BAB III
PEMBAHASAN

Di dalam skripsi ini akan dibahas mengenai ukuran keefektifan sistem antrian dan optimalisasi model $(M/M/c):(FCFS/\infty/\infty)$ dengan menggunakan model biaya. Namun, sebelum membahas ukuran keefektifan dan optimalisasi model $(M/M/c):(FCFS/\infty/\infty)$ terlebih dahulu akan diuraikan ciri-ciri model antrian $(M/M/c):(FCFS/\infty/\infty)$.

A. Model $(M/M/c):(FCFS/\infty/\infty)$

Model antrian $(M/M/c):(FCFS/\infty/\infty)$ merupakan salah satu model yang penotasiannya berdasarkan format baku yang diperkenalkan oleh Kendall-Lee sebagaimana dinyatakan pada Persamaan (2.1). Model antrian $(M/M/c):(FCFS/\infty/\infty)$ memiliki enam ciri.

1. Waktu antar kedatangan berdistribusi Eksponensial.
2. Waktu pelayanan berdistribusi Eksponensial.
3. Ada sejumlah c pelayan paralel yang dapat memberikan pelayanan kepada pelanggan.
4. Disiplin antrian adalah *FCFS*, sedangkan penentuan pelayan yang akan ditempati pelanggan adalah berdasarkan pelayan yang tidak sedang memberi pelayanan kepada pelanggan.
5. Kapasitas sistem tidak terbatas.
6. Jumlah sumber pemanggilan tidak terbatas.

Ada dua asumsi dalam model antrian $(M/M/c):(FCFS/\infty/\infty)$.

1. Setiap pelayan dapat memberikan pelayanan kepada pelanggan secara tuntas.
2. Tidak ada waktu yang hilang antara kepergian pelanggan dengan kedatangan pelanggan pada pelayan yang sama.

Sebagaimana telah diuraikan pada bab sebelumnya bahwa proses antrian dimulai saat pelanggan-pelanggan yang memerlukan pelayanan mulai memasuki sistem antrian dan berakhir setelah pelanggan-pelanggan selesai dilayani. Hal ini berarti bahwa proses antrian merupakan gabungan dari kedatangan dan kepergian pelanggan sehingga $\lambda_n = \lambda$ dan $\mu_n = \mu$.

Apabila jumlah pelanggan dalam sistem antrian sama atau melebihi jumlah pelayan, maka seluruh pelayan berada dalam kondisi sibuk. Dengan demikian, laju pelayanan rata-rata keseluruhan pelayan adalah $\mu_T = c\mu$. Apabila jumlah pelanggan dalam sistem antrian kurang atau sama dengan jumlah pelayan, maka laju pelayanan rata-rata keseluruhan pelayan adalah $\mu_T = n\mu$. Dengan demikian,

$$\mu_T = \begin{cases} n\mu, & 0 \le n \le c \\ c\mu, & n \ge c. \end{cases} \tag{3.1}$$

B. Probabilitas *Steady State* Model Antrian $(M/M/c):(FCFS/\infty/\infty)$.

Selanjutnya akan dibahas probabilitas *steady state* yang merupakan dasar perhitungan ukuran keefektifan kinerja sistem antrian. “Probabilitas *steady state* terdapat *n* pelanggan” dalam sistem antrian (P_n) diperoleh dengan mensubstitusikan Persamaan (3.1) ke dalam Persamaan (2.40), sehingga:

a. untuk $1 \le n \le c$, didapatkan

$$P_n = P_0 \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}$$

$$= P_0 \frac{\lambda_0}{\mu_1} \frac{\lambda_1}{\mu_2} \cdots \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}$$

$$= P_0 \frac{\lambda}{\mu} \frac{\lambda}{2\mu} \cdots \frac{\lambda}{n\mu}$$

$$= P_0 \frac{\lambda^n}{n!\mu^n}, \qquad (3.2)$$

b. untuk $n \ge c$, didapatkan

$$P_n = P_0 \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}$$

$$= P_0 \underbrace{\frac{\lambda_0}{\mu_1} \frac{\lambda_1}{\mu_2} \cdots \frac{\lambda_{c-2}}{\mu_{c-1}} \frac{\lambda_{c-1}}{\mu_c}}_{\mu_t = n\mu} \underbrace{\frac{\lambda_c}{\mu_{c+1}} \cdots \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}}_{\mu_t = c\mu} \qquad (3.3)$$

$$= P_0 \frac{\lambda}{\mu} \frac{\lambda}{2\mu} \cdots\cdots \frac{\lambda}{(c-1)\mu} \frac{\lambda}{c\mu} \underbrace{\frac{\lambda}{c\mu} \frac{\lambda}{c\mu} \cdots\cdots \frac{\lambda}{c\mu}}_{n-c \quad kali}$$

$$= P_0 \frac{\lambda^n}{c!\mu^n c^{n-c}}. \qquad (3.3)$$

Dari penjabaran pada Persamaan (3.2) dan Persamaan (3.3) diperoleh

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{n!\mu^n} P_0, & 1 \le n \le c \\ \dfrac{\lambda^n}{c^{n-c} c!\mu^n} P_0, & n \ge c. \end{cases} \qquad (3.4)$$

Sebagaimana telah diuraikan pada dasar teori bahwa kasus untuk $n=0$ adalah kasus khusus, sehingga ” probabilitas *steady state* terdapat *n* pelanggan” untuk nilai $n=0$ juga akan disajikan secara khusus. Berikut ini akan diuraikan “probabilitas *steady state* terdapat *n* pelanggan” untuk nilai $n=0$.

