TEORI ANTRIAN

A. Proses Antrian

Proses antrian merupakan proses yang berhubungan dengan kedatangan pelanggan pada suatu fasilitas pelayanan, menunggu dalam baris antrian jika belum mendapat pelayanan, dan akhirnya meninggalkan fasilitas tersebut setelah pelayanan berakhir. Proses ini dimulai saat pelanggan-pelanggan yang memerlukan pelayanan mulai datang. Mereka berasal dari suatu populasi yang disebut sebagai *sumber input*.

Populasi suatu antrian dibedakan menjadi dua, yaitu terbatas (*finite*) dan tidak terbatas (*infinite*). Salah satu bentuk populasi adalah pelanggan yang datang pada fasilitas pelayanan. Besarnya populasi merupakan jumlah pelanggan yang memerlukan fasilitas pelayanan.

Sebuah sistem antrian adalah himpunan pelanggan, pelayan, dan suatu aturan yang mengatur pelayanan kepada pelanggan. Sedangkan keadaan sistem menunjuk pada jumlah pelanggan yang berada dalam antrian dan yang sedang mendapat pelayanan.

Enam komponen dasar yang harus diperhatikan agar penyedia fasilitas pelayanan dalam sistem antrian dapat melayani para pelanggan yaitu:

1. pola kedatangan,
2. pola pelayanan,
3. kapasitas sistem,
4. jumlah *channel* pelayanan,
5. tingkat pelayanan,
6. disiplin pelayanan.

Berikut di bawah ini akan diuraikan enam komponen dasar yang harus diperhatikan oleh penyedia fasilitas pelayanan.

1. Pola Kedatangan

Pola kedatangan pelanggan adalah banyaknya kedatangan pelanggan dalam sistem antrian dalam selang waktu tertentu. Pola kedatangan pelanggan dapat deterministik yaitu diketahui secara pasti atau juga dapat bersifat stokastik yaitu berupa variabel acak yang distribusi probabilitasnya dianggap telah diketahui. Pola kedatangan para pelanggan biasanya diperhitungkan melalui waktu antar kedatangan, yaitu waktu antara kedatangan dua pelanggan yang berurutan pada suatu fasilitas pelayanan. Apabila pola kedatangan tidak bergantung pada waktu (*time independent*), maka sistem antrian dikatakan memiliki pola kedatangan stasioner. Sebaliknya jika waktu mempengaruhi pola kedatangan pelanggan, maka sistem antrian memiliki pola kedatangan non stasioner.

Pelanggan dapat datang satu per satu ataupun berkelompok. Kejadian lain, apabila dalam fasilitas pelayanan terdapat antrian yang terlalu panjang, ada kemungkinan bagi pelanggan untuk menolak memasuki fasilitas tersebut. Kejadian ini disebut *balking* (penolakan). Sedangkan *reneging* (pembatalan) terjadi apabila seorang pelanggan yang telah berada dalam sistem meninggalkan antrian karena keberatan untuk menunggu lama. Apabila tidak disebutkan secara khusus, maka dianggap bahwa pelanggan tiba di fasilitas pelayanan satu per satu tanpa terjadi *balking* maupun *reneging* dan kedatangan pelanggan mengikuti distribusi probabilitas tertentu. Distribusi probabilitas yang paling sering ditemukan dalam teori antrian adalah distribusi Poisson dan distribusi Eksponensial.

2. Pola Kepergian

Pola kepergian pelanggan adalah banyaknya kepergian pelanggan dalam sistem antrian pada selang waktu tertentu. Pola kepergian pelanggan dapat ditentukan oleh waktu pelayanan, yaitu waktu yang dibutuhkan seorang pelayan untuk memberi pelayanan kepada pelanggan pada fasilitas pelayanan. Waktu pelayanan dapat bersifat deterministik, atau berupa variabel acak yang distribusi probabilitasnya dianggap telah diketahui. Besaran ini dapat bergantung pada jumlah pelanggan yang telah berada dalam fasilitas pelayanan atau tidak bergantung pada keadaan tersebut.

