METODE REDUKSI UKURAN PADA MASALAH PENUGASAN KUADRATIK SIMETRIS

(Size Reduction Method over Simmetric Quadratic Assignment Problem (SQAP))

Caturiyati[1]

[1]Staf Pengajar Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

E-mail: wcaturiyati@yahoo.com

Abstrak. Masalah penugasan kuadratik simetris (SQAP) merupakan suatu optimisasi masalah penugasan *N* fasilitas ke *N* lokasi, dengan setiap (i,k) fasilitas akan ditugaskan pada (j,n) lokasi, $i,j,k,n \in B^{+}, i,j,k,n \le N$, dan masing-masing hanya melaksanakan satu tugas. Masalah SQAP adalah masalah menentukan total biaya penugasan seekonomis mungkin. Dalam paper ini akan didiskusikan suatu metode yang mereduksi matriks biaya berukuran $N \times N$ menjadi berukuran $(N-1)\times(N-1)$.

Kata-kata kunci: masalah penugasan kuadratik simetris, metode reduksi ukuran.

1. Pendahuluan

Masalah penugasan kuadratik (QAP) merupakan masalah optimisasi yang dapat dijumpai pada berbagai bidang ilmu, seperti ekonomi, riset operasi, dan teknik [1]. Masalah ini merupakan masalah penugasan *N* fasilitas ke *N* lokasi tertentu, yang meminimumkan biaya kuadratik total.

QAP menjadi bagian dari masalah NP-*complete* dan dipandang sebagai suatu masalah yang paling sulit diselesaikan. Strategi-strategi penyelesaian eksak (*exact solution*) besar kemungkinan untuk gagal, kecuali untuk kasus kecil $(N \le 20)$. Sehingga banyak dikembangkan metode-metode *heuristic*. Salah satu metode eksak yang digunakan untuk menyelesaikan masalah QAP adalah metode *Branch and Bound* [2] dan [3].

Paper ini tidak akan membahas optimisasi masalah QAP. Namun akan membahas suatu metode untuk memperkecil ukuran matriks biaya yang ada pada masalah QAP simetris, yang akan memperkecil ukuran matriks arus dan matriks jarak, yaitu metode reduksi ukuran.

2. Formulasi masalah QAP

Suatu masalah penugasan linear (*Linear Assignment Problem* / LAN) merupakan suatu masalah yang diilustrasikan dalam contoh sederhana sebagai berikut. Andaikan seorang manajer perusahaan 'X' menginginkan dua orang karyawannya untuk menyelesaikan dua macam tugas dalam waktu (hari) yang seminimum mungkin, setiap karyawan harus menyelesaikan satu tugas saja. Jika karyawan A dapat menyelesaikan tugas 1 dalam 3 hari, tugas 2 dalam 5 hari, sedangkan karyawan B dapat menyelesaikan tugas 1 dalam 4 hari, tugas 2 dalam 2 hari. Maka kedua tugas dapat selesai dalam 3 hari, dengan karyawan A mengerjakan tugas 1 dan karyawan B mengerjakan tugas 2.

Definisi masalah QAP adalah menempatkan *N* fasilitas terhadap *N* lokasi tertentu, dengan setiap pasangan fasilitas (i,k), arus komoditasnya dinotasikan dengan $f(i,k)$, diketahui, dan untuk setiap pasangan lokasi (j,n), jaraknya dinotasikan dengan $d(j,n)$, juga diketahui. Biaya transportasi antara fasilitas i dan k, dengan fasilitas i ditugaskan ke lokasi j dan fasilitas k ditugaskan ke lokasi n, didefinisikan sebagai berikut

$$f(i,k).d(j,n)+f(k,i)+d(n,j),$$

dengan tujuan mencari penugasan yang jumlah biaya transportasinya seminimum mungkin.