Berdasarkan Definisi 2.1 yaitu bahwa jumlah total suatu probabilitas adalah satu, maka

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$

sehingga

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = P_0 + \sum_{n=1}^{c-1} P_n + \sum_{n=c}^{\infty} P_n = 1$$

$$1 = P_0 + \left[\sum_{n=1}^{c-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=c}^{\infty} \frac{1}{c^{n-c}\, c!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right] P_0$$

$$1 = \left[1 + \sum_{n=1}^{c-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \frac{1}{c!} \sum_{n=c}^{\infty} \frac{1}{c^{n-c}\, c!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-c} \right] P_0$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{c-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \frac{1}{c!} \sum_{n=c}^{\infty} \frac{1}{c^{n-c}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-c}}$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \frac{1}{c!} \sum_{n=c}^{\infty} \frac{1}{c^{n-c}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-c}}$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \frac{1}{c!} \sum_{n=c}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{c\,\mu}\right)^{n-c}}. \qquad (3.5)$$

Menggunakan Definisi 2.10 ke Persamaan (3.5) diperoleh nilai “probabilitas *steady state* terdapat *n* pelanggan” untuk nilai $n = 0$.

$$P_0 = \left(\sum_{n=0}^{c-1} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \frac{1}{c!(1-\lambda/c\mu)} \right)^{-1}, \qquad \frac{\lambda}{c\mu} < 1. \tag{3.6}$$

Untuk mempermudah perhitungan, ambil $\frac{\lambda}{\mu} = p$ sehingga bentuk sederhana Persamaan (3.6) adalah

$$P_0 = \left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{p^n}{n!} + \frac{p^c}{c!\left(1 - p/c\right)} \right)^{-1} \tag{3.7}$$

$$\sum_{n=0}^{c-1} \frac{p^n}{n!} = \frac{1}{P_0} - \frac{p^c \,.\, c}{c!\left(c - p\right)}. \tag{3.8}$$

Dengan ketetapan bahwa untuk $n = 0$ didapatkan $n! = 1$, maka nilai P_0 pada Persamaan (3.7) adalah 1. Dengan demikian, Persamaan (3.4) juga berlaku untuk nilai $n = 0$ sehingga

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{n!\,\mu^n} P_0 \,, & 0 \le n \le c \\ \dfrac{\lambda^n}{c^{n-c} c!\,\mu^n} P_0 \,, & n \ge c. \end{cases} \tag{3.9}$$

C. Ukuran Keefektifan Sistem Antrian

Ukuran keefektifan sistem antrian diperoleh setelah “probabilitas *steady state* terdapat n pelanggan” dalam sistem antrian ditentukan. Ukuran keefektifan sistem antrian meliputi nilai harapan banyaknya pelanggan di dalam antrian dan di dalam sistem serta nilai harapan waktu tunggu bagi seorang pelanggan di dalam antrian dan di dalam sistem antrian.

1. Nilai Harapan Banyaknya Pelanggan Dalam Sistem Antrian

Jumlah pelanggan dalam sistem antrian adalah jumlah pelanggan dalam antrian ditambah jumlah pelanggan yang sedang mendapat pelayanan. Sedangkan nilai harapan banyaknya pelanggan dalam sistem antrian merupakan jumlah keseluruhan dari perkalian jumlah pelanggan dalam sistem dengan probabilitasnya.

Berdasarkan Persamaan (2.41) diperoleh nilai harapan banyaknya pelanggan dalam sistem antrian yang dinyatakan dengan

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} n\, P_n$$

$$= 0 + \sum_{n=1}^{c-1} n\, P_n + \sum_{n=c}^{\infty} n\, P_n$$

$$= \sum_{n=1}^{c-1} \frac{n\, \lambda^n}{n!\, \mu^n} P_o + \sum_{n=c}^{\infty} \frac{n\, \lambda^n}{c^{n-c}\, c!\, \mu^n} P_0 \qquad \text{dengan } \frac{\lambda}{\mu} = p.$$

$$L_s = \sum_{n=1}^{c-1} \frac{n\, p^n}{n!} P_o + \sum_{n=c}^{\infty} \frac{n\, p^n}{c^{n-c}\, c!} P_0$$

$$= \sum_{n=1}^{c-1} \frac{p^n}{(n-1)!} P_o + \sum_{n=c}^{\infty} \frac{n\, p^n}{c^{n-c}\, c!} P_0$$

$$= P_o\, p \sum_{n=1}^{c-1} \frac{p^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{P_0}{c!} \sum_{n=c}^{\infty} \frac{n\, p^n}{c^{n-c}}\ .$$

Menurut sifat sigma $\sum_{n=1}^{c-1} \frac{p^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{c-1} \frac{p^n}{n!} - \frac{p^{c-1}}{(c-1)!}$ diperoleh

$$L_s = P_o\, p \left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{p^n}{n!} - \frac{p^{c-1}}{(c-1)!} \right) + \frac{P_0}{c!} \sum_{n=c}^{\infty} \frac{n\, p^n}{c^{n-c}} \,. \tag{3.10}$$

