DAFTAR ISTILAH

1. Arrival : Peristiwa datangnya seorang pelanggan dalam sistem antrian.
2. Arrival rate : Nilai rata-rata banyaknya *arrival* dalam satu satuan waktu.
3. Birth-death : Penggambaran suatu proses yang didalamnya terdapat peristiwa lahir (di dalam sistem antrian hal berarti peristiwa datangnya seorang customer ke dalam sistem) dan peristiwa kematian (di dalam sistem hal antrian berarti peristiwa seorang customer telah selesai dilayani dan pergi meninggalkan sistem)
4. Customer : Pelanggan
5. Delay cost : Biaya yang timbul karena seorang customer harus antri, yang dihitung tiap satu satuan waktu.
6. Equilibrium : Keadaan setelah t satuan waktu dimana jumlah customer di dalam sistem menjadi stabil, disebut juga sebagai keadaan *steady-state*.
7. Flow Balance Equation : Suatu persamaan probabilitas yang diperoleh setelah tercapai keadaan *steady-state*.
8. Interarrival times : Selang waktu antara dua arrival yang berurutan.
9. Little's Queuing Formula : Suatu formula yang digunakan dalan teori antrian untuk mengetahui jumlah rata-rata customer di dalam sistem atau untuk mengetahui berapa banyak waktu yang dibutuhkan customer di dalam sistem antrian. Formula ini dapat digunakan bila *steady-state* telah tercapai.
10. No-memory property : Suatu lemma yang berkaitan dengan sifat-sifat dari suatu variabel random kontinu yang berdistribusi eksponensial.
11. Server : Salah satu komponen dari sistem antrian yang bertugas melayani customer yang datang.
12. Service rate : Kecepatan server dalam melayani customer yang mempunyai satuan customer per satuan waktu.
13. Service time : Waktu yang diperlukan server untuk melayani satu customer.
14. Service cost : Biaya yang dikeluarkan untuk membayar server per satuan waktu.
15. Steady-state : (lihat equilibrium).

Teori Probabilitas

Definisi Probabilitas klasik atau probabilitas prior berhubungan dengan permainan atau sistem ideal, dimana semua kejadian yang mungkin mempunyai kemungkinan yang sama untuk terjadi.

Rumusan probabilitas prior adalah :

$$P = \frac{W}{n}$$

W adalah jumlah pemunculan suatu kejadian yang akan dicari probabilitasnya, n adalah jumlah kejadian yang mungkin dalam suatu trial.

Hasil dari suatu percobaan disebut titik sampel dan himpunan dari semua titik sampel yang mungkin adalah ruang sampel. Kejadian (*event*) adalah himpunan bagian dari ruang sampel.

Teori Probabilitas

Teori probabilitas formal terbentuk dari tiga aksioma sebagai berikut :

1. aksioma 1 : $0 \le P(E) \le 1$

   Aksioma ini mendefinisikan jangkauan probabilitas adalah dari 0 sampai 1. Nilai negatif tidak diperbolehkan.
2. aksioma 2 : $P(E) + P(E') = 1$

   Aksioma ini menyatakan bahwa jumlahan probabilitas dari semua kejadian yang saling asing yang membentuk semesta pembicaraan adalah 1. Kejadian-kejadian yang saling asing tidak punya elemen yang sama.
3. aksioma 3 : $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

   E_1 dan E_2 adalah kejadian yang saling asing. Aksioma ini menyatakan bahwa jika E_1 dan E_2 tidak bisa terjadi secara bersamaan, maka probabilitas gabungan dari keduanya adalah jumlahan dari probabilitas masing-masing kejadian.