Formulasi umum suatu masalah QAP didefinisikan sebagai berikut:

Diberikan N^4 koefisien biaya $C_{ijkn} \geq 0 \quad (i,j,k,n \leq N)$ yang akan menentukan suatu matriks penyelesaian $N \times N$

$$U = [u_{ab}] \tag{1}$$

Dan disebut dengan penugasan, dan akan meminimumkan fungsi biaya

$$R(U) = \sum_{ijkn} C_{ijkn}.u_{ij}.u_{kn} \tag{2}$$

Terhadap kendala-kendala pada U

$$u_{ij} = 0,1 \quad (i,j \leq N) \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{N} u_{ij} = 1 \quad (j \leq N) \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{N} u_{ij} = 1 \quad (i \leq N). \tag{5}$$

3. Matriks-matriks pada QAP

Dari definisi masalah QAP dapat ditentukan matriks-matriks berikut:

(i) Matriks arus komoditas, F, berukuran $N \times N$, dengan entri-entri matriks adalah $F_{ik} = f(i,k)$,

(ii) Matriks jarak, D, berukuran $N \times N$, dengan entri-entri matriks adalah $D_{jn} = d(j,n)$,

(iii) Matriks biaya berupa matriks blok berukuran $N^2 \times N^2$, dengan entri-entri matriks adalah $C_{ijkn} = F_{ik}.D_{jn} = f(i,k).d(j,n), \;\; i,j,k,n \in B^+, i,j,k,n \geq N$.

Sebagai ilustrasi, diambil $N = 3$, diperoleh :

matriks arus komoditas $F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix}$, matriks jarak $D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}$, dan matriks biaya

$$C = \left[\begin{array}{c|c|c} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ \hline C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ \hline C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{array}\right]$$

$$
= \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
C_{1111} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1211} & C_{1212} & C_{1213} & C_{1311} & C_{1312} & C_{1313} \\
C_{1121} & C_{1122} & C_{1123} & C_{1221} & C_{1222} & C_{1223} & C_{1321} & C_{1322} & C_{1323} \\
C_{1131} & C_{1132} & C_{1133} & C_{1231} & C_{1232} & C_{1233} & C_{1331} & C_{1332} & C_{1333} \\
\hline
C_{2111} & C_{2112} & C_{2113} & C_{2211} & C_{2212} & C_{2213} & C_{2311} & C_{2312} & C_{2313} \\
C_{2121} & C_{2122} & C_{2123} & C_{2221} & C_{2222} & C_{2223} & C_{2321} & C_{2322} & C_{2323} \\
C_{2131} & C_{2132} & C_{2133} & C_{2231} & C_{2232} & C_{2233} & C_{2331} & C_{2322} & C_{2333} \\
\hline
C_{3111} & C_{3112} & C_{3113} & C_{3211} & C_{3212} & C_{3213} & C_{3311} & C_{3312} & C_{3313} \\
C_{3121} & C_{3122} & C_{3123} & C_{3221} & C_{3222} & C_{3223} & C_{3321} & C_{3322} & C_{3323} \\
C_{3131} & C_{3132} & C_{3133} & C_{3231} & C_{3232} & C_{3233} & C_{3331} & C_{3332} & C_{3333}
\end{array}\right].
$$

Perhatikan bahwa suatu penugasan hanya boleh dilakukan dari satu fasilitas ke satu lokasi. Sehingga pada matriks sub blok C_{ij}, misal

$$
C_{22} = \begin{bmatrix} C_{2211} & C_{2212} & C_{2213} \\ C_{2221} & C_{2222} & C_{2223} \\ C_{2231} & C_{2232} & C_{2233} \end{bmatrix},
$$

$C_{2211} = F_{21}.D_{21} = f(2{,}1).d(2{,}1)$ berarti terdapat biaya transportasi antara fasilitas 2 dan fasilitas 1, berupa penugasan fasilitas 2 ke lokasi 2 dan fasilitas 1 ke lokasi 1. Hal ini bermakna sebab penugasan dilakukan dari satu fasilitas ke satu lokasi.

Sedangkan pada $C_{2212} = F_{21}.D_{22} = f(2{,}1).d(2{,}2)$, berarti biaya transportasi antara fasilitas 2 dan fasilitas 1, berupa penugasan fasilitas 2 ke lokasi 2 dan fasilitas 1 ke lokasi 2, menjadi tidak bermakna, sebab terdapat penugasan dari satu fasilitas ke dua lokasi berbeda. Sehingga C_{2212} dapat dihilangkan dari matriks *C*. Demikian juga dengan beberapa entri dari matriks C yang tidak bermakna, juga dihilangkan dari matriks *C*.

Secara umum, agar $C_{ijkj} = F_{ij}D_{jj}$ mempunyai makna, maka *i* harus sama dengan *k*, secara sama agar $C_{ijin} = F_{ii}D_{jn}$ mempunyai makna, maka *j* harus sama dengan *n*. Yaitu agar satu fasilitas dapat ditugaskan ke hanya satu lokasi.

