DIRECT SUMS (JUMLAH LANGSUNG)

$$\left.\begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_n \end{array}\right\}$$ masing-masing modul atas R (ring yang sama).

Bentuk *cartesian product*:

$$M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n = \{(m_1, m_2, \ldots, m_n) | m_i \in M_i\}$$

Karena $M_i \neq 0$, $\forall i$ maka $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n \neq \phi$.

Operasi + (penjumlahan) dan • (pergandaan skalar) sebagai berikut:

+ pada $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$ dengan definisi:

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$

• pada $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$

$\alpha \in$ R

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$.

Sifat : $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$ = R-modul mterhadap operasi + dan • yang didefinisikan seperti di atas.

Definisi : $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$ disebut ***Direct Sums*** (***Jumlah Langsung***) didefinisikan :

$$M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$$

M = R-modul atas R

$$\left.\begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_n \end{array}\right\}$$ submodul-submodul di *M*, maka

1. Terbentuk *Direct Sum*

$$\bigoplus_{i=1}^{n} M_i = \{(m_1, m_2, \ldots, m_n) | m_i \in M_i\}$$

2. $M_1 + M_2 + \ldots + M_n = \sum_{i=1}^{n} M_i$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{n} m_i \middle| m_i \in M_i \right\}$$
$$= \{ (m_1 + m_2 + \ldots + m_n) | m_i \in M_i \}.$$

$\sum M_i$ submodul di M, sebab

a. $\sum x_i \in \sum M_i$

$\sum y_i \in \sum M_i$

$$\Rightarrow \quad \sum \underbrace{x_i}_{\in M_i} + \sum \underbrace{y_i}_{\in M_i} = \sum \underbrace{(x_i + y_i)}_{\in M_i} \in \sum M_i$$

b. $\alpha \in$R

$\sum x_i \in \sum M_i$

$$\Rightarrow \quad \alpha \sum x_i = \sum \underbrace{\alpha x_i}_{\in M_i}$$

Pertanyaan : Kapan $M \cong \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$

Sifat :

Jika 1. $M = \sum_{i=1}^{n} M_i$

2. $M_i \cap (M_1 + M_2 + \ldots + M_{i-1} + M_{i+1} + \ldots + M_n) = \{0\}$ untuk setiap $1 \le i \le n$

maka

$$M \cong \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$$

N = R-modul

$\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ *direct sums* $= \{ (m_1, m_2, \ldots, m_n) | m_i \in M_i \}.$

$f_1 : M_1 \to N$ R-hom modul

$f_2 : M_2 \to N$ R-hom modul

.

.

.

$f_n : M_n \to N$ R-hom modul

$m = (m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$

$m_1 \to f_1(m_1) \in N$

$m_2 \to f_2(m_2) \in N$

.

.

.

$m_n \to f_n(m_n) \in N$

N modul

$f_1(m_1) + f_2(m_2) + \ldots + f_n(m_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i(m_i) \in N$

$$f : \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \to N \text{ dengan } f(m_1, m_2, \ldots, m_n) \underset{=}{df} \sum f_i(m_i)$$

Sifat : f = R-hom modul
Bukti : latihan

Untuk membuktikan $M \cong \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ akan digunakan definisi, yakni dengan membentuk isomorfisma dari $\oplus M_i$ ke M

$f : \oplus M_i \to$ M homomorfisma modul atas R, injektif dan surjektif dengan $f_i : M_i \to M$ homomorfisma modul atas R.

f_i : inklusi injektif

$f_i(m_i) \overset{df}{=} m_i$

$f_i = \underbrace{I_{M_i}}_{Inklusip dM_i}$

Jelas $f_i = I_{M_i}$ R-hom modul.

Jadi menggunakan sifat …. Akan terbentuk

$$f : \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \to M$$

dengan definisi $f(m_1, m_2, \ldots, m_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i(m_i) = \sum_{i=1}^{n} m_i$ yang merupakan homomorfisma modul atas R.

Untuk selanjutnya tinggal ditunjukkan f injektif (ker(f) = {0}) dan surjektif (Im(f) = M).

Akan ditunjukkan f injektif (ker(f) = {0}) :
Ambil sebarang $(m_1, m_2, \ldots, m_n) \in Ker(f)$

$$f(m_1, m_2, \ldots, m_n) = 0_M$$
$$\sum m_i = 0_M$$
$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n = 0_M$$
$$\bullet \underbrace{m_1}_{\in M_1} = \underbrace{-m_2 - m_3 - \ldots - m_n}_{\in M_2 + M_3 + \ldots + M_n}$$
$$\therefore m_1 \in M_1 \cap (M_2 + M_3 + \ldots + M_n) = \{0\}$$
$$m_1 = 0.$$

$$\bullet\ \underbrace{m_2}_{\in M_2} = \underbrace{-m_1 - m_3 - \ldots - m_n}_{\in M_1 + M_3 + \ldots + M_n}$$

$\therefore\ m_2 \in M_2 \cap (M_1 + M_3 + \ldots + M_n) = \{0\}$

$m_2 = 0.$

$\vdots$

$$\bullet\ \underbrace{m_n}_{\in M_n} = \underbrace{-m_1 - m_2 - \ldots - m_{n-1}}_{\in M_1 + M_2 + \ldots + M_{n-1}}$$

$\therefore\ m_n \in M_n \cap (M_1 + M_2 + \ldots + M_{n-1}) = \{0\}$

$m_n = 0.$

$\therefore\ m_1 = m_2 = \ldots = m_n = 0$

$\therefore\ (m_1, m_2, \ldots, m_n) = (0,0,\ldots,0)$

ker(f) = $\{(0,0,\ldots,0)\}$.

