EKSISTENSI SUBMODUL KETERCAPAIAN
TIPE FEEDBACK TERBESAR

Caturiyati
Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY
E-mail: caturiyati@yahoo.com

Sri Wahyuni
Jurusan Matematika FMIPA UGM
E-mail: swahyuni@indosat.net.id

INTISARI

Penelitian ini mengangkat masalah submodul (A,B)-invarian dan submodul ketercapaian yang muncul dari suatu masalah dalam teori sistem linear atas daerah ideal utama (d.i.u) yang merupakan generalisasi dari sistem linear atas lapangan bilangan real ($\mathbb{R}$). Penelitian ini lebih difokuskan pada masalah eksistensi submodul (A,B)-invarian terbesar dan submodul ketercapaian tipe feedback terbesar dalam submodul yang diberikan.
Kata kunci : sistem linear atas ring, submodul (A,B)-invarian, submodul ketercapaian tipe feedback.

ABSTRACT

This research discussed about the problems of the (A,B)-invariance submodule dan the reachability submodule that comes from the problems in the linear systems theory over the principal ideal domain (PID) as a generalization of the linear systems over the field of real number ($\mathbb{R}$). This research focused on the existence of the largest (A,B)-invariance submodule and the largest feedback reachability submodule in the given submodule.
Key words : linear systems over ring, (A,B)-invariance submodule, feedback reachability submodule.

PENDAHULUAN

Diberikan sistem (A,B,C) atas d.i.u $\Re$, dengan $A\in\Re^{nxn}$, $B\in\Re^{nxm}$, dan $C\in\Re^{lxn}$ berturut-turut disebut matriks sistem, matriks masukan (*input*), dan matriks keluaran (*output*). Selanjutnya didefinisikan $X:=\Re^{n}$, $U:=\Re^{m}$ dan $Y:=\Re^{l}$ yang masing-masing merupakan $\Re$-modul bebas. Sistem (A,B,C) untuk sistem waktu diskrit didefinisikan sebagai berikut:

$$\left.\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t)+Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}\right\}, \qquad (1.1)$$

dengan $x(t)\in X$, $u(t)\in U$, dan $y(t)\in Y$ berturut-turut disebut vektor keadaan (*state vector*), vektor masukan (*input vector*) dan vektor keluaran (*output vector*), t=0,1,2,3,… .

Jika C=0, maka sistem (A,B,C) disingkat dengan notasi (A,B). Submodul tercapai (*reachable sumodule*) untuk sistem (A,B), dilambangkan $\langle A \mid \mathrm{Im}B \rangle$, didefinisikan sebagai

$$\langle A \mid \mathrm{Im}B \rangle := \mathrm{Im}B + A(\mathrm{Im}B) + \ldots + A^{n-1}(\mathrm{Im}B) \subset X, \tag{1.2}$$

dengan ImB adalah image dari B. Pasangan (A,B) dikatakan tercapai jika memenuhi kesamaan $\langle A \mid \mathrm{Im}B \rangle = X$.

Dalam sistem linear atas lapangan R, jumlahan dua subruang ketercapaian tipe feedback merupakan subruang ketercapaian tipe feedback juga, sehingga terjamin eksistensi subruang ketercapaian tipe feedback terbesar dalam subruang yang diberikan. Sedangkan dalam sistem linear atas d.i.u $\mathfrak{R}$, tidak selalu berlaku jumlahan dua submodul ketercapaian tipe feedback merupakan submodul ketercapaian tipe feedback juga, sehingga tidak terjamin eksistensi submodul ketercapaian tipe feedback terbesar dalam submodul yang diberikan. Oleh karena itu penelitian ini bertujuan untuk : menyelidiki eksistensi submodul ketercapaian tipe feedback terbesar dalam submodul yang diberikan pada sistem linear atas d.i.u $\mathfrak{R}$.

SUBMODUL (A,B)-INVARIAN

Sebagai dasar untuk membahas eksistensi submodul ketercapaian tipe feedback terbesar dalam submodul yang diberikan, perlu diuraikan terlebih dahulu mengenai submodul (A,B)-invarian dan submodul (A,B)-invarian tipe feedback, yang sebagian besar dikutip dari **Hautus** (**1982**) dan **Wonham** (**1979**). Berikut ini akan diberikan dasar-dasar Pendekatan Geometri untuk Sistem Linear (1.1).