Sehingga diperoleh matriks *C* yang lebih bermakna, setelah beberapa entri tidak bermakna dihilangkan, yang ditandai dengan *.

$$
\mathrm{C} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
C_{1111} & * & * & * & C_{1212} & * & * & * & C_{1213} \\
* & C_{1122} & C_{1123} & C_{1221} & * & C_{1223} & C_{1321} & C_{1322} & * \\
* & C_{1132} & C_{1133} & C_{1231} & * & C_{1233} & C_{1331} & C_{1332} & * \\
\hline
* & C_{2112} & C_{2113} & C_{2211} & * & C_{2213} & C_{2311} & C_{2312} & * \\
C_{2121} & * & * & * & C_{2222} & * & * & * & C_{2323} \\
* & C_{2132} & C_{2133} & C_{2231} & * & C_{2233} & C_{2331} & C_{2322} & * \\
\hline
* & C_{3112} & C_{3113} & C_{3211} & * & C_{3213} & C_{3311} & C_{3312} & * \\
* & C_{3122} & C_{3123} & C_{3221} & * & C_{3223} & C_{3321} & C_{3322} & * \\
C_{3131} & * & * & * & C_{3232} & * & * & * & C_{3333}
\end{array}\right] \qquad (1)
$$

$$
= \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
F_{11}D_{11} & * & * & * & F_{11}D_{22} & * & * & * & F_{11}D_{33} \\
* & F_{12}D_{12} & F_{12}D_{13} & F_{12}D_{21} & * & F_{12}D_{23} & F_{12}D_{31} & F_{12}D_{32} & * \\
* & F_{13}D_{12} & F_{13}D_{13} & F_{13}D_{21} & * & F_{13}D_{23} & F_{13}D_{31} & F_{13}D_{32} & * \\
\hline
* & F_{21}D_{12} & F_{21}D_{13} & F_{21}D_{21} & * & F_{21}D_{23} & F_{21}D_{31} & F_{21}D_{32} & * \\
F_{22}D_{11} & * & * & * & F_{22}D_{22} & * & * & * & F_{22}D_{33} \\
* & F_{23}D_{12} & F_{23}D_{13} & F_{23}D_{21} & * & F_{23}D_{23} & F_{23}D_{31} & F_{23}D_{32} & * \\
\hline
* & F_{31}D_{12} & F_{31}D_{13} & F_{31}D_{21} & * & F_{31}D_{23} & F_{31}D_{31} & F_{31}D_{32} & * \\
* & F_{32}D_{12} & F_{32}D_{13} & F_{32}D_{21} & * & F_{32}D_{23} & F_{32}D_{31} & F_{32}D_{32} & * \\
F_{33}D_{11} & * & * & * & F_{33}D_{22} & * & * & * & F_{33}D_{33}
\end{array}\right]. \quad (2)
$$

Berikut ini didefinisikan matriks biaya linear, *L* berukuran $N \times N$, dengan

$L_{ij} = C_{ijij} = F_{ii}D_{jj}, \; i, j \le N$

yaitu biaya menempatkan fasilitas *i* ke lokasi *j*.

Disebut biaya "linear", sebab hanya satu fasilitas yang ditugaskan ke suatu lokasi. Ketika dua fasilitas secara bersamaan ditugaskan ke lokasi yang berbeda, maka biaya yang berkaitan disebut dengan biaya "*quadratic*".

Sebagai ilustrasi matriks biaya linear pada $N = 3$ yang telah dijabarkan sebelumnya,

$$
L = \begin{bmatrix} F_{11}D_{11} & F_{11}D_{22} & F_{11}D_{33} \\ F_{22}D_{11} & F_{22}D_{22} & F_{22}D_{33} \\ F_{33}D_{11} & F_{33}D_{22} & F_{33}D_{33} \end{bmatrix}. \quad (3)
$$

Dengan $F_{22}D_{33}$ bermakna biaya transportasi penugasan dari fasilitas 2 ke lokasi 3.

4. Metode Reduksi Ukuran

Pada bagian ini akan dibahas mengenai metode memperkecil ukuran matriks biaya *C*, yang diharapkan dapat mempersingkat jalannya penyelesaian masalah QAP, yaitu metode reduksi ukuran. Untuk mempermudah pemahaman dan penyampaian, diambil $N = 3$. Yang diharapkan dapat memberi gambaran dari teorema berikutnya yang masih berupa suatu *conjecture*.