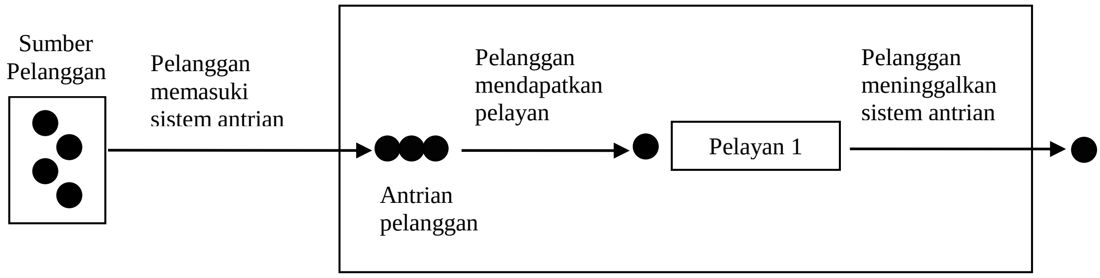
3. Kapasitas Sistem

Kapasitas sistem adalah jumlah maksimum pelanggan, mencakup pelanggan yang sedang mendapat pelayanan dan yang berada dalam antrian, yang dapat ditampung oleh fasilitas pelayanan pada saat yang sama. Sebuah sistem yang tidak membatasi jumlah pelanggan di dalam fasilitas pelayanannya dikatakan memiliki kapasitas tak hingga, sedangkan sistem yang membatasi jumlah pelanggan yang berada di dalam fasilitas pelayanannya dikatakan memiliki kapasitas yang berhingga.

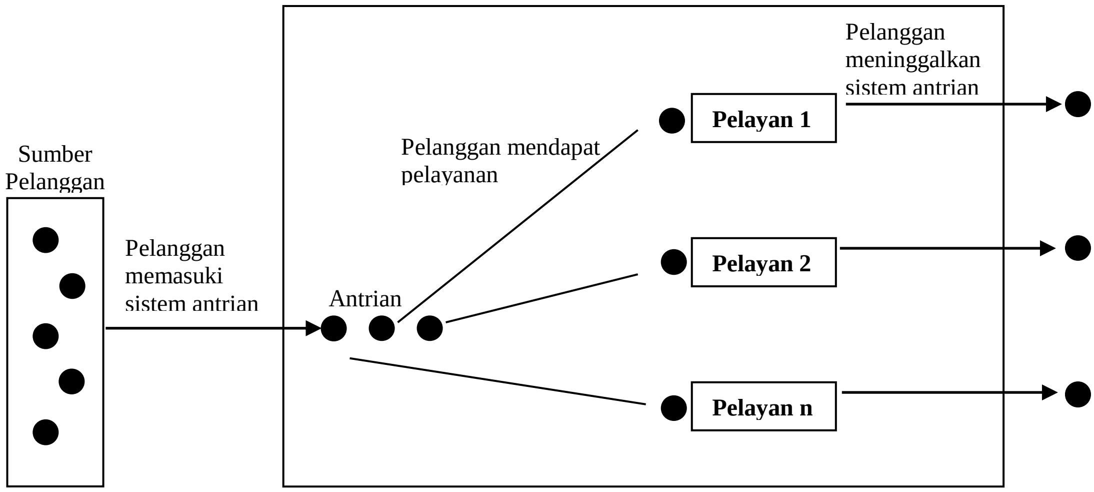
4. Jumlah *Channel* Pelayanan

Jumlah *channel* pelayanan merupakan jumlah pelayan paralel yang dapat memberi pelayanan kepada pelanggan pada waktu yang bersamaan. Fasilitas pelayanan dapat memiliki satu atau lebih *channel* pelayanan. Fasilitas yang memiliki satu *channel* pelayanan disebut fasilitas pelayanan tunggal (*single channel*), dan fasilitas yang memiliki lebih dari satu *channel* pelayanan dinamakan fasilitas pelayanan ganda (*multiple channel*).

Bagan fasilitas pelayanan tunggal disajikan pada Gambar 1 dan bagan fasilitas pelayanan ganda disajikan pada Gambar 2.



