lebih kecil atau bahkan sama dengan nilai dari frekuensi harapan sel tersebut. Perbedaan antara frekuensi pengamatan suatu sel dan frekuensi harapan sel dari kumpulan kelompok variabel yang ada tersebut yang nantinya akan diteliti lebih lanjut dengan menggunakan *Prediction-CFA*.

2. Apakah perbedaan yang terjadi antara frekuensi pengamatan suatu sel dan frekuensi harapan sel tersebut secara statistik bersifat signifikan?

Dalam beberapa penelitian yang telah dilakukan dengan menggunakan *CFA*, jarang sekali terjadi adanya kesamaan hasil antara frekuensi pengamatan suatu sel dan frekuensi harapan sel tersebut. Dalam *CFA* maupun *Prediction CFA*, perbedaan nilai antara frekuensi pengamatan suatu sel dan frekuensi harapan sel tersebut dijelaskan dengan munculnya suatu *type* dan *antitype*. Jika frekuensi pengamatan suatu sel lebih besar dari pada frekuensi harapan sel tersebut, maka akan muncul suatu *type* namun jika frekuensi pengamatan suatu sel lebih kecil dari pada frekuensi harapan sel tersebut, maka akan muncul suatu *antitype*. Munculnya *type* dan *antitype* akan melalui suatu proses pengujian statistik tertentu.

3. Apakah terdapat hubungan antara *predictor* (variabel bebas) dan *criterion* (variabel tak bebas)?

Dalam *CFA*, suatu model dapat menjelaskan apakah dalam model tersebut variabel-variabel terbagi menjadi prediktor dan kriteria ataukah semua variabel dianggap mempunyai status yang sama. Berkaitan dengan pertanyaan di atas, *CFA* dapat menjelaskan

ada atau tidaknya hubungan antara prediktor dan kriteria yang ditandai dengan munculnya suatu *type* dan *antitype*. Jika *type* dan *antitype* muncul artinya bahwa suatu prediktor dapat memprediksi terjadinya suatu kriteria tertentu. Metode Prediction-CFA akan digunakan pada bahasan ini.

Hal yang perlu diketahui adalah bahwa P-CFA tidak melihat apakah variabel-variabel yang ada berhubungan antara yang satu dengan yang lainnya, interaksi, ataupun prediksi satu dengan lainnya. P-CFA melihat pola tertentu pada suatu kategori di variabel prediktor akan memungkinkan memprediksi apakah munculnya pola variabel kriteria tertentu berada di bawah atau di atas angka harapan yang telah diekspektasikan. Pada metode CFA yang digunakan biasanya tidak dibedakan status dari variabel yang ada. Pada P-CFA, variabel yang ada akan dibedakan menjadi prediktor dan kriteria. Pada P-CFA, base model yang ada akan memenuhi kriteria sebagai berikut (Lienert dan Krauth;1973):

1. Untuk menghindari munculnya *type* dan *antitype* karena disebabkan adanya hubungan antar prediktor, maka base model yang ada akan disaturasikan pada prediktor
2. Untuk menghindari munculnya *type* dan *antitype* karena disebabkan adanya hubungan antar kriteria, maka base model yang ada akan disaturasikan pada kriteria
3. Prediktor dan kriteria saling independen

Perlu diketahui bahwa P-CFA mengasumsikan suatu *base model* tidak dapat menjelaskan data dengan baik. Karena itu, parameter bukanlah fokus dari pengujian P-CFA, tetapi yang difokuskan dalam P-CFA adalah penyimpangan yang terjadi pada model ditandai dengan munculnya *type* dan *antitype* artinya bahwa hasil akhir dari P-CFA bukanlah melihat apakah suatu model sudah dapat menjelaskan data dengan baik seperti yang dilakukan dengan menggunakan metode log-linear. Oleh karena itu, *the goodness of fit*, nilai χ^2 yang menjelaskan tentang kecocokan model dengan data, tidak menjadi perhatian dalam P-CFA.

Tahapan yang akan dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Pemilihan Base Model pada P-CFA
2. Tes untuk melihat Signifikansi
3. Penjabaran hasil pengujian signifikansi dan pengidentifikasian apakah konfigurasi masuk ke dalam *type* atau *antitype*.
4. Penginterpretasian *type* dan *antitype*.

Pemilihan Base Model pada P-CFA

Pada tahapan ini, terdapat tiga hal yang perlu diperhatikan yaitu base model untuk prediktor, base model untuk kriteria dan base model yang memperlihatkan hubungan antara prediktor dan kriteria yang berhubungan dengan munculnya *type* dan *antitype*.

Base model pada P-CFA biasanya akan dilakukan saturasi pada prediktor. Hal ini dilakukan untuk menghindari kemungkinan hasil yang diperoleh dari munculnya *type* dan *antitype* adalah karena adanya hubungan antar prediktor. Berbeda dengan kriteria pada base model P-CFA adalah seandainya peneliti mengasumsikan adanya hubungan yang terjadi antar kriteria disebabkan oleh adanya prediktor, maka pada hubungan yang terjadi tersebut akan memungkinkan munculnya *type* dan *antitype*. Namun jika tidak diinginkan adanya hubungan antara kriteria, maka akan dilakukan saturasi pada kriteria. Aspek terakhir yang diperhatikan adalah hubungan antar prediktor dan kriteria. Biasanya pada base model diasumsikan tidak ada hubungan antar keduanya atau dengan kata lain prediktor dan kriteria saling independen.

Secara garis besar, base model pada P-CFA pada lima variabel (dua prediktor dan tiga kriteria adalah sebagai berikut:

$$\text{Log } E = \lambda_0 + \lambda_i^{P_1} + \lambda_j^P + \lambda_{ij}^{P_1 P_2} + \lambda_k^{C_1} + \lambda_l^{C_2} + \lambda_m^{C_3} + \lambda_{kl}^{C_1 C_2} + \lambda_{km}^{C_1 C_3} + \lambda_{lm}^{C_2 C_3} + \lambda_{klm}^{C_1 C_2 C_3}$$

Pada model tersebut, type dan antitype akan muncul jika konfigurasi pada kelompok prediktor terjadi berurutan dengan konfigurasi pada kelompok kriteria lebih sering atau jarang dari apa yang telah diekspetasikan.

Penelitian ini kemudian akan melanjutkan dan memperdalam bagaimana tahapan penggunaan metode *Prediction-CFA* pada model CFA Regional dan akan diaplikasikan pada data riil dalam bidang kesehatan untuk melihat bagaimana beragam jenis pola tidur seseorang berkaitan dengan konsentrasi kerjanya. Dalam pengerjaannya akan digunakan software *Configural Frequency Analysis – Version 2000* (von Eye, A. : 2001)

Perlu diketahui bahwa *CFA* mengasumsikan suatu *base model* tidak dapat menjelaskan data dengan baik. Karena itu, parameter bukanlah fokus dari pengujian *CFA*, tetapi yang difokuskan dalam *CFA* adalah penyimpangan yang terjadi pada model ditandai dengan munculnya *type* dan *antitype* artinya bahwa hasil akhir dari *CFA* bukanlah melihat apakah suatu model sudah dapat menjelaskan data dengan baik seperti yang dilakukan dengan menggunakan metode log-linear. Oleh karena itu, *the goodness of fit*, nilai χ^2 yang menjelaskan tentang kecocokan model dengan data, tidak menjadi perhatian dalam *CFA*. *Maksimum likelihood estimator* dari $E(Y_i)$ adalah

$$n\hat{\theta}_i = Y_i \text{ (Dobson, 1982)}$$

Hal lain yang menjadi perbedaan antara *CFA* dan Log-linear adalah bahwa *CFA* tidak hanya melihat adanya hubungan antara variabel-variabel tertentu yang biasanya menjadi *output* pada model Log-linear tetapi juga lebih memperhatikan pada konfigurasi-konfigurasi mana yang saling berkaitan satu sama lain.

Untuk melindungi signifikansi nominal α terhadap kesalahan pengujian dikarenakan nilai α untuk tiap konfigurasi berbeda dengan α keseluruhan, penyesuaian dapat dilakukan dengan memperhitungkan total jumlah tampilan pengujian atau banyaknya konfigurasi yang terjadi yaitu dengan rumusan sebagai berikut:

$$\alpha^* = \alpha / \text{banyaknya konfigurasi}$$

Jika statistika hitung lebih kecil dari α^* , akan terdapat *type* atau *antitype* pada konfigurasi tersebut.

Hipotesis:

$$H_0: E[N_t] = E_t$$

$$H_1: E[N_t] > E_t \text{ atau } E[N_t] < E_t$$

Statistika uji:

$$z = \frac{N_t - \hat{E}_t}{\sqrt{\hat{E}_t}} \text{ (Von eye, 2002)}$$

kriteria uji:

Jika $z\text{-value} \geq \alpha^*$ maka H_0 diterima atau tidak akan muncul *type* atau *antitype*, dapat dikatakan base model telah mewakili keberadaan dari konfigurasi tersebut, sedangkan jika $z\text{-value} < \alpha^*$ maka H_0 ditolak atau akan muncul *type* dan *antitype*, dengan kata lain model tersebut tidak mewakili keberadaan dari konfigurasi tersebut.

Data yang digunakan pada penelitian ini adalah hasil penelitian yang telah dilakukan oleh Mahoney pada tahun 2000 dengan melakukan metode *cluster-analitic* untuk membuat empat buah klaster dari kelompok usia remaja. Klaster yang terbentuk adalah kelompok remaja baik putra maupun putri dengan ciri sebagai berikut :

1. Klaster 1
Klaster satu adalah remaja yang memiliki kompetensi yang baik dalam bidang akademik, kurang menunjukkan kedewasaan fisik, lebih muda, lemah dalam pertarungan, cukup populer, dan memiliki tingkat SES yang tinggi
2. Klaster 2
Klaster satu adalah remaja yang memiliki kompetensi yang baik dalam bidang akademik, mempunyai perkembangan kedewasaan fisik secara normal , lebih muda, lemah dalam pertarungan, cukup populer, dan memiliki tingkat SES yang rendah
3. Klaster 3
Klaster satu adalah remaja yang memiliki kompetensi yang rendah dalam bidang akademik, kurang menunjukkan kedewasaan fisik, lebih muda, cukup memiliki keinginan yang kuat untuk pertarungan, kurang populer, dan memiliki tingkat SES yang rendah
4. Klaster 4
Lebih tua dari teman sebayanya, memiliki keinginan bertarung yang kuat, kompetensi yang rendah dalam bidang akademik, kurang populer, dan memiliki tingkat SES yang rendah

Pada studi ini, klaster 1 dan 2 sangat diperhatikan karena memiliki karakteristik yang hampir mirip. Dimana dalam penelitian ini terdapat variabel yang terbentuk adalah sebagai berikut:

1. Pattern (P) adalah merupakan keempat klaster yang terbentuk dengan pengkategorian sebagai berikut: 1. Klaster 1 dan 2; 2. Klaster 3; 3. Klaster 4.
2. Gender (G) merupakan jenis kelamin dari responden : 1. Putra; 2. Putri
3. Status dikeluarkan dari sekolah (S) : 1. Tidak; 2. Ya
4. Terkena kasus kriminalitas (A) : 1. Tidak; 2. Ya

Base model yang akan digunakan pada P-CFA ini adalah [P,G][S][A]. Pada *base model* ini, baik type dan antitype akan muncul dari hubungan antara prediktor dan kriteria [P,G], maupun hubungan asosiasi dari kedua variabel kriteria lainnya yaitu [S] dan [A]. Hasil yang diperoleh adalah sebagai berikut:

Tabel 4.1 Hasil Analisis P-CFA Mahoney-2000 mengenai perilaku remaja (Von Eye, 2002)

| Cell Index | Observed Frequencies | P-CFA model [P,G][S][A] | |
|------------|----------------------|-------------------------|----------|
| | | expected | p(z) |
| GPSA | | | |
| 1111 | 155 | 127.79 | 0.008 |
| 1112 | 9 | 17.01 | 0.0261 |
| 1121 | 6 | 24.89 | 0.0001 A |
| 1122 | 3 | 3.31 | 0.4318 |
| 1211 | 63 | 67.96 | 0.2738 |
| 1212 | 10 | 9.05 | 0.3756 |
| 1221 | 11 | 13.23 | 0.2696 |
| 1222 | 8 | 1.76 | <a* T |
| 1311 | 26 | 44.32 | 0.003 |
| 1312 | 8 | 5.9 | 0.1936 |
| 1321 | 13 | 8.63 | 0.0685 |
| 1322 | 13 | 1.15 | <a* T |

| 2111 | 188 | 152.91 | 0.0023 |
|------------|----------------------|-------------|----------|
| 2112 | 7 | 20.35 | 0.0015 A |
| 2121 | 12 | 29.78 | 0.0005 A |
| 2122 | 0 | 3.96 | 0.0232 |
| /cont. | | | |
| Cell Index | Observed Frequencies | P-CFA model | |
| | | [P,G][S][A] | |
| GPSA | | expected | p(z) |
| 2211 | 76 | 70.91 | 0.2729 |
| 2212 | 8 | 9.44 | 0.3197 |
| 2221 | 6 | 13.81 | 0.0178 |
| 222 | 6 | 1.84 | 0.0010 T |
| 2311 | 20 | 39.15 | 0.0011 A |
| 2312 | 0 | 5.21 | 0.0112 |
| 2321 | 25 | 7.62 | <a* T |
| 2322 | 8 | 1.02 | <a* T |

Dari perhitungan yang telah dilakukan, diperoleh nilai likelihood ratio χ^2 adalah 212.74 (df =16; $p < 0,01$). Nilai Bonferroni-adjusted α^* adalah 0,0020833. Hasil yang diperoleh dari tabel 4.1 memperlihatkan bahwa Type muncul pada konfigurasi 1222, 1322, 222, 2321, dan 2322 sedangkan Antitype muncul pada konfigurasi 1121, 2112, 2121, dan 2311.

Antitype pada konfigurasi yang terbentuk memperlihatkan bahwa apa yang terjadi jauh lebih rendah dari apa yang telah diekspektasikan. Konfigurasi Antitype yang terbentuk adalah sebagai berikut:

1. Konfigurasi 1121 memperlihatkan bahwa remaja putra dari klaster 1 maupun klaster 2 yang dikeluarkan dari sekolah tidak melakukan tindak kejahatan.
2. Konfigurasi 2112 mengindikasikan bahwa jumlah remaja putri dari klaster 1 dan 2 tetap bersekolah walaupun melakukan tindak kejahatan
3. Konfigurasi 2121 menginformasikan bahwa remaja putri pada klaster 1 dan 2 yang dikeluarkan dari sekolah tanpa melakukan tindak kejahatan.
4. Konfigurasi 2311 menjelaskan remaja perempuan pada klaster keempat yang bersekolah tetapi tidak melakukan tindak kejahatan

Type pada konfigurasi yang terbentuk memperlihatkan bahwa apa yang terjadi melampaui dari apa yang telah diekspektasikan. Konfigurasi Type yang terbentuk adalah sebagai berikut:

1. Konfigurasi 1222 yang mengindikasikan bahwa remaja putra dari klaster tiga yang dikeluarkan dari sekolah juga memiliki kasus kriminal.
2. Konfigurasi 1322 menginformasikan bahwa remaja putra dari klaster empat yang dikeluarkan dari sekolah juga memiliki kasus kriminal.
3. Konfigurasi 2222 menginformasikan bahwa remaja putri dari klaster tiga yang dikeluarkan dari sekolah juga memiliki kasus kriminal.
4. Konfigurasi 2321 menginformasikan bahwa remaja putri dari klaster empat yang dikeluarkan dari sekolah, tidak memiliki kasus kriminal.

DAFTAR PUSTAKA

Von Eye, A. 2002. *Configural Frequency Analysis*, Lawrence Erlbaum Associates, Inc., London.

Von Eye, A. 2001. *Configural Frequency Analysis – Version 2000 A Program for Bit Windows Operating System*, *Methods of Psychological Research Online*, Vol. 6, No. 2, 129-139, internet <http://www.pabst-publishers.de/mpr/>

Dobson, Annette J. 1982. *Introduction to Statistical Modelling*, Chapman and Hall, New York.

Agresti, Alan. 1976. *An Introduction to Categorical Data Analysis*, Jhon Wiley and Sons, Inc., New York.

Resa Septiani Pontoh / Prediction-CFA Pada

IDEAL FUZZY YANG DIBANGUN OLEH FUZZY SINGLETON PADA SUATU SEMIGRUP

^{1,2}Karyati, ³Sri Wahyuni, ⁴Budi Surodjo, ⁵Setiadji

¹ Mahasiswa S3, Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Gadjah Mada
Sekip Utara, Yogyakarta

² Jurusan Pendidikan Matematika, FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta
Jl. Colombo No. 1, Karangmalang, Yogyakarta

^{3,4,5} Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Gadjah Mada
Sekip Utara, Yogyakarta

Email: ^{1,2}yatiuny@yahoo.com, ³swahyuni@ugm.ac.id, ⁴surodjo_b@ugm.ac.id

Abstrak

Penelitian terkait dengan struktur aljabar fuzzy telah banyak dilakukan oleh peneliti-peneliti sebelumnya. Semigrup merupakan struktur aljabar sederhana yang hanya melibatkan satu operasi biner dan bersifat asosiatif. Penelitian terhadap ideal fuzzy semigrup telah dilakukan pada tulisan sebelumnya. Pada penelitian sebelumnya juga telah diselidiki tentang sifat-sifat ideal fuzzy semigrup yang dibangun oleh subhimpunan fuzzy, yang selanjutnya dikembangkan pada bi-ideal fuzzy maupun ideal interior fuzzy-nya.

Pada tulisan ini akan dikaji secara khusus bagaimana mendefinisikan suatu ideal fuzzy yang dibangun oleh suatu fuzzy singleton pada suatu semigrup. Selanjutnya dikembangkan pada penyelidikan terhadap sifat-sifatnya.

Sebagai langkah awal didefinisikan suatu ideal fuzzy yang dibangun oleh suatu subhimpunan fuzzy. Definisi ini dimotivasi oleh pendefinisian ideal yang dibangun oleh himpunan biasa. Selanjutnya, berdasarkan karakter suatu fuzzy singleton yang merupakan subhimpunan fuzzy dibentuk beberapa ideal fuzzy terkecil yang dibangun oleh suatu fuzzy singleton.