Definisi 2.1. (**Hautus**, **1982**) *Diberikan* $\mathcal{S}$*submodul dalam* $\mathfrak{R}$*-modul* X.

(i) $\mathcal{S}$*dikatakan submodul* (A,B)-*invarian jika* $A\,\mathcal{S} \subset \mathcal{S} + \mathrm{Im}B$.

(ii) $\mathcal{S}$*dikatakan submodul* (A,B)-*invarian tipe feedback jika terdapat* $F \in \mathfrak{R}^{mxn}$ *yang memenuhi* $(A+BF)\,\mathcal{S} \subset \mathcal{S}$.

Dengan demikian jika $\mathbf{F}(\mathcal{S};A,B)$ menotasikan himpunan semua matriks $F \in \mathfrak{R}^{mxn}$ yang memenuhi sifat $(A+BF)\mathcal{S} \subset \mathcal{S}$dan $\mathbf{F}(\mathcal{S};A,B) \neq \emptyset$, maka dapat disimpulkan bahwa $\mathcal{S}$ submodul (A,B)-invarian tipe feedback.

Proposisi berikut menyatakan bahwa jika suatu submodul adalah submodul (A,B)-invarian tipe feedback, maka *closure*nya juga merupakan submodul (A,B)- invarian tipe feedback. Serta menunjukkan bahwa setiap submodul (A,B)-invarian tipe feedback pasti merupakan submodul (A,B)-invarian.

Proposisi 2.2. *Diberikan* $\mathcal{S}$ *submodul* X.

(i) *Jika* $\mathcal{S}$ *submodul* (A,B)-*invarian tipe feedback*, *maka closure* $\mathcal{S}$ *dalam* X *juga submodul* (A,B)-*invarian tipe feedback* .

(ii) *Jika* $\mathcal{S}$ *submodul* (A,B)-*invarian tipe feedback maka* $\mathcal{S}$ *submodul* (A,B)-*invarian*.

Di dalam sistem linear atas lapangan berlaku hubungan $\mathcal{S}$ submodul (A,B)-invarian jika dan hanya jika $\mathcal{S}$ submodul (A,B)-invarian tipe feedback (**Hautus**, **1982**). Dalam sistem linear atas ring hanya berlaku jika $\mathcal{S}$ submodul (A,B)-invarian tipe feedback maka $\mathcal{S}$ submodul (A,B)-invarian. Proposisi 2.2(i) tidak berlaku untuk submodul (A,B)-invarian artinya jika submodul (A,B)-invarian maka $Cl_X(\mathcal{S})$ belum tentu merupakan submodul (A,B)-invarian. Seperti ditunjukkan dalam contoh berikut ini

Contoh 2.3. Diberikan $\Re$ d.i.u yang terdiri dari polinomial-polinomial atas lapangan bilangan real $\mathbb{R}$, yaitu $\Re := \mathbb{R}[\sigma]$, dan $X := \Re^2 = \left\{ \begin{bmatrix} p_1(\sigma) \\ p_2(\sigma) \end{bmatrix} \middle| \, p_i(\sigma) \in \Re \right\}$,

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathcal{S} = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 0 \\ \sigma \end{bmatrix}$. Akan ditunjukkan bahwa submodul (A,B)-invarian tetapi $Cl_X(\mathcal{S})$ bukan submodul (A,B)-invarian.

Bukti: Mudah ditunjukkan submodul (A,B)-invarian. Selanjutnya akan ditunjukkan $Cl_X(\mathcal{S})$ bukan submodul (A,B)-invarian. Mudah ditunjukkan $Cl_X(\mathcal{S}) = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$ACl_X(\mathcal{S}) = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $\mathrm{Im}B = \begin{bmatrix} \sigma \\ 1 \end{bmatrix}$. Dapat dilihat bahwa $Cl_X(\mathcal{S}) + \mathrm{Im}B = \mathrm{Im}B$ yakni: jelas $\mathrm{Im}B \subset Cl_X(\mathcal{S}) + \mathrm{Im}B$. Akan mudah ditunjukkan sebaliknya $Cl_X(\mathcal{S}) + \mathrm{Im}B \subset \mathrm{Im}B$. Selanjutnya akan ditunjukkan $ACl_X(\mathcal{S}) \not\subset Cl_X(\mathcal{S}) + \mathrm{Im}B$. Ambil $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in ACl_X(\mathcal{S})$. Andaikan