Dengan diketahui $M = \sum_{i=1}^{n} M_i$ …..(i)

Coba tunjukkan sendiri Im(f) = M yakni f surjektif

$\therefore\ f : \oplus M_i \to M$ R-isomorfisma modul yang berakibat $M \cong \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$.

M = R-modul

M_1, M_2 submodul di M

$M_1 \oplus M_2 = \{(m_1, m_2) / m_1 \in M_1, m_2 \in M_2\}$ = R-modul

$M_1 + M_2 = \{(m_1 + m_2) / m_1 \in M_1, m_2 \in M_2\}$ = R-submodul di M.

Kapankah $M \cong M_1 \oplus M_2$?

Jika (1) $M = M_1 + M_2$ (2) $M_1 \cap M_2 = \{0\}$.

M = R-modul

M_1, M_2, M_3 submodul di M

$M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 = \{(m_1, m_2, m_3) / m_i \in M_i, i = 1,2,3\}$ = R-modul

$M_1 + M_2 + M_3 = \{(m_1 + m_2 + m_3) / m_i \in M_i, i = 1,2,3\}$ = R-submodul di M.

Kapankah $M \cong M_1 \oplus M_2 \oplus M_3$?

Jika (1) $M = M_1 + M_2 + M_3$

(2) $M_1 \cap (M_2 + M_3) = \{0\}$

$M_2 \cap (M_1 + M_3) = \{0\}$

$M_3 \cap (M_1 + M_2) = \{0\}$.

Definisi : ***Direct Summand***
M = R-modul
M_1 submodul di M
M_1 disebut ***direct summand*** di M jika ada submodul M_2 di $M \ni M \cong M_1 \oplus M_2$.

BARISAN EKSAK

$\{m_i / i = 1,2,\ldots\}$ keluarga modul-modul atas R
$f_i : M_{i-1} \to M_i$
$f_{i+1} : M_i \to M_{i+1}$
$\vdots$

$\ldots \to M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \to \ldots$ …..(*)

Definisi :
(*) disebut barisan modul dan barisan homomorfisma di R.

Im(f_i) submodul di M_i
Ker(f_{i+1}) submodul di M_i
Mana yang selalu berlaku : Im(f_i) $\subset$ Ker(f_{i+1}) atau Ker(f_{i+1}) $\subset$ Im(f_i).

Definisi :
1. Barisan (*) dikatakan **eksak di M_i** jika Ker(f_{i+1}) = Im(f_i).
2. Barisan (*) dikatakan **eksak** jika barisan tersebut eksak di setiap M_i.

Keadaan khusus :
(1). $\{0\} \xrightarrow{O} M_1 \xrightarrow{f} M$ eksak $\Leftrightarrow$ f injektif
(2). $M \xrightarrow{g} M_2 \xrightarrow{O} \{0\}$ eksak $\Leftrightarrow$ g surjektif
(3). $\{0\} \xrightarrow{O} M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \xrightarrow{O} \{0\}$ eksak $\Leftrightarrow$ 1. f injektif
2. g surjektif
3. ker(g) = Im(f).

Bukti :
(1). Diketahui : Barisan eksak $\{0\} \xrightarrow{O} M_1 \xrightarrow{f} M$
Akan ditunjukkan : f injektif
Bukti :
Karena barisan eksak maka Im(O) = ker(f) atau {0} = ker(f).
Terbukti f injektif.

Diketahui : f injektif
Akan ditunjukkan : Barisan eksak
Bukti :
f injektif maka ker(f) = {0} = Im(O).
Terbukti (1) barisan eksak.

Barisan ke-3, jika eksak disebut ***eksak pendek***.

Keistimewaan Barisan Eksak Pendek

Sifat :

Jika (3) adalah barisan eksak pendek maka ketiga pernyataan sebagai berikut ekuivalen,

a. $\exists$ homomorfisma modul $\alpha : M \to M_1 \ni \alpha \circ f = I_{M_1}$

b. $\exists$ homomorfisma modul $\beta : M_2 \to M \ni g \circ \beta = I_{M_2}$

c. $M \cong \mathrm{Im}(f) \oplus \ker(\alpha)$

$\cong Ker(g) \oplus \mathrm{Im}(\beta)$

$\cong M_1 \oplus M_2$.