Dengan mensubstitusi Persamaan (3.8) ke Persamaan (3.10) diperoleh

$$L_s = P_o\, p \left(\frac{1}{P_o} - \frac{p^c\, c}{c!\,(c-p)} - \frac{p^{c-1}}{(c-1)!} \right) + \frac{P_0}{c!} \sum_{n=c}^{\infty} \frac{n\, p^n}{c^{n-c}} \,. \tag{3.11}$$

Nilai $\frac{P_0}{c!} \sum_{n=c}^{\infty} \frac{n\, p^n}{c^{n-c}}$ pada Persamaan (3.11) adalah

$$\frac{P_0}{c!} \sum_{n=c}^{\infty} \frac{n\, p^n}{c^{n-c}} = \frac{P_0}{c!} \left(\frac{p^{c+1}}{c} \sum_{n=c}^{\infty} (n-c) \frac{p^{n-c-1}}{c^{n-c-1}} + \frac{p^{c+1}}{c} \sum_{n=c}^{\infty} (c) \frac{p^{n-c-1}}{c^{n-c-1}} \right)$$

$$= \frac{P_0}{c!} \frac{p^{c+1}}{c} \left(\sum_{n=c}^{\infty} (n-c) \left(\frac{p}{c} \right)^{n-c-1} + \sum_{n=c}^{\infty} (c) \left(\frac{p}{c} \right)^{n-c} \frac{c}{p} \right)$$

$$= \frac{P_0}{c!} \frac{p^{c+1}}{c} \left(\sum_{n=c}^{\infty} (n-c) \left(\frac{p}{c} \right)^{n-c-1} + \sum_{n=c}^{\infty} \frac{c^2}{p} \left(\frac{p}{c} \right)^{n-c} \right)$$

$$= \frac{P_0}{c!} \frac{p^{c+1}}{c} \left(\sum_{n=c}^{\infty} (n-c) \left(\frac{p}{c} \right)^{n-c-1} + \frac{c^2}{p} \sum_{n=c}^{\infty} \left(\frac{p}{c} \right)^{n-c} \right). \tag{3.12}$$

Menggunakan Definisi 2.9 pada Persamaan (3.12) diperoleh

$$\frac{P_0}{c!} \sum_{n=c}^{\infty} \frac{n\, p^n}{c^{n-c}} = \frac{P_0}{c!} \frac{p^{c+1}}{c} \left(\sum_{n=c}^{\infty} \frac{d}{d\left(\frac{p}{c}\right)} \left(\frac{p}{c} \right)^{n-c} + \frac{c^2}{p} \sum_{n=c}^{\infty} \left(\frac{p}{c} \right)^{n-c} \right).$$

$$\frac{P_0}{c!}\sum_{n=c}^{\infty}\frac{n\,p^n}{c^{n-c}} = \frac{P_0}{c!}\frac{p^{c+1}}{c}\left(\frac{d}{d\left(\frac{p}{c}\right)}\sum_{n=c}^{\infty}\left(\frac{p}{c}\right)^{n-c} + \frac{c^2}{p}\sum_{n=c}^{\infty}\left(\frac{p}{c}\right)^{n-c}\right). \tag{3.13}$$

Menggunakan Definisi 2.10 pada Persamaan (3.13) diperoleh

$$\frac{P_0}{c!}\sum_{n=c}^{\infty}\frac{n\,p^n}{c^{n-c}} = \frac{P_0}{c!}\frac{p^{c+1}}{c}\left(\frac{d}{d\left(\frac{p}{c}\right)}\frac{1}{\left(1-\frac{p}{c}\right)} + \frac{c^2}{p}\frac{1}{\left(1-\frac{p}{c}\right)}\right).$$

$$\frac{P_0}{c!}\sum_{n=c}^{\infty}\frac{n\,p^n}{c^{n-c}} = \frac{P_0}{c!}\frac{p^{c+1}}{c}\left(\frac{1}{(1-p/c)^2} + \frac{c^2}{p(1-p/c)}\right). \tag{3.14}$$

Dengan mensubstitusi Persamaan (3.14) ke Persamaan (3.11) diperoleh

$$L_s = P_o\,p\left(\frac{1}{P_o} - \frac{p^c\,c}{c!\,(c-p)} - \frac{p^{c-1}}{(c-1)!}\right) + \frac{P_0\,p^{c+1}}{c!\,c}\left(\frac{1}{(1-p/c)^2} + \frac{c^2}{p\,(1-p/c)}\right)$$

$$= \left(p - \frac{P_0\,p^{c+1}\,c}{c!\,(c-p)} - \frac{P_0\,p^c}{(c-1)!}\right) + \frac{P_0\,p^{c+1}}{c!\,c\,(1-p/c)^2} + \frac{P_0\,p^{c+1}\,c^2}{c!\,c\;p\,(1-p/c)}$$

$$= \left(p - \frac{P_0\,p^{c+1}\,c}{c!\,(c-p)} - \frac{P_0\,p^c\,c\,(c-p)}{c!\,(c-p)}\right) + \frac{P_0\,p^{c+1}\,c^2}{c!\,c\,(c-p)^2} + \frac{P_0\,p^{c+1}\,c^2}{c!\,p\,(c-p)}$$

$$= \left(p - \frac{P_0\,p^{c+1}\,c}{c!\,(c-p)} - \frac{P_0\,p^c\,c^2}{c!\,(c-p)} + \frac{P_0\,p^{c+1}\,c}{c!\,(c-p)}\right) + \frac{P_0\,p^{c+1}\,c}{c!\,(c-p)^2} + \frac{P_0\,p^c\,c^2}{c!\,(c-p)}$$

$$= \left(p + \frac{P_0\,p^{c+1}\,c}{c!\,(c-p)^2}\right).$$

$$L_s = \left(\frac{\lambda}{\mu} + \frac{P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c+1} c}{c!\left(c - \frac{\lambda}{\mu}\right)^2}\right). \tag{3.15}$$

