4.3 Sistem Antrian $M/M/1/GD/c/\infty$

Pada sistem antrian ini terdapat pembatasan *arrival* sebanyak c customer dan hanya terdapat satu server. Diasumsikan *interarrival times* berdistribusi eksponensial dengan rate λ dan *service times* berdistribusi eksponensial dengan rate μ. Sistem antrian ini dapat dimodelkan sebagai proses *birth-death* dengan parameter sebagai berikut :

$$\lambda_j = \lambda \qquad (j = 0, 1, \ldots, c-1)$$

$$\lambda_c = 0$$

$$\mu_0 = 0$$

$$\mu_j = \mu \qquad (j = 1, 2, \ldots, c)$$

Karena $\lambda_c = 0$ maka sistem tidak akan mencapai state c + 1 atau state di atasnya. Untuk sistem $M/M/1/GD/c/\infty$ ini akan tetap mencapai steady-state biarpun $\lambda > \mu$. Hal ini dikarenakan jika $\lambda > \mu$, sistem akan membatasi jumlah customer yang masuk sehingga jumlah customer dalam sistem akan tetap terkendali.

Didefinisikan $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ untuk $\lambda \neq \mu$ maka substitusi ke persamaan (4.1.2.1) berlaku :

$$\pi_1 = \frac{\lambda \pi_0}{\mu},\ \pi_2 = \frac{\lambda^2 \pi_0}{\mu^2},\ \ldots,\ \pi_c = \frac{\lambda^c \pi_0}{\mu^c}$$

karena hanya terdapat state 0, 1, 2, …, c maka :

$$\pi_0 + \pi_1 + \ldots + \pi_c = 1$$

$$\pi_0 (1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^c) = 1$$

misal $$S = 1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^c$$

$$\rho S = \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^{c+1}$$

$$(1-\rho)S = 1-\rho^{c+1} \quad \text{diperoleh} \quad S = \frac{1-\rho^{c+1}}{1-\rho}$$

jadi $$\pi_0 = \frac{1}{S} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{c+1}}$$

Dari fakta bahwa $L = \sum_{j=0}^{j=c} j\pi_j$ maka untuk $\lambda \neq \mu$ dapat ditunjukkan :

$$L = 0 + \pi_1 + 2\pi_2 + \ldots + c\pi_c$$

$$= \rho\pi_0 + 2\rho^2\pi_0 + \ldots + c\rho^c\pi_0 = \pi_0(\rho + 2\rho^2 + \ldots + c\rho^c)$$

misalkan $$S^{'} = \rho + 2\rho^2 + \ldots + c\rho^c$$

$$\rho S^{'} = \rho^2 + 2\rho^3 + \ldots + c\rho^{c+1}$$

$$(1-\rho)S^{'} = \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^c - c\rho^{c+1}$$

misalkan $$S^{''} = \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^c - c\rho^{c+1}$$

$$\rho S^{''} = \rho^2 + \rho^3 + \ldots + \rho^{c+1} - c\rho^{c+2}$$

$$(1-\rho)S^{''} = \rho - \rho^{c+1} + c\rho^{c+2} \quad \text{diperoleh} \quad S^{''} = \frac{\rho\left(1-\rho^c + c\rho^{c+1}\right)}{1-\rho}$$

jadi $$S^{'} = \frac{\rho\left(1-\rho^c + c\rho^{c+1}\right)}{(1-\rho)^2}$$

$$L = \pi_0 S^{'} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{c+1}} \times \frac{\rho\left(1-\rho^c + c\rho^{c+1}\right)}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho\left(1-\rho^c + c\rho^{c+1}\right)}{\left(1-\rho^{c+1}\right)\left(1-\rho\right)}$$

sedangkan $L_s = 0\pi_0 + 1(\pi_1, \pi_2, ..., c) = 1 - \pi_0$

dan L_q dapat dihitung dari $L_q = L - L_s$

Khusus untuk $\lambda = \mu$, maka $c_j = 1$ untuk j = 0, 1, 2, …, c

Diperoleh $\pi_j = \pi_0 \times 1$ untuk j = 0, 1, 2, …, c berarti akan didapatkan semua π_j akan sama, sedangkan dari kenyataan :