Distribusi Eksponensial

Variabel random kontinu X dikatakan berdistribusi eksponensial dengan parameter $\theta > 0$ bila mempunyai PDF (*Probabilitas Density Function*) :

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} \text{ untuk } x > 0,$$

$$\text{dan } f(x,\theta) = 0 \quad \text{untuk } x \leq 0$$

<u>Lemma</u> :

Jika A berdistribusi eksponensial maka untuk semua t dan h non negatif berlaku :

$$P(A > t + h | A \geq t) = P(A > h)$$

bukti :

$$p(A > h) = \int_h^\infty \lambda e^{-\lambda t} = \left[-e^{-\lambda t}\right]_h^\infty = e^{-\lambda h}$$

$$P(A > t + h | A \geq t) = \frac{P(A > t + h \cap A \geq t)}{P(A \geq t)}$$

dari $P(A > t + h \cap A \geq t) = e^{-\lambda(t+h)}$ dan $P(A \geq t) = e^{-\lambda t}$

maka $P(A > t + h | A \geq t) = \dfrac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = P(A > h)$

Lemma ini biasa disebut sebagai <u>*no-memory property*</u> dari distribusi eksponensial. $P(A > t + h | A \geq t)$ tidak tergantung pada nilai t, jadi untuk setiap niali t, akan diperoleh suatu nilai P(A>h)

Sebagai contoh, untuk h = 4 maka untuk t = 5, t = 3, t = 2, dan t = 0 didapatkan :

$$P(A > 9 | A \geq 5) = P(A > 7 | A \geq 3) = P(A > 6 | A \geq 2) = P(A > 4 | A \geq 0) = e^{-4\lambda}$$

Lemma ini sangat penting untuk pemodelan sistem antrian, karena jika kita ingin mengetahui probabilitas waktu sampai *arrival* berikutnya datang, tidak tergantung pada telah berapa lama *arrival* terakhir datang.

Deret Geometri

<u>Teorema</u>

Jika x bilangan kompleks, dan $|x| < 1$ maka deret geometri $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ konvergen dan mempunyai nilai jumlahan $1/(1-x)$.

<u>Bukti</u> :

Teorema tersebut dapat kita tulis sebagai :

$$1 + x + x^2 + ... + x^n + ... = \frac{1}{1-x}, \text{ untuk } |x| < 1$$

Diambil suatu jumlahan $S_n = 1 + x + x^2 + ... + x^{n-1}$ yang merupakan bagian dari jumlahan di atas. Jika $x = 1$, maka $S_n = n$, ini berarti deret tersebut divergen karena untuk $n \to \infty$ maka $S_n \to \infty$. Jika $x \neq 1$, nilai S_n dapat dihitung sebagai berikut :

$$(1-x)S_n = (1-x)\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \sum_{k=0}^{n-1}(x^k - x^{k+1}) = 1 - x^n$$

$$S_n = \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}, \text{ untuk } x \neq 1$$

Dari sini terlihat untuk nilai n besar, nilai S_n tergantung pada kekonvergenan x^n. Untuk nilai $|x| < 1$, jika $n \to \infty$ maka $x^n \to 0$, jadi deret akan konvergen dan jumlahan S_n akan mempunyai nilai $1/(1-x)$. Sedangkan untuk $|x| \geq 1$ diperoleh suatu deret yang divergen karena untuk nilai $n \to \infty$, nilai x^n tak akan pernah mendekati nol.

Untuk x bilangan real, suatu deret geometri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dapat didiferensialkan maupun diintegralkan. Misal untuk deret geometri seperti pada teorema di atas dapat didiferensialkan kedua ruasnya menjadi :

$$1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1} + ... = \frac{1}{(1-x)^2}$$

PENGERTIAN SISTEM ANTRIAN DAN PROSES *BIRTH-DEATH*

Pengertian sistem Antrian

Sistem antrian merupakan suatu kesatuan yang dibangun dari beberapa komponen penting yang saling mempengaruhi satu sama lain dan keberadaan setiap komponen tersebut tidak dapat dihilangkan. Komponen-komponen tersebut adalah:

Server

Di dalam suatu sistem antrian harus terdapat minimal satu server yang bertugas melayani customer. Jika terdapat lebih dari satu server, maka kecepatan tiap server dalam melayani customer akan berbeda-beda sehingga untuk membuat pemodelannya harus dicari nilai rata-rata kecepatan server. Jumlah rata-rata customer yang selesai dilayani oleh server dalam satu satuan waktu disebut sebagai *service rate* atau output dari sistem antrian. Untuk selanjutnya *service rate* selalu kita asumsikan berdistribusi eksponensial.