Diberikan matriks arus komoditas $F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix}$, matriks jarak $D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}$, dan matriks biaya $C = \left[\begin{array}{c|c|c} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ \hline C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ \hline C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{array}\right]$ yang secara lengkap seperti pada (1) dan (2).

Diasumsikan matriks arus, *F*, berukuran $N \times N$ merupakan suatu matriks simetri, matriks jarak, D, berukuran $N \times N$ juga merupakan matriks simetri, $F_{ii} = 0$ atau $D_{jj} = 0$, untuk setiap $i, j \le N$. Diasumsikan pula penugasan awal adalah penugasan dari fasilitas 1 ke lokasi 1, yang berakibat

$$
C = \left[\begin{array}{c|c|c} C_{11} & * & * \\ \hline * & C_{22} & C_{23} \\ \hline * & C_{32} & C_{33} \end{array}\right],
$$

yaitu $C_{12}=F_{1k}D_{2n}$, $k,n\in B^{+}$ dan $k,n\le 3$, berupa biaya transportasi penugasan dari fasilitas 1 ke lokasi 2 dan dari fasilitas k ke lokasi n menjadi tidak bermakna. Demikian pula dengan C_{13},C_{21},C_{31}. Sehingga dapat dihilangkan dari matriks, ditandai dengan *.

Perhatikan sub blok matriks

$C_{11}=\begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1112} & C_{1113} \\ C_{1121} & C_{1122} & C_{1123} \\ C_{1131} & C_{1132} & C_{1133} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11}D_{11} & F_{11}D_{12} & F_{11}D_{13} \\ F_{12}D_{11} & F_{12}D_{12} & F_{12}D_{13} \\ F_{13}D_{11} & F_{13}D_{12} & F_{13}D_{13} \end{bmatrix}$, $F_{11}D_{12}$ berupa biaya transportasi penugasan dari fasilitas 1 ke lokasi 1 dan dari fasilitas 1 ke lokasi 2, yaitu terdapat penugasan dari satu fasilitas ke dua lokasi yang berbeda, sehingga $F_{11}D_{12}$ menjadi tidak bermakna dan dapat dihilangkan dari matriks, ditandai dengan *. Demikian pula dengan $F_{11}D_{13}$, $F_{12}D_{11}$, dan $F_{13}D_{11}$ dapat dihilangkan dari matriks. Sehingga diperoleh

$$C_{11}=\begin{bmatrix} C_{1111} & * & * \\ * & C_{1122} & C_{1123} \\ * & C_{1132} & C_{1133} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11}D_{11} & * & * \\ * & F_{12}D_{12} & F_{12}D_{13} \\ * & F_{13}D_{12} & F_{13}D_{13} \end{bmatrix}.$$

Secara sama untuk C_{22},C_{23},C_{32} dan C_{33}, sehingga diperoleh

$$C_{22}=\begin{bmatrix} C_{2211} & * & * \\ * & C_{2222} & * \\ * & * & C_{2233} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{21}D_{21} & * & * \\ * & F_{22}D_{22} & * \\ * & * & F_{23}D_{23} \end{bmatrix},$$

$$C_{23}=\begin{bmatrix} C_{2311} & * & * \\ * & * & C_{2323} \\ * & C_{2332} & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{21}D_{31} & * & * \\ * & * & F_{22}D_{33} \\ * & F_{23}D_{32} & * \end{bmatrix},$$

$$C_{32}=\begin{bmatrix} C_{3211} & * & * \\ * & C_{3222} & * \\ * & C_{3232} & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{31}D_{21} & * & * \\ * & F_{32}D_{22} & * \\ * & F_{33}D_{22} & * \end{bmatrix},$$

dan

$$C_{33}=\begin{bmatrix} C_{3311} & * & * \\ * & C_{3322} & * \\ * & * & C_{3333} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{31}D_{31} & * & * \\ * & F_{32}D_{32} & * \\ * & * & F_{33}D_{33} \end{bmatrix}.$$