2. Nilai Harapan Banyaknya Pelanggan Dalam Antrian

Jumlah pelanggan dalam antrian merupakan selisih jumlah pelanggan dalam sistem antrian dengan jumlah pelanggan yang sedang mendapat pelayanan. Sedangkan nilai harapan banyaknya pelanggan dalam antrian merupakan jumlah keseluruhan dari perkalian jumlah pelanggan dalam antrian dengan probabilitasnya.

Dengan mensubstitusi Persamaan (3.4) ke Persamaan (2.42) diperoleh nilai harapan banyaknya pelanggan dalam antrian yang dinyatakan dengan

$$L_q = \sum_{n=c}^{\infty} (n-c)\, P_n$$

$$= \sum_{n=c}^{\infty} (n-c)\, P_0 \frac{p^n}{c!\, c^{n-c}}$$

$$= \frac{P_0}{c!} \sum_{n=c}^{\infty} \frac{(n-c)\, p^n}{c^{n-c}}$$

$$= P_0 \frac{p^{c+1}}{c!\, c} \sum_{n=c}^{\infty} (n-c) \left(\frac{p}{c}\right)^{n-c-1} . \qquad (3.16)$$

Menggunakan Definisi 2.9 pada Persamaan (3.16) diperoleh

$$L_q = P_0 \frac{p^{c+1}}{c!\, c} \frac{d}{d\left(\frac{p}{c}\right)} \sum_{n=c}^{\infty} \left(\frac{p}{c}\right)^{n-c} . \qquad (3.17)$$

Menggunakan Definisi 2.10 pada Persamaan (3.17) diperoleh

$$L_q = P_0 \frac{p^{c+1}}{c!\, c} \frac{d}{d\left(\frac{p}{c}\right)} \frac{1}{\left(1-\frac{p}{c}\right)}$$

$$= P_0 \frac{p^{c+1}}{c!\, c} \frac{1}{\left(1-\frac{p}{c}\right)^2} .$$

$$L_q = P_0 \frac{p^{c+1}}{c!\ c} \frac{c^2}{(c-p)^2}$$

$$= P_0 \frac{p^{c+1}}{(c-1)!\ (c-p)^2}$$

$$= P_0 \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c+1}}{(c-1)!\ \left(c - \frac{\lambda}{\mu}\right)^2} \quad . \tag{3.18}$$

Berdasarkan Persamaan (3.15) dan Persamaan (3.18), keterkaitan antara L_q dan L_s dapat dinyatakan pada Persamaan (3.19) dan Persamaan (3.20).

$$L_q = L_s - \frac{\lambda}{\mu} \quad . \tag{3.19}$$

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} \quad . \tag{3.20}$$

3. Nilai Harapan Waktu Tunggu Pelanggan dalam Antrian dan dalam Sistem Antrian

Mengingat bahwa laju kedatangan pelanggan pada model antrian $(M/M/c):(FCFS/\infty/\infty)$ diasumsikan konstan (tidak tergantung pada jumlah pelanggan dalam sistem) dan berdasarkan Definisi 2.1 yaitu bahwa jumlah total suatu probabilitas adalah satu , maka $\lambda_{eff} = \lambda$.

Berdasarkan rumus *Little* pada Persamaan (2.43) diperoleh nilai harapan waktu tunggu seorang pelanggan dalam sistem antrian yang dinyatakan dengan

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} \quad . \tag{3.21}$$

Berdasarkan rumus *Little* pada Persamaan (2.43) diperoleh nilai harapan waktu tunggu seorang pelanggan dalam antrian yang dinyatakan dengan

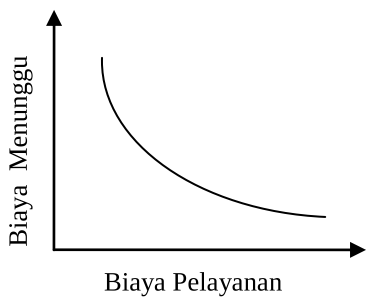
$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \; . \tag{3.22}$$

D. Model Biaya dalam Keputusan Antrian

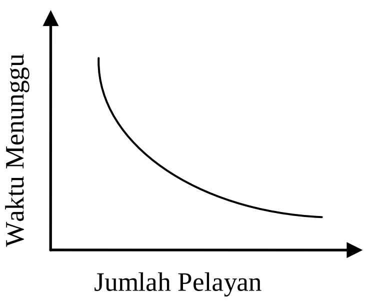
Langkah setelah model antrian dipilih adalah merancang model keputusan yang dapat digunakan untuk mengoptimalkan rancangan sistem tersebut. Model biaya dalam keputusan antrian model $(M/M/c):(FCFS/\infty/\infty)$ diharapkan dapat menyeimbangkan dua jenis biaya yang bertolak belakang, yaitu:

1. biaya tingkat pelayanan, dari sudut pandang pelayan,
2. biaya menunggu, dari sudut pandang pelanggan.