Customer

Jika dilihat dari segi populasi, maka populasi customer dapat digolongkan menjadi dua macam yaitu terbatas dan tak terbatas. Demikian juga jika dilihat dari kapasitas sistem antrian dalam menampung customer yaitu terbatas dan tak terbatas. Jumlah customer yang datang per satuan waktu kita sebut sebagai *arrival rate* atau input dari sistem antrian, input ini setiap saat akan berubah-ubah sehingga perlu dicari nilai rata-ratanya. Perlu diperhatikan juga jika terdapat lonjakan *arrival rate* pada selang waktu tertentu, maka nilai rata-rata tadi tidak akan mendekati kenyataan. Sebagai contoh antrian kendaraan di perempatan jalan akan melonjak pada pagi hari saat para pekerja berangkat dan sore hari saat mereka pulang. Keadaan yang demikian dapat kita atasi dengan membagi waktu satu hari menjadi beberapa bagian yaitu : pagi, siang, sore, dan malam yang pada setiap bagian tersebut memiliki nilai arrival rate sendiri-sendiri. Untuk selanjutnya arrival rate selalu kita asumsikan berdistribusi eksponensial.

Disiplin service

Disiplin service merupakan suatu aturan yang diterapkan dalam suatu sistem antrian untuk menjamin suatu antrian dapat berjalan dengan tertib. Ada beberapa macam disiplin yang biasa dipakai dalam teori antrian, diantaranya adalah :

- *FCFS discipline (First Come First Served)*
  Contoh : antrian membeli tiket.
- *LCFS disciplin (Last Come First Served)*
  Contoh : operasi stack pada komputer.
- *SIRO disciplin (Service In Random Order)*
  Contoh : penerimaan telepon oleh operator pada saat banyak telepon yang masuk.
- *Priority Queuing Disciplin*
  Contoh : penerimaan pasien di ruang gawat darurat selalu diutamakan yang sakitnya paling parah

Untuk menggambarkan lebih jelas tentang sistem antrian, digunakan notasi *Kendall-Lee* yaitu suatu notasi yang terdiri dari enam karakter yang ditulis sebagai :

1/2/3/4/5/6

Karakter pertama menggambarkan proses arrival, yaitu :

M = Interarrival times iid (*independent identicaly distributed*) dan berdistribusi eksponensial.

D = Interarrival times iid dan deterministik.

E_k = Interarrival times iid Erlang dengan parameter shape k.

GI= Interarrival times mengikuti distribusi-distribusi yang umum.

Karakter kedua menggambarkan service times :

M = Service times iid dan berdistribusi exponensial.

D = Service times iid dan deterministik.

E_k= Service times iid dan berdistribusi Erlang dengan parameter shape k.

G = Service times iid dan mengikuti distribusi-distribusi lain yang umum.

Karakter ketiga menunjukkan jumlah paralel server.

Karakter keempat menunjukkan disiplin antrian yang dipakai, yaitu :

FCFS = First come, first served

LCFS = Last come, first served

SIRO = Service in random order

GD = General Queue discipline

Karakter kelima menunjukkan jumlah maksimum dari *customer* di dalam sistem, yaitu yang sedang dilayani dan yang sedang antri.

Karakter keenam menunjukkan besarnya populasi *customer* yang di gambarkan.

Sebagai contoh, suatu klinik kesehatan dengan sistem antrian M/E_2/8/FCFS/10/∞ , ini menggambarkan klinik kesehatan ini memiliki 8 dokter dengan *interarrival times* berdistribusi exponensial, *service times* berdistribusi Erlang dengan parameter shape dua, berdisiplin FCFS, dan total kapasitas pasiennya 10 orang.

Pemodelan Proses Arrival

Mula-mula diasumsikan tepat pada saat t, paling banyak terdapat satu *arrival*. Didefinisikan t_i adalah waktu saat customer ke-i datang, dan $T_i = t_{i+1} - t_i$ adalah selang kedatangan customer (*interarrival times*).

Dalam pembuatan pemodelan, diasumsikan T_i independen yang digambarkan sebagai variabel random kontinu A. asumsi bahwa T_i kontinu adalah asumsi yang baik karena mendekati kenyataan, misalnya suatu *interarrival times* tidak harus tepat 1 atau 2 satuan waktu melainkan mungkin saja 1,6679 satuan waktu.