Kata kunci: Subhimpunan fuzzy, subsemigrup fuzzy, ideal fuzzy, fuzzy singleton

PENDAHULUAN

Penelitian terkait dengan struktur aljabar fuzzy telah banyak dilakukan oleh peneliti-peneliti sebelumnya. Definisi subhimpunan fuzzy dari suatu himpunan pertama kali diperkenalkan oleh Zadeh (1965). Rosenfeld memperkenalkan konsep subgrup fuzzy dari suatu grup. Sementara penelitian tersebut dikembangkan pada konsep subsemigrup fuzzy dari suatu semigrup beserta sifat-sifatnya. Beberapa penelitian terkait dengan struktur subsemigrup fuzzy ini telah dilakukan oleh Karyati, dkk diantaranya adalah tentang ideal fuzzy suatu semigrup dan ideal utama fuzzy semigrup beserta sifat-sifatnya. Dalam tulisan ini akan disajikan hasil kajian teori tentang ideal fuzzy yang dibangun oleh suatu fuzzy singleton pada suatu semigrup dan beberapa sifat terkait dengan fuzzy singleton tersebut.

Misalkan S adalah semigrup. Subhimpunan tak kosong I dari S disebut ideal jika $SI, IS \subseteq I$. Misalkan I ideal pada semigrup S , ideal I disebut prime jika untuk dua ideal A, B pada semigrup S dengan $AB \subseteq I$ berakibat $A \subseteq I$ atau $B \subseteq I$. Jika X adalah himpunan bagian dari semigrup S maka (X) menotasikan ideal semigrup S yang dibangun oleh X .

Asaad (1991), Kandasamy (2003) dan Mordeson & Malik (1998) mendefinisikan suatu subsemigrup fuzzy sebagai berikut: misalkan S adalah semigrup, fungsi $\mu: S \rightarrow [0,1]$ disebut subsemigrup fuzzy jika untuk setiap $x, y \in S$, berlaku $\mu(xy) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$.

Misalkan λ dan μ subhimpunan fuzzy dari S , yaitu suatu fungsi dari S ke interval $[0,1]$, hasil operasi $\lambda \circ \mu$ didefinisikan sebagai berikut:

$$(\lambda \circ \mu)(x) = \begin{cases} \sup_{x=yz} \{\min\{\mu(y), \mu(z)\}\} \\ 0 \text{ jika } x \text{ tidak dapat dinyatakan } x = yz \end{cases}$$

Jika $\lambda(x) \leq \mu(x)$ untuk setiap $x \in S$, maka dikatakan bahwa $\lambda \subseteq \mu$. Selanjutnya $\lambda \subset \mu$ jika dan hanya jika $\lambda \subseteq \mu$ dan terdapat $x \in S$ sedemikian sehingga berlaku $\lambda(x) < \mu(x)$. Misalkan Ω adalah koleksi subhimpunan fuzzy pada semigrup S , selanjutnya didefinisikan irisan subhimpunan fuzzy, $\bigcap_{\omega \in \Omega} \omega$ dan gabungan subhimpunan fuzzy, $\bigcup_{\omega \in \Omega} \omega$, sebagai berikut:

$(\bigcap_{\omega \in \Omega} \omega)(x) = \inf\{\omega(x) | \omega \in \Omega\}$ dan $(\bigcup_{\omega \in \Omega} \omega)(x) = \sup\{\omega(x) | \omega \in \Omega\}$ untuk setiap $x \in S$. Misal $x \in S$ dan $t \in [0,1]$, x_t menotasikan subhimpunan fuzzy dari S yang didefinisikan oleh : $x_t(y) = \begin{cases} t, & \text{jika } y = x \\ 0, & \text{untuk yang lain} \end{cases}$

Selanjutnya, x_t disebut *fuzzy singleton* atau *fuzzy point*. Jika x_t dan y_s adalah *fuzzy singleton* maka $x_t + y_s = (x + y)_m$ dan $x_t y_s = (xy)_m$, dengan $m = \min\{t, s\}$. Jika x_t adalah *fuzzy singleton* dan $a \in S$, maka $ax_t = (ax)_t$. *Support* suatu subhimpunan fuzzy μ , yang dinotasikan dengan $\text{supp}(\mu)$, adalah himpunan $\{x \in S | \mu(x) > 0\}$. Himpunan t -level dari subhimpunan fuzzy μ , dinotasikan dengan μ_t , adalah himpunan $\{x \in S | \mu(x) \geq t\}$ dengan $t \in [0,1]$. Peta dari subhimpunan fuzzy μ , atau image dari μ dinotasikan dengan $\text{Im}(\mu)$. Subhimpunan fuzzy μ dikatakan mempunyai sifat supremum jika setiap subhimpunan tak kosong dari $\text{Im}(\mu)$ mempunyai elemen maksimal. Subhimpunan fuzzy μ disebut ideal fuzzy semigrup S , jika untuk setiap $x, y \in S$ berlaku $\mu(xy) \geq \max\{\mu(x), \mu(y)\}$. Jika μ ideal fuzzy pada semigrup S , maka μ_t adalah ideal pada S . Misalkan μ subhimpunan fuzzy pada semigrup S , (μ) menotasikan irisan semua ideal fuzzy pada semigrup S yang memuat μ . Dalam hal ini dapat dinyatakan sebagai: $(\mu) = \bigcap \lambda_i$, $\mu \leq \lambda_i$, λ_i adalah ideal fuzzy pada S , untuk setiap i . Dalam hal ini, (μ) disebut ideal fuzzy yang dibangun oleh μ .

PEMBAHASAN

Berdasarkan definisi fuzzy singleton maupun ideal fuzzy yang dibangun oleh suatu himpunan fuzzy, selanjutnya dibentuk ideal fuzzy lain yang disajikan dalam lemma berikut:

Lemma 2.1. Misalkan x_t suatu fuzzy singleton pada semigrup S . Selanjutnya dibentuk suatu pemetaan (x_t) sebagai berikut:

$$(x_t)(y) = \begin{cases} t, & \text{jika } y \in (x) \\ 0, & \text{untuk } y \text{ yang lain} \end{cases}$$

Untuk suatu $y \in S$, dengan (x) adalah ideal pada S yang dibangun oleh x . Sehingga (x_t) adalah ideal fuzzy yang dibangun oleh x_t .

Bukti:

- Dibuktikan bahwa (x_t) ideal fuzzy. Ambil $y, z \in S$ dan $y, z \in (x)$, sehingga diperoleh: $y = rx$ dan $z = qx$ untuk suatu $r, q \in S$. Sehingga $yz \in (x)$, yang berakibat:

$$(x_t)(yz) = t \geq \max\{t, t\} = \max\{(x_t)(y), (x_t)(z)\}$$

Ambil $y, z \in S$ dan $y \notin (x), z \in (x)$, akibatnya $yz \in (x)$ sehingga diperoleh:

$$(x_t)(yz) = t \geq \max\{0, t\} = \max\{(x_t)(y), (x_t)(z)\}$$

Untuk kasus yang lain, bukti sejalan.

- Dibuktikan $x_t \subseteq (x_t)$ atau $x_t(y) \leq (x_t)(y)$ untuk setiap $y \in S$
 $x_t(y) = t$, untuk $x = y$ dan $x_t(y) = 0$ untuk $x \neq y$
 Sedangkan $(x_t)(y) = t$, untuk $y \in (x)$, dan nol untuk yang lain. Untuk kasus ini dapat dilihat bahwa nilai $x_t(y) = t \leq (x_t)(y)$
- Misalkan terdapat ideal lain yang memuat x_t , misal (x'_t) sehingga $x_t(y) \leq (x'_t)(y)$ untuk setiap $y \in S$. Selanjutnya dapat dibuktikan $(x'_t) \subseteq (x_t)$ atau dipenuhi $(x'_t)(y) \leq (x_t)(y)$, untuk setiap $y \in S$.

Lemma berikut memberikan pernyataan sifat-sifat dari fuzzy singleton:

Lemma 2.2. Misalkan x_t suatu fuzzy singleton pada semigrup S . Pernyataan-pernyataan berikut berlaku:

- Untuk setiap $y \in S$, berlaku:

$$(S \circ x_t \circ S)(y) = \begin{cases} t, & y \in SaS \\ 0, & \text{untuk yang lain} \end{cases}$$
- $(x_t) = x_t \cup x_t \circ S \cup S \circ x_t \cup S \circ x_t \circ S$
- $(x_t)^3 = S \circ x_t \circ S$

Bukti

- Berdasarkan hasil bagian ii., diperoleh:

$$(x_t)^3 = (x_t \cup x_t \circ S \cup S \circ x_t \cup S \circ x_t \circ S)^2 \circ x_t$$

Dengan

$$\begin{aligned} (x_t)^2 &= (x_t \cup x_t \circ S \cup S \circ x_t \cup S \circ x_t \circ S) \circ (x_t \cup x_t \circ S \cup S \circ x_t \cup S \circ x_t \circ S) \\ &\subseteq S \circ (x_t \cup x_t \circ S \cup S \circ x_t \cup S \circ x_t \circ S) \\ &= (S \circ x_t) \cup (S \circ (x_t \circ S \cup S \circ x_t \cup S \circ x_t \circ S)) \\ &= (S \circ x_t) \cup ((S \circ x_t \circ S) \cup S \circ (S \circ x_t \cup S \circ x_t \circ S)) \\ &= (S \circ x_t) \cup (S \circ x_t \circ S) \end{aligned}$$

Selanjutnya diperoleh:

$$\begin{aligned} (x_t)^3 &= (x_t \cup x_t \circ S \cup S \circ x_t \cup S \circ x_t \circ S)^2 \circ (x_t \cup x_t \circ S \cup S \circ x_t \cup S \circ x_t \circ S) \\ &\subseteq ((S \circ x_t) \cup (S \circ x_t \circ S)) \circ (x_t \cup x_t \circ S \cup S \circ x_t \cup S \circ x_t \circ S) \\ &\subseteq (S \circ x_t) \cup (S \circ x_t \circ S) \end{aligned}$$

Misalkan A subhimpunan dari semigrup S , maka fungsi karakteristik pada himpunan A , yang dinotasikan dengan C_A didefinisikan sebagai berikut:

$$(C_A)(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in S \setminus A \end{cases}$$

Fungsi karakteristik ini dapat dipandang sebagai subhimpunan fuzzy pada S . Untuk $t \in [0,1]$, didefinisikan subhimpunan fuzzy pada S sebagai berikut:

$$tC_A(x) = \begin{cases} t, & x \in A \\ 0, & x \in S \setminus A \end{cases}$$

Berdasarkan definisi tersebut, diperoleh sifat yang tercantum dalam lemma sebagai berikut:.

Lemma 2.3. Jika A adalah subhimpunan dari semigrup S dan $t \in [0,1]$, maka pernyataan berikut dipenuhi:

- i. $tC_A \circ tC_B = tC_{AB}$
- ii. $tC_A \cap tC_B = tC_{A \cap B}$
- iii. $tC_A = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha_t$
- iv. $S \circ tC_A = tC_{SA}$
- v. Jika A ideal di S , maka tC_A adalah ideal fuzzy pada S

Bukti:

- i. Ambil sebarang $x \in S$, sehingga diperoleh:

$$(tC_A \circ tC_B)(x) = \sup_{x=yz} \{ \min\{tC_A(y), tC_B(z)\} \}$$

Berdasarkan definisinya, maka diperoleh:

$$(tC_A)(y) = \begin{cases} t, & y \in A \\ 0, & y \in S \setminus A \end{cases} \quad \text{dan} \quad (tC_B)(z) = \begin{cases} t, & z \in B \\ 0, & z \in S \setminus B \end{cases}$$

- a. Untuk kasus $y \in A, z \in B$, sehingga $yz \in AB$

$$\begin{aligned} (tC_A \circ tC_B)(x) &= \sup_{x=yz} \{ \min\{tC_A(y), tC_B(z)\} \} \\ &= \sup_{x=yz} \{ \min\{t, t\} \} = t = (tC_{AB})(x) \end{aligned}$$

- b. Untuk kasus $y \notin A, z \in B$ atau $y \in A, z \notin B$, sehingga $yz \notin AB$

$$\begin{aligned} (tC_A \circ tC_B)(x) &= \sup_{x=yz} \{ \min\{tC_A(y), tC_B(z)\} \} \\ &= \sup_{x=yz} \{ \min\{0, t\} \} = 0 = (tC_{AB})(x) \end{aligned}$$

- ii. Ambil sebarang $x \in S$, sehingga diperoleh:

$$(tC_A \cap tC_B)(x) = \min\{(tC_A)(x), (tC_B)(x)\}, \text{ dimana:}$$

$$(tC_A)(x) = \begin{cases} t, & x \in A \\ 0, & x \in S \setminus A \end{cases} \quad \text{dan} \quad (tC_B)(x) = \begin{cases} t, & x \in B \\ 0, & x \in S \setminus B \end{cases}$$

- a. untuk kasus $x \in A$ dan $x \in B$ atau $x \in A \cap B$

$$\begin{aligned} (tC_A \cap tC_B)(x) &= \min\{(tC_A)(x), (tC_B)(x)\} \\ &= \min\{t, t\} = t = (tC_{A \cap B})(x) \end{aligned}$$

- b. Untuk kasus $x \notin A$ dan $x \in B$ atau $x \notin A \cap B$

$$\begin{aligned} (tC_A \cap tC_B)(x) &= \min\{(tC_A)(x), (tC_B)(x)\} \\ &= \min\{0, t\} = 0 = (tC_{A \cap B})(x) \end{aligned}$$

Untuk kasus $x \in A$ dan $x \notin B$ atau $x \notin A \cap B$, sejalan

iii.

- iv. Ambil $x \in S$, sehingga diperoleh:

$$(S \circ tC_A)(x) = \sup_{x=yz} \{ \min\{S(y), (tC_A)(z)\} \}$$

- a. Untuk kasus $y \in S$ dan $z \in A$, sehingga $x \in S$, sehingga:

$$\begin{aligned} (S \circ tC_A)(x) &= \sup_{x=yz} \{ \min\{S(y), (tC_A)(z)\} \} \\ &= \sup_{x=yz} \{ \min\{1, t\} \} = t = (tC_{SA})(x) \end{aligned}$$

- b. Untuk kasus $y \notin S$ dan $z \in A$ atau $x = yz \notin SA$, sehingga:

$$\begin{aligned}(S \circ tC_A)(x) &= \sup_{x=yz} \{ \min\{S(y), (tC_A)(z)\} \} \\ &= \sup_{x=yz} \{ \min\{0, t\} \} = 0 = (tC_{SA})(x)\end{aligned}$$

c. Untuk kasus yang lain bukti sejalan

v. Jika A ideal di S , maka tC_A adalah ideal fuzzy pada S

Ambil $x, y \in A$ maka $xy \in A$, sebab diketahui A suatu ideal di S . Selanjutnya diperoleh:

$$(tC_A)(xy) = t = \max\{t, t\} \geq \max\{(tC_A)(x), (tC_A)(y)\}$$

Untuk kasus $x \in A, y \notin A$, sehingga $xy \in A$, sehingga diperoleh:

$$(tC_A)(xy) = t = \max\{t, 0\} \geq \max\{(tC_A)(x), (tC_A)(y)\}$$

untuk kasus yang bukti sejalan

KESIMPULAN

Berdasarkan paparan pada bagian pembahasan tersebut, maka dapat disimpulkan bahwa:

- Misalkan x_t suatu fuzzy singleton pada semigrup S . Selanjutnya dibentuk suatu pemetaan (x_t) sebagai berikut: $(x_t)(y) = t$ jika $y \in (x)$ dan nol untuk yang lain, maka (x_t) adalah ideal fuzzy yang dibangun oleh x_t .
- Untuk setiap $y \in S$, berlaku:

$$(S \circ x_t \circ S)(y) = \begin{cases} t, & y \in SaS \\ 0, & \text{untuk yang lain} \end{cases}$$
- $(x_t) = x_t \cup x_t \circ S \cup S \circ x_t \cup S \circ x_t \circ S$
- $(x_t)^3 = S \circ x_t \circ S$
- $tC_A \circ tC_B = tC_{AB}$
- $tC_A \cap tC_B = tC_{A \cap B}$
- $tC_A = \bigcup_{a \in A} a_t$
- $S \circ tC_A = tC_{SA}$
- Jika A ideal di S , maka tC_A adalah ideal fuzzy pada S

DAFTAR PUSTAKA

- Howie, J.M. 1976. *An Introduction to Semigroup Theory*. Academic Press. London
- Kandasamy, W.B.V. 2003. *Smarandache Fuzzy Algebra*. American Research Press and W.B. Vasantha Kandasamy Rehoboth. USA
- Karyati, et.al. 2008. Ideal Fuzzy Semigrup. *Seminar Nasional MIPA dan Pendidikan MIPA di FMIPA, Universitas Negeri Yogyakarta, tanggal 30 Mei 2008*. Yogyakarta
- Karyati, et.al. 2008. The Fuzzy Version Of The Fundamental Theorem Of Semigrup Homomorphism. *The 3rd International Conference on Mathematics and Statistics (ICoMS-3) Institut Pertanian Bogor, Indonesia, 5-6 August 2008*. Bogor
- Karyati, et.al. 2009. Ideal Utama Fuzzy dan Sifat-Sifatnya. *Seminar Nasional Matematika, UNPAR, Bandung*

Karyati / Ideal Fuzzy yang

[6] Mordeson, J.N, Malik, D.S. 1998. *Fuzzy Commutative Algebra*. World Scientifics Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore

PERAMALAN CURAH HUJAN DI KOTA YOGYAKARTA DENGAN MODEL FUNGSI TRANSFER MULTIVARIAT

¹Khrisna Yuli Siswanti dan ²Dhoriva Urwatul Wutsqa

Jurusan Pendidikan Matematika UNY

¹ *cla_ura@yahoo.com*

² *dhoriva@yahoo.com*

Abstrak

Model fungsi transfer merupakan gabungan dari karakteristik analisis regresi berganda dengan karakteristik deret berkala *ARIMA* (*Autoregressive Integrated Moving Average*). Dalam model ini, selain mengandung keterkaitan dengan kejadian pada waktu-waktu sebelumnya, juga keterkaitan yang sifatnya kausal dengan variable lain sebagaimana pada model regresi. Model fungsi transfer dengan variabel input lebih dari dua deret berkala disebut dengan model fungsi transfer multivariat. Prosedur pembentukan model fungsi transfer multivariat melalui dua tahap, yaitu pembentukan model fungsi transfer tunggal dari masing-masing input, baru dilakukan pembentukan model fungsi transfer secara simultan dari semua variabel. Di dalam makalah ini dipaparkan penerapan model fungsi transfer multivariat pada peramalan curah hujan di Yogyakarta. Data yang digunakan mulai dari tahun 2002 sampai 2009 dengan variabel input kelembaban udara, tekanan udara, temperatur dan kecepatan angin. Hasil penerapan merupakan model fungsi transfer curah hujan di Yogyakarta dengan input-input yang signifikan adalah variabel input selain kelembaban udara. Berdasarkan model fungsi transfer yang didapat, hasil ramalan curah hujan menunjukkan terjadinya penurunan curah hujan pada tahun 2010 dan peningkatan curah hujan pada tahun 2011. Curah hujan maksimum pada tahun 2010 terjadi pada bulan Maret, sedangkan pada tahun 2011 terjadi pada bulan April. Sebaliknya curah hujan minimum untuk kedua tahun tersebut terjadi pada bulan Juli.