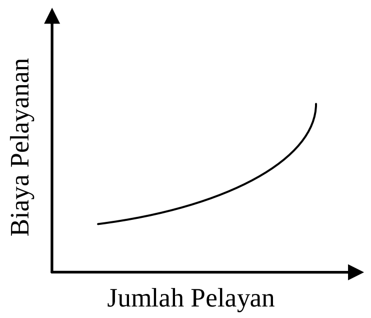
Apabila tingkat pelayanan meningkat, maka biaya pelayanan pun meningkat sedemikian hingga mengakibatkan biaya menunggu bagi pelanggan menurun. Tingkat pelayanan optimal apabila biaya menunggu dan biaya pelayanan minimum. Hubungan antara biaya pelayanan dan biaya menunggu pelanggan ditunjukkan pada gambar-gambar di bawah ini.



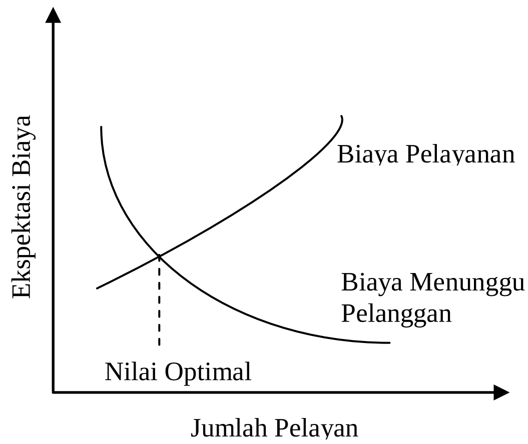
Gambar 3.1
Perbandingan antara Biaya Pelayanan dan Waktu Menunggu



Gambar 3.2
Perbandingan antara Waktu Menunggu dan Jumlah Pelayan



Gambar 3.3
Perbandingan antara Jumlah Pelayan dan Biaya Pelayanan



Gambar 3.4
Optimalisasi Total Biaya dalam Sistem Antrian

Sangatlah sulit menentukan secara eksplisit biaya menunggu per satuan waktu karena biaya menunggu setiap pelanggan belum tentu sama. Namun demikian, biaya menunggu pelangggan dapat diduga secara sederhana sebagai biaya penurunan produktifitas pelanggan karena proses menunggu.

Sebagai contoh, akan sulit menentukan biaya menunggu pelanggan dalam suatu antrian panjang di supermarket dengan waktu tunggu yang lama. Lain halnya untuk jenis pelanggan lain yang waktu menunggunya dapat dinyatakan, seperti pada mesin-mesin rusak yang menunggu untuk diperbaiki montir. Dalam kasus ini, biaya menunggu dapat diterjemahkan sebagai kerugian yang diderita pelanggan karena tidak ada produksi akibat kerusakan mesin.

Optimalisasi biaya pada suatu perusahaan dapat dilakukan dengan menentukan jumlah pelayan yang meminimumkan biaya total sebagaimana didefinisikan pada Persamaan (3.23).

$$\begin{aligned} ETC(c) &= EOC(c) + EWC(c) \\ &= C_1\, c + C_2\, L_s(c). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Keterangan

c : Jumlah pelayan.
$ETC(c)$: *Expected Total Cost*
Total biaya dalam sistem antrian dengan c pelayan per satuan waktu.
$EOC(c)$: *Expected Operating Cost*
Biaya pelayanan yang diperkirakan untuk pengoperasian per satuan waktu apabila dalam sistem antrian terdapat c pelayan.
$EWC(c)$: *Expected Waiting Cost*
Biaya menunggu yang diperkirakan per satuan waktu apabila dalam sistem antrian terdapat c pelayan.
C_1 : Biaya penambahan seorang pelayan per satuan waktu.
C_2 : Biaya menunggu satu pelanggan per satuan waktu.
$L_s(c)$: Jumlah pelanggan yang diperkirakan dalam sistem dengan c pelayan.

Jumlah pelayan yang dioperasikan menentukan besarnya biaya suatu sistem antrian. Kelebihan pelayan mengakibatkan tingginya biaya operasional perusahaan sedangkan kekurangan pelayan mengakibatkan tingginya biaya tunggu pelanggan. Biaya dalam sistem antrian akan optimal apabila jumlah pelayan yang dioperasikan optimal. Syarat-syarat yang harus dipenuhi untuk mendapatkan jumlah pelayan (*c)* yang optimal adalah