Kita asumsikan A memiliki fungsi densitas a(t) > 0 maka untuk Δt kecil $P(t \le A \le t + \Delta t)$ akan mendekati $\Delta t \cdot a(t)$.

Jadi $P(A \le c) = \int_0^c a(t)dt$ dan $P(A > c) = \int_c^\infty a(t)\Delta t dt$

Didefinisikan nilai rata-rata dari *interarrival times* = $\frac{1}{\lambda}$, misal satuan waktu yang digunakan adalah jam maka $\frac{1}{\lambda}$ akan memiliki satuan jam per *arrival*,

$$\frac{1}{\lambda} = \int_0^\infty ta(t)dt$$

kita definisikan λ sebagai *arrival rate* dengan satuan *arrival* per jam.

Kebanyakan aplikasi antrian memilih variabel A berdistribusi eksponensial. Sebuah distribusi eksponensial dengan parameter λ punya densitas $a(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ dan rata-rata *interarrival times* $E(A) = \frac{1}{\lambda}$.

Pemodelan proses service

Kita asumsikan *service time* setiap *customer* sebagai variabel random independen yang dibangun oleh variabel random S dengan fungsi densitas s(t), dan mean *service time* = $\frac{1}{\mu}$

Jadi $\frac{1}{\mu} = \int_0^\infty ts(t)dt$

Variabel $\frac{1}{\mu}$ memiliki satuan jam per customer, jadi μ memiliki satuan customer per jam, selanjutnya kita sebut μ sebagai *service rate*. Sama seperti *interarrival times*, *service time* kita modelkan sebagai variabel random berdistribusi eksponensial. Jadi diperoleh $s(t) = \mu e^{-\mu t}$, kemudian rata-rata *service time* tiap customer adalah $\frac{1}{\mu}$

Pengertian Proses Birth-Death

Misalkan pada saat tertentu di dalam suatu sistem terdapat sejumlah n customer. Jika selanjutnya terdapat peristiwa *"birth"* yang berarti datang satu (tepat satu) customer ke dalam sistem maka jumlah customer didalam sistem menjadi n + 1 customer, sedangkan bila terjadi peristiwa *"death"* yang berarti satu (tepat satu) customer meninggalkan sistem maka jumlah customer di dalam sistem menjadi n – 1 customer.

Pertama kita definisikan "state" adalah jumlah orang yang ada pada saat t, dalam suatu sistem antrian. Untuk t = 0, akan terdapat inisial state, yaitu jumlah semula orang yang ada pada sistem. Kemudian didefinisikan P_{ij} (t) yaitu probabilitas bahwa akan terdapat j orang dalam sistem pada saat t, jika diketahui terdapat i orang pada saat t = 0. Untuk t besar P_{ij} (t) ini akan mempunyai nilai limit π_j yang independen terhadap inisial state i . π_j ini kita sebut *steady state* atau *probabilitas equilibrium* untuk state j. Jadi pada t besar, setelah dicapai *steady-sate*, nilai harapan akan terdapat j orang dalam sistem akan mendekati π_j dan ini tidak tergantung pada jumlah orang pada saat t = 0.

Selanjutnya untuk menganalisa suatu sistem antrian, selalu kita asumsikan bahwa *steady-sate* telah tercapai.

Dalam proses *birth-death* berlaku hukum-hukum sebagai berikut :

Hk. 1. Sebuah kelahiran terjadi di dalam selang waktu $(t, t+\Delta t)$ dengan probabilitas $\lambda_j \Delta t + o(\Delta t)$. State akan berubah dari j menjadi j + 1. Variabel λ_j disebut *birth rate* di dalam state j.

Hk. 2. Sebuah kematian terjadi di dalam selang waktu $(t, t+\Delta t)$ dengan probabilitas $\mu_j \Delta t + o(\Delta t)$ State akan berubah dari j menjadi j – 1 . Variabel μ_j disebut *death rate* di dalam state j. Untuk j = 0, maka $\mu_j = 0$ karena suatu state negatif tidak mungkin terjadi.

Hk. 3. *Birth* dan *Death* saling independen.