Kata kunci : Fungsi Transfer, Multivariat, Curah hujan, Kota Yogyakarta,

PENDAHULUAN

Pemanasan global telah menyebabkan perubahan iklim di hampir semua belahan dunia, termasuk di Indonesia. Akibatnya pergantian musim hujan dan kemarau menjadi tidak menentu. Pada tahun 2010, hampir sepanjang tahun terjadi hujan secara terus menerus. Sebagai dampaknya, sektor pertanian banyak yang mengalami kerugian karena banjir atau tanaman yang membusuk. Efek dominannya, para ibu rumah tangga, pedagang produk pertanian, maupun pedagang makanan, banyak yang menjerit karena harga beras, sayur, cabe, dan produk pertanian yang melambung tinggi. Bidang yang juga sangat dipengaruhi oleh cuaca adalah transportasi, khususnya udara dan laut. Dengan demikian, adanya informasi tentang kapan terjadi banyak curah hujan atau sebaliknya menjadi hal yang sangat diperlukan untuk mengantisipasi kondisi cuaca yang tidak menentu.

Informasi yang berkaitan dengan kondisi di masa yang akan datang tidak dapat ditentukan secara pasti tetapi hanya bisa diprediksi atau diramalkan. Curah hujan termasuk dalam kategori data deret berkala, sehingga metode peramalan yang dapat digunakan adalah metode peramalan *Autoregressive Integrated Moving Average (ARIMA)*, jika hanya melihat ketergantungannya pada data masa lalu, tanpa melibatkan ketergantungannya dengan variable lain. Kenyataannya ada beberapa faktor yang dapat mempengaruhi curah hujan sebagaimana dinyatakan oleh Wilson (1993:7), diantaranya kelembaban udara, temperatur, tekanan udara, dan kecepatan angin. Teori tentang curah hujan dan faktor-faktor yang mempengaruhi dibahas secara lengkap oleh Soewarno (2000) dan Suyono (1985). Adapun model yang dapat digunakan untuk memodelkan curah hujan dengan memperhatikan faktor-faktor lain sebagai variabel independennya adalah fungsi transfer. Model fungsi transfer merupakan salah satu model peramalan kuantitatif yang dapat digunakan untuk peramalan deret berkala yang multivariat. Model ini menggabungkan beberapa

karakteristik analisis regresi berganda dengan karakteristik deret berkala *ARIMA*. Konsep fungsi transfer terdiri dari deret input, deret output, dan seluruh pengaruh lain yang disebut dengan gangguan. Model ini dapat digunakan untuk mendapatkan penentuan ramalan kedepan berdasarkan beberapa variabel independen secara simultan. Oleh karena itu dalam penelitian ini digunakan model fungsi transfer untuk meramalkan curah hujan di kota Yogyakarta, dan karena faktor yang lain lebih dari satu maka modelnya adalah fungsi transfer multivariat.

PEMBAHASAN

Model Fungsi Transfer

Model fungsi transfer merupakan gabungan dari karakteristik analisis regresi berganda dengan karakteristik deret berkala *ARIMA*. Beberapa hal yang berkaitan dengan model fungsi transfer antara lain deret berkala output, disebut Y_t , yang diperkirakan akan dipengaruhi oleh deret berkala input, disebut X_t , dan input-input lain yang digabungkan dalam satu kelompok yang disebut gangguan (*noise*) N_t . Seluruh sistem tersebut adalah sistem yang dinamis, dengan kata lain deret input memberikan pengaruhnya kepada deret output melalui fungsi transfer. Bentuk umum model fungsi transfer tunggal adalah sebagai berikut (Makridakis, dkk:1999:448)

$$y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} x_{t-b} + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t, \quad (1)$$

sedangkan bentuk umum model fungsi transfer multivariate adalah : (Wei, 1990:362)

$$y_t = \sum_{j=1}^m [\delta_j(B)]^{-1} \omega_j(B) B^{b_j} x_{jt} + [\phi(B)]^{-1} \theta(B) a_t \quad (2)$$

dengan

y_t = variabel dependen

x_{jt} = variabel independent ke-j

$\omega_j(B)$ = operator *moving average* order s_j untuk variabel ke-j

$\delta_j(B)$ = operator *autoregresi* order r_j untuk variabel ke-j

$\theta(B)$ = operator *moving average* order q

$\phi(B)$ = operator *autoregresi* order p

a_t = nilai gangguan acak

Jika deret input x_{it} dan x_{jt} tidak berkorelasi untuk $i \neq j$ maka analisis dan perhitungan sama seperti model fungsi transfer input tunggal sedangkan untuk deret multivariat x_{it} dan x_{jt} dengan $i \neq j$ yang saling berkorelasi maka dilakukan analisis korelasi silang (*cross correlation*) antar deret berkala untuk mengetahui deret mana yang harus dikeluarkan dari model.

Prosedur untuk Menentukan Model Fungsi Transfer Multivariat

Secara garis besar ada dua tahap yang perlu dilakukan dalam penentuan model fungsi transfer multivariat, yaitu estimasi model fungsi transfer input tunggal untuk masing-masing deret input, dilanjutkan dengan estimasi model secara serentak untuk semua input. Tahap-tahap dalam pemodelan fungsi transfer tunggal untuk deret input (X_t) dan deret output (Y_t) adalah dengan cara mengidentifikasi deret input tunggal terlebih dahulu supaya mendapatkan order model *ARIMA*. Setelah didapatkan model *ARIMA* untuk deret input tunggal dan deret output selanjutnya dilakukan pemutihan dan dilanjutkan dengan perhitungan korelasi silang untuk masing-masing deret input dengan output yang berguna untuk menentukan nilai r, s, b . Sebagaimana Liu dan Hanssens (1982) menyarankan suatu prosedur identifikasi simultan yang menggunakan kuadrat terkecil umum untuk mengestimasi bobot respons impuls. Setelah estimasi bobot-bobot respons impuls diperoleh baru dapat mengidentifikasi bentuk model fungsi transfer dan *noise* gabungan. Berikut dipaparkan prosedur pemodelan fungsi transfer multivariat. (Makridakis, dkk:1999:450)

Tahap Pertama : Penentuan Model Fungsi Trasfer Input Tunggal

1. Penentuan Model ARMA deret input dan output

Bentuk persamaan matematis model ARMA (p,q) dapat dituliskan sebagai berikut : (Wei, 1990; Box *et al.*, 1994 dan Makridakis *et al.*, 1999)

$$\phi_p(B)Y_t = \theta_q(B)a_t, \quad (3)$$

dengan

$$\phi_p(B) = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p)$$

$$\theta_q(B) = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q)$$

dan B menyatakan operator mundur, yaitu $B^k Y_t = Y_{t-k}$. Jika deret berkala dibedakan dengan order d non musiman dan D musiman, serta memuat pola musiman maka model (3) menjadi model $ARIMA(p,d,q)(P,D,Q)^S$ (Bowerman, B.L. and O'Connell, R.T. 1993, Chatfield, 2004)

$$\phi_p(B)\Phi_P(B^S)(1-B)^d(1-B^S)^D Y_t = \theta_q(B)\Theta_Q(B^S)a_t \quad (4)$$

dengan

$$\Phi_P(B^S) = (1 - \Phi_1 B^S - \Phi_2 B^{2S} - \dots - \Phi_P B^{PS})$$

$$\Theta_Q(B^S) = (1 - \Theta_1 B^S - \Theta_2 B^{2S} - \dots - \Theta_Q B^{QS})$$

Model ARIMA untuk deret input dan output ditentukan dengan melalui tahapan pada metode Box-Jenkins (1994) mulai dari identifikasi stasioneritas data melalui plot deret waktu dan fungsi autokorelasi atau *autocorrelation function* (ACF). Jika deret waktu tidak stasioner dalam variansi, maka dilakukan transformasi. Jika deret waktu tidak stasioner dalam rata-rata, maka dilakukan pembedaan. Berdasarkan deret waktu yang sudah stasioner ditentukan order model menggunakan plot fungsi autokorelasi dan autokorelasi parsial. Langkah berikutnya adalah estimasi parameter dengan metode maksimum *likelihood*, dan diakhiri dengan cek diagnostik model apakah residual sudah *white noise*.

2. Pemutihan deret input dan deret output

Pemutihan deret input bertujuan untuk menjadikan deret input menjadi lebih dapat diatur dengan menghilangkan seluruh pola yang diketahui supaya yang tertinggal hanya *white noise*. Pemutihan deret input x_t dilakukan dengan membentuk model $ARMA(p_x, q_x)$, kemudian mengubah deret input x_t menjadi deret α_t sebagai berikut:

$$\frac{\phi_x(B)}{\theta_x(B)} x_t = \alpha_t \quad (5)$$

Apabila suatu transformasi pemutihan dilakukan untuk x_t maka transformasi yang sama juga harus diterapkan terhadap y_t supaya fungsi transfer dapat memetakan x_t kedalam y_t . Transformasi pada y_t tidak harus mengubah y_t menjadi *white noise*. Berikut merupakan deret y_t yang telah "diputihkan":

$$\frac{\phi_x(B)}{\theta_x(B)} y_t = \beta_t \quad (6)$$

3. Perhitungan korelasi silang dan autokorelasi deret input dan deret output yang telah diputihkan

Di dalam memodelkan *ARIMA* univariat koefisien autokorelasi merupakan statistik yang membantu menetapkan model. Sedangkan dalam memodelkan fungsi transfer, autokorelasi memegang peranan kedua setelah koefisien korelasi silang. Menurut Hanke dan Wichern (2005:60) koefisien autokorelasi sampel pada lag k dihitung dengan rumus

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^2} \quad (7)$$

Korelasi silang adalah ukuran kekuatan hubungan antar dua variabel. Korelasi silang antara X dan Y menentukan tingkat hubungan antar nilai X pada waktu t dengan nilai y pada waktu t+k (Makridakis,1999:456). Koefisien korelasi silang dari input x_t dan output y_t untuk lag ke-k didefinisikan sebagai berikut:

$$r_{xy} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} (X_t - \bar{X})(Y_{t+k} - \bar{Y})}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})^2 \sum_{t=1}^n (Y_t - \bar{Y})^2}} \quad (8)$$

Rumus kesalahan standar berikut berguna untuk memeriksa apakah $r_{xy}(k)$ berbeda nyata dari nol dengan membandingkan nilai $r_{xy}(k)$ dengan kesalahan standar. (Wei,1990:330)

$$SE_{r_{xy}(k)} = \frac{1}{\sqrt{n-k}} \quad (9)$$

Di dalam model fungsi transfer multivariat perhitungan korelasi silang pada masing-masing input x terhadap output y digunakan untuk mengetahui nilai r,s,b yang diidentifikasi dari plot korelasi silang. Setelah didapatkan nilai r,s,b pada masing-masing input maka barulah dilakukan korelasi silang serentak antara nilai y terhadap seluruh variabel inputnya.

4. Penaksiran langsung bobot respon impuls

Langkah selanjutnya setelah perhitungan korelasi silang adalah penaksiran nilai bobot respon impuls. Bobot respon impuls ini berguna untuk menghitung deret *noise*. Untuk penaksiran bobot respon impuls secara langsung rumusnya adalah sebagai berikut:

$$v_k = r_{\alpha\beta}(k) \frac{S_\beta}{S_\alpha} \quad (10)$$

dengan

$r_{\alpha\beta}(k)$ adalah nilai dari korelasi silang lag ke-k

S_β adalah standar deviasi dari deret output yang telah diputihkan

S_α adalah standar deviasi dari deret input yang telah diputihkan

5. Penetapan (r,s,b) pada model fungsi transfer

Tiga parameter kunci dalam model fungsi transfer adalah (r,s,b) dimana r menunjukkan ordo fungsi $\delta(B)$, s menunjukkan ordo fungsi $\omega(B)$ dan b menunjukkan keterlambatan yang dicatat pada x_{t-b} pada persamaan

$$y_t = \frac{\omega(B)}{\delta(B)} x_{t-b} + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} \alpha_t \quad (11)$$

Berikut ini beberapa aturan yang dapat digunakan untuk menduga nilai r, s, b dari suatu fungsi transfer. (Wei,1994:324). Nilai b menyatakan bahwa y_t tidak dipengaruhi oleh x_t sampai periode t+b. Besarnya b dapat ditentukan dari lag yang pertama kali signifikan pada plot korelasi silang. Nilai ini merupakan yang paling mudah untuk ditentukan apabila korelasi silang diperoleh dari

- $r_{\alpha\beta}(0) = r_{\alpha\beta}(1) = r_{\alpha\beta}(2) = 0$ tetapi $r_{\alpha\beta}(3) = 0,5$ maka dapat ditentukan $b = 3$, dengan kata lain terdapat tiga periode sebelum deret berkala input α mulai mempengaruhi deret berkala output β
- Nilai s menyatakan seberapa lama deret y_t terus dipengaruhi $x_{t-b-1}, x_{t-b-2}, \dots, x_{t-b-s}$ sehingga dapat dikatakan bahwa nilai s adalah bilangan pada lag plot korelasi silang sebelum terjadinya pola menurun.
- Nilai r menyatakan bahwa y_t dipengaruhi oleh nilai masa lalunya y_{t-1}, \dots, y_{t-r}
 $r = 0$ bila ada beberapa lag plot pada korelasi silang yang terpotong.
 $r = 1$ bila plot pada korelasi silang menunjukkan suatu pola eksponensial menurun.
 $r = 2$ bila plot pada korelasi silang menunjukkan suatu pola eksponensial menurun dan pola sinus.

Berikut beberapa bentuk fungsi transfer yang umum digunakan dalam peramalan:

Tabel 1. Model Fungsi Transfer dengan berbagai nilai (r,s,b)

| | | Fungsi transfer | | |
|-------|---|-----------------|---|--|
| (s,b) | | r=1 | r=2 | r=3 |
| (0,2) | $v(B)x_t = \omega_0 x_{t-2}$ | | $v(B)x_t = \frac{\omega_0}{(1 - \delta_1 B)} x_{t-2}$ | $v(B)x_t = \frac{\omega_0}{(1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2)} x_{t-2}$ |
| (1,2) | $v(B)x_t = (\omega_0 - \omega_1 B)x_{t-2}$ | | $v(B)x_t = \frac{(\omega_0 - \omega_1 B)}{(1 - \delta_1 B)} x_{t-2}$ | $v(B)x_t = \frac{(\omega_0 - \omega_1 B)}{(1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2)} x_{t-2}$ |
| (2,2) | $v(B)x_t = (\omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2)x_{t-2}$ | | $v(B)x_t = \frac{(\omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2)}{(1 - \delta_1 B)} x_{t-2}$ | $v(B)x_t = \frac{(\omega_0 - \omega_1 B - \omega_2 B^2)}{(1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2)} x_{t-2}$ |

6. Penaksiran awal deret gangguan (n_t)

Bobot respon impuls diukur secara langsung dan ini memungkinkan dilakukannya perhitungan nilai taksiran dari deret gangguan n_t dikarenakan

$$n_t = y_t - \hat{y}_t = y_t - \frac{\hat{\omega}(B)}{\hat{\delta}(B)} B^b x_t = y_t - v_0 x_t - v_1 x_{t-1} - v_2 x_{t-2} - \dots - v_g x_{t-g} \quad (12)$$

7. Penetapan model ARIMA ($p_n, 0, q_n$) dari deret gangguan n_t

Sesudah menggunakan persamaan deret gangguan n_t nilai-nilai n_t dianalisis dengan cara ARIMA biasa untuk menentukan model ARIMA yang tepat sehingga diperoleh nilai p_n dan q_n . Dengan cara ini fungsi $\phi_n(B)$ dan $\theta_n(B)$ untuk deret gangguan n_t dapat diperoleh untuk mendapatkan persamaan

$$\phi_n(B)n_t = \theta_n(B)e_t \quad (13)$$

8. Penaksiran Parameter-parameter Model Fungsi Transfer

Langkah selanjutnya setelah mengidentifikasi bentuk model adalah penaksiran parameter-parameter model fungsi transfer input tunggal (10) yang meliputi estimasi parameter $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_r)'$, $\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_s)'$, $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_p)'$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_q)'$ dan σ_a^2 . Persamaan (11) dapat ditulis kembali menjadi

$$\begin{aligned} \delta(B)\phi(B)y_t &= \phi(B)\omega(B)x_{t-b} + \delta(B)\theta(B)a_t \\ c(B)y_t &= d(B)x_{t-b} + e(B)a_t \end{aligned} \quad (14)$$

dengan

$$c(B) = \delta(B)\phi(B) = (1 - \delta_1 B - \dots - \delta_r B^r)(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)$$

$$\begin{aligned}
 &= (1 - c_1 B - c_2 B^2 - \dots - c_{p+r} B^{p+r}) \\
 d(B) &= \phi(B)\omega(B) = (1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)(\omega_0 - \omega_1 B - \dots - \omega_s B^s) \\
 &= (d_0 - d_1 B - d_2 B^2 - \dots - d_{p+s} B^{p+s})
 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
 e(B) &= \delta(B)\theta(B) = (1 - \delta_1 B - \dots - \delta_r B^r)(1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) \\
 &= (1 - e_1 B - e_2 B^2 - \dots - e_{r+q} B^{r+q}).
 \end{aligned}$$

Jadi diperoleh

$$\begin{aligned}
 a_t &= y_t - c_1 y_{t-1} - \dots - c_{p+r} y_{t-p-r} - d_0 x_{t-b} + d_1 x_{t-b-1} + \dots + d_{p+s} x_{t-b-p-s} \\
 &\quad + e_1 a_{t-1} + \dots + e_{r+q} a_{t-r-q}
 \end{aligned}$$

dengan c_i , d_j , dan e_k adalah fungsi transfer dari δ_i , ω_j , ϕ_k dan θ_l . Metode penaksiran yang digunakan adalah *Conditional Maximum Likelihood*. Diasumsikan bahwa a_t adalah deret *white noise* berdistribusi normal $N(0, \sigma_a^2)$ sehingga didapatkan fungsi *likelihood*:

$$L(\delta, \omega, \phi, \theta, \sigma_a^2 | b, x, y, x_0, y_0, a_0) = (2\pi\sigma_a^2)^{-n/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_a^2} \sum_{t=1}^n a_t^2\right] \quad (15)$$

Secara umum menurut Wei (1990:332) estimasi parameter model fungsi transfer dapat juga menggunakan metode *Conditional Least Squares* dan mengasumsikan residual a_t yang tidak diketahui sama dengan nol, maka estimasi parameter model fungsi transfer didapatkan dengan meminimumkan

$$S(\delta, \omega, \phi, \theta | b) = \sum_{t=t_0}^n a_t^2. \quad (16)$$

9. Cek Diagnosis Model Fungsi Transfer Input Tunggal

Kelayakan suatu model perlu dilakukan untuk mengetahui apakah model sudah memenuhi syarat *white noise*. Dalam model fungsi transfer disamping diperiksa syarat tidak ada autokorelasi residualnya juga perlu diperiksa syarat tidak ada korelasi silang antara nilai sisa dengan deret gangguan yang telah diputihkan. Statistik uji yang digunakan untuk menyelidiki adanya autokorelasi untuk nilai sisa adalah

$$Q = (n - r - s - b) \sum_{k=1}^m r_{a\alpha}^2(k) \quad (17)$$

dengan

- n = banyaknya pengamatan
- m = lag terbesar yang diperhatikan
- (r,s,b) = parameter model fungsi transfer
- $r_{a\alpha}(k)$ = autokorelasi residual untuk lag k

Statistik Q (17) berdistribusi Khi-kuadrat $\chi_{\alpha,df}^2$ dengan derajat bebas $m - p_n - q_n$ (p_n, q_n merupakan order *autoregressive* dan *moving average* dari deret *noise*).

