PYTHAGORAS Vol. 7, No. 2, Desember 2012

# SIFAT KENDALA PEMROGRAMAN KERUCUT ORDER DUA DENGAN NORMA ∞

**Caturiyati[1], Ch. Rini Indrati[2], Lina Aryati[2]**
[1]Mahasiswa Pemrograman Studi S3 Matematika FMIPA UGM dan
dosen Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY
[2]Dosen Jurusan Matematika FMIPA UGM
wcaturiyati@yahoo.com, rinii@ugm.ac.id, lina@ugm.ac.id

**Abstrak**

Masalah pemrograman kerucut order dua (*Second Order Cone Programming*/SOCP) dengan norma ∞ merupakan suatu masalah yang merupakan bentuk khusus dari masalah pemrograman kerucut order dua dengan norma 2. Pada makalah ini dikembangkan pengertian kerucut order dua (*Second Order Cone*/SOC) dengan norma ∞ dan sifat sifat kendala pemrograman kerucut order dua dengan Norma ∞ berdasarkan pada pengertian kerucut order dua dengan norma 2 dan pemrograman kerucut order dua dengan norma 2. Paper ini ditulis dengan menguraikan pengertian kerucut order dua dengan norma 2 dan pemrograman kerucut order dua dengan norma 2, dilanjutkan dengan mengembangkan pengertian kerucut order dua dengan norma ∞ dan pemrograman kerucut order dua dengan norma ∞ besera sifat-sifat yang dihasilkannya.

**Kata kunci:** *Second Order Cone* (SOC), *Second Order Cone Programming*

## PENDAHULUAN

Kerucut order dua (SOC) dalam Ben Tal and Nemirovski (2001) didefinisikan sebagai

$$L^m = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, x_m \geq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{m-1}^2} \right\}, m \geq 2,$$

dan pemrograman kerucut order dua (SOCP) adalah masalah konik:

meminimumkan

$\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} \geq_K \boldsymbol{0}\}$,

dengan kerucut $K$ merupakan hasil kali langsung (*direct product*) dari beberapa kerucut order dua:

$$K = L^{m_1} \times L^{m_2} \times \dots \times L^{m_k}$$

dan $\geq_K$ menyatakan urutan konik, yaitu $\boldsymbol{a} \geq_K \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \geq_K \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \in K$.

Pada masalah pemrograman kerucut order dua, suatu fungsi linear diminimumkan atas irisan himpunan afine dan hasil kali langsung beberapa kerucut order dua. SOCP merupakan masalah konveks nonlinear dengan pemrograman linear dan pemrograman kuadratik (konveks) sebagai kasus khusus (Andersen et. Al., 2002, Cao et.al., 2010, Lobo et. Al., 1998). Dalam beberapa tahun terakhir, masalah SOCP mendapat perhatian para peneliti karena jangkauan aplikasinya yang luas (Alizadeh and Goldfarb, 2003, Andersen et. Al., 2002). Masalah optimisasi kerucut order dua secara teori dapat diselesaikan secara efisien menggunakan metode titik interior.

Dalam perkembangan penelitian dibidang optimisasi terdapat pergeseran-pergeseran struktur. Kwak (2008) mengajukan metode *principal component analysis* (PCA) berdasarkan teknik optimisasi yang dikerjakan dengan norma $L_1$. Metode tersebut merupakan pengembangan dari PCA berdasarkan norma $L_2$. Metode PCA tersebut lebih sederhana dan mudah diimplementasikan. Sehingga dirasakan perkembangan penelitian optimisasi akhir-akhir ini mempunyai kecenderungan menggantikan norma $L_2$ dengan norma $L_1$ (Schmidt, 2005).