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in Cl_X(\mathcal{S}) + \mathrm{Im}B = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} \sigma \\ 1 \end{bmatrix}$. Maka $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma p_1(\sigma) \\ q(\sigma) \end{bmatrix}$ untuk suatu $p_1(\sigma)$, $q(\sigma) \in \Re$. Dari kesamaan dua vektor di atas diperoleh $\sigma p_1(\sigma) = 1$, berarti $p_1 = \frac{1}{\sigma} \notin \Re$. Bertentangan

$p_1(\sigma)\in\Re$, seharusnya $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\notin Cl_X(S)+ImB$. Jadi ada $z=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\in ACl_X(S)$ tetapi $z\notin Cl_X(S)+ImB$. Akibatnya $ACl_X(S)\not\subset Cl_X(S)+ImB$. Dengan kata lain $Cl_X(S)$ bukan submodul (A,B)-invarian. ☉

Diberikan $\Im(X;A,B)$ menotasikan kelas dari semua submodul (A,B)-invarian. Berikut ini akan ditunjukkan $\Im(X;A,B)$ tertutup terhadap penjumlahan dan digunakan untuk menjamin eksistensi submodul terbesar dalam $\Im(X;A,B)$.

Lemma 2.4. *Diberikan* S_1 *dan* S_2 *submodul-submodul* X. *Jika* S_1 *dan* S_2 *submodul-submodul di dalam* $\Im(X;A,B)$ *maka* S_1+S_2 *juga submodul di dalam* $\Im(X;A,B)$.

Dalam sistem linear atas lapangan dinotasikan B adalah keluarga subruang-subruang dalam X, dengan $\mathrm{B}\neq\emptyset$, kemudian didefinisikan V^* sebagai subruang terbesar atau supremum dalam B, yaitu V^* adalah subruang yang memuat setiap $V\in\mathrm{B}$. Sehingga dapat ditulis $V^*=\sup\{\ V \mid V\in\mathrm{B}\}$, atau secara singkat $V^*=\sup\mathrm{B}$. Adanya subruang terbesar dalam B dijamin oleh lemma berikut ini.

Lemma 2.5. *Jika* B *keluarga subruang dalam* X, $\mathrm{B}\neq\emptyset$, *dan* B *tertutup terhadap penjumlahan, maka elemen supremum* V^* *termuat dalam* B.

Di dalam sistem linear atas ring, jika Ssubmodul dalam X tertentu, maka $\Im(S;A,B)$ menotasikan subkelas dari semua submodul (A,B)-invarian dalam Syaitu $\Im(S;A,B):=\{\ V \mid V\in\Im(X;A,B)\ \&\ V\subset S\}$. Jelas $\{0\}\in\Im(S;A,B)$ sebab dengan mengambil sebarang $0\in\Im(S;A,B)$, maka $\Im(S;A,B)\neq\emptyset$, karena Sjuga merupakan ruang bagian dari dirinya sendiri. $\Im(S;A,B)$ tertutup terhadap penjumlahan. Sehingga menurut Lemma 2.5 $\Im(S;A,B)$ mempunyai supremum V^*, ditulis $V^*:=\sup\Im(S;A,B)$. Dari uraian di atas dapat disimpulkan teorema sebagai berikut:

Teorema 2.6. (**Wonham**, **1979**) *Diberikan* $A\in\Re^{nxn}$ *dan* $B\in\Re^{nxm}$. *Untuk setiap submodul* $S\subset X$ *terdapat dengan tunggal submodul* (A,B)-*invarian supremum* V^*, *yaitu* $V^*:=\sup\Im(S;A,B)$.

Sehingga Lemma 2.5 dan Teorema 2.6 menjamin adanya submodul terbesar atau supremum dalam kasus submodul (A,B)-invarian. Lemma 2.4 belum tentu berlaku dalam kasus submodul (A,B)-invarian tipe feedback; yaitu jika S_1 dan S_2 submodul (A,B)-invarian tipe feedback, belum tentu S_1+S_2 submodul (A,B)-invarian tipe feedback. Sehingga untuk kasus submodul (A,B)-invarian tipe feedback tidak ada jaminan eksistensi submodul terbesar atau supremum.