Pengujian korelasi silang antara nilai sisa a_t dengan deret gangguan α_t yang telah diputihkan menggunakan statistik uji

$$Q = (n - n^*) \sum_{k=1}^m r_a^2(k) \quad (18)$$

dengan

- m = lag maksimum
- n^* = nilai $(s + b + p_x)$ dimana p_x adalah order *AR* dengan deret input (x_t)

Statistik (18) berdistribusi χ^2 dengan derajat bebas $m - r - s$.

Tahap Kedua : Penentuan Model Fungsi Transfer Multivariat

Pemodelan fungsi transfer multivariat dilakukan dengan cara memodelkan secara serentak seluruh variabel yang sudah diidentifikasi sebelumnya. Tahapan yang dilakukan dalam model fungsi transfer multivariat sama dengan yang dilakukan pada model input tunggal. Tahap pertama dalam penentuan model fungsi transfer multivariate adalah dengan mengidentifikasi model fungsi transfer input tunggal. Pada tahap ini model fungsi transfer input tunggal ditentukan melalui korelasi silang antara variabel output curah hujan dengan masing-masing variabel inputnya yang menghasilkan bobot respon impuls dan nilai (r,s,b). Nilai (r,s,b) yang telah diidentifikasi dalam model fungsi transfer input tunggal digunakan untuk menentukan model fungsi transfer multivariat

$$y_t = \sum_{j=1}^m \frac{\omega_j(B)}{\delta_j(B)} B^{bj} x_{jt} + noise \quad (19)$$

Model (19) merupakan model dengan empat input, dan proses estimasi dilakukan serentak terhadap semua input dengan metode *conditional least square estimation*. Nilai *noise* gabungannya didapat dari rumus

$$n_t = y_t - \hat{y}_t = y_t - \sum_{j=1}^k \hat{v}_j(B)x_{jt} \quad (20)$$

Berikutnya adalah menentukan model *ARIMA* dari deret *noise*, yaitu model

$$n_t = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t \quad (21)$$

Dengan menggabungkan model (19) dan (21), diperoleh model fungsi transfer multivariat

$$y_t = \sum_{j=1}^m \frac{\omega_j(B)}{\delta_j(B)} B^{bj} x_{jt} + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t \quad (22)$$

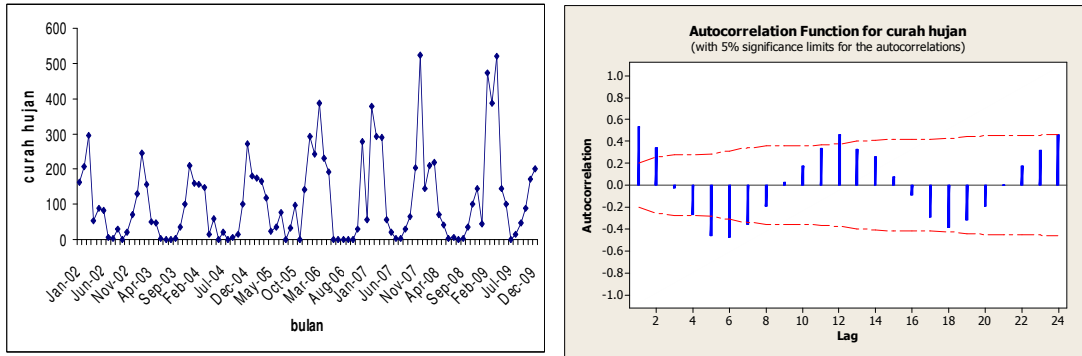
Estimasi model (22) dilakukan dengan metode penaksiran *conditional least square estimation*, yang proses perhitungannya dilakukan dengan program *SAS*. Tahapan selanjutnya adalah cek *diagnostic residual* dengan cara yang sama sebagaimana pada model fungsi transfer tunggal.

Model Fungsi Transfer Multivariat pada Data Curah Hujan di Kota Yogyakarta

Di dalam bagian ini akan dipaparkan tahap demi tahap pemodelan fungsi transfer multivariat sampai diperoleh model peramalan curah hujan di Kota Yogyakarta. Variabel input yang digunakan adalah tekanan udara, kelembaban udara, suhu udara dan kecepatan angin, dengan data yang digunakan bersumber dari BPS Kota Yogyakarta mulai dari periode Januari 2002 sampai Desember 2009. Peramalan akan diberikan untuk dua tahun yaitu tahun 2010 dan 2011, dengan menggunakan model fungsi transfer multivariat yang terbentuk pada tahap akhir dapat digunakan sebagai peramalan. Tahap pertama untuk pembentukan model fungsi transfer multivariat adalah melalui pembentukan model input tunggal yang kemudian dilakukan perhitungan serentak untuk memperoleh model fungsi transfer multivariat.

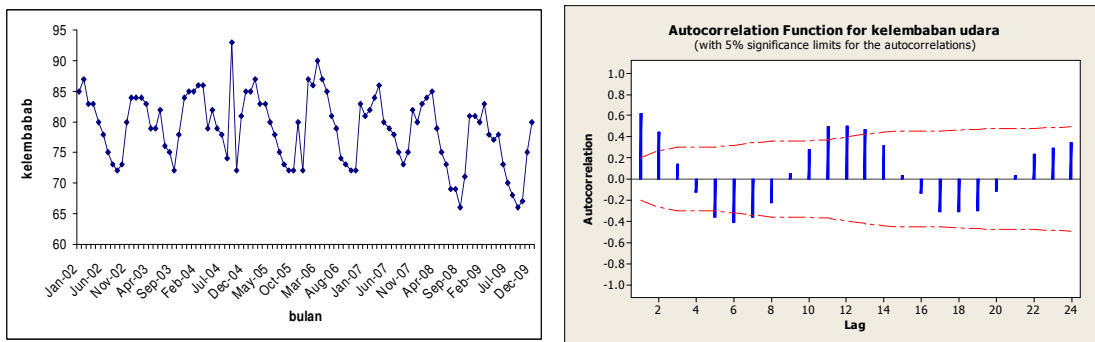
Tahap Pertama : Pembentukan Model Fungsi transfer Input Tunggal

Langkah pertama adalah menganalisis data deret berkala dengan plot *time series* dan plot *ACF* (nilai koefisien dihitung berdasarkan rumus (7)) data tersebut. Hal itu dilakukan untuk mengetahui apakah pada data terdapat pola musiman dan untuk mengetahui kestasioneran data dalam varians dan mean. Berikut adalah plot *time series* dan *ACF* deret output (curah hujan):

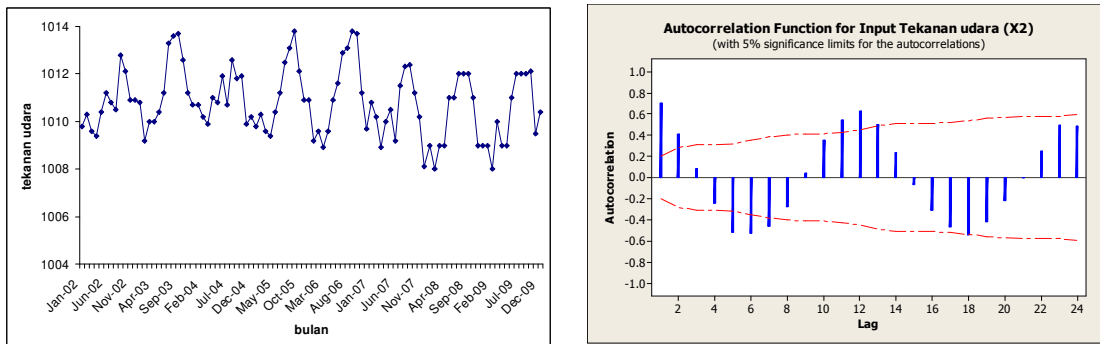


Gambar 1. Plot Time Series dan ACF Data Curah Hujan

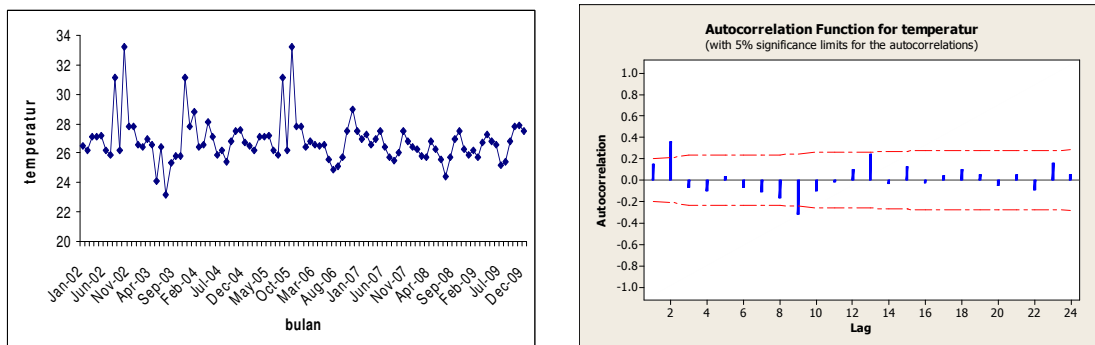
Gambar 1 menunjukkan plot deret berkala dari data curah hujan yang berfluktuasi cukup tajam, yang mengindikasikan ketidakstasioneran dalam varians. Pola musiman terlihat secara jelas baik dari plot deret berkala maupun plot ACF. Hal itu terjadi karena curah hujan memang merupakan fenomena musiman. Berdasarkan plot ACF menunjukkan data tidak stasioner dalam rata-rata pada pola musimannya, sehingga perlu pembedaan pada lag 12.



Gambar 2. Plot Time Series dan ACF Data Kelembaban Udara

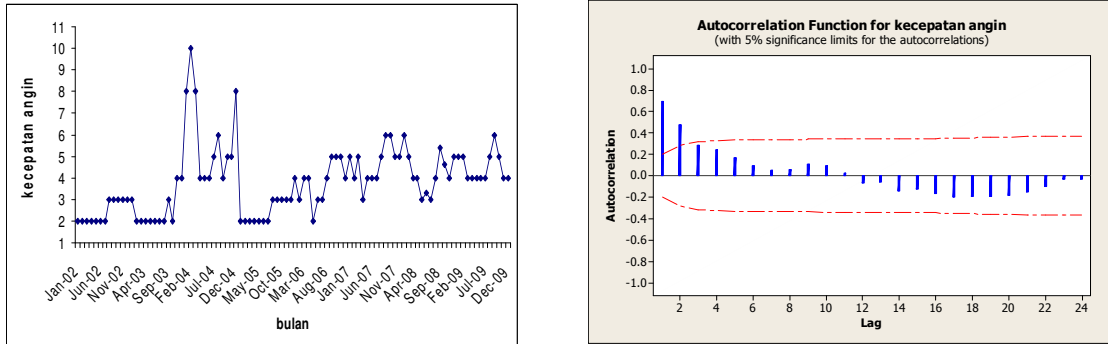


Gambar 3. Plot Time Series dan ACF Data Tekanan Udara



Gambar 4. Plot Time Series dan ACF Data Temperatur

Pada Gambar 2, Gambar 3, dan Gambar 4 plot *time series* menunjukkan adanya ketidakstasioneran dalam varians, sedangkan bila dilihat pada plot *time series* Gambar 2 dan 3 menunjukkan pola yang hampir sama dengan data curah hujan sehingga memerlukan pembedaan pada lag 12. Untuk data temperatur plot *ACF* menunjukkan pola yang berbeda, akan tetapi untuk proses pemodelan pembedaan harus dilakukan dengan lag yang sama.



Gambar 5 Plot *Time Series* dan *ACF* Data Kecepatan Angin

Gambar 5 untuk data kecepatan angin menunjukkan data telah stasioner dalam varians, sedangkan pada plot *ACF* memperlihatkan data telah stasioner dalam rata-rata. Akan tetapi dalam pemodelan model fungsi transfer ini untuk mendapatkan nilai estimasi yang sesuai dengan model dan memenuhi *white noise* maka perlu disamakan banyak deretnya. Oleh sebab itu, perlu dilakukan pembeda duabelas agar deret input kecepatan angin dapat masuk dalam model fungsi transfer.

Tabel 2. Model *ARIMA* Deret Input

| Deret input | Model <i>ARIMA</i> | Penduga Parameter | p-value |
|-------------------------|-----------------------|---|----------------------------|
| Kelembaban udara | $(2,0,0)(0,1,1)^{12}$ | $\phi_1 = 0,25820$ $\phi_2 = 0,25266$ $\Theta_1 = 0,90054$ | 0,0190 0,0225 0,0001 |
| Tekanan Udara | $(1,0,1)(0,1,1)^{12}$ | $\phi_1 = 0,78800$ $\theta_1 = 0,47137$ $\Theta_1 = 0,64816$ | 0,0001 0,0190 0,0001 |
| Temperatur | $(0,0,2)(2,0,0)^{12}$ | $\theta_2 = -0,62572$ $\Phi_1 = -0,50689$ $\Phi_2 = -0,49954$ | 0,0001 0,0001 0,0001 |
| Kecepatan Angin | $(1,0,0)(0,1,1)^{12}$ | $\phi_1 = 0,79874$ $\Theta_1 = 0,94537$ | 0,0001 0,0001 |

Berdasarkan analisis kestasioneran deret input dan ouput, pada semua data dilakukan pembedaan lag 12, tetapi tidak dilakukan transformasi, meskipun data menunjukkan ketidakstasioneran dalam variansi. Hal ini dilakukan dengan pertimbangan bahwa proses transformasi ternyata tidak mempengaruhi hasil plot *ACF* maupun *PACF* setelah proses pembedaan. Tabel 2. di atas menyajikan model *ARIMA* musiman (model (4)) yang didapat setelah pembeda duabelas.

Analisis residual untuk keempat model dilakukan dengan menggunakan statistik (17) , dan hasilnya diberikan pada Tabel 3., yang menunjukkan tidak ada autokorelasi pada residual sampai lag 12.

Tabel 3. Hasil analisis uji autokorelasi residual model ARIMA deret input

| lag | p-value | | | |
|-----|------------------|---------------|------------|-----------------|
| | Kelembaban udara | Tekanan Udara | Temperatur | Kecepatan Angin |
| 6 | 0,8716 | 0,0572 | 0,2374 | 0,2335 |
| 12 | 0,9318 | 0,2573 | 0,3153 | 0,4006 |
| 18 | 0,8919 | 0,6082 | 0,2530 | 0,4588 |
| 24 | 0,9387 | 0,4813 | 0,3086 | 0,6589 |

Pemutihan deret input dan output

Pemutihan deret input (5) dan deret output (6) ini dilakukan setelah diperoleh model ARIMA untuk masing-masing variabel inputnya. Dari model ARIMA yang dihasilkan (Tabel 2) , pemutihan deret input dan outputnya sebagai berikut:

Pemutihan deret input kelembaban udara

$$\alpha_{1t} = x_{1t} - x_{1t-12} - 0,2582x_{1t-1} + 0,2582x_{1t-13} - 0,25266x_{1t-2} + 0,25266x_{1t-14} + 0,90054\alpha_{1t-12}$$

Pemutihan deret output pada kelembaban udara

$$\beta_{1t} = y_{1t} - y_{1t-12} - 0,2582y_{1t-1} + 0,2582y_{1t-13} - 0,25266y_{1t-2} + 0,25266y_{1t-14} + 0,90054\beta_{1t-12}$$

Pemutihan deret input tekanan udara

$$\alpha_{2t} = x_{2t} - x_{2t-12} - 0,78800x_{2t-1} + 0,78800x_{2t-13} + 0,64816\alpha_{2t-12} + 0,47137\alpha_{2t-1} - 0,30552\alpha_{2t-13}$$

Pemutihan deret output pada tekanan udara

$$\beta_{2t} = y_{2t} - y_{2t-12} - 0,78800y_{2t-1} + 0,78800y_{2t-13} + 0,64816\beta_{2t-12} + 0,47137\beta_{2t-1} - 0,30552\beta_{2t-13}$$

Pemutihan deret input temperatur

$$\alpha_{3t} = x_{3t} + 0,50689x_{3t-12} + 0,49954x_{3t-24} - x_{3t-12} - 0,50689x_{3t-24} - 0,49954x_{3t-36} - 0,62572\alpha_{3t-2}$$

Pemutihan deret output pada temperatur

$$\beta_{3t} = y_{3t} + 0,50689y_{3t-12} + 0,49954y_{3t-24} - y_{3t-12} - 0,50689y_{3t-24} - 0,49954y_{3t-36} - 0,62572\beta_{3t-2}$$

Pemutihan deret input kecepatan angin

$$\alpha_{4t} = x_{4t} - 0,79874x_{4t-1} - x_{4t-12} + 0,79874x_{4t-13} + 0,94537\alpha_{4t-12}$$

Pemutihan deret output pada kecepatan angin

$$\beta_{4t} = y_{4t} - 0,79874y_{4t-1} - y_{4t-12} + 0,79874y_{4t-13} + 0,94537\beta_{4t-12}$$

Penentuan nilai (r,s,b) pada model fungsi transfer

Penentuan nilai r,s,b didasarkan pada hasil analisis korelasi silang (menggunakan rumus (18)) antara deret input dan output yang telah diputihkan. Hasil dari korelasi silang tersebut juga bermanfaat untuk memperoleh bobot respon impuls yang digunakan untuk menghasilkan deret noise.