$$\sum_{j=0}^{j=c} \pi_j = 1 \text{ yang berarti } (c+1)\pi_j = 1$$

maka akan diperoleh $\pi_j = \dfrac{1}{c+1}$

kemudian $$L = \sum_{j=0}^{j=c} j\pi_j = \pi_j(0+1+2+...+c)$$

$$L = \frac{1}{c+1} \times \frac{c(c+1)}{2} = \frac{c}{2}$$

$$L_s = 0\pi_0 + 1(\pi_1 + \pi_2 + ...) = 1 - \pi_0 = 1 - \frac{1}{c+1}$$

sedangkan L_q dapat dihitung dari $L_q = L - L_s$

Kemudian kita perhatikan customer yang masuk ke sistem. λ adalah jumlah rata-rata customer yang datang per satuan waktu. Untuk sistem ini akan terdapat $\lambda\pi_c$ customer yang tidak dapat masuk ke sistem karena sudah penuh. Berarti rata-rata customer yang masuk ke sistem adalah :

$\lambda - \lambda\pi_c = \lambda(1-\pi_c)$ customer per satuan waktu.

Jadi $W = \dfrac{L}{\lambda(1-\pi_c)}$, dan $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda(1-\pi_c)}$

Berikut adalah contoh untuk sistem antrian di atas.

<u>Contoh 3</u>.

Seorang pemangkas rambut mempunyai salon berkapasitas 10 tempat duduk. *Interarrival times* berdistribusi eksponensial, dan rata-rata dalam satu jam datang 20 orang yang ingin potong rambut. Customer yang datang setelah tempat duduk penuh, tidak bisa masuk. Diperlukan waktu sekitar 12 menit untuk memotong rambut satu orang dan waktu untuk potong rambut ini berdistribusi eksponensial.

1. Berapa jumlah rata-rata customer yang selesai potong rambut dalam satu jam ?
2. Berapa rata-rata waktu yang diperlukan seseorang di tempat potong rambut tersebut ?

Penyelesaian :

Sebagian dari customer yang datang yaitu π_{10} bagian tidak dapat masuk karena sudah penuh. Berarti rata-rata dalam satu jam ada $\lambda(1-\pi_{10})$ customer yang masuk. Dari soal diketahui $c = 10$, $\lambda = 20$ customer per jam, $\mu = 5$ customer. Jadi :

$$\rho = \frac{20}{5} = 4$$

$$\pi_0 = \frac{1-4}{1-4^{11}}$$

$$\pi_{10} = 4^{10}\left(\frac{1-4}{1-4^{11}}\right) = \frac{-3(4^{10})}{1-4^{11}} = 0.75$$

Ini berarti rata-rata ada 20(1 – 0.75) = 5 orang per jam yang selesai potong rambut (rata-rata 20 – 5 = 15 orang batal potong rambut).

Kemudian $$L = \frac{4\{1-11(4^{10})+10(4^{11})\}}{(1-4^{11})(1-4)} = 9.67 \text{ customer}$$

Diperoleh $$W = \frac{9.67}{20(1-0.75)} = 1.93 \text{ jam.}$$

Jadi rata-rata seseorang memerlukan waktu 1.93 jam untuk potong rambut di tempat itu.