SUBMODUL KETERCAPAIAN

Pada bagian ini pembicaraan lebih ditekankan pada eksistensi submodul ketercapaian tipe feedback terbesar dalam submodul yang diberikan. Namun sebelumnya dipresentasikan dahulu pengertian-pengertian mendasar mengenai submodul ketercapaian dan submodul ketercapaian tipe feedback, yang merupakan inti pembicaraan ini.

Definisi 3.1. (**Wonham**, **1985**) *Diberikan* S *submodul dalam* $\Re$*-modul* X.

(i) *Submodul* S *disebut submodul ketercapaian untuk sistem* (A,B) *jika untuk setiap* $\tilde{x} \in S$ *terdapat waktu* $T \geq 0$ *dan barisan masukan* $u = (u(t))_{t=0}^{\infty}$ *sehingga* $x(t;0,u)$ *berada dalam* S *untuk* $t=0,1,2,\ldots$ *dan* $x(T;0,u) = \tilde{x}$.

(ii) *Submodul* S *disebut submodul ketercapaian tipe feedback untuk sistem* (A,B) *jika terdapat* $F \in \Re^{mxn}$ *dan* $G \in \Re^{mxm}$ *sehingga* $S = \langle A + BF \mid Im(BG) \rangle$.

Notasi $\langle A + BF \mid Im(BG) \rangle$ seperti didefinisikan pada (1.2)

Ito dan **Inaba** (**1997**) menyimpulkan, bahwa setiap submodul ketercapaian tipe feedback pasti submodul ketercapaian. Tetapi submodul ketercapaian tidak perlu submodul ketercapaian tipe feedback, walaupun di dalam sistem linear atas lapangan bilangan real R dua pernyataan tersebut equivalen.

Berikut ini diberikan lemma yang menunjukkan pernyataan lain tentang submodul ketercapaian tipe feedback dan hubungannya dengan submodul (A,B)-invarian tipe feedback, yang pembuktiannya mengacu pada **Wonham dkk** (**1970**) dan **Wonham** (**1985**). Sifat ini akan digunakan untuk membuktikan Proposisi 3.8.

Lemma 3.2. *Diberikan* S *submodul* X.

(i) S *submodul ketercapaian tipe feedback untuk sistem* (A,B) *jika dan hanya jika terdapat* $F \in \Re^{mxn}$ *sedemikian hingga* $S = \langle A + BF \mid ImB \cap S \rangle$.

(ii) *Jika* S *submodul ketercapaian tipe feedback untuk sistem* (A,B), *maka* $S = \langle A + BF \mid ImB \cap S \rangle$ *untuk semua* $F \in \mathbf{F}(S;A,B)$.

Dari Lemma 3.2(ii) disimpulkan, jika S submodul ketercapaian tipe feedback, maka S submodul (A,B)-invarian tipe feedback dan himpunan $\mathbf{F}(S;A,B)$ tidak kosong. Selanjutnya contoh berikut akan menunjukkan suatu submodul ketercapaian tipe feedback tidak perlu tertutup dalam X, dan *closure* dari submodul ketercapaian tipe feedback tidak selalu submodul ketercapaian tipe feedback.

Contoh 3.3. Diberikan $\mathfrak{R}$ d.i.u yang terdiri dari polinomial-polinomial atas lapangan bilangan real R, yaitu $\mathfrak{R}:=R[\sigma]$, dan $X:=\mathfrak{R}^2=\left\{\begin{bmatrix} p_1(\sigma) \\ p_2(\sigma)\end{bmatrix} \mid p_i(\sigma)\in\mathfrak{R}\right\}$,

$A:=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1\end{bmatrix}, B:=\begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}, S:=\mathrm{Im}\begin{bmatrix} \sigma \\ 0\end{bmatrix}$, akan ditunjukkan

(i) S submodul ketercapaian tipe feedback tidak tertutup dalam X dan

(ii) $Cl_X(S)$ bukan submodul ketercapaian tipe feedback.