Sementara itu Kahl and Hartley (2008) menyajikan kerangka kerja baru untuk menyelesaikan struktur geometri dan masalah gerakan berdasar pada norma $L_\infty$ daripada menggunakan fungsi *cost* norma $L_2$. Kerangka kerja ini menghasilkan komputasi estimasi global yang efisien, dalam arti solusinya invarian terhadap transformasi proyektif pada sistem koordinat dunia dan similaritas transformasi dalam bidang gambar, karena metrik jarak gambar dari kesalahan proyeksi ulangnya juga invarian terhadap transformasi yang dimaksud. Dengan kata lain tidak memerlukan normalisasi koordinat gambar. Selain itu berbagai masalah struktur dan gerakan, seperti triangulasi, pembagian ulang kamera dan estimasi homografi dapat dinyatakan ulang sebagai masalah optimisasi quasi konveks yang dapat diselesaikan menggunakan pemrograman kerucut order dua (SOCP).

Becker et.al. (2011) membangun suatu kerangka kerja untuk menyelesaikan berbagai masalah kerucut konveks dengan pendekatan sebagai berikut: pertama, menentukan formulasi konik dari masalah; kedua, menentukan dualnya; ketiga, aplikasi penghalusan; keempat, menyelesaikan menggunakan suatu metode optimal order satu. Kegunaan pendekatan ini adalah fleksibilitasnya. Suatu estimator yang dipandang efektif secara teori dan praktek adalah pemilih Dantzig (Candes and Tao, 2005), yang ide sederhananya adalah mendapatkan estimasi konsisten dari data observasi dan meminimumkan norma $l_1$. Pemilih Dantzig merupakan solusi masalah pemrograman konveks sebagai berikut

meminimumkan $\|\boldsymbol{x}\|_1$, dengan kendala $\|\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Ax})\|_\infty \leq \delta$,

dengan $\delta$ skalar dan diasumsikan kolom matriks $A$ dinormalisasikan.

Berdasarkan referensi yang diuraikan tersebut dan terutama berdasarkan paper Lobo, et. al. (1998) yang menguraikan masalah pemrograman kerucut order dua maka pada paper ini akan dibahas masalah SOCP dengan mengubah fungsi kendala menjadi fungsi norma ∞ dengan domain $\mathbb{R}_+^{\boldsymbol{n}}$.

## PEMBAHASAN

### 1. Kerucut Order Dua

Sebelum membicarakan pemrograman kerucut order dua (SOCP), akan dibicarakan terlebih dahulu mengenai kerucut order dua (SOC) sebagai berikut.

Ben Tal dan Nemirovski mengatakan suatu kerucut $K = \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^m | \boldsymbol{a} \succeq \boldsymbol{0}\}$, dengan $\boldsymbol{a} \succeq \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} \succeq \boldsymbol{0}$ dan $\succeq$ suatu urutan parsial, adalah suatu kerucut konveks pointed yang memenuhi syarat-syarat berikut:

1. $K$ tak kosong dan tertutup terhadap penjumlahan, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}' \in K \Longrightarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}' \in K$
2. $K$ himpunan konik, $\boldsymbol{a} \in K, \lambda \geq 0 \Longrightarrow \lambda\boldsymbol{a} \in K$
3. $K$ pointed, $\boldsymbol{a} \in K$ dan $-\boldsymbol{a} \in K \Longrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

Dengan urutan parsial pada himpunan $K$ di $\mathbb{R}^m$ terdapat tiga macam kerucut berikut:

1. Ortan nonnegatif, $\mathbb{R}_+^m = \{\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_m)^T | x_i \geq 0, i = 1, \dots, m\}$
2. Kerucut order dua

$$C_m = \left\{\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_{m-1}, x_m)^T \in \mathbb{R}^m \middle| x_m \geq \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^{m-1} x_i^2}\right\}.$$

3. Kerucut semidefinit positif, $S_+^m$, kerucut dalam ruang $S^m$ yaitu ruang matriks berukuran $m \times m$ dan memuat semua matriks semidefinit positif $\boldsymbol{A}$ berukuran $m \times m$.