Gambar 1 Fasilitas Pelayanan Tunggal



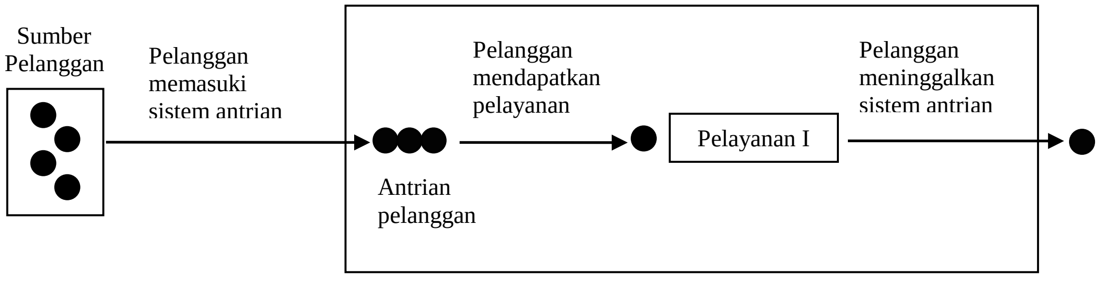
Gambar 2 Fasilitas Pelayanan Ganda

5. Tingkat Pelayanan

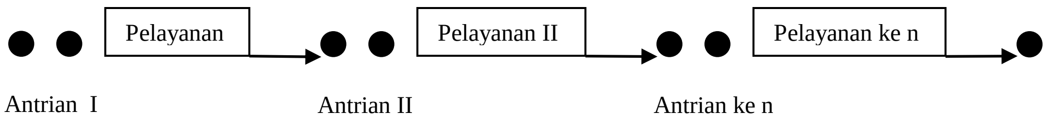
Tingkat pelayanan dalam sistem antrian terbagi menjadi tingkat pelayanan tunggal *(singlestage)* dan tingkat pelayanan bertingkat *(multistage)*. Tingkat pelayanan dikatakan tunggal apabila pelayanan kepada pelanggan selesai dalam satu kali proses pelayanan. Misalnya dalam suatu bank, pelanggan akan langsung meninggalkan fasilitas pelayanan setelah proses transaksi selesai.

Tingkat pelayanan dikatakan bertingkat apabila pelayanan kepada pelanggan tidak dapat selesai dalam satu kali proses sehingga pelanggan harus mengalami beberapa kali proses untuk menuntaskan segala kepentingannya. Sebagai contoh, seorang pasien harus menjalani pemeriksaan tekanan darah, kadar protein dalam *urine*, dan kadar gula dalam darah sebelum akhirnya menjalani operasi ginjal.

Bagan tingkat pelayanan tunggal disajikan pada Gambar 3 dan bagan tingkat pelayanan beringkat disajikan pada Gambar 4.



Gambar 3 Tingkat Pelayanan Tunggal



Gambar 4 Tingkat Pelayanan Bertingkat

Keterangan Gambar 4:
Pelanggan mendatangi sistem antrian, mengantri, mendapatkan pelayanan I, kemudian pergi dari sistem pelayanan I untuk mengantri pada sistem antrian berikutnya.

6. Disiplin Pelayanan

Disiplin pelayanan adalah kebijakan yang berkaitan dengan cara memilih anggota antrian yang akan dilayani. Ada empat bentuk disiplin pelayanan yang biasa digunakan dalam praktek.

a. *First-come first-served (FCFS),* artinya pelanggan yang lebih dahulu datang didahulukan dalam pelayanan. Misalnya, antrian pembelian tiket bioskop.
b. *Last-come first-served (LCFS),* artinya pelanggan yang tiba paling akhir didahulukan dalam pelayanan. Misalnya, sistem antrian dalam lift untuk lantai yang sama, dimana pengguna lift yang masuk terakhir justru akan keluar terlebih dahulu.
c. *Service in random order (SIRO),* artinya panggilan pada pelanggan secara acak. Misalnya, antrian dalam sistem undian berhadiah yang dipilih secara acak.
d. *Priority service (PS),* artinya prioritas pelayanan diberikan kepada mereka yang mempunyai prioritas lebih tinggi dibandingkan dengan mereka yang mempunyai prioritas lebih rendah. Misalnya, dalam suatu pesta dimana tamu-tamu dalam kategori VIP didahulukan dalam pelayanan.

B. Notasi Kendall

Beberapa model antrian diklasifikasikan berdasarkan format yang diperkenalkan oleh Kendall dan A.M Lee (1953). Secara umum, format baku tersebut ditulis dalam bentuk *(a/b/c) : (d/e/f).*

(1)

Penjelasan:

a menyatakan distribusi waktu antar kedatangan.