Secara keseluruhan matriks biaya C menjadi

$$\mathrm{C}=\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} C_{1111} & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & C_{1122} & C_{1123} & * & * & * & * & * & * \\ * & C_{1132} & C_{1133} & * & * & * & * & * & * \\ \hline * & * & * & C_{2211} & * & * & C_{2311} & * & * \\ * & * & * & * & C_{2222} & * & * & * & C_{2323} \\ * & * & * & * & * & C_{2233} & * & C_{2322} & * \\ \hline * & * & * & C_{3211} & * & * & C_{3311} & * & * \\ * & * & * & * & C_{3222} & * & * & C_{3322} & * \\ * & * & * & * & C_{3232} & * & * & * & C_{3333} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} F_{11}D_{11} & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & F_{12}D_{12} & F_{12}D_{13} & * & * & * & * & * & * \\ * & F_{13}D_{12} & F_{13}D_{13} & * & * & * & * & * & * \\ \hline * & * & * & F_{21}D_{21} & * & * & F_{21}D_{31} & * & * \\ * & * & * & * & F_{22}D_{22} & * & * & * & F_{22}D_{33} \\ * & * & * & * & * & F_{23}D_{23} & * & F_{23}D_{32} & * \\ \hline * & * & * & F_{31}D_{21} & * & * & F_{31}D_{31} & * & * \\ * & * & * & * & F_{32}D_{22} & * & * & F_{32}D_{32} & * \\ * & * & * & * & F_{33}D_{22} & * & * & * & F_{33}D_{33} \end{array}\right].$$

Karena penugasan awal adalah dari fasilitas 1 ke lokasi 1, maka $C_{1111} = F_{11}D_{11}$ di dalam literatur QAP disebut menjadi '*superleader*'. Sedangkan entri-entri yang lain pada matriks biaya menjadi entri pada matriks biaya linear $L^{'}$ yang berukuran $(N-1)\times(N-1)$ = 2×2. Namakan $L' = \begin{bmatrix} L'_{11} & L'_{12} \\ L'_{21} & L'_{22} \end{bmatrix}$ dengan L'_{11}adalah total biaya penugasan dari fasilitas 2 ke lokasi 2, L'_{12}adalah total biaya penugasan dari fasilitas 2 ke lokasi 3, L'_{21}adalah total biaya penugasan dari fasilitas 3 ke lokasi 2, dan L'_{22}adalah total biaya penugasan dari fasilitas 3 ke lokasi 3.

Sehingga diperoleh

$L'_{11} = F_{12}D_{12} + F_{21}D_{21} + F_{22}D_{22}$,

$L'_{12} = F_{12}D_{13} + F_{21}D_{31} + F_{22}D_{33}$,

$L'_{21} = F_{13}D_{12} + F_{31}D_{21} + F_{33}D_{22}$, dan

$L'_{22} = F_{13}D_{13} + F_{31}D_{31} + F_{33}D_{33}$.

Yaitu matriks biaya linear

$$L' = \begin{bmatrix} L'_{11} & L'_{12} \\ L'_{21} & L'_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{12}D_{12} + F_{21}D_{21} + F_{22}D_{22} & F_{12}D_{13} + F_{21}D_{31} + F_{22}D_{33} \\ F_{13}D_{12} + F_{31}D_{21} + F_{33}D_{22} & F_{13}D_{13} + F_{31}D_{31} + F_{33}D_{33} \end{bmatrix}.$$

Pada matriks L', entri $L'_{(i-1),(j-1)}$ adalah biaya-biaya dari penugasan fasilitas 1 ke lokasi 1 dan dari fasilitas *i* ke lokasi *j* dengan $2 \le i, j \le N = 3$. Hal ini hampir sama dengan definisi matriks biaya linear original, dengan L_{ij} menotasikan biaya transportasi penugasan fasilitas *i* ke lokasi *j* . Namun dalam maslah ini ditambahkan biaya transportasi penugasan dari fasilitas 1 ke lokasi 1 yang sudah termasuk di dalam matriks biaya linear L'.