4.4 Sistem Antrian $M/M/s/GD/\infty/\infty$

Sistem ini dapat dimodelkan dengan

$$\lambda_j = \lambda \qquad \text{(j = 0, 1, …)}$$

$$\mu_j = j\mu \qquad \text{(j = 0, 1, …, s-1)}$$

$$\mu_j = s\mu \qquad \text{(j = s, s+1, s+2,…)}$$

sehingga akan diperoleh probabilitas *steady-state* :

Substitusi ke persamaan (4.1.2.1) diperoleh :

$$\pi_j = \begin{cases} \dfrac{\lambda^j}{j!\mu^j} \cdot \pi_0 & (1 \le j < s) \\[2ex] \dfrac{\lambda^j}{s^{j-s}s!\mu^j} \cdot \pi_0 & (j \ge s) \end{cases}$$

Jumlah dari probabilitas *steady-state* harus sama dengan satu, sehingga :

$$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$$

$$\pi_0 \cdot \left[\sum_{j=0}^{s-1} \frac{\lambda^j}{j!\mu^j} + \sum_{j=s}^{\infty} \frac{\lambda^j}{s^{j-s}s!\mu^j} \right] = 1$$

$$didefinisikan \quad r = \tfrac{\lambda}{\mu} \quad dan \quad \rho = \tfrac{r}{s} = \tfrac{\lambda}{s\mu}$$

$$\pi_0 = \left[\sum_{j=0}^{s-1} \frac{r^j}{j!} + \sum_{j=s}^{\infty} \frac{r^j}{s^{j-s}s!} \right]^{-1}$$

Kita perhatikan deret berikut :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=s}^{\infty} \frac{r^j}{s^{j-s} s!} &= \frac{r^s}{s!} \sum_{j=s}^{\infty} \left(\frac{r}{s}\right)^{j-s} \\
&= \frac{r^s}{s!} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{s}\right)^{k} \\
&= \frac{r^s}{s!} \cdot \frac{1}{(1-\frac{r}{s})} \qquad dengan \quad \tfrac{r}{s} = \rho < 1 \\
&= \frac{sr^s}{s!(s-r)}
\end{aligned}$$

sehingga akan diperoleh :

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= \left[\left(\sum_{j=0}^{s-1} \frac{r^j}{j!} \right) + \frac{sr^s}{s!(s-r)} \right]^{-1} \qquad \qquad \left(\tfrac{r}{s} = \rho < 1\right) \\
&= \left[\left[\sum_{j=0}^{s-1} \frac{1}{j!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^j \right] + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^j \left(\frac{s\mu}{s\mu - \lambda} \right) \right]^{-1}
\end{aligned}$$

Kemudian L_q dapat dihitung sebagai berikut :

Karena untuk jumlah customer di dalam sistem kurang dari atau sama dengan jumlah server, tidak akan ada antrian, maka :

$$\begin{aligned}
L_q &= \sum_{j=s}^{\infty} (j-s)\pi_j \\
&= \sum_{j=s}^{\infty} \frac{j}{s^{j-s} s!} \cdot r^j \cdot \pi_0 - \sum_{j=s}^{\infty} \frac{s}{s^{j-s} s!} \cdot r^j \cdot \pi_0
\end{aligned}$$

perhatikan deret yang pertama,

$$\frac{\pi_0}{s!} \sum_{j=s}^{\infty} \frac{jr^j}{s^{j-s}} = \frac{\pi_0}{s!} \left[\frac{r^{s+1}}{s} \right] \left[\sum_{j=s}^{\infty} (j-s) \left(\frac{r}{s} \right)^{j-s-1} + \sum_{j=s}^{\infty} s \left(\frac{r}{s} \right)^{j-s-1} \right]$$

$$\frac{\pi_0}{s} \sum_{j=s}^{\infty} \frac{jr^j}{s^{j-s}} = \frac{\pi_0}{s!} \left[\frac{r^{s+1}}{s} \right] \left[\frac{1}{\left(1-\frac{r}{s}\right)^2} + \frac{s^2/r}{1-r/s} \right]$$