## 2. Pemrograman Kerucut Order Dua

Diberikan definisi pemrograman konik berikut dari Ben Tal dan Nemirovski. Misalkan $K$ suatu kerucut di $\mathbb{R}^m$ (konveks, pointed, tertutup, dan dengan interior tak kosong). Diberikan $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^n$, matriks kendala $\boldsymbol{A}$ berukuran $m \times n$, dan vektor ruas kanan $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, masalah optimisasi berikut disebut dengan pemrograman konik,

meminimumkan $\boldsymbol{f}^T\boldsymbol{x}$, dengan kendala $\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b} \geq_K \boldsymbol{0}$

dengan $\geq_K$ urutan parsial pada himpunan kerucut $K$. Jika $K$ adalah hasil kali langsung beberapa SOC, maka masalah pemrograman konik tersebut disebut dengan masalah SOCP. Secara umum SOCP dimodelkan sebagai berikut (Lobo et al),

meminimumkan $\boldsymbol{f}^T\boldsymbol{x}$,

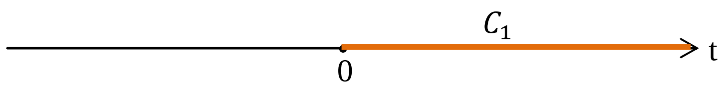
dengan kendala $\|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i\|_2 \leq \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x} + d_i \; (i = 1, \dots, N)$

(1)

dengan $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ variabel keputusan, dan parameter $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{A}_i \in \mathbb{R}^{(n_i-1)\times n}, \boldsymbol{b}_i \in \mathbb{R}^{n_i-1}, \boldsymbol{c}_i \in \mathbb{R}^n$ dan $d_i \in \mathbb{R}$. Kendala $\|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i\| \leq \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}_i$ disebut kendala SOC berdimensi $n_i$. Berdasarkan definisi, SOC standar berdimensi $m$ didefinisikan sebagai,

$$C_m = \{(\boldsymbol{u}, t) | \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{m-1}, t \in \mathbb{R}, \|\boldsymbol{u}\|_2 \leq t\}.$$

Untuk $m = 1$, $C_1 = \{t | t \in \mathbb{R}, 0 \leq t\}$, dan secara geometris dapat digambarkan seperti Gambar 1 berikut.

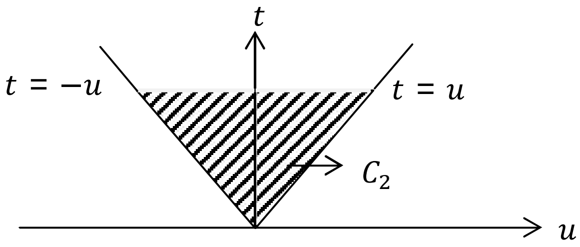


Gambar 1. SOC $C_1$

Untuk $m = 2$,

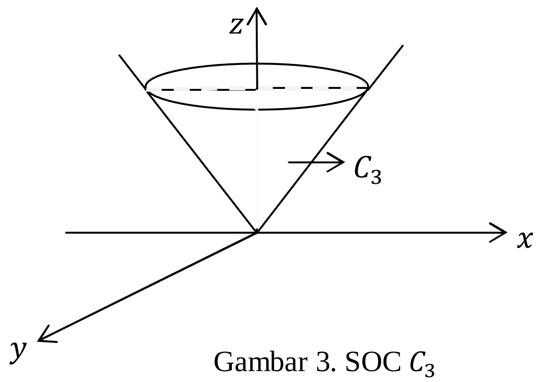
$$C_2 = \{(u,t)|u \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, \|u\|_2 \le t\}$$
$$= \{(u,t)|u \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, |u| \le t\} = \{(u,t)|u \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, -t \le u \le t\},$$

dan secara geometris digambarkan seperti Gambar 2 berikut.