Berikut adalah nilai r,s,b yang signifikan pada model fungsi transfer input tunggal:

Tabel 4. Hasil estimasi penentuan (r,s,b)

| Variabel input | r | s | b |
|------------------------------------|---|---|----|
| Kelembaban udara (X ₁) | 0 | 0 | 3 |
| Tekanan udara (X ₂) | 0 | 0 | 0 |
| Temperatur (X ₃) | 0 | 0 | 4 |
| Kecepatan angin (X ₄) | 0 | 0 | 12 |

Penaksiran Parameter Model Fungsi Transfer Tunggal

Penentuan parameter model fungsi transfer ini didasarkan pada nilai (r,s,b) dengan meminimumkan fungsi (16) dan perhitungannya dikerjakan dengan menggunakan program SAS 9.1.3 Berikut hasil estimasi parameter model fungsi transfer input tunggal yang telah signifikan

Tabel 5. Hasil estimasi parameter variabel input model fungsi transfer

| Deret input | Parameter | t-value | p-value | Lag | Shift |
|------------------|------------------------|---------|---------|-----|-------|
| Kelembaban udara | $\phi_1 = 0,28935$ | 2,62 | 0,0106 | 1 | 0 |
| | $\Theta_1 = 0,64501$ | 5,67 | 0,0001 | 12 | 0 |
| | $\omega_0 = -5,14654$ | -2,04 | 0,0446 | 0 | 3 |
| Tekanan udara | $\theta_1 = -0,34937$ | -3,30 | 0,0014 | 1 | 0 |
| | $\Phi_1 = -0,72107$ | -6,77 | 0,0001 | 12 | 0 |
| | $\omega_0 = -34,4439$ | -3,62 | 0,0005 | 0 | 0 |
| Temperatur | $\phi_1 = 0,34422$ | 3,19 | 0,0021 | 1 | 0 |
| | $\Theta_1 = 0,68455$ | 6,30 | 0,0001 | 12 | 0 |
| | $\omega_0 = -12,651$ | -2,24 | 0,0280 | 0 | 4 |
| Kecepatan angin | $\theta_1 = -0,32070$ | -2,72 | 0,0083 | 1 | 0 |
| | $\Phi_1 = -0,71050$ | -6,00 | 0,0001 | 12 | 0 |
| | $\omega_0 = -13,09831$ | -2,11 | 0,0387 | 0 | 12 |

Cek Diagnostik Model Fungsi Transfer Input Tunggal

Diagnostik model dilakukan untuk mengetahui kelayakan suatu model apakah telah memenuhi asumsi *white noise* atau belum. Caranya adalah dengan memeriksa nilai autokorelasi dan korelasi silang residualnya. Berikut adalah hasil diagnostik model fungsi transfer input tunggal:

Tabel 6. Hasil analisis uji autokorelasi residual pada masing-masing model fungsi transfer

| lag | p-value dari uji Box | | | |
|-----|----------------------|---------------|------------|-----------------|
| | Kelembaban udara | Tekanan Udara | Temperatur | Kecepatan Angin |
| 6 | 0,3976 | 0,1873 | 0,5472 | 0,1498 |
| 12 | 0,6780 | 0,4939 | 0,7435 | 0,5041 |
| 18 | 0,5885 | 0,7401 | 0,8170 | 0,6886 |
| 24 | 0,7341 | 0,8353 | 0,9062 | 0,7248 |

Pemeriksaan autokorelasi residual pada masing-masing model dapat dilihat pada Tabel 6. Nilai p-value untuk semua lag lebih dari alpha 0,05 yang berarti bahwa autokorelasi residual dari model *noise* tidak signifikan atau tidak terdapat korelasi antar lag sehingga dapat disimpulkan residual memenuhi asumsi *white noise*.

Untuk pemeriksaan korelasi silang residualnya dapat dilihat pada Tabel 7. Nilai p-value untuk semua variabel lebih dari dari $\alpha = 0,05$ atau dengan membandingkan nilai Q yang kurang dari $\chi^2_{\alpha,df}$, sehingga dapat disimpulkan korelasi antara model *noise* dengan deret input tidak signifikan atau deret input α_{it} dengan residual a_{it} memenuhi asumsi *white noise*.

Tabel 7. Hasil analisis uji korelasi silang residual pada masing-masing model fungsi transfer

| lag | p-value dari uji Box | | | |
|-----|----------------------|---------------|------------|-----------------|
| | Kelembaban udara | Tekanan Udara | Temperatur | Kecepatan Angin |
| 6 | 0,7698 | 0,1080 | 0,7130 | 0,2413 |
| 12 | 0,6241 | 0,2298 | 0,5233 | 0,5130 |
| 18 | 0,7718 | 0,5554 | 0,4924 | 0,5907 |
| 24 | 0,8483 | 0,2511 | 0,7250 | 0,7058 |

Tahap Kedua : Penentuan Model Fungsi Transfer Multivariat

Pemodelan fungsi transfer multivariat dilakukan setelah model fungsi transfer input tunggal telah terbentuk. Kunci dari model fungsi transfer multivariat adalah dengan cara melakukan korelasi silang secara serentak dan memodelkan secara serentak nilai r,s,b seluruh variabel yang telah diidentifikasi sebelumnya. Korelasi silang dan pemodelan secara serentak nilai r,s,b menghasilkan penduga parameter model fungsi transfer multivariat yang dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 8. Hasil Estimasi Parameter Fungsi Transfer Multivariat

| Parameter | Penduga parameter | p-value | Lag | Variabel | Shift |
|------------|-------------------|---------|-----|----------|-------|
| θ_1 | -0,36175 | 0,0037 | 1 | y | 0 |
| Φ_1 | -0,86989 | 0,0001 | 12 | y | 0 |
| ω_0 | -2,33515 | 0,2375 | 0 | x1 | 3 |
| ω_0 | -41,9214 | 0,0001 | 0 | x2 | 0 |
| ω_0 | -10,3447 | 0,0235 | 0 | x3 | 4 |
| ω_0 | -13,3880 | 0,0156 | 0 | x4 | 12 |

Hasil estimasi parameter model fungsi transfer multivariat perlu dikaji signifikansinya. Tabel 8 menunjukkan adanya variabel yang tidak signifikan dengan taraf signifikansi $\alpha = 0,05$ yaitu variabel input kelembaban udara. Hal itu karena kelembaban udara berkorelasi dengan variabel lain, sehingga perlu dikeluarkan dari model. Setelah variabel pertama dikeluarkan dari model maka didapat estimasi parameter sebagai berikut

Tabel 9. Hasil Estimasi Parameter Akhir Fungsi Transfer Multivariat

| Parameter | Penduga parameter | p-value | Lag | Variabel | Shift |
|------------|-------------------|---------|-----|----------|-------|
| θ_1 | -0,34972 | 0,0044 | 1 | y | 0 |
| Φ_1 | -0,88011 | 0,0001 | 12 | y | 0 |
| ω_0 | -43,2291 | 0,0001 | 0 | x2 | 0 |
| ω_0 | -10,3913 | 0,0233 | 0 | x3 | 4 |
| ω_0 | -13,6313 | 0,0135 | 0 | x4 | 12 |

Berdasarkan Tabel 9. dapat disimpulkan bahwa setelah variabel pertama dikeluarkan dalam model, parameter tekanan udara, temperatur, kecepatan angin dan deret *noise* dari model fungsi transfer multivariat menjadi signifikan. Hal itu terlihat dari nilai *pvalue* masing-masing parameter kurang dari 0,05. Model fungsi transfer multivariat akhir yang didapatkan untuk output curah hujan adalah sebagai berikut:

$$(1 - B^{12})Y_t = -43,22914(1 - B^{12})(X_2)_t - 10,39131(1 - B^{12})(X_3)_{t-4} - 13,6313(1 - B^{12})(X_4)_{t-12} + \frac{(1 + 0,34972B)}{(1 + 0,88011B^{12})}a_t \quad (23)$$

Setelah dilakukan estimasi parameter dan nilai parameter telah signifikan maka tahap selanjutnya adalah pemeriksaan diagnostik model multivariat. Untuk mengetahui kelayakan suatu model perlu dilakukan pengujian terhadap kesesuaian deret *noise* dan ada tidaknya autokorelasi antara residual dengan variabel inputnya. Berikut hasil pemeriksaan autokorelasi untuk residual model:

Tabel 10. Hasil analisis uji autokorelasi residual pada Model Fungsi Transfer Multivariat

| <i>Autocorrelation Check of Residuals</i> | | | | |
|---|------------|----|----------------------|------------|
| To Lag | Chi-Square | df | $\chi^2_{\alpha,df}$ | Pr > ChiSq |
| 6 | 4,66 | 4 | 9,49 | 0,3238 |
| 12 | 13,24 | 10 | 18,31 | 0,2108 |
| 18 | 17,49 | 16 | 26,30 | 0,3546 |
| 24 | 22,42 | 22 | 33,92 | 0,4348 |

Terlihat pada Tabel 10 bahwa *p-value* > 0,05 atau $Q_{hit} < \chi^2_{\alpha,df}$ hal ini berarti autokorelasi antara residual dengan variabel inputnya tidak signifikan. Residual fungsi transfer multivariat untuk semua lag telah memenuhi asumsi *white noise*. Selanjutnya adalah pemeriksaan korelasi silang untuk deret input dengan nilai residual. Hal ini berguna untuk mengetahui apakah korelasi antara deret input dengan deret *noise* signifikan atau tidak. Pemeriksaan ini dilakukan untuk masing-masing variabel input. Berikut hasil pemeriksaan korelasi silang residualnya:

Tabel 11. Hasil analisis uji korelasi silang residual pada Model Fungsi Transfer Multivariat

| lag | <i>p-value</i> | | |
|-----|----------------|------------|-----------------|
| | Tekanan Udara | Temperatur | Kecepatan Angin |
| 6 | 0,2346 | 0,1076 | 0,5385 |
| 12 | 0,1154 | 0,2279 | 0,8571 |
| 18 | 0,4048 | 0,1786 | 0,8651 |
| 24 | 0,2628 | 0,3670 | 0,8079 |

Berdasarkan Tabel 11. *p-value* masing-masing variabel lebih dari taraf signifikansi $\alpha = 0,05$ sehingga dapat disimpulkan korelasi antara model *noise* dengan deret input tidak signifikan. Oleh karena model telah memenuhi *white noise* maka model fungsi transfer multivariat layak digunakan.

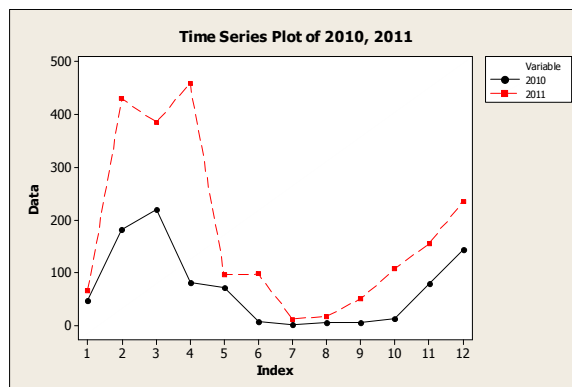
Peramalan dengan Penggunaan Model Fungsi Transfer Multivariat

Hasil estimasi model fungsi transfer multivariat menghasilkan parameter yang dapat digunakan untuk meramalkan suatu nilai ke depan. Berikut merupakan hasil peramalan curah hujan di Kota Yogyakarta dari tahun 2010 sampai 2011 dengan menggunakan model fungsi transfer multivariat:

Tabel 12. Hasil Ramalan Curah Hujan dengan Model Transfer Multivariat

| tahun bulan | 2010 (dalam satuan mm) | 2011 (dalam satuan mm) |
|----------------|---------------------------|---------------------------|
| Januari | 46,32 | 65,09 |
| Februari | 182,26 | 428,93 |
| Maret | 218,88 | 384,54 |
| April | 80,07 | 458,59 |
| Mei | 71,73 | 96,69 |
| Juni | 6,41 | 97,01 |
| Juli | 0,37 | 11,69 |
| Agustus | 4,99 | 17,21 |
| September | 5,74 | 50,48 |
| Oktober | 13,23 | 107,13 |
| November | 78,08 | 154,37 |
| Desember | 142,51 | 235,24 |

Untuk lebih jelasnya berikut disajikan hasil ramalan curah hujan tahun 2010 dan 2011 dalam bentuk plot *time series* .



Gambar 6. Plot Time Series Hasil Ramalan Tahun 2010-2011

Pada tahun 2011 nampak terjadi peningkatan curah hujan khususnya pada bulan Februari, Maret dan April. Pada bulan-bulan selanjutnya banyaknya curah hujan juga mengalami peningkatan akan tetapi ada juga yang nilainya mendekati yakni pada bulan Januari, Mei, Juli dan Agustus. Berdasarkan model fungsi transfer yang terbentuk menunjukkan bahwa banyaknya curah hujan selain dipengaruhi oleh ketiga variabel input juga dipengaruhi oleh banyak curah hujan itu sendiri pada tahun-tahun sebelumnya.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut: Model peramalan banyaknya curah hujan di Kota Yogyakarta tahun 2010 sampai 2011 dengan menggunakan model fungsi transfer multivariat yang melibatkan variabel input tekanan udara, temperatur dan kecepatan angin adalah sebagai berikut:

$$Y_t = -0,88Y_{t-12} + Y_{t-12} + 0,88Y_{t-24} - 43,229(X_2)_t - 38,04(X_2)_{t-12} + 43,229(X_2)_{t-12} \\ + 38,04(X_2)_{t-24} - 10,39(X_3)_{t-4} - 9,14(X_3)_{t-16} + 10,39(X_3)_{t-16} + 9,14(X_3)_{t-28} \\ - 13,63(X_4)_{t-12} - 11,99(X_4)_{t-24} + 13,63(X_4)_{t-24} + 11,99(X_4)_{t-36} + a_{t-1} + 0,349a_{t-1}$$

Model fungsi transfer multivariat di atas menunjukkan bahwa ramalan curah hujan pada waktu ke-t dipengaruhi oleh banyaknya curah hujan pada duabelas bulan sebelumnya dan duapuluh empat bulan sebelumnya (Y_{t-12} , Y_{t-24}), kelembaban udara pada waktu duabelas bulan sebelumnya dan duapuluh empat bulan sebelumnya ($(X_2)_t$, $(X_2)_{t-12}$, $(X_2)_{t-24}$, $(X_3)_{t-4}$), temperatur pada enambelas bulan sebelumnya dan duapuluh delapan bulan sebelumnya ($(X_3)_{t-16}$, $(X_3)_{t-28}$), serta dipengaruhi oleh kecepatan angin pada duabelas, duapuluh empat dan tigapuluh enam bulan sebelumnya ($(X_4)_{t-12}$, $(X_4)_{t-24}$, $(X_4)_{t-36}$). Terjadinya pengaruh pada bulan-bulan tertentu tersebut dikarenakan curah hujan merupakan fenomena musiman sehingga banyaknya curah hujan pada bulan t hampir sama dengan banyak curah hujan pada duabelas bulan sebelumnya sampai duapuluh empat bulan sebelumnya.

Peningkatan curah hujan terjadi hampir pada setiap bulannya. Akan tetapi peningkatan yang signifikan terjadi pada bulan Februari, April dan Oktober. Curah hujan maksimum pada tahun 2010 adalah 218,88mm terjadi pada bulan Maret, sedangkan pada tahun 2011 adalah 458,59mm terjadi pada bulan April. Curah hujan minimum untuk kedua tahun terjadi pada bulan Juli yaitu 0,37mm untuk tahun 2010 dan 11,69mm pada tahun 2011. Rata-rata curah hujan pada tahun 2010 adalah 70,88mm dan pada tahun 2011 adalah 175,58mm.