$$ETC(c-1) \geq ETC(c) \tag{3.24}$$

dan

$$ETC(c+1) \geq ETC(c). \tag{3.25}$$

Dengan mensubstitusi Persamaan (3.23) ke Persamaan (3.24), diperoleh

$$ETC(c-1) \geq ETC(c)$$

$$EOC(c-1) + EWC(c-1) \geq EOC(c) + EWC(c)$$

$$C_1\,(c-1) + C_2 L_s\,(c-1) \geq C_1\,(c) + C_2\,L_s\,(c)$$

$$\frac{C_1}{C_2}(c-1) + L_s\,(c-1) \geq \frac{C_1}{C_2}(c) + L_s\,(c)$$

$$\frac{C_1}{C_2}(c-1) \;-\; \frac{C_1}{C_2}(c) \;\geq\; L_s(c) \;-\; L_s(c-1)$$

$$\frac{C_1}{C_2} \;\leq\; L_s(c-1) \;-\; L_s(c). \qquad (3.26)$$

Dengan mensubstitusi Persamaan (3.23) ke Persamaan (3.25), diperoleh

$$ETC(c+1) \;\geq\; ETC(c)$$

$$EOC(c+1) \;+\; EWC(c+1) \;\geq\; EOC(c) \;+\; EWC(c)$$

$$C_1\,(c+1) \;+\; C_2\,L_s\,(c+1) \;\geq\; C_1\,(c) \;+\; C_2\,L_s\,(c)$$

$$\frac{C_1}{C_2}(c+1) \;+\; L_s\,(c+1) \;\geq\; \frac{C_1}{C_2}(c) \;+\; L_s\,(c)$$

$$\frac{C_1}{C_2}(c+1) \;-\; \frac{C_1}{C_2}(c) \;\geq\; L_s\,(c) \;+\; L_s\,(c+1)$$

$$\frac{C_1}{C_2} \;\geq\; L_s\,(c) \;-\; L_s\,(c+1). \qquad (3.27)$$

Berdasarkan Persamaan (3.26) dan Persamaan (3.27) diperoleh

$$L_s(c) \;-\; L_s(c+1) \;\leq\; \frac{C_1}{C_2} \;\leq\; L_s(c-1) \;-\; L_s(c). \qquad (3.28)$$

Nilai c pada $L_s(c)$ menunjukkan banyaknya pelayan optimal yang hendaknya dioperasikan. Jumlah pelayanan yang optimal diperlukan agar sistem berada dalam keadaan stabil, yaitu keadaan dimana biaya menunggu dan biaya pelayanan seimbang sehingga tujuan suatu perusahaan untuk meminimumkan biaya total tercapai. Untuk mempermudah dalam pengilustrasian, akan diberikan kasus nyata pada situasi antrian tunggal dengan pelayan ganda.

E. Situasi Antrian Tunggal dengan Pelayan Ganda dalam Penerapan

Bank Mandiri Cabang Magelang memiliki 3 orang *teller* yang dapat melayani nasabah. Sistem antrian bagi pelanggan adalah tunggal dengan disiplin pelayanan adalah *FCFS*. Data pada Tabel 4.1 Tabel 4.2 merupakan data kepergian nasabah bank yang diambil pada tanggal 4 Mei 2005 melalui seorang *teller*.

Tabel 4.1 Waktu Kedatangan Nasabah

NO	Waktu Kedatangan Nasabah						
1	8	9.01	10.00	11.00	12.00	13.00	14.02
2	8.01	9.04	10.01	11.01	12.01	13.04	14.03
3	8.05	9.06	10.03	11.02	12.02	13.06	14.04
4	8.06	9.09	10.04	11.04	12.03	13.07	14.08
5	8.13	9.10	10.05	11.07	12.04	13.13	14.10
6	8.15	9.11	10.10	11.08	12.06	13.15	14.13
7	8.18	9.12	10.11	11.13	12.07	13.16	14.15
8	8.21	9.16	10.12	11.14	12.08	13.20	14.20
9	8.25	9.17	10.15	11.15	12.11	13.21	14.21
10	8.26	9.20	10.16	11.16	12.13	13.26	14.22
11	8.3	9.24	10.17	11.20	12.15	13.28	14.23
12	8.32	9.25	10.20	11.21	12.16	13.30	14.25
13	8.43	9.28	10.22	11.22	12.19	13.33	14.27
14	8.48	9.30	10.23	11.23	12.20	13.35	14.29
15	8.49	9.31	10.24	11.25	12.23	13.36	14.30
16	8.52	9.33	10.26	11.28	12.24	13.40	14.31
17	8.56	9.34	10.29	11.31	12.25	13.44	14.35
18	8.59	9.35	10.30	11.32	12.28	13.46	14.36
19		9.37	10.33	11.35	12.30	13.48	14.39
20		9.4	10.34	11.36	12.33	13.50	14.40
21		9.42	10.35	11.39	12.34	13.55	14.42
22		9.42	10.36	11.40	12.38	13.56	14.47
23		9.44	10.37	11.41	12.40		14.50
24		9.45	10.38	11.44	12.41		14.51
25		9.50	10.39	11.49	12.43		14.52
26		9.52	10.41	11.51	12.44		14.54
27		9.53	10.47	11.53	12.46		14.57
28		9.54	10.48	11.55	12.47		
29		9.57	10.49	11.59	12.48		
30		9.58	10.51		12.50		
31		9.59	10.52		12.58		
32			10.53				
33			10.55				
34			10.58				
35			10.59				