Gambar 2. SOC $C_2$

Untuk $m = 3$, $C_3 = \{(x,y,t)|(x,y) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}, \|(x,y)\|_2 \le t\}$ $= \left\{(x,y,t)\middle|(x,y) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2+y^2} \le t\right\}$, dan secara geometris digambarkan seperti Gambar 3 berikut.




Gambar 3. SOC $C_3$

**Lemma 1**. (Ben Tal dan Nemirovski, 2001) *Himpunan titik-titik yang memenuhi kendala* kerucut *order dua adalah image invers dari kerucut order dua satuan terhadap pemetaan afine*:

$$\|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i\|_2 \le \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}_i \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_i \\ \boldsymbol{c}_i^T\end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_i \\ d_i\end{bmatrix} \in C_3$$

*dan konveks, i=1,2,...,N.*

**Bukti:** Tanpa mengurangi keumuman, diasumsikan $N = 1, n_i = 2 = n$, $\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{b}$, $d_i = d \in \mathbb{R}$, maka parameter masalah SOCP berdimensi 2 adalah

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}g_1 \\ g_2\end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix}h_1 \\ h_2\end{bmatrix}, \boldsymbol{x}^T = (x_1, x_2)^T.$$

Kendala masalah SOCP berdimensi 2: $\|\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{b}\|_2 \le \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + d$

$$\Leftrightarrow \left\| \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \right\|_2 \le [h_1 \quad h_2]^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + d$$

$$\Leftrightarrow \left\| \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2 \end{bmatrix} \right\|_2 \le h_1x_1 + h_2x_2 + d$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1)^2 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2)^2} \le h_1x_1 + h_2x_2 + d$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2 \\ h_1x_1 + h_2x_2 + d \end{bmatrix} \in C_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{c}^T \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ d \end{bmatrix} \in C_3. \blacksquare$$

## 3. Kerucut Order Dua (SOC) pada SOCP dengan Norma ∞

Diberikan masalah SOCP (1). Apabila norma pada fungsi kendala masalah SOCP (1) diubah menjadi fungsi kendala bernorma ∞, maka diperoleh masalah SOCP:

meminimumkan $\boldsymbol{f}^T\boldsymbol{x}$,

dengan kendala $\|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i\|_\infty \le \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x} + d_i$ $(i = 1, \ldots, N)$ (2)

dengan $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ adalah variabel keputusan, dan parameter $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{A}_i \in \mathbb{R}^{(n_i-1)\times n}, \boldsymbol{b}_i \in \mathbb{R}^{n_i-1}, \boldsymbol{c}_i \in \mathbb{R}^n$ dan $d_i \in \mathbb{R}$. Sebelum membahas masalah SOCP (2), perlu didefinisikan pengertian SOC norma ∞ sebagai berikut:

$$C_m^* = \{(\boldsymbol{u}, t) | \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{m-1}, t \in \mathbb{R}, \|\boldsymbol{u}\|_\infty \le t\}.$$

Namun dengan pengubahan tersebut terdapat perbedaan antara SOC standar (norma 2) dengan SOC norma ∞ sebagai berikut:

Untuk $m = 1$, $C_1^* = \{t | t \in \mathbb{R}, \|0\|_\infty \le t\} = \{t | t \in \mathbb{R}, 0 \le t\} = C_1$.

Untuk $m = 2$, $C_2^* = \{(u, t) | u \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, \|u\|_\infty \le t\}$

$= \{(u, t) | u \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, |u| \le t\} = C_2$.

Untuk $m = 3$, $C_3^* = \{(x, y, t) | (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}, \|(x, y)\|_\infty \le t\}$

$= \{(x, y, t) | (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}, |x| + |y| \le t\} \neq C_3$.

**Contoh 1.** Merupakan suatu *counter example* yang menunjukkan adanya perbedaan antara SOC norma 2 dengan SOC norma ∞ mulai $m = 3$ sebagai berikut.