Perhatikan entri-entri matriks biaya linear L',

$L'_{(i-1),(j-1)} = F_{1i}D_{1j} + F_{i1}D_{j1} + F_{ii}D_{jj}$, $2 \le i, j \le N = 3$. Berdasarkan asumsi di awal, yaitu *F* dan *D* matriks-matriks simetri, sehingga berlaku $F_{i1}D_{j1} = F_{1i}D_{1j}$ dan asumsi bahwa $F_{ii} = 0$ atau $D_{jj} = 0$, sehingga berlaku $F_{ii}D_{jj} = 0$. Sehingga $L'_{(i-1),(j-1)} = 2F_{1i}D_{1j}$. Berdasrkan hal tersebut, jika diambil $F'_{(i-1),(i-1)} = 2F_{1i}$ dan $D'_{(j-1),(j-1)} = D_{1j}$, $2 \le i, j \le N = 3$ maka diperoleh $L'_{(i-1),(j-1)} = 2F_{1i}D_{1j} =$ $F'_{(i-1),(i-1)} . D'_{(j-1),(j-1)}$. Sedangkan entri lain pada *F'* dan *D'* ditentukan dengan elemen-elemen pada matriks biaya *C*, karena elemen-elemen tersebut harus masuk di dalam matriks biaya yang baru, *C'*.

Diperoleh $F'=\begin{bmatrix} 2F_{12} & F_{23} \\ F_{32} & 2F_{13} \end{bmatrix}$ dan $D'=\begin{bmatrix} D_{12} & D_{23} \\ D_{32} & D_{13} \end{bmatrix}$.

Teorema. (Conjecture, Choi [4]) *Jika suatu masalah QAP berukuran* $N \times N$ *memenuhi dua kondisi berikut:*

(i) matriks arus (F) dan matriks jarak (D) adalah matriks-matriks simetris,

(ii) $F_{ii}D_{jj} = 0$ *dipenuhi jika* $F_{ii} = 0$ *atau* $D_{jj} = 0$*, untuk setiap* $i, j \leq N$,

maka ukuran masalah QAP dapat direduksi menjadi $(N-1)\times(N-1)$.

5. Simpulan dan Saran

Simpulan:

1. Metode reduksi ukuran hanya memperkecil ukuran matriks dari $N \times N$ menjadi $(N-1)\times(N-1)$.
2. Jika diambil penugasan awal adalah menugaskan *N* fasilitas ke *N* lokasi N, maka masalah QAP menjadi menugaskan $(N-1)$ fasilitas ke $(N-1)$ lokasi, tepatnya jika menugaskan fasilitas 1, 2, …, *N* ke lokasi 1, 2, …, *N* menjadi menugaskan fasilitas 2, 3, …, *N* ke lokasi 2, 3, …, *N*.
3. Jika diasumsikan *F* dan *D* matriks-matriks simetri, sehingga berlaku $F_{i1}D_{j1} = F_{1i}D_{1j}$ dan asumsi bahwa $F_{ii} = 0$ atau $D_{jj} = 0$, sehingga berlaku $F_{ii}D_{jj} = 0$, maka metode reduksi ukuran dapat digeneralisasi seperti pada Teorema, yaitu suatu fasilitas dapat ditugaskan ke sebarang lokasi.

Saran:

Paper ini masih terbatas pada $N = 3$, belum diperumum dan belum menggunakan program komputer, sehingga pembaca dapat membahas untuk *N* yang tidak tertentu sehingga dapat membuktikan conjecture yang ada, serta dapat menggunakan program komputer sehingga dapat melakukan simulasi.

Daftar Pustaka

[1] Hahn, P. and Grant, T., 1998, "Lower Bounds for the Quadratic Assignment Problem Based Upon a Dual Formulation", Opertaion Research, Vol. 46, No. 6. http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.78.3796 diakses pada tanggal 3 Desember 2008.

[2] Hahn, P., Grant, T., and Hall, N., 1998, "A Branch-and-Bound Algorithm for the Quadratic Assignment Problem Based on the Hungarian Method", European Journal of Operational Research. http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.22.6527

diakses pada tanggal 3 Desember 2008.

[3] Hahn, P., Hightower, W., Johnson, T., Spielberg, M.G., and Roucairol, C., 2001, "Tree Elaboration Strategies in Branch-and-Bound Algorithms for solving the Quadratic Assignment Problem", Yugoslav Journal of Opertaion Research, Vol. 11, No. 1.
http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.19.283
diakses pada tanggal 3 Desember 2008.

[4] Choi, D., 2003, "Quadratic Assignment Problems (QAP) and its Size Reduction Method", Math Journal, Vol. 4, No. 1.
http://www.rose-hulman.edu/mathjournal/archives/2003/vol4-n1/paper/v4n1-7pd.pdf
diakses pada tanggal 3 Desember 2008.