Sedangkan untuk deret yang kedua,

$$\begin{aligned}\frac{\pi_0}{s!}\sum_{j=s}^{\infty}\frac{sr^j}{s^{j-s}} &= \frac{\pi_0}{s!}\cdot sr^s\sum_{j=s}^{\infty}\left(\tfrac{r}{s}\right)^{j-s}\\ &= \frac{\pi_0}{s!}\cdot sr^s\sum_{k=0}^{\infty}\left(\tfrac{r}{s}\right)^{k}\\ &= \frac{\pi_0 sr^s}{s!(1-r/s)}\end{aligned}$$

sehingga diperoleh :

$$\begin{aligned}L_q &= \pi_0\frac{r^{s+1}/s}{s!}\cdot\left[\frac{1}{\left(1-r/s\right)^2}+\frac{s^2/r}{1-r/s}-\frac{s^2/r}{1-r/s}\right]\\ &= \left[\frac{r^{s+1}/s}{s!\left(1-r/s\right)^2}\right]\pi_0\end{aligned}$$

$$L_q = \left[\frac{\left(\lambda/\mu\right)^s\lambda\mu}{(s-1)!(s\mu-\lambda)^2}\right]\pi_0$$

dari sini kita dapat memperoleh nilai L, yaitu dengan menggunakan *Little's Formula* :

$L = \lambda W$ dengan nilai $W = W_q + W_s$

$$= W_q + \tfrac{1}{\mu}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \left[\frac{\left(\lambda/\mu\right)^s\mu}{(s-1)!(s\mu-\lambda)^2}\right]\pi_0$$

jadi $W = \dfrac{1}{\mu} + \left[\dfrac{\left(\lambda/\mu\right)^s\mu}{(s-1)!(s\mu-\lambda)^2}\right]\pi_0$

dan selanjutnya diperoleh :

$$L = \lambda W = \frac{\lambda}{\mu} + \left[\frac{\left(\lambda/\mu\right)^s\lambda\mu}{(s-1)!(s\mu-\lambda)^2}\right]\pi_0$$

$$= r + \left[\frac{r^{s+1}/s}{s!\left(1 - r/s\right)^2} \right] \pi_0$$

Contoh 4.

Manajer sebuah bank harus menentukan berapa banyak teller yang bekerja pada hari jumat. Berdasar pengamatan, manajer tersebut mengetahui bahwa untuk setiap menit seorang customer berada di antrian, bank akan membayar 5 sen. Dalam satu menit, rata-rata terdapat 2 customer yang datang, sedangkan satu teller rata-rata memerlukan waktu 2 menit untuk melayani satu customer. Bank membayar seorang teller \$9 per jam. Diasumsikan *interarrival times* dan *service times* berdistribusi eksponensial. Berapakah jumlah teller optimal ?

Jawab :

soal di atas merupakan sistem antrian $M/M/s/GD/\infty/\infty$

diketahui : $\lambda = 2 \quad customer/menit$

$\mu = 0{,}5 \quad customer/menit$

supaya tercapai *steady-state* maka :

$$\frac{\lambda}{s\mu} < 1$$

$$\frac{2}{0{,}5s} < 1$$

$s \geq 5$ (s adalah jumlah teller, jadi harus bilangan bulat)

Jadi paling sedikit harus terdapat 5 teller.

Untuk sistem antrian dengan 5 teller :

$$\frac{total \quad harapan \quad pengeluaran}{menit} = \frac{harapan \quad service \quad \cos t}{menit} + \frac{harapan \quad delay \quad \cos t}{menit}$$

$$\frac{harapan \quad service \quad \cos t}{menit} = \frac{5 \times \$9}{jam} = \frac{5 \times \$0{,}15}{menit} = \$0{,}75 / menit$$

$$\frac{harapan \quad delay \quad \cos t}{menit} = \left(\frac{harapan \quad customer}{menit} \right) \times \left(\frac{harapan \quad delay \quad \cos t}{customer} \right)$$

dengan $\frac{harapan \quad customer}{menit} = \lambda$, dan

$$\frac{harapan \quad delay \quad \cos t}{customer} = 0{,}05 \times W_q$$

diperoleh $\frac{harapan \quad delay \quad \cos t}{menit} = \lambda \cdot 0{,}05 \cdot W_q = 2 \cdot 0{,}05 \cdot W_q = 0{,}1 W_q$

untuk mencari nilai W_q , harus dicari dulu nilai π_0 :