Ambil $x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{4}, t = 1, x, y, t \in \mathbb{R}$. Akan ditunjukkan $C_3^* \neq C_3$.

Untuk $(x, y, t) \in C_3$, berlaku

$$\sqrt{x^2 + y^2} \le t \Leftrightarrow \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{9}{16}\right)} = \sqrt{\tfrac{13}{16}} < 1.$$

(3)

Sementara itu untuk $(x, y, t) \in C_3^*$ berlaku $\left|\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{3}{4}\right| = \frac{5}{4} > 1$.

(4)

Dari (3) dan (4) terbukti $C_3^* \neq C_3$. ■

Berikut ini adalah hasil yang diperoleh yang dinyatakan dalam Lemma 2 dan Lemma 3.

**Lemma 2.** *Jika* $C_1, C_2, C_3$ *adalah SOC norma* $\|.\|_2$ *dan* $C_1^*, C_2^*, C_3^*$ *adalah SOC norma* $\|.\|_\infty$, *maka berlaku* $C_1^* = C_1, C_2^* = C_2$, *tetapi* $C_3^* \neq C_3$.

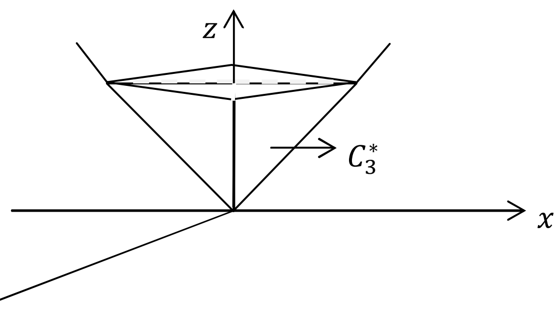
**Bukti:** Jelas $C_1^* = C_1$ dan $C_2^* = C_2$, sedangkan untuk $C_3^*$ menurut definisinya

$C_3^* = \{(x, y, t)|(x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}, \|(x, y)\|_\infty \leq t\}$

$= \{(x, y, t)|(x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}, |x| + |y| \leq t\} \neq C_3$.

Terbukti $C_1^* = C_1, C_2^* = C_2$, tetapi $C_3^* \neq C_3$. ■

Secara geometris perbedaan antara $C_3^*$ dan $C_3$ terlihat seperti Gambat 4 berikut:




Gambar 4. SOC $C_3^*$

**Lemma 3.** *Diberikan* $x, y, t \in \mathbb{R}$ *berlaku* $\sqrt{x^2 + y^2} \leq t \not\Leftrightarrow |x| + |y| \leq t$.

**Bukti:** (dengan *counter example*) pada Contoh 1.

Berikut ini akan ditunjukkan hasil yang diperoleh berupa hubungan kendala SOCP standar dengan kendala SOCP norma ∞ dan hubungannya dengan pemetaan afine.

**Lemma 4.** *Untuk kendala SOCP (1) dan kendala SOCP (2) terhadap pemetaan afine berlaku hubungan sebagai berikut:*

(i) $\|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i\|_\infty \leq \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x} + d_i \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_i \\ \boldsymbol{c}_i^T\end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_i \\ d_i\end{bmatrix} \in C_3^*$

(ii) $\|\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_i\|_2 \leq \boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x} + d_i \not\Leftrightarrow \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_i \\ \boldsymbol{c}_i^T\end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_i \\ d_i\end{bmatrix} \in C_3^*$.