DAFTAR PUSTAKA

- Bowerman, B.L. and O'Connell, R.T. 1993. *Forecasting and Time Series: An Applied Approach*, 3rd edition, Belmont, California: Duxbury Press.
- Box, G.E.P., Jenkins, G.M., and Reissel, G.C. 1994. *Time Series Analysis Forecasting and Control*, 3rd edition. Englewood Cliffs : Prentice Hall.
- BPS Kota Yogyakarta. 2009. *Kota Yogyakarta dalam Angka*. Yogyakarta: BPS Yogyakarta
- Chatfield, C. 2004. *The Analysis of Times Series An Introduction*. Florida: CRC Press Company.
- Hanke, J.E dan Wicheren DW. 2005. *Business Forcadting*. 8th edition. Fngewood: Cliffs Prentice Hall
- Makridakis Spyros, Wheel Wright Steven C, dan Victor E, McGEE. 1993. *Metode Dan Aplikasi Peramalan*. Edisi Ke-2. Jakarta: Erlangga
- Soewarno. 2000. *Hidrologi Operasional*. Jilid kesatu. Bandung: Citra Aditya Bakti
- Suyono Sosrodarsono. 1985. *Hidrologi*. Jakarta: PT Pradnya Paramita
- Wei, W.S William. 1990. *Univariate and Multivariate Methods*. California. Addison Wesley Publishing Company
- Wilson, E.M. 1993. *Hidrologi Teknik*. Edisi ke-4. Jakarta : Erlangga

Khrisna Yuli Siswanti / Peramalan Curah Hujan

KARAKTERISTIK VARIASI HARIAN KOMPONEN H GEOMAGNET STASIUN PENGAMAT GEOMAGNET BIAK

Habirun

Peneliti Pusat Pemanfaatan Sains Antariksa, LAPAN

Abstrak

Pada makalah ini dibahas karakteristik variasi harian komponen H geomagnet pada saat aktivitas matahari menurun, dari aktivitas matahari maksimum tahun 1991 sampai dengan aktivitas matahari sekitar minimum tahun 1996. Menggunakan data variasi harian komponen H stasiun pengamat geomagnet Biak tahun 1991 hingga 1996. Analisis variasi harian komponen H menggunakan metode analisis Harmonik dikaitkan terhadap efek periode variasi harian. Periode variasi harian komponen H geomagnet ditentukan menggunakan FFT (*Fast Fourier Transform*). Berdasarkan hasil analisis galat model yang diperoleh sehingga fluktuasi karakteristik variasi harian komponen H akibat efek aktivitas matahari maksimum hingga minimum diketahui. Hasil analisis galat model variasi harian komponen H dibandingkan terhadap bilangan *sunspot* rata-rata dan hasilnya menunjukkan bahwa galat model pada aktivitas matahari maksimum lebih kecil dari pada aktivitas matahari disekitar minimum.

Kata kunci: Karakteristi komponen geomagnet, FFT, analisis Harmonik

PENDAHULUAN

Karakteristik variasi harian komponen H geomagnet sangat kompleks dan berfluktuasi akibat dipengaruhi berbagai aktivitas gangguan jangka pendek, terutama dampak angin matahari (*solar wind*) akibat aktivitas *flare* dan CME (*Coronal Mass Ejection*). Pada saat terjadi *flare* sehingga arus partikel-partikel dari energetik yang timbul selama *flare*, dapat memecahkan medan magnetik bumi secara kuat pada selang waktu sangat singkat. Sehingga timbul gangguan yang dikenal sebagai badai magnet (*Magnetic Storms*) dan memicu timbulnya badai ionosfer (*Ionospheric Storms*) melalui sistem kopling magnetosfer-ionosfer-atmosfer (Tsurutani et al., 1990). Gangguan tersebut terjadi karena adanya transfer energi dan memontum melalui mekanisme rekoneksi antara *solar wind* terhadap magnetosfer semakin intens bersamaan dengan medan magnet arah selatan Bz. Gangguan tersebut mengakibatkan penurunan ataupun kenaikan variasi harian komponen H dari kondisi normalnya. Pada saat terjadi rekoneksi, energi dan momentum ditransfer kedalam magnetosfer bumi sehingga mengakibatkan perubahan sistem arus. Perubahan sistem arus tersebut menimbulkan depresi pada variasi harian komponen H diseluruh permukaan bumi yang tegak lurus terhadap gangguan,

Perlu diketahui bahwa efek variasi harian akibat radiasi matahari maupun *solar wind* mempengaruhi variasi harian komponen geomagnet umumnya digolongkan dalam dua golongan yakni efek gangguan yang sifatnya jangka panjang dan jangka pendek. Gangguan jangka panjang terutama akibat efek aktivitas matahari sesuai siklus bilangan *sunspot* berperiode sekitar 11 tahun. Demikian pula gangguan aktivitas matahari jangka pendek yang bersifat periodik dan temporal. Gangguan jangka pendek berperiodik seperti peristiwa gangguan CME mempengaruhi variasi geomagnet menunjukkan gangguan berulang (*recurrent event*). Peristiwa seperti demikian umumnya terjadi pada fase siklus matahari menurun dan matahari minimum (Zhou X. Y and Wei F. S., 1998).

Berkaitan efek berbagai aktivitas gangguan yang diungkapkan di atas sehingga model variasi harian komponen geomagnet ditentukan sesuai kondisi aktivitas gangguan saat tertentu. Oleh karena itu model variasi harian komponen geomagnet jangka pendek ditentukan berdasarkan sifat gangguan yang berperiodik. Berdasarkan gangguan yang berperiode tersebut sehingga model

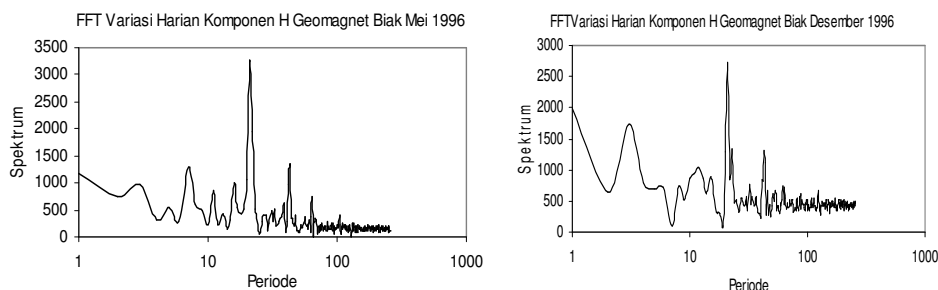
variasi harian komponen geomagnet ditentukan menggunakan analisis Harmonik yang dikaitkan efek berperiode radiasi matahari, bulan dan efek planetari (Habirun., 2009). Sedangkan akibat efek-efek gangguan lain yang mempengaruhi variasi harian komponen geomagnet diabaikan.

Sehubungan uraian yang diungkapkan di atas maka pada makalah ini dibahas karakteristik variasi harian komponen H pada aktivitas matahari maksimum sampai dengan aktivitas matahari disekitar minimum. Dengan difokuskan pada efek variasi harian mempengaruhi variasi harian komponen H geomagnet jangka pendek. Model variasi harian komponen H geomagnet ditentukan berdasarkan metode analisis Harmonik dengan dikaitkan terhadap efek akibat periode radiasi matahari, bulan dan planetari yang disebut di atas. Sedangkan penentuan periode-periode variasi harian komponen H menggunakan FFT (*Fast Fourier Transform*). Data variasi harian komponen H geomagnet yang digunakan dari stasiun pengamat geomagnet Biak tahun 1991 sampai dengan tahun 1997 dan data *sunspot* dari WDC (*word data center*) geomagnet. Berdasarkan hasil analisis galat model yang diperoleh sehingga fluktuasi karakteristik variasi harian komponen H akibat efek aktivitas matahari maksimum hingga minimum dapat diketahui. Hasil analisis galat model variasi harian komponen H dibandingkan terhadap jumlah bilangan sunspot menunjukkan bahwa galat model pada aktivitas matahari maksimum lebih kecil dari pada aktivitas matahari disekitar minimum.

METODE PENENTUAN MODEL VARIASI HARIAN KOMPONEN H GEOMAGNET

Penentuan periode variasi harian komponen H

Sebelum diuraikan metode penentuan model variasi harian komponen H geomagnet terlebih dahulu ditentukan periode-periode gangguan yang berpengaruh pada variasi harian komponen H. Penentuan periode gangguan yang sangat berpengaruh pada variasi harian komponen H ditentukan menggunakan FFT. Data variasi harian yang digunakan adalah data bulan Mei dan Desember 1996,



Gambar 2.1 Periodesitas efek variasi harian mempengaruhi variasi harian komponen H geomagnet bulan Mei dan Desember tahun 1996 pada aktivitas matahari menurun

Tabel 2.1 PERIODESITAS AKTIVITAS GANGGUAN VARIASI HARIAN KOMPONEN H GEOMAGNET DATA DARI STASIUN PENGAMAT GEOMAGNET LAPAN BIAK BULAN MEI DAN DESEMBER 1997

| No | Efek | Mei | Desember | Teoritis |
|----|-----------|-----|----------|----------|
| 1 | Matahari | 22 | 22 | 24 |
| 2 | Bulan | 12 | 13 | 12 |
| 3 | Planetari | 6 | 7 | 6 |

karena pada tahun itu aktivitas matahari minimum berarti bintik matahari (*sunspot*) lebih sedikit dibandingkan pada aktivitas matahari maksimum. Dengan hal yang diungkapkan di atas sehingga aktivitas gangguan yang berpengaruh dari luar bumi, terutama dari matahari semakin kecil. Artinya periode gangguan yang berpengaruh pada variasi harian komponen H hanya arus cincin yang

disebabkan efek dinamo akibat perputaran bumi pada sumbunya. Hasil analisis periodesitas yang diperoleh secara kualitatif dapat dilihat pada gambar 2.1 dan secara kuantitatif dapat dilihat pada tabel 2.1. Perlu diketahui bahwa gambar 2.1 menyatakan sumbu Y skala biasa sedangkan pada sumbu X skala logaritmik. Demikian pula hasil analisis yang dinyatakan secara kuantitatif pada tabel 2.1 periodesitas empiris yang diperoleh dari perhitungan dan dibandingkan terhadap periodesitas sebenarnya atau teoritis.

Pada tabel 2.1 menunjukkan hasil perhitungan periode variasi harian yang mempengaruhi variasi harian komponen H geomagnet dengan menggunakan FFT. Efek gangguan yang terlihat pada tabel 2.1 adalah periode radiasi matahari yang lebih stabil dari pada efek bulan dan planetari. Pada tahun 1996 periode variasi harian komponen H akibat efek matahari dari 24 jam sampai dengan 21 jam, sedangkan akibat efek bulan dari 13 jam hingga 10 jam dan planetari dari 7 jam sampai dengan 5 jam kadang-kadang tidak muncul. Hal itulah yang menyebabkan rendahnya akurasi model variasi harian komponen H.

Pengolahan Data

Telah diuraikan sebelumnya bahwa perubahan variasi harian komponen H akibat dipengaruhi berbagai aktivitas gangguan. Dengan demikian pola karakteristik variasi harian komponen H geomagnet merupakan bentuk superposisi efek gangguan. Sehingga analisis karakteristik variasi harian komponen H diolah umumnya melalui pengurangan antara data pengamatan terhadap model variasi harian komponen H hari tenang (S_q). Berarti variasi harian komponen H geomagnet dari pengamatan merupakan penjumlahan pola variasi hari tenang terhadap fluktuasi akibat efek gangguan. Dengan kondisi itu maka analisis pengolahan data variasi harian komponen H melalui identifikasi analisis Harmonik dipengaruhi berbagai aktivitas gangguan dengan periodesitasnya tercantum pada tabel 2.1. Sedangkan rumusan model analisis perubahan variasi harian komponen H geomagnet tersebut secara rinci akan diuraikan pada bagian titik 2.3.

Model Analisis Variasi Harian Komponen H

Perubahan variasi harian komponen H geomagnet dipengaruhi berbagai aktivitas gangguan seperti telah diuraikan sebelumnya. Karena karakteristik variasi harian komponen H dibentuk pola superposisi dengan termodulasi oleh aktivitas gangguan maka bentuk model analisis yang digunakan sesuai rumusan matematik Kutiev (2001), dengan dinyatakan sebagai berikut ;

$$\chi(t, LT) = K_h(t) \left[g_o + \sum_{m=1}^2 g_m \cos \left\{ m \frac{2\pi}{\lambda} (LT - LF_m) \right\} \right] \quad (2.1)$$

dengan LT adalah waktu lokal, λ adalah periode gangguan dan LF_m adalah sudut fasa yang ke- m . Ekspresi dalam tanda kurung yang representatif terdiri dua gelombang sinusoidal yang dibentuk periode efek matahari, bulan dan planetari dan kondisi itu sesuai dengan rotasi matahari berputar pada sumbunya. Amplitudo g_1 dan g_2 , sudut fasa LF_1 dan LF_2 yang dihitung melalui persamaan (2.3). Untuk penyederhanaan persamaan (2.1) dalam penurunan analisis koefisien-koefisien gelombang akibat efek matahari, bulan dan planetari tidak ditunjukkan dan yang ditunjukkan hanya rata-rata, amplitudo dan sudut fasa yang cukup representatif untuk mewakili konstanta-konstanta model.

Distribusi gelombang akibat efek variasi harian komponen H dari persamaan (2.1) dalam waktu lokal termodulasi oleh fungsi $K_h(t)$, kemudian dalam definisi menyatakan bahwa τ adalah waktu salah satu cara untuk menundah reaksi χ kelanjutan perubahan-perubahan gangguan dinyatakan dalam rumusan

$$K_h(t) = \left(\exp \frac{1}{T} - 1 \right) \int_{-\alpha}^t \theta \exp \left(- \frac{\tau - t}{T} \right) d\tau \quad (2.2)$$

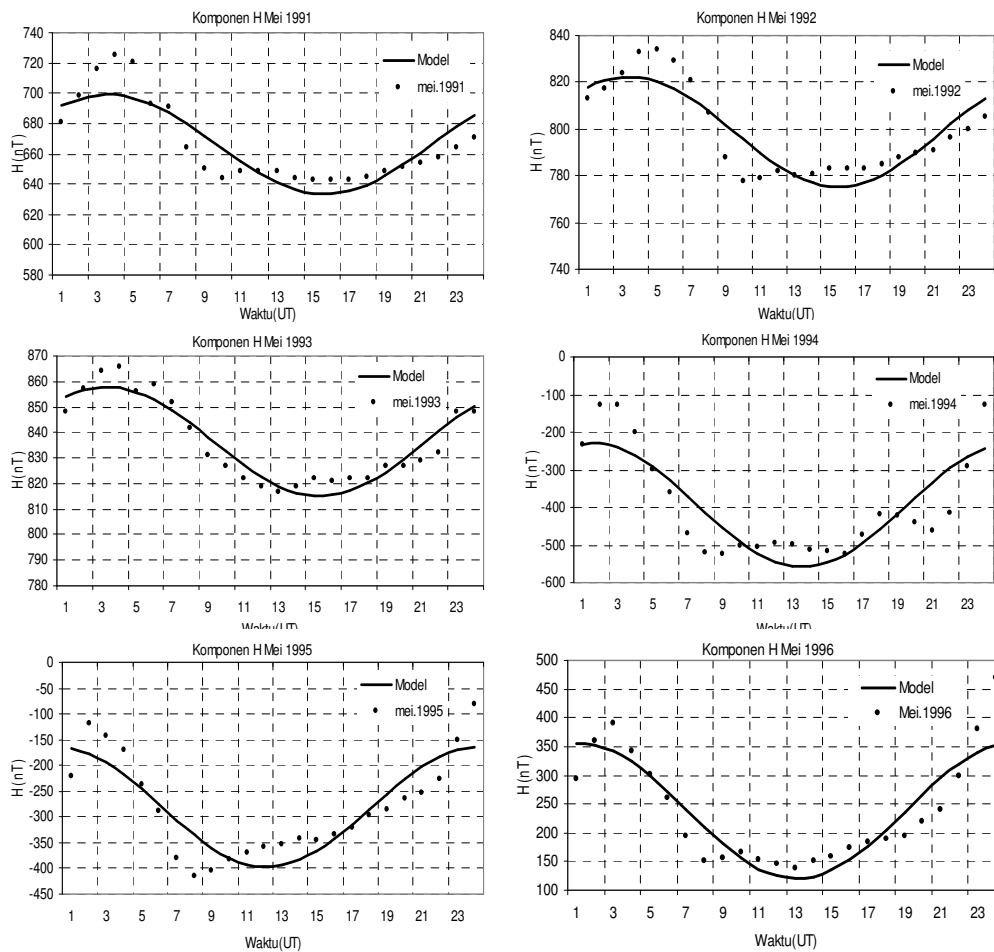
Kuantitas θ (analog dengan χ) ditulis penurunan relatif dari perubahan gangguan terhadap S_q dan T waktu konstan yang representatif setiap kali kelambatan rata-rata antara perubahan gangguan dan χ . Menurut Kutiev dan Muhtarov (2001) dalam persamaan (2.3) T konstan diset dalam pencuplikan

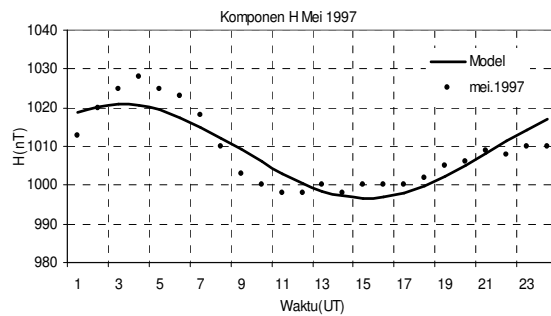
setiap 16 jam. Setelah itu rata-rata, konstanta-konstanta model analisis, amplitudo dan sudut fasa persamaan (2.1) dihitung melalui persamaan (2.3)

$$\left. \begin{aligned}
 g_o &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T H_t \\
 A_m &= \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T (H_t - g_o) \cos \omega_m t \\
 B_m &= \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T (H_t - g_o) \sin \omega_m t
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned}
 \text{amplitudo } g_m &= \sqrt{A_m^2 + B_m^2} \\
 \text{sudut fasa } LF_m &= \arctan\left(-\frac{B_m}{A_m}\right), A_m > 0
 \end{aligned} \quad (2.3)$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