Tabel 4.2 Waktu Kepergian Nasabah

NO	Waktu Kepergian Nasabah						
1	8.03	9.03	10.02	11.04	12.04.	13.04	14.04
2	8.04	9.07	10.04	11.05	12.05	13.06	14.05
3	8.07	9.10	10.05,	11.05	12.06	13.09	14.07
4	8.10	9.12	10.06	11.06	12.07	13.09	14.11
5	8.15	9.14	10.08	11.10	12.07	13.15	14.13
6	8.17	9.15	10.14	11.10	12.09	13.18	14.15
7	8.20	9.14	10.15	11.18	12.10	13.09	14.19
8	8.24	9.19	10.16	11.18	12.11	13.23	14.22
9	8.29	9.20	10.17	11.18	12.14	13.21	14.24
10	8.29	9.23	10.19	11.20,	12.05	13.23	14.25
11	8.33	9.27	10.20	11.25	12.0	13.24	14.26
12	8.35	9.28	10.23	11.26	12.18	13.29	14.28
13	8.47	9.31	10.25	11.25	12.13	13.230	14.30
14	8.52	9.33	10.25	11.28	12.25	13.33	14.33
15	8.52	9.33	10.27	11.30	12.25	13.35	14.34
16	8.55	9.36	10.30	11.32	12.26	13.38	14.33
17	8.58	9.37	10.31	11.36	12.28	13.39	14.37
18	9.03	9.39	10.35	11.36	12.31	13.42	14.3
19		9.39	10.36	.11.38	12.33	13.46	14.41
20		9.43	10.37	11.40	12.35	13.48	14.43
21		9.45	10.38	11.43	12.36	13.51	14.45
22		9.46	10.40	11.45	12.40	13.53	14.49
23		9.47	10.39	11.46	12.42		14.52
24		9.53	10.40	11.47	12.43		14.53
25		9.54	10.43	11.51	12.45		14.54
26		9/.56	10.44	11.53	12.47		14.56
27		9.58	10.50	11.55	12.48		14.59
28		9.59	10.50	11.58	12.49		
29		10.01	10.51	12.03	12.52		
30		10.03	10.53		12.54		
31			10.56		13.03		
32			10.57				
33			10.58				
34			11.01				
35			11.02				

Agar teori antrian dapat digunakan dalam perhitungan, maka terlebih dahulu akan diuji distribusi kedatangan dan distribusi kepergian nasabah Bank Mandiri Cabang Magelang. Pengujian data menggunakan program SPSS 11.0.

1. Uji Distribusi Kedatangan Nasabah

Untuk mempermudah dalam pengujian, maka data jumlah nasabah Bank Mandiri pada Tabel 4.1 dikelompokkan sesuai dengan waktu kedatangannya. Data yang diuji dikelompokkan pada Tabel 4.3.

Tabel 4.3 Jumlah Kedatangan Nasabah

Waktu	Jumlah kedatangan
08.00 - 08.59	18
09.00 - 09.59	30
10.00 - 10.59	35
11.00 - 11.59	29
12.00 - 12.59	31
13.00 -13.59	22
14.00 -14.59	27
	192

Hasil pengujian yang tampil pada lembar *output* SPSS disajikan pada Tabel 4.4.

Tabel 4.4 Hasil Pengujian Distribusi Jumlah Kedatangan Nasabah

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		jumlah
N		7
Poisson Parameter(a,b)	Mean	27,4286
Most Extreme Differences	Absolute	,164
	Positive	,112
	Negative	-,164
Kolmogorov-Smirnov Z		,435
Asymp. Sig. (2-tailed)		,992

a Test distribution is Poisson.
b Calculated from data.

Berdasarkan *output* SPSS yang disajikan pada Tabel 4.4, dapat disimpulkan bahwa kedatangan nasabah berdistribusi Poisson dengan $\lambda = 27{,}4286$. Dengan demikian, berdasarkan Teorema 2.1 dapat disimpulkan bahwa waktu antar kedatangan berdistribusi Eksponensial.

2. Uji Distribusi Kepergian Nasabah

Untuk mempermudah dalam pengujian, maka data jumlah nasabah Bank Mandiri pada Tabel 4.2 dikelompokkan sesuai dengan waktu kepergiannya. Data yang diuji dikelompokkan pada Tabel 4.5 Jumlah kepergian nasabah pada tabel 4.5 merupakan banyaknya pelanggan yang meninggalkan sistem antrian setelah pelayanan selesai.

Tabel 4.5 Jumlah Kepergian Nasabah

Waktu	Jumlah Kepergian Nasabah			Jumlah Rata-rata Kepergian Nasabah yang Dibulatkan
	Teller A	*Teller* B	*Teller* C	
08.00 - 08.59	6	6	5	6
09.00 - 09.59	9	10	10	10
10.00 - 10.59	11	12	12	12
11.00 - 11.59	10	10	10	10
12.00 - 12.59	10	10	11	10
13.00 -13.59	8	8	7	8
14.00 -14.59	9	10	9	9
	62	66	64	65

Hasil pengujian yang tampil pada lembar *output* SPSS disajikan pada Tabel 4.6.

Tabel 4.6 Hasil Pengujian Distribusi Jumlah Kepergian Nasabah

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		kepergian
N		7
Poisson Parameter(a,b)	Mean	9,2857
Most Extreme Differences	Absolute	,186
	Positive	,186
	Negative	-,149
Kolmogorov-Smirnov Z		,491
Asymp. Sig. (2-tailed)		,970

a Test distribution is Poisson.
b Calculated from data.