**Bukti:** Tanpa mengurangi keumuman diasumsikan $N = 1, n_i = 2 = n, \boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{b}, d_i = d \in \mathbb{R}$, maka parameter masalah SOCP berdimensi 2 adalah

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}g_1 \\ g_2\end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix}h_1 \\ h_2\end{bmatrix}, \boldsymbol{x}^T = (x_1, x_2)^T.$$

(i) Diperoleh

$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}\|_\infty \leq \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + d$

$\Leftrightarrow |a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1| + |a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2| \leq h_1x_1 + h_2x_2 + d$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2 \\ h_1x_1 + h_2x_2 + d \end{bmatrix} \in C_3^*$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{c}^T \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ d \end{bmatrix} \in C_3^*.$$

(ii) Didapatkan

$$\|\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{b}\|_2 \leq \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + d$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1)^2 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2)^2} \leq h_1x_1 + h_2x_2 + d$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2 \\ h_1x_1 + h_2x_2 + d \end{bmatrix} \in C_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{c}^T \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ d \end{bmatrix} \in C_3.$$

Sementara telah diketahui $C_3 \neq C_3^*$, sehingga kendala SOCP (1) tidak ekuivalen dengan pemetaan afine di $C_3^*$. ■

## KESIMPULAN

a. Kerucut order dua norma $\infty$ mempunyai perbedaan dengan kerucut order dua norma 2 mulai pada kerucut dimensi 3 sebagai berikut $C_1^* = C_1, C_2^* = C_2$, tetapi $C_3^* \neq C_3$.
b. Akibat adanya perbedaan tersebut maka kendala SOCP (1) menjadi tidak ekuivalen dengan pemetaan afine di $C_3^*$.
c. Dengan adanya perbedaan tersebut maka pada masalah SOCP (2) diperlukan sejumlah teori tambahan agar teori-teori pada SOCP (1) berlaku pada SOCP (2).

## DAFTAR PUSTAKA

Badan Standar Nasional Pendidikan. (2006). *Standar Kompetensi dan Kompetensi Dasar Matematika SMP/MTs dalam Standar Isi untuk Satuan Pendidikan Dasar dan Menengah*. Jakarta.

Bransford, J. dan B.S. Stein. (1993). *The IDEAL Problem Solver: A Guide for Improving Thinking, Learning, and Creativity (2nd ed).* New York: W.H. Freeman.

Grabe, M. (1986). Attentional processes in education. In G. Phye & T.Andre (Eds.), *Cognitive classroom learning* (pp.49-82). Orlando, FL: Academic Press.

Hake, R. (1998). Interactive Engagement v.s Traditional Methods: Six-Thousand Student Survey Of Mechanics Test Data For Introductory Physics Courses. *American Journal of Physics*, 66 (1), 64-67.

Henton, J., Baden. R.M. dan Kieren, D., (1979). Problem Solving in the Classroom. *The Family Coordinator*, 28 (1), 61-66.

Jonassen, D.H. (1997). *Instructional Design Models for Well-Structured and lll-structured Problem-Solving Learning Outcomes.* Educational Technology Research and Development, 45 (1), 65-94.

Sobel M.A & E.M. Maletsky. (2001). *Mengajar Matematika. Sebuah Buku Sumber Alat Peraga, Aktivitas dan Strategi*. Jakarta: Erlangga.

Sudjana, N. (2005). Penilaian Hasil Proses Belajar Mengajar. Jakarta: PT. Remaja Rosdakarya.

Sukestiyarno, YL. (2012). *Olah Data Penelitian berbantuan SPSS*. Semarang: UNNES.

Thiagarajan, S., D. S. Semmel and M. I. Semmel. (1974). *Instructional Development for Training Teachers of Exceptional Children. A Source Book*. Blomington: Indiana University.

Tisngati, U. (2012). "Membangun Karakter Dalam Pembelajaran Matematika Melalui Ketrampilan Komunikasi". *Prosiding. seminar nasional matematika dan pendidikan matematika. 10 November 2012*. Yogyakarta : Universitas Negeri Yogyakarta.

Widyantini, Th. (2008). *Paket Fasilitasi Pemberdayaan KKG dan MGMP Matematika*. Yogyakarta: Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan (PPPPTK) Matematika.

Winkel, W. S. (2009). *Psikologi Pengajaran*. Media Abadi: Yogyakarta.