Jawab:

(i) S submodul A-invarian yaitu $AS\subset S$. Kemudian $S\cap \mathrm{Im}B = S$, dan sehingga bisa ditunjukkan bahwa S submodul ketercapaian, yaitu $\langle A \mid \mathrm{Im}B \cap S\rangle = S$. $\langle A \mid \mathrm{Im}B \cap S\rangle$ $= \mathrm{Im}B\cap S + A(\mathrm{Im}B\cap S) = S + AS = S$, sebab $AS\subset S$. Berarti S merupakan submodul ketercapaian tipe feedback, yaitu dipenuhi $\langle A+BF \mid \mathrm{Im}B \cap S\rangle = S$, dengan mengambil $F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$. Maka menurut Lemma 3.2 berlaku $\langle A+BF \mid \mathrm{Im}B \cap S\rangle$ = $\langle A \mid \mathrm{Im}B \cap S\rangle = S$. Sementara itu $Cl_X(S) = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} 1 \\ 0\end{bmatrix}$, maka $Cl_X(S)\neq S$, sehingga S tidak tertutup di X.

(ii) Secara analog $Cl_X(S)$ merupakan A-invarian yaitu $ACl_X(S)\subset Cl_X(S)$. Selanjutnya ditunjukkan $Cl_X(S)\cap\mathrm{Im}B = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} \sigma \\ 0\end{bmatrix}$ dan $\langle A \mid Cl_X(S)\cap \mathrm{Im}B\rangle = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} \sigma \\ 0\end{bmatrix} \neq Cl_X(S)$.

Diperoleh $Cl_X(S)$ bukan submodul ketercapaian. Dengan mengambil sebarang $F=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$, maka menggunakan Lemma 3.2 diperoleh $\langle A+BF \mid Cl_X(S)\cap \mathrm{Im}B\rangle =$ $\langle A \mid Cl_X(S)\cap \mathrm{Im}B\rangle = \mathrm{Im}\begin{bmatrix} \sigma \\ 0\end{bmatrix} \neq Cl_X(S)$. Dengan kata lain $Cl_X(S)$ bukan submodul ketercapaian tipe feedback. Terbukti $\mathcal{S}$ submodul ketercapaian tipe feedback, tetapi $Cl_X(\mathcal{S})$ submodul ketercapaian tipe feedback. ⊙

Untuk sistem atas lapangan bilangan real $\mathbb{R}$, jumlahan dua subruang ketercapaian tipe feedback juga subruang ketercapaian tipe feedback. Tetapi untuk sistem atas d.i.u $\Re$ tidak berlaku demikian, sehingga tidak ada jaminan bahwa submodul ketercapaian tipe feedback terbesar selalu ada dalam keluarga submodul ketercapaian tipe feedback. Teorema berikut ini akan menunjukkan jumlahan dua submodul ketercapaian tipe feedback merupakan submodul ketercapaian.

Teorema 3.4. *Jika* $\mathcal{S}_1$*dan* $\mathcal{S}_2$ *submodul-submodul ketercapaian tipe feedback maka* $\mathcal{S}_1+\mathcal{S}_2$ *submodul ketercapaian* (*tidak selalu tipe feedback*).

Bukti: Ambil sebarang $\tilde{x} \in \mathcal{S}_1+\mathcal{S}_2$. Maka terdapat $\tilde{x}_1 \in \mathcal{S}_1$ dan $\tilde{x}_2 \in \mathcal{S}_2$ sehingga $\tilde{x} = \tilde{x}_1+\tilde{x}_2$. Karena $\mathcal{S}_1$ submodul ketercapaian, maka menurut Definisi 3.1 (i), terdapat $T_1 \geq 0$ dan barisan masukan $u = \left(u(t)\right)_{t=0}^{\infty}$ sehingga $x(t;0,u) \in \mathcal{S}_1$, untuk setiap $t=0,1,2,\ldots$ dan $x(T_1;0,u)= \tilde{x}_1$. Analog, maka terdapat $T_2 \geq 0$ dan barisan masukan $v=\left(v(t)\right)_{t=0}^{\infty}$ sehingga $x(t;0,v) \in \mathcal{S}_2$, untuk setiap $t=0,1,2,\ldots$ dan $x(T_2;0,v)=\tilde{x}_2$. Ambil $T=\text{maks}\{T_1,T_2\} \geq 0$. Terdapat barisan masukan $w = \left(u(t)+v(t)\right)_{t=0}^{\infty}$. Jelas $x(t,0,w) \in \mathcal{S}_1+\mathcal{S}_2$, sebab $x(t,0,w)=x(t;0,u)+x(t;0,v)$ dan $x(T,0,w) = \tilde{x} = \tilde{x}_1+\tilde{x}_2$.⊙