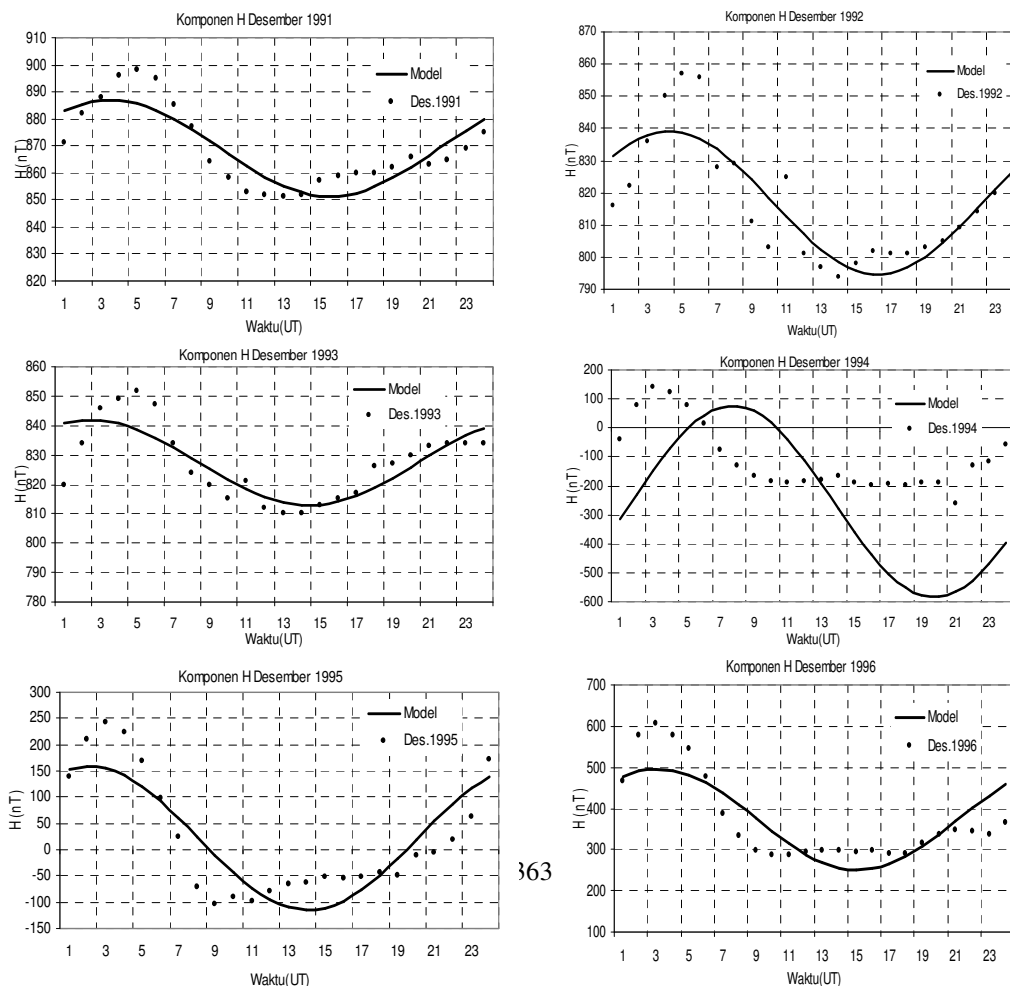
Berdasarkan perubahan karakteristik variasi harian komponen H pada aktivitas matahari menurun, dianalisis menggunakan data variasi harian komponen H dari tahun 1991 hingga 1997. Hasil analisis karakteristik variasi harian komponen H geomagnet dari data pengamatan dibandingkan terhadap model analisis yang dihitung melalui persamaan (2.1) dan hasilnya (lihat gambar 3.1). Perlu diketahui bahwa hasil analisis variasi harian komponen H hari tenang pada gambar 3.1 menunjukkan perubahan data dan model analisis variasi harian komponen H bulan Mei dan Desember dari tahun 1991 hingga 1997. Sedangkan galat model variasi harian komponen H geomagnet yang dianalisis pada kondisi aktivitas matahari menurun dapat dilihat pada tabel 3.1. Pada tabel 3.1 kolom 7 terdapat hasil analisis galat model terkecil 0.304 nT yang dinyatakan galat model bulan Desember 1997. Sedangkan galat model terbesar sekitar 17.128 nT terlihat pada bulan Januari 1996 dan dinyatakan dalam tabel yang sama pada kolom 6.

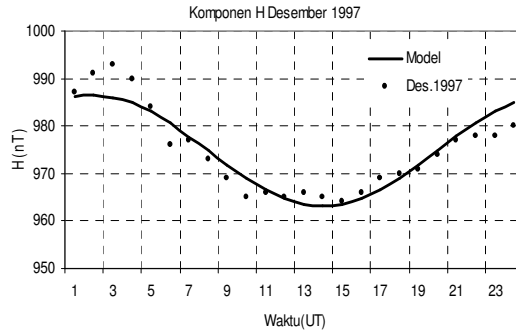




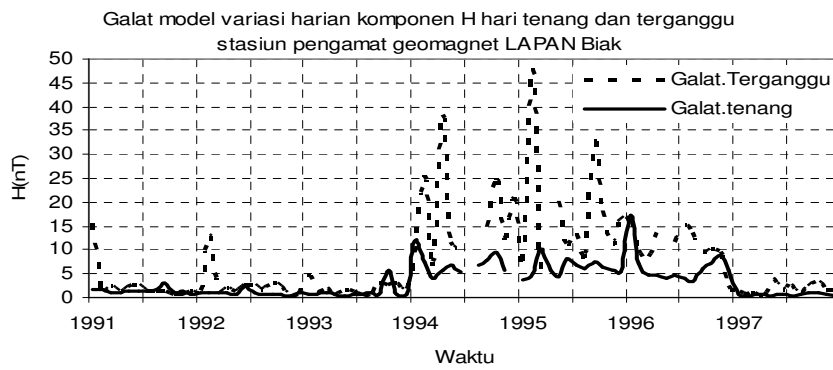
Gambar 3.1a. Karakteristik variasi harian komponen H geomagnet hari tenang antara data pengamatan dibandingkan terhadap model analisis bulan Mei data dari 1991 sampai dengan 1997 stasiun pengamat geomagnet Biak

Selanjutnya, telah diketahui bahwa aktivitas geomagnet yang dinyatakan variasi harian komponen H dalam satu bulan terdiri dari dua kondisi yakni hari tenang dan hari terganggu. Kemudian dihitung galat model variasi harian komponen H dari masing-masing hari, sehingga diperoleh galat model pada saat aktivitas geomagnet hari tenang dan galat model pada saat aktivitas geomagnet hari terganggu. Dengan tentunya aktivitas geomagnet dari kedua hari yang berbeda itu juga menunjukkan galat model analisis yang berbeda pula. Untuk lebih jelasnya hasil analisis galat model dari kedua hari aktivitas geomagnet itu dibandingkan dan hasilnya dapat dilihat pada gambar 3.2. Pada gambar 3.2 terlihat dengan jelas bahwa fluktuasi galat model pada aktivitas geomagnet hari tenang lebih rendah dari pada aktivitas geomagnet hari terganggu.

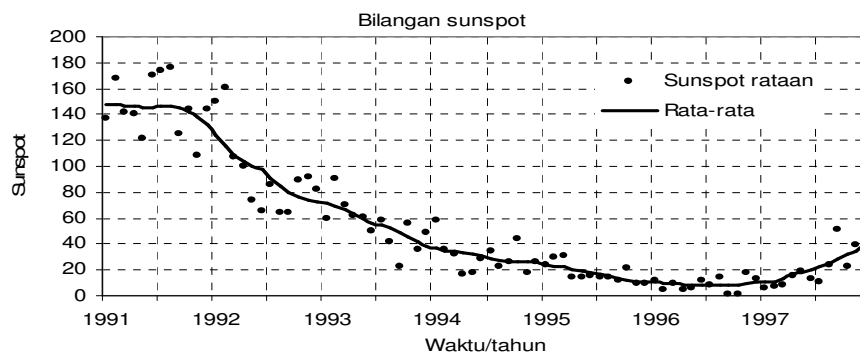




Gambar 3.1b. Karakteristik variasi harian komponen H geomagnet hari tenang antara data pengamatan dibandingkan terhadap model analisis bulan Desember data dari 1991 sampai dengan 1997 stasiun pengamat geomagnet Biak



Gambar 3.2. Galat model variasi harian komponen H geomagnet pada aktivitas geomagnet hari tenang dan hari terganggu ditinjau pada saat aktivitas matahari menurun dari tahun 1991 sampai dengan tahun 1997 data dari stasiun pengamat geomagnet Biak



Gambar 3.3. Data jumlah bilangan sunspot rataan dibandingkan terhadap rata-rata dan dari data rata-rata (*word data center*) geomagnet

Berkaitan dengan aktivitas matahari mempengaruhi variasi harian komponen H pada saat aktivitas geomagnet hari tenang maupun aktivitas geomagnet hari terganggu. Hal itu jelas pengaruh aktivitas matahari sangat besar mempengaruhi perubahan pola variasi harian komponen geomagnet. Tetapi dalam hasil analisis galat model variasi harian komponen H dari kedua kondisi itu ditinjau terhadap perubahan aktivitas matahari jangka panjang yang dinyatakan bilangan sunspot terjadi keunikan. Keunikan yang muncul terjadi pada aktivitas matahari maksimum hasil analisis galat model variasi harian komponen H umumnya lebih kecil. Sedangkan pada aktivitas matahari minimum hasil analisis galat model variasi harian komponen H geomagnet secara umum membesar (lihat gambar 3.2 dan 3.3). Kondisi yang demikian seharusnya terjadi pada aktivitas matahari maksimum hasil analisis galat model membesar dan pada aktivitas matahari minimum hasil analisis galat model mengecil.

Berdasarkan uraian yang diungkapkan di atas, sehubungan analisis perhitungan galat model variasi harian komponen H dihitung berdasarkan variasi-variasi akibat efek gangguan temporal yang cukup kecil terhadap pola normal atau pola hari tenang. Berarti efek gangguan temporal yang cukup kecil itu pada efek aktivitas matahari cukup besar akan teredam. Sedangkan pada efek aktivitas matahari cukup kecil sehingga efek gangguan temporal yang cukup kecil itu tidak teredam oleh aktivitas matahari. Dengan hal itu dapat disimpulkan bahwa pada aktivitas matahari membesar atau maksimum galat model variasi harian komponen H geomagnet mengecil karena teredam efek aktivitas matahari. Sebaliknya aktivitas matahari mengecil atau minimum galat model variasi harian komponen H membesar karena variasi harian komponen H tidak teredam oleh aktivitas matahari.

Tabel 3.1 GALAT MODEL ANALISIS KARAKTERISTIK VARIASI HARIAN KOMPONEN H GEOMAGNET DARI STASIUN PENGAMAT GEOMAGNET LAPAN BIAK DARI TAHUN 1991 SAMPAI DENGAN TAHUN 1997

| Tahun | 1991 | 1992 | 1993 | 1994 | 1995 | 1996 | 1997 |
|-----------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|-------|
| Bulan | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Januari | 1.685 | 1.050 | 0.617 | 11.990 | 3.632 | 17.128 | 0.686 |
| Pebruari | 1.666 | 0.899 | 0.753 | 7.467 | 4.961 | 7.243 | 0.444 |
| Maret | 0.857 | 0.862 | 0.866 | 4.161 | 10.084 | 4.744 | 0.641 |
| April | 1.149 | 1.049 | 0.583 | 5.626 | 5.681 | 4.701 | 0.688 |
| Mei | 1.253 | 0.802 | 0.486 | 6.905 | 4.344 | 4.047 | 0.413 |
| Juni | 1.342 | 2.357 | 0.678 | 5.396 | 8.211 | 4.575 | 0.620 |
| Juli | 1.439 | 0.934 | 0.702 | 0.000 | 6.695 | 4.190 | 0.309 |
| Agustus | 1.821 | 0.645 | 1.054 | 6.830 | 6.061 | 3.295 | 0.756 |
| September | 3.190 | 0.775 | 0.738 | 7.810 | 7.350 | 6.193 | 1.081 |
| Oktober | 1.140 | 0.805 | 5.793 | 9.524 | 6.360 | 7.168 | 0.859 |
| Nopember | 1.249 | 0.381 | 0.566 | 5.651 | 5.759 | 8.746 | 0.723 |
| Desember | 0.697 | 0.923 | 0.696 | 50.219 | 5.251 | 5.728 | 0.304 |

KESIMPULAN

Sesuai data variasi harian komponen H geomagnet stasiun pengamat geomagnet LAPAN Biak dari tahun 1991 sampai dengan tahun 1997 sehingga diperoleh karakteristik variasi harian komponen H. Menggunakan metode analisis Harmonik sehingga diperoleh galat model variasi harian komponen H geomagnet. Hasil analisis galat model pada aktivitas matahari menurun, galat model terkecil 0.304 nT yang dinyatakan galat model pada bulan Desember 1997, sedangkan galat model terbesar sekitar 17.128 nT terlihat pada bulan Januari 1996. Dalam hasil analisis galat model pada aktivitas geomagnet tenang dan terganggu ditinjau terhadap perubahan aktivitas matahari

jangka panjang terjadi keunikan. Keunikan yang muncul terjadi pada aktivitas matahari maksimum hasil analisis galat model variasi harian komponen H umumnya justru lebih kecil. Sedangkan pada aktivitas matahari minimum hasil analisis galat model variasi harian komponen H geomagnet secara umum membesar.

DAFTAR PUSTAKA

- Habirun ., 2009. Prediksi variasi harian komponen H regional menggunakan analisis Harmonik, *Buku Ilmiah* ISBN 978-602-8564-08-3 diterbitkan LAPAN Jakarta baulan Januari.
- Kutiev, I., and Muhtarov ., 2001. Modeling of Mid Latitude E-Region Response to Geomagnetic Activity, *J. Geophys. Res.* **15501 – 15510** 106 : A8 (ORSI COSPAR IRI, 8 : 4, Kanagawa 299 – 8510 Japan)
- Tsurutami, B.T., B.E. Glodstein, E. J. Smith, W. D. Gonzalez, F. Tang, S-1. Akasofu, and R. R. Anderson, 1990. The interplanetary and solar causes of geomagnetic activity, *Planet. Space Sci.* **38**(1), 109 – 126.
- Zhou X. Y and Wei F. S., 1998. Prediction of recurrent geomagnetic disturbance by using adaptive filtering. *Earth Planets Space* **50**, 839 – 845 Japan.

OPTIMISASI KONVEKS: KONSEP-KONSEP

Caturiyati¹ dan Himmawati Puji Lestari²

^{1,2} Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta

¹ waturiyati@yahoo.com

² himmawatipl@yahoo.com

Abstrak

Pada masalah optimisasi konveks terdapat berbagai konsep yang menjadi latar belakang. Paper ini akan mengulas konsep-konsep tersebut sehingga dapat mempermudah dalam mempelajari masalah optimisasi konveks. Pada bagian awal akan diuraikan konsep-konsep mengenai himpunan konveks, dilanjutkan dengan fungsi konveks, fungsi kuasikonveks, dan dipungkasi dengan masalah optimisasi konveks. Pada paper ini hanya diuraikan konsep-konsepnya saja.

Kata kunci: himpunan konveks, fungsi konveks, fungsi kuasikonveks, optimisasi konveks

PENDAHULUAN

Masalah optimisasi konveks merupakan masalah optimisasi yang dikenakan pada himpunan konveks secara umum. Salah satu contoh masalah optimisasi konveks adalah masalah pemrograman linear (Luenberger, 1984). Dewasa ini telah banyak dikembangkan dan aplikasi masalah optimisasi konveks di berbagai disiplin ilmu, terutama teknik dan ekonomi, baik yang linear maupun non linear (Ben-Tal and Nemirovski, 2001).

Diberikan masalah optimisasi sebagai berikut:

Meminimalkan $f_0(x)$

dengan kendala $f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m$

$$h_i(x) = 0, i = 1, \dots, p.$$

dengan x adalah vektor variabel keputusan, dan fungsi f_0, f_i , dan h_i berturut-turut adalah fungsi biaya, fungsi kendala ketaksamaan, dan fungsi kendala persamaan. Namun, bila variabel keputusan x sangat banyak, maka sulit untuk menyelesaikan masalah tersebut.

Alasannya adalah:

1. Masalah mungkin penuh dengan optimal lokal,
2. Akan sangat sulit menentukan titik layak (yaitu suatu x yang memenuhi semua persamaan dan ketaksamaan), faktanya himpunan solusi dapat kosong,
3. Kriteria penghentian digunakan dalam algoritma optimisasi umum seringkali berubah-ubah,
4. Algoritma optimisasi kemungkinan mempunyai sangat sedikit rata-rata kekonvergenan,
5. Masalah numerik dapat menyebabkan algoritma meminimumkan berhenti semua bersamaan.

Jika semua f_i konveks, dan h_i affine, maka tiga masalah pertama hilang: suatu optimum lokal adalah optimum global; kelayakan masalah optimisasi konveks dapat ditentukan tanpa ada ambiguitas paling tidak dalam hal prinsip; dan kriteria penghentian yang sangat mirip dengan menggunakan dualitas. Namun, rata-rata kekonvergenan dan pembahasan sensitivitas numerik tetap menjadi masalah yang potensial.

PEMBAHASAN

1. Himpunan Konveks

Dalam bagian ini akan diuraikan beberapa hal penting mengenai himpunan konveks dan operasinya, yang sebagian besar disarikan dari Luenberger, 1969, Mangasarian, 1994.

Penting untuk dicatat bahwa beberapa himpunan ini mempunyai representasi berbeda. Mengambil representasi yang tepat dapat membuat perbedaan antara masalah *tractable* dan *intractable*.

Yang akan diperhatikan di sini hanya masalah optimisasi dengan variabel keputusan adalah vektor dalam R^n atau matriks $R^{m \times n}$. Suatu fungsi $f: R^n \rightarrow R^m$ adalah affine jika mempunyai bentuk linear ditambah konstanta $f(x) = Ax + b$. Jika F adalah matriks fungsi nilai, yaitu, $F: R^n \rightarrow R^{p \times q}$, maka F affine jika mempunyai bentuk

$$F(x) = A_0 + x_1A_1 + \dots + x_nA_n$$

dengan $A_i \in R^{p \times q}$. Fungsi affine kadangkala disebut sebagai masalah linear.

$S \subseteq R^n$ adalah subruang jika memuat bidang yang melalui sebarang dua titik dan origin, yaitu,
 $x, y \in S, \lambda, \mu \in R \implies \lambda x + \mu y \in S$.

Dua representasi umum dari subruang adalah sebagai jangkauan matriks

$$range(A) = \{Aw | w \in R^q\} = \{w_1a_1 + \dots + w_qa_q | w_i \in R\}$$

dengan $A = [a_1 \dots a_q]$; atau sebagai ruang null matriks

$$ruang\ null\ (B) = \{x | Bx = 0\} = \{x | b_1^T x = 0, \dots, b_p^T x = 0\}$$

dengan $B = [b_1 \dots b_p]^T$.