Berdasarkan *output* SPSS yang disajikan pada Tabel 4.6, dapat disimpulkan bahwa pelayanan kepada nasabah berdistribusi Poisson dengan laju pelayanan rata-rata tiap pelayan adalah $9{,}2857$ pelanggan/jam. Dengan demikian, berdasarkan Teorema 2.1 dapat disimpulkan bahwa waktu antar kedatangan berdistribusi Eksponensial.

Apabila kapasitas sistem antrian dan sumber pemanggilan nasabah bank adalah tak terbatas, maka model antrian yang berlaku pada kasus Bank Mandiri Cabang Magelang adalah $(M/M/3):(FCFS/\infty/\infty)$. Dengan $\lambda = 27{,}4286$ yang diperoleh dari Tabel 4.4 dan $\mu = 9{,}2857$ yang diperoleh dari Tabel 4.6, ukuran keefektifan sistem antrian ditampilkan pada Lampiran 1.

Di bawah ini akan diuraikan perhitungan rata-rata biaya menunggu bagi seorang nasabah dan rata-rata biaya pelayanan bagi suatu perusahaan. Data-data yang digunakan pada perhitungan di bawah ini adalah data fiktif yang dibuat oleh penulis.

a. Pendapatan nasabah tiap bulannya akan disajikan pada Tabel 4.7.

Tabel 4.7 Pendapatan Nasabah Tiap Bulan

Jumlah Pendapatan	< 800.000	800.000 - 2.000.000	> 2.000.000
Jumlah Pelanggan	88	70	34

Rata-rata pendapatan nasabah tiap bulan =

$$\frac{88(800.000)+70(1.400.000)+34(2.000.000)}{192} = 1.231.250$$

Asumsikan bahwa setiap nasabah bekerja rata-rata 26 hari/bulan selama 8 jam/hari. Dengan demikian, diperoleh rata-rata pendapatan nasabah yang dinyatakan dengan

$$C_2 = \frac{1.231.250}{26(8)} = 5.919{,}4712\ /\ jam\ .$$

b. Biaya pelayanan yang dikeluarkan Bank Mandiri Cabang Magelang.

Berikut di bawah ini akan diuraikan satu per satu mengenai biaya pelayanan yang dikeluarkan bank.

1) Biaya rata-rata penambahan alat adalah Rp 8.000.000/tahun. Apabila penggunaan alat adalah 300 hari/ tahun, maka biaya penambahan alat adalah

$$\frac{8.000.000}{300(8)} = 3.333{,}3333\ /\ jam\ .$$

2) Biaya rata-rata penambahan *teller* adalah Rp 1.500.000/bulan. Apabila setiap *teller* bekerja 26 hari/bulan selama 8 jam/hari, maka biaya rata-rata penambahan *teller* adalah

$$\frac{1.500.000}{26(8)} = 7.211{,}5385\ /\ jam\ .$$

3) Biaya penambahan fasilitas pelayanan merupakan hasil penjumlahan biaya penambahan alat dengan biaya penambahan *teller* dan dinyatakan dengan

$$\begin{aligned} C_1 &= 3.333{,}3333 + 7.211{,}5385 \\ &= 10.544{,}8718\ /\ jam\ . \end{aligned}$$

Selanjutnya akan dicari jumlah pelayan optimal yang hendak dioperasikan Bank Mandiri Cabang Magelang. Dengan $C_1 = 10.544{,}8718$ yang didapat dari perhitungan biaya pelayanan dan $C_2 = 5.919{,}4712$ yang didapat dari perhitungan pendapatan nasabah kasus Bank Mandiri Cabang Magelang didapatkan perbandingan C_1 dan C_2 yang dinyatakan dengan $\frac{C_1}{C_2} = 1{,}7814$.

Dengan mensubstitusi $\lambda = 27{,}4286$ yang diperoleh dari perhitungan rata-rata jumlah kedatangan pada Tabel 4.4 dan $\mu = 9{,}2857$ yang diperoleh dari perhitungan rata-rata jumlah kepergian pada Tabel 4.6 ke Persamaan (3.15) didapatkan nilai $L_s(c)$. Hasil perhitungan $L_s(c)$ disajikan pada Tabel 4.8.

Tabel 4.8 Nilai Harapan Jumlah Pelanggan dalam Sistem Antrian

c	$L_s(c)$	$L_s(c-1)-L_s(c)$	$L_s(c)-L_s(c+1)$
1	-1,5119	-	-
2	-2,5014	-	-
3	65,6469	65,6469	61,3092
4	4,337	61,3092	1,0592
5	3,2785	1,0592	0,2342
	3,0443	0,2342	3,0443

Berdasarkan Persamaan (3.28) dan Tabel 4.4 diperoleh

$$L_s(c) - L_s(c+1) \leq \frac{C_1}{C_2} \leq L_s(c-1) - L_s(c)$$

$$L_s(4) - L_s(5) \leq 1{,}7814 \leq L_s(3) - L_s(4)$$

$$1{,}0592 \leq 1{,}7814 \leq 61{,}3092\,.$$

Dengan demikian, jumlah pelayan optimum pada kasus Bank Mandiri adalah 4 *teller*.