Berikut ini akan ditunjukkan adanya submodul ketercapaian tipe feedback terbesar dalam submodul yang diberikan, yang akan diuraikan dalam Proposisi 3.8. Sebelumnya akan diuraikan dulu Algoritma Submodul Ketercapaian sebagai berikut. Diberikan $\mathcal{S} \subset X$ adalah suatu submodul, $\mathcal{X}(\mathcal{S};A,B)$ menotasikan keluarga semua submodul ketercapaian dalam $\mathcal{S}$, yaitu $\mathcal{X}(\mathcal{S};A,B):=\{\mathcal{R} \mid \mathcal{R} \in \mathcal{X}(X;A,B) \,\&\, \mathcal{R} \subset \mathcal{S}\}$, dan $\mathcal{R} \subset X$. Didefinisikan $\mathcal{G}$ adalah keluarga submodul-submodul $\mathcal{T} \subset X$ berikut $\mathcal{G}:=\{\mathcal{T} \mid \mathcal{T}(\mathcal{R}):= \mathcal{R} \cap (A\mathcal{T}(\mathcal{R})+\text{Im}B)\}$, dan $\mathcal{G}$ mempunyai elemen terkecil tunggal.

Algoritma 3.5. (**Ito** dan **Inaba**, **1997**) **Algoritma Submodul Ketercapaian** *Diberikan* $\mathcal{R}$ *submodul* X, *dan* $(\mathcal{T}^{(i)})$ *barisan submodul-submodul* X *untuk sistem* (A,B) *sebagai berikut*:

$$\begin{cases} T^0(R) := 0, \\ T^i(R) := R \cap (AT^{i-1}(R) + \operatorname{Im} B) \ \ (i = 1,2,\ldots). \end{cases} \tag{3.1}$$

Barisan ($T^{(i)}$) tidak turun karena $\mathfrak{R}$ adalah d.i.u terdapat bilangan bulat $q \geq 0$ sedemikian hingga $T^i(R)=T^{i+1}(R)$ untuk $i \geq q$. Didefinisikan himpunan $P(R):=T^q(R)$.

Dua lemma berikut menunjukkan hubungan antara submodul ketercapaian tipe feedback dengan submodul (A,B)-invarian.

Lemma 3.6. *Diberikan* $S \in \mathfrak{I}(X;A,B)$. *Jika* $F \in \mathbf{F}(X;A,B)$ *dan* $\tilde{S} \subset S$ *maka*

$$S \cap \operatorname{Im}B + (A+BF)\tilde{S} = S \cap (A\tilde{S} + \operatorname{Im}B).$$

Lemma 3.7. *Jika* $F \in \mathbf{F}(X;A,B)$ *maka*

$$\sum_{j=1}^{i} (A+BF)^{j-1}(\operatorname{Im} B \cap T) = T^i,\ i=1,\ldots,n \tag{3.2}$$

dengan T^i *didefinisikan seperti dalam Algoritma* 3.5.

Proposisi berikut akan menunjukkan adanya submodul ketercapaian tipe feedback terbesar di dalam submodul yang diberikan.

Proposisi 3.8. *Diberikan* S *submodul* X *dan* V^* *submodul* (A,B)*-invarian terbesar yang termuat dalam* S. *Jika* $P(V^*)$ (A,B)*-invarian feedback*, *maka* $P(V^*)$ *merupakan submodul ketercapaian tipe feedback terbesar untuk* (A,B) *termuat dalam* S, *dan diberikan sebagai* $P(V^*)=\left\langle A+BF \,\middle|\, \operatorname{Im} B \cap V^* \right\rangle$, *dengan* F *elemen sebarang dalam* $\mathbf{F}(P(V^*);A,B)$.

Bukti: Diasumsikan bahwa $P(V^*)$ adalah submodul (A,B)-invarian tipe feedback, sehingga $\mathbf{F}(P(V^*);A,B) \neq \varnothing$. Diklaim untuk sebarang $F \in \mathbf{F}(P(V^*);A,B)$ berlaku

$$T^{(i)}(V^*) = \sum_{j=1}^{i} (A+BF)^{j-1}(V^* \cap \operatorname{Im} B) \quad (i=1,2,\ldots). \tag{3.3}$$