Suatu himpunan $S \subseteq R^n$ affine jika memuat garis yang melalui sebarang dua titik di dalamnya, yaitu,

$$x, y \in S, \lambda, \mu \in R, \lambda + \mu = 1 \implies \lambda x + \mu y \in S$$

Secara geometrik, suatu himpunan affine adalah sebuah subruang yang tidak perlu terpusat pada origin. Dua representasi untuk himpunan affine adalah: jangkauan dari fungsi affine

$$S = \{Az + b | z \in R^q\},$$

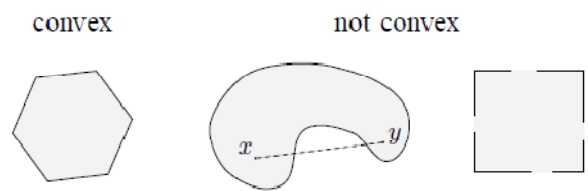
atau sebagai solusi suatu himpunan persamaan linear:

$$S = \{x | b_1^T x = d_1, \dots, b_p^T x = d_p\} = \{x | Bx = d\}.$$

Suatu himpunan $S \subseteq R^n$ adalah himpunan konveks jika memuat ruas garis yang menghubungkan titik-titik, yaitu

$$x, y \in S, \lambda, \mu \geq 0, \lambda + \mu = 1 \implies \lambda x + \mu y \in S.$$

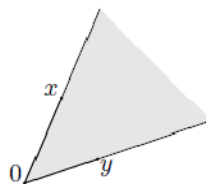
Jelaslah subruang dan himpunan affine adalah konveks.



Suatu himpunan $S \subseteq R^n$ adalah kerucut konveks jika memuat semua sinar garis melalui titik-titik yang berasal dari origin, serta ruas garis yang menghubungkan sebarang titik pada sinar-sinar tersebut, yaitu,

$$x, y \in S, \lambda, \mu \geq 0, \implies \lambda x + \mu y \in S$$

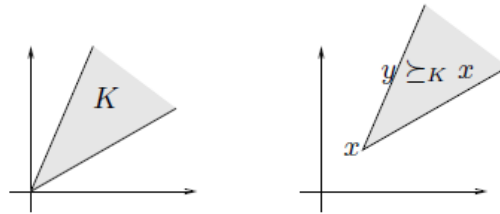
Secara geometrik, $x, y \in S$ berarti S memuat seluruh potongan pie antara x dan y .



Suatu kerucut konveks $K \subseteq R^n$ dikatakan proper jika tertutup, mempunyai interior tak kosong, dan pointed, yaitu, tidak terdapat garis di dalam K . Suatu kerucut proper K mendefinisikan ketaksamaan yang diperumum \leq_K di R^n :

$$x \leq_K y \Leftrightarrow y - x \in K$$

($x <_K y \Leftrightarrow y - x \in \text{int } K$).

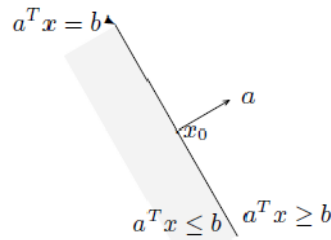


Diberikan titik-titik $x_i \in R^n$ dan $\theta_i \in R$, maka $y = \theta_1 x_1 + \dots + \theta_k x_k$ dikatakan merupakan

- Kombinasi linear untuk sebarang bilangan real θ_i .
- Kombinasi affine jika $\sum_i \theta_i = 1$.
- Kombinasi konveks jika $\sum_i \theta_i = 1, \theta_i \geq 0$.
- Kombinasi konik jika $\theta_i \geq 0$.

Hull linear dari himpunan S adalah himpunan semua kombinasi linear titik-titik dari S , dan dinotasikan dengan $\text{span}(S)$. Secara sama didefinisikan untuk kombinasi affine, dinotasikan dengan $\text{Aff}(S)$, kombinasi konveks, dinotasikan dengan $\text{Co}(S)$, dan kombinasi Konik, dinotasikan dengan $\text{Cone}(S)$.

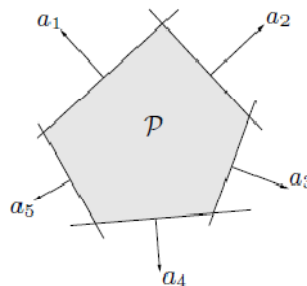
Suatu bidang hiper, dinyatakan sebagai $\{x | a^T x \leq b\}$ ($a \neq 0$), secara umum adalah himpunan affine, dan merupakan subruang jika $b = 0$. Representasi lain bidang hiper adalah $\{x | a^T(x - x_0) \leq 0\}$, dengan a adalah vektor normal dan x_0 terletak pada perbatasan.



Suatu polihedron adalah irisan sejumlah berhingga setengah ruang

$$P = \{x | a_i^T x \leq b_i, \quad i = 1, \dots, k\} = \{x | Ax \leq b\}$$

Dengan \leq berarti ketaksamaan sepotong-sepotong.



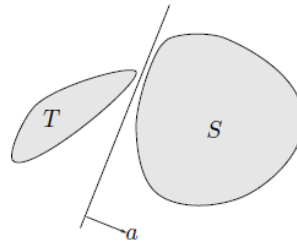
Suatu polihedron terbatas dikatakan politop, yang juga mempunyai alternatif representasi $P = \text{Co}\{v_1, \dots, v_N\}$, dengan $\{v_1, \dots, v_N\}$ adalah simpul-simpulnya.

Jika f adalah suatu norma, maka bola bernorma $B = \{x | f(x - x_c) \leq 1\}$ konveks, dan kerucut bernorma $C = \{(x, t) | f(x) \leq t\}$ adalah kerucut konveks. Norma yang paling umum adalah norma l_p pada R^n :

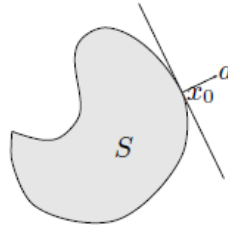
$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_i |x_i|^p\right)^{1/p} & ; p \geq 1, \\ \max_i |x_i| & ; p = \infty \end{cases}$$

Dua sifat yang membantu menggambarkan himpunan konveks secara geometri:

1. Teorema bidang hiper pemisah (separating hyperplane theorem)
Jika $S, T \subseteq R^n$ konveks dan saling asing ($S \cap T = \emptyset$), maka terdapat suatu bidang hiper $\{x|a^T x - b = 0\}$ yang memisahkan keduanya.



2. Teorema bidang hiper penyokong (supporting hyperplane theorem)
Terdapat suatu bidang hiper pada setiap titik di perbatasan himpunan konveks, yang bidang hiper penyokong $\{x|a^T x = a^T x_0\}$ menyokong S pada $x_0 \in \partial S$ jika $x \in S \Rightarrow a^T x \leq a^T x_0$.

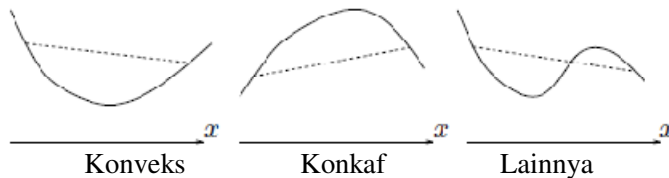


2. Fungsi Konveks (Luenberger, 1969, Mangasarian, 1994)

Suatu fungsi $f: R^n \rightarrow R$ konveks jika domainnya $dom f$ adalah konveks dan untuk semua $x, y \in dom f, \theta \in [0,1]$

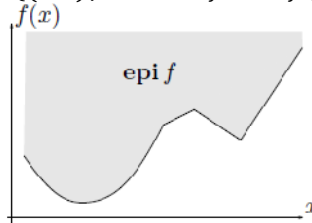
$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y);$$

f konkaf jika $-f$ konveks.



Epigraf suatu fungsi f adalah

$$epi f = \{(x, t)|x \in dom f, f(x) \leq t\}$$



Himpunan sublevel- α suatu fungsi f adalah

$$S_\alpha \triangleq \{x \in dom f|f(x) \leq \alpha\}$$

Bentuk dari definisi dasar kekonvekskan, maka jika f fungsi konveks jika dan hanya jika epigrafnya, $epi f$ adalah himpunan konveks. Berlaku juga jika f konveks, maka himpunan-himpunan sublevel S_α konveks.

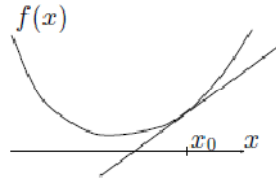
Kekonvekskan fungsi terdiferensial $f: R^n \rightarrow R$ juga dapat ditentukan dengan syarat gradiennya ∇f dan Hessian $\nabla^2 f$. Secara umum, gradien adalah pendekatan Taylor order pertama pada x_0 :

$$f(x) \approx f(x_0) + \nabla f(x_0)^T(x - x_0)$$

Dimiliki kondisi order pertama berikut: f konveks jika dan hanya jika untuk semua $x, x_0 \in dom f$,

$$f(x) \geq f(x_0) + \nabla f(x_0)^T(x - x_0),$$

yaitu pendekatan order pertama dari f global terhadap estimator.



Dalam bentuk epigraf dari f : untuk semua $(x, t) \in epif$,

$$\begin{bmatrix} \nabla f(x_0)^T \\ -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x - x_0 \\ t - f(x_0) \end{bmatrix} \leq 0,$$

yaitu, $(\nabla f(x_0)^T, -1)$ mendefinisikan bidang hiper penyokong untuk $epif$ pada $(x_0, f(x_0))$.

Hessian dari f , $\nabla^2 f$, memenuhi ekspansi deret Taylor order kedua sekitar x_0 :

$$f(x) \approx f(x_0) + \nabla f(x_0)^T(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T \nabla^2 f(x_0)(x - x_0)$$

Kondisi perlu dan cukup order kedua: suatu fungsi yang terdiferensial dua kali konveks jika dan hanya jika untuk semua $x \in dom f$, $\nabla^2 f(x) \succeq 0$, yaitu Hessiannya semidefinit positif pada domainnya.

3. Fungsi Kuasikonveks (Luenberger, 1969, Mangasarian, 1994)

Suatu fungsi $f: R^n \rightarrow R$ adalah kuasikonveks jika setiap himpunan sublevel $S_\alpha = \{x \in dom f | f(x) \leq \alpha\}$ adalah konveks. Catatan jika f konveks, maka otomatis f kuasikonveks. Fungsi kuasikonveks dapat mempunyai daerah datar lokal.

f kuasikonkaf jika $-f$ kuasikonveks, yaitu himpunan superlevel $\{x | f(x) \geq \alpha\}$ konveks. Suatu fungsi yang merupakan fungsi kuasikonveks dan kuasikonkaf disebut kuasilinear.

Fungsi kuasikonveks mempunyai banyak fitur sama dengan fungsi konveks, namun juga sejumlah perbedaan penting. Sifat-sifat kuasikonveks berikut membantu dalam menentukan kekuasikonvekskan:

1. f kuasikonveks jika dan hanya jika f kuasi konveks pada garis, yaitu $f(x_0 + th)$ kuasikonveks dalam t untuk setiap x_0, h
2. Modifikasi Ketaksamaan Jensen: f kuasikonveks jika dan hanya jika untuk setiap $x, y \in dom f, \theta \in [0,1]$,

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \max\{f(x), f(y)\};$$

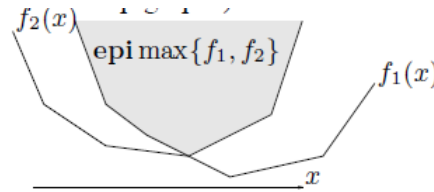
3. Untuk f terdiferensial, f kuasikonveks \Leftrightarrow untuk semua $x, y \in dom f$

$$f(y) \leq f(x) \Rightarrow (y - x)^T \nabla f(x) \leq 0$$

4. Perkalian positif

f kuasikonveks, $\alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha f$ kuasikonveks.

5. Supremum sepotong-sepotong: f_1, f_2 kuasikonveks $\Rightarrow \max\{f_1, f_2\}$ kuasikonveks. (merupakan perluasan ke supremum atas sebarang himpunan).



6. Transformasi affine dari domain, f kuasikonveks $\Rightarrow f(Ax + b)$ kuasikonveks.
7. Transformasi fraksional linear dari domain, f kuasikonveks $\Rightarrow f\left(\frac{Ax+b}{c^T x+d}\right)$ kuasikonveks pada $c^T x + d > 0$.
8. Komposisi dengan fungsi naik monoton: f kuasikonveks, g monoton naik $\Rightarrow g(f(x))$ kuasikonveks.
9. Jumlahan fungsi kuasikonveks secara umum bukan fungsi kuasikonveks.
10. f kuasikonveks dalam $x, y \Rightarrow g(x) = \inf_y f(x, y)$ kuasikonveks dalam x .

4. Masalah Optimisasi Konveks (Bazarrá, Sherali, and Shetty, 1993)

Pada bagian ini dibahas mengenai formulasi masalah optimisasi secara umum. Pandang masalah optimisasi dalam bentuk standar berikut ini:

Meminimumkan $f_0(x)$

dengan kendala $f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m$

$$h_i(x) = 0, i = 1, \dots, p$$

dengan $f_i, h_i: R^n \rightarrow R; x$ adalah variabel optimisasi; f_0 adalah fungsi tujuan atau fungsi biaya; $f_i(x) \leq 0$ adalah kendala ketaksamaan. Secara geometri, masalah ini berhubungan dengan meminimumkan f_0 , atas suatu himpunan yang dideskripsikan sebagai irisan himpunan sublevel-0 dari $f_i, \forall i$ dengan wilayah dideskripsikan oleh himpunan solusi-0 dari $h_i, \forall i$.

Titik x adalah layak jika memenuhi kendala-kendala; himpunan layak C adalah himpunan semua titik layak; dan masalah adalah layak jika terdapat titik layak. Masalah dikatakan tak terbatas jika $m = p = 0$. Nilai optimal dinotasikan dengan $f^* = \inf_{x \in C} f_0(x)$, dan $f^* = +\infty$ jika masalah tak layak. Titik $x \in C$ adalah titik optimal jika $f(x) = f^*$ dan himpunan optimal adalah $X_{opt} = \{x \in C | f(x) = f^*\}$.

Secara implisit kendala dapat dinyatakan sebagai: $x \in \text{dom } f_i, x \in \text{dom } h_i$, yaitu x harus berada di dalam himpunan

$$D = \text{dom } f_0 \cap \dots \cap \text{dom } f_m \cap \text{dom } h_1 \cap \dots \cap \text{dom } h_p$$

yang disebut dengan domain masalah.

Suatu masalah layak adalah kasus khusus dari masalah standar, yang merupakan pencarian sebarang titik layak. Maka masalah sesungguhnya adalah

- Mencari $x \in C$
- Atau menentukan $C = \emptyset$.

Secara ekuivalen, masalah layak adalah masalah yang menyelesaikan sistem persamaan atau ketaksamaan

$$f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m$$

$$h_i(x) = 0, i = 1, \dots, p$$

atau menentukan bahwa masalah tak konsisten.

Suatu masalah optimisasi dalam bentuk standar adalah masalah optimisasi konveks jika f_0, f_1, \dots, f_m semuanya konveks, dan h_i semuanya affine:

Meminimumkan $f_0(x)$

dengan kendala $f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m$

$$a_i^T x - b_i = 0, i = 1, \dots, p.$$

Masalah ini sering dituliskan dalam bentuk

Meminimumkan $f_0(x)$
dengan kendala $f_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m$
 $Ax = b.$
dengan $A \in R^{p \times n}$ dan $b \in R^p.$

Masalah optimisasi konveks mempunyai tiga sifat penting yang membuat masalah ini menjadi lebih baik daripada masalah optimisasi non konveks yaitu:

1. Tidak ada peminimal lokal: sebarang optimum lokal merupakan optimum global.
2. Deteksi ketaklayakan pasti: menggunakan teorema dualitas, algoritma menjadi lebih mudah ditentukan.
3. Metode solusi numerik efisien dalam menentukan masalah yang sangat besar.

Untuk memahami keoptimalan global dalam masalah konveks, pandang bahwa $x \in C$ adalah optimal lokal jika memenuhi

$$y \in C, \|y - x\| \leq R \Rightarrow f_0(y) \geq f_0(x)$$

untuk suatu $R > 0$. Suatu titik $x \in C$ optimal global berarti bahwa

$$y \in C \Rightarrow f_0(y) \geq f_0(x).$$

Untuk masalah optimisasi konveks, sebarang solusi lokal juga solusi global.

Bukti:

Misalkan x optimal lokal, namun terdapat $y \in C$, dengan $f_0(y) < f_0(x)$. Maka dapat diambil langkah kecil dari x ke y yaitu $z = \lambda y + (1 - \lambda)x$ dengan $\lambda > 0$ kecil. Maka z dekat dengan x , dengan $f_0(z) < f_0(x)$ yang kontradiksi dengan optimal lokal.

Terdapat juga syarat order satu untuk menentukan keoptimalan masalah optimisasi konveks. Misalkan f_0 terdiferensial, maka $x \in C$ optimal jika dan hanya jika

$$y \in C \Rightarrow \nabla f_0(x)^T (y - x) \geq 0.$$

Sehingga $-\nabla f_0(x)$ mendefinisikan bidang hiper penyokong untuk C pada x . Artinya jika bergerak dari x sepanjang y layak yang lain, f_0 tidak turun.

KESIMPULAN

Dalam paper ini direview beberapa hal penting dalam masalah himpunan konveks, fungsi konveks dan masalah optimisasi konveks.

DAFTAR PUSTAKA

Bazarra, M.S., Sherali, H.D., and Shetty, C.M. 1993. *Nonlinear Programming. Theory and Algorithms*. John Wiley and Sons. Second Edition.

Ben-Tal, A. And Nemirovski, A. 2001. *Lectures on Modern Convex Optimization. Analysis, Algorithms, and Engineering Applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics.

Luenberger, D.G. 1969. *Optimization by Vector Space Methods*. John Wiley and Sons.

-----, 1984. *Linear and Nonlinear Programming*. Addison-Wisley, second edition.

Mangasarian, O. 1994. *Nonlinear Programming*. Society for Industrial and Applied Mathematics.