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{s-1} \frac{1}{s!} (\frac{\lambda}{\mu})^j + \frac{1}{s!} (\frac{\lambda}{\mu})^s (\frac{s\mu}{s\mu - j})}, \text{ dengan } s = 5 \text{ dan } \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{0{,}5} = 4$$

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + 4 + 8 + 10{,}67 + 10{,}67 + \frac{1}{120} (\frac{2}{0{,}5})^5 (\frac{5 \cdot 0{,}5}{5 \cdot 0{,}5 - 2})}$$

$$\pi_0 = \frac{1}{77} = 0{,}012987$$

$$W_q = \left[\frac{(\lambda/\mu)^s \mu}{(s-1)!(s\mu - \lambda)^2} \right] \pi_0 = \left[\frac{(2/0{,}5)^5 \cdot 0{,}5}{4!(5 \cdot 0{,}5 - 2)^2} \right] \cdot \frac{1}{77}$$

$$= 85{,}3333 \cdot \tfrac{1}{77} = 1{,}108225 \quad menit .$$

Jadi untuk s = 5 diperoleh :

$$\frac{harapan \quad delay \quad \cos t}{menit} = 2 \times 0{,}05 \times 1{,}108225 = \$0{,}1108225$$

$$\frac{total \quad harapan \quad pengeluaran}{menit} = 0{,}75 + 0{,}1108225 = \$0{,}8608225$$

Bila kita perhatikan untuk sistem antrian dengan s = 6, akan diperoleh :

$$\frac{service \quad \cos t}{menit} = 6 \times 0{,}15 = \$0{,}9$$ > pengeluaran total dengan lima teller.

Jadi 5 teller adalah optimal.

4.5 Sistem Antrian $M/M/s/GD/c/\infty$

Sistem antrian ini sebenarnya hanyalah penggabungan dari sistem antrian $M/M/s/GD/\infty/\infty$ dan sistem antrian $M/M/1/GD/c/\infty$. Dalam sistem ini jumlah server sebanyak s dan terdapat kapasitas maksimum sistem dalam menampung customer yaitu sebanyak c customer. Dengan demikian sisten ini dapat dimodelkan sebagai berikut :

$$\lambda_j = \lambda \qquad (j = 0,1,\ldots,c-1)$$

$$\mu_j = j\mu \qquad (j = 0,1,\ldots,s-1)$$

$$\mu_j = s\mu \qquad (j = s, s+1,\ldots,c)$$

Nilai π_j akan sama seperti pada sistem antrian $M/M/s/GD/\infty/\infty$, yaitu :

$$\pi_j = \begin{cases} \dfrac{\lambda^j}{j!\,\mu^j} \cdot \pi_0 & (1 \le j < s) \\[2ex] \dfrac{\lambda^j}{s^{j-s} s!\,\mu^j} \cdot \pi_0 & (s \le j \le c) \end{cases}$$

dengan demikian nilai dari π_0 juga akan sama, yaitu :

$$\pi_0 = \left[\sum_{j=0}^{s-1} \frac{r^j}{j!} + \sum_{j=s}^{c} \frac{r^j}{s^{j-s} s!} \right]^{-1}$$

Untuk jumlah customer di dalam sistem kurang dari atau sama dengan jumlah server, maka tidak akan ada customer di antrian. Dari sini maka jumlah customer di antrian adalah :

$$L_q = \sum_{j=s}^{c} (j-s)\pi_j \quad \text{dengan} \quad \pi_j = \frac{\lambda_j}{s^{j-s} s! \mu^j} \pi_0$$

$$= \sum_{j=s}^{c} \frac{(j-s)\lambda^j}{s^{j-s} s! \mu^j} \pi_0$$

Untuk nilai W dapat dihitung menggunakan Little's Formula sebagai berikut :

$$W = W_q + W_s$$

$$= W_q + \tfrac{1}{\mu}$$

jadi $\quad W = \dfrac{L_q}{\lambda(1-\pi_c)} + \dfrac{1}{\mu}$

dengan demikian diperoleh nilai L, yaitu :

$$L = \lambda(1-\pi_c)W$$

$$= L_q + \frac{\lambda(1-\pi_c)}{\mu}$$

sedangkan nilai L_s adalah :

$$L_s = L - L_q = \frac{\lambda(1-\pi_c)}{\mu}$$

Contoh 5.