Untuk membuktikan klaim, mula-mula catat bahwa

$$(A+BF)R^{*(i)} \subset P(V^*) \subset V^*\ (i=1,2,\ldots) \tag{3.4}$$

Jelas (3.3) benar untuk i=1 dan diasumsikan (3.3) benar untuk i=p, mengikuti Lemma 3.7 dan menggunakan (3.4) dan (3.1) diperoleh

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{p+1}(A+BF)^{j-1}(V^* \cap \operatorname{Im} B) &= V^* \cap \operatorname{Im}B + (A+BF)\, T^{(p)}(V^*) \\ &= V^* \cap [(A+BF)\, T^{(p)}(V^*) + \operatorname{Im}B] \\ &= V^* \cap (A\, T^{(p)}(V^*) + \operatorname{Im}B) \\ &= T^{(p+1)}(V^*).\end{aligned}$$

Sehingga (3.3) benar untuk semua i dan klaim terbukti.

Sekarang dari (3.3) $P(V^*)= T^{(n)}(V^*)=\left\langle A+BF \middle| \operatorname{Im} B \cap V^* \right\rangle$. Seperti dalam pembuktian syarat cukup Lemma 3.2(i), dapat dibangun matriks $G\in\Re^{mxm}\ni \operatorname{Im}B\cap V^*=\operatorname{Im}(BG)$, sehingga $P(V^*)$ merupakan submodul ketercapaian tipe feedback untuk (A,B). Berdasarkan Algoritma 3.5 dan $V^*\subset S$diperoleh $P(V^*)= T^{(n)}(V^*)\subset V^*\subset S$, sehingga $P(V^*)$ merupakan submodul ketercapaian tipe feedback untuk (A,B) di dalam S.

Untuk melihat bahwa $P(V^*)$ merupakan submodul ketercapaian tipe feedback terbesar yang termuat di dalam S, dimisalkan U sebarang submodul ketercapaian tipe feedback untuk (A,B) di dalam S. Pertama karena U (A,B)-invarian feedback maka $\mathbf{F}(U;A,B)\neq\emptyset$. Ambil sebarang $F\in\mathbf{F}(U;A,B)$. Klaim:

$$T^{(i)}(U)=\sum_{j=1}^{i}(A+BF)^{j-1}(U\cap \operatorname{Im} B) \quad (i = 1,2,\ldots). \qquad (3.5)$$

Bukti klaim sama seperti pada pembuktian (3.3). Selanjutnya dari (3.5) diperoleh $T^{(n)}(U)=\left\langle A+BF \middle| \operatorname{Im} B \cap U \right\rangle=U$.. Karena U submodul (A,B)-invarian di dalam S, maka berlaku $U\subset V^*$, dan $U=T^{(n)}(U)\subset T^{(n)}(V^*)= P(V^*)$, yang menunjukkan $P(V^*)$ merupakan submodul ketercapaian tipe feedback terbesar untuk (A,B) di dalam S. ⊙

KESIMPULAN

Di dalam sistem linear atas daerah ideal utama $\Re$, tidak selalu berlaku bahwa jumlahan dua submodul ketercapaian tipe feedback akan merupakan submodul ketercapaian tipe feedback juga; sehingga tidak terjamin adanya submodul ketercapaian tipe feedback terbesar di dalam submodul yang diberikan. Untuk itu diberikan beberapa syarat yang bisa menjamin eksistensi submodul ketercapaian tipe feedback terbesar dalam submodul yang diberikan, yaitu jika V^* suatu submodul (A,B)-invarian terbesar dalam suatu submodul S, dengan menggunakan **algoritma submodul ketercapaian** diperoleh $P(V^*)$ adalah (A,B)-invarian tipe feedback maka $P(V^*)$ adalah submodul ketercapaian tipe feedback terbesar di dalam S.

DAFTAR PUSTAKA

Hautus, M.L.J., 1982, "*Controlled Invariance in Systems over Rings*", Lecture Notes in Control and Information Sciences 39, Springer-Verlag, New York, pp. 28-39.

Ito. N and Inaba. H., 1997, Block Triangular Decoupling for Linear Systems over Principal Ideal Domains, *Siam J. Control Optim* 35(3), pp 744-765.

Wonham, W.M., 1979, "*Linear Multivariable Control* : *A Geometric Approach*", Springer-Verlag, New York.

Wonham, W.M. and Morse, A.S., 1970, Decoupling and Pole Assingment in Linear Multivariable Systems: A Geometric Approach, *SIAM J. Control*, 8, pp. 1-18.