Kembali ke contoh 4. Tetapi dengan pembatasan jumlah antrian sebanyak 100 customer.

Manajer sebuah bank harus menentukan berapa banyak teller yang bekerja pada hari jumat. Berdasar pengamatan, manajer tersebut mengetahui bahwa untuk setiap menit seorang customer berada di antrian, bank akan membayar 5 sen. Dalam satu menit, rata-rata terdapat 2 customer yang datang, sedangkan satu teller rata-rata memerlukan waktu 2 menit untuk melayani satu customer. Bank membayar seorang teller \$9 per jam. Kapasitas ruangan bank mampu menampung sebanyak 100 customer. Diasumsikan *interarrival times* dan *service times* berdistribusi eksponensial. Berapakah jumlah teller optimal ?

<u>Jawab</u>:

Soal di atas merupakan sistem antrian $M/M/s/GD/100/\infty$ dengan $\lambda = 2$ dan $\mu = 0,5$.

Dengan adanya pembatasan jumlah antrian, maka berapapun jumlah server pasti tercapai *steady-state* .

Sama seperti <u>contoh 5</u>., diperoleh :

Biaya total/menit = *service cost*/menit + *delay cost*/menit

= (jumlah server)x \$0,15/menit + (2 x 0,05 x W_q)/menit

= \$($s \times 0,15 + 0,1 \times W_q$) /menit

Perhatikan tabel berikut :

Jml. Server	Service cost/menit	Delay cost/menit	Biaya total/menit
1	0,15	0,1x197,33333	$19,883333
2	2x0,15	0,1x97	$10,00000
3	3x0,15	0,1x62,66667	$6,716667
4	4x0,15	0,1x23,74753	$2,974753
5	5x0,15	0,1x1,13778	$0,863778
6	6x0,15	0,1x0,29459	$0,929459

Dari tabel terlihat bahwa jumlah server yang optimal adalah lima.

4.6 Pembuatan software untuk optimisasi server dan mengetahui hasil pemodelan Antrian

Sekarang kita lihat sistem antrian yang terakhir yaitu sistem antrian $M/M/s/GD/c/\infty$, di dalam sistem antrian ini sebenarnya sudah mencakup semua sistem antrian yang dibahas sebelumnya, yaitu untuk $1 \le s \le n$, dan $s \le c < \infty$.

Dengan demikian bila kita membuat program untuk sistem antrian $M/M/s/GD/c/\infty$, dengan $1 \le s \le n$, dan $s \le c < \infty$ maka program ini akan berfungsi untuk semua sistem antrian yang telah dibahas di depan, yaitu sistem antrian $M/M/1/GD/\infty/\infty$, sistem antrian $M/M/1/GD/c/\infty$, sistem antrian $M/M/s/GD/\infty/\infty$, dan sistem antrian $M/M/s/G/c/\infty$

Berikut ini sebuah program dalam bahasa pascal yang berguna untuk mengetahui Hal-hal penting dalam suatu sistem antrian $M/M/s/G/c/\infty$, dengan $1 \le s \le n$, dan $s \le c < \infty$, juga berguna untuk mengoptimalkan jumlah server sehingga meminimalkan biaya total yang ada dalam suatu antrian. Tentu saja program ini masih sangat sederhana dan masih banyak yang harus dikembangkan lagi.

Untuk menjalankan program ini sebaiknya menggunakan pentium atau processor yang lebih cepat, atau bisa juga menggunakan 486 yang dilengkapi numerik processor meskipun mungkin terlalu lama dalam menghitung optimisasi antrian. Sebagai contoh sebuah optimisasi antrian seperti pada contoh 5., menggunakan 133 Mhz memerlukan waktu 18 detik dan menggunakan 233Mhz memerlukan waktu 15 detik untuk optimisasi.