Huruf *a* dalam format baku di atas dapat diganti dengan simbol M, D, E_k, atau G.

M : Markov, waktu antar kedatangan berdistribusi Eksponensial.
D : Deterministik, waktu antar kedatangan konstan.
E_k : Erlang, waktu antar kedatangan berdistribusi Erlang.
G : *General*, distribusi probabilitas yang lain.

b menyatakan distribusi waktu pelayanan.

Huruf *b* dalam format baku di atas dapat diganti dengan simbol M, D, E_k, atau G.

M : Markov, waktu pelayanan berdistribusi Eksponensial.
D : Deterministik, waktu pelayanan konstan.
E_k : Erlang, waktu pelayanan berdistribusi Erlang.
G : *General*, distribusi probabilitas yang lain.

c menyatakan jumlah pelayan paralel $(c = 1,\ 2,\ \ldots,\ \infty)$

d menyatakan disiplin pelayanan (*FCFS, LCFS, SIRO*, PS.)

e menyatakan jumlah maksimum yang diperkenankan berada dalam sistem antrian

f menyatakan jumlah sumber pemanggilan

<u>Sebagai contoh:</u>

a. Model $(M/M/2):(FCFS/5/\infty)$

M pertama	menyatakan bahwa waktu antar kedatangan berdistribusi Eksponensial.
M kedua	menyatakan bahwa waktu pelayanan berdistribusi Eksponensial.
2	menyatakan bahwa ada sebanyak dua orang pelayan paralel.
$FCFS$	menyatakan bahwa disiplin pelayanan adalah *FCFS.*
5	menyatakan bahwa jumlah maksimum pelanggan yang diperkenankan berada dalam sistem antrian adalah 5.

∞ menyatakan bahwa jumlah sumber pemanggilan tidak berhingga.

b. Model $(M/D/2):(LCFS/5/\infty)$

M menyatakan bahwa waktu antar kedatangan berdistribusi Eksponensial.

D menyatakan bahwa pola pelayanan konstan.

2 menyatakan bahwa dua orang pelayan.

$LCFS$ menyatakan bahwa disiplin pelayanan adalah $LCFS$.

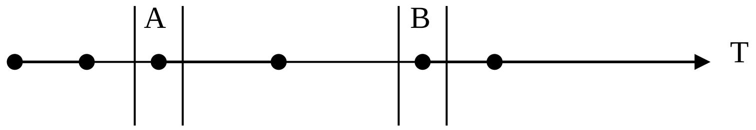
5 menyatakan bahwa jumlah maksimum pelanggan yang diperkenankan berada dalamsistem antrian adalah 5.

∞ menyatakan bahwa jumlah sumber pemanggilan tidak berhingga.

C. Proses Poisson

Proses Poisson merupakan proses mencacah yang menghasilkan bilangan N pada selang waktu tertentu. Bilangan N yang menyatakan banyaknya kejadian dalam suatu proses Poisson disebut peubah acak Poisson dan distribusi peluangnya disebut distribusi Poisson. Di dalam teori antrian, distribusi Poisson digunakan untuk menjabarkan jumlah kejadian pada selang waktu tertentu. Kejadian-kejadian tersebut dapat berupa kedatangan atau kepergian pelanggan.

Salah satu sifat dari proses Poisson adalah terjadinya kejadian pada suatu waktu yang kontinu. Bagan kejadian-kejadian pada proses Poisson disajikan pada Gambar 2.5.



Gambar 5 Kejadian dalam interval waktu A dan interval waktu B

Sumbu horizontal T menunjukkan waktu, sedangkan titik-titik menunjukkan kejadian. Sebagai contoh, titik ketiga menyatakan kejadian yang terjadi pada interval waktu A dan titik kelima menyatakan kejadian yang terjadi pada interval waktu B.

Sebelum membahas proses Poisson lebih lanjut, akan dibahas beberapa definisi yang akan digunakan pada pembahasan proses Poisson.

Definisi 1. Jika sebuah percobaan X mempunyai ruang sampel S dan sebuah kejadian A, maka $P(A)$ adalah suatu bilangan real yang disebut peluang kejadian A dengan ketentuan bahwa:

1. $0 \le P(A) \le 1$
2. $P(S) = 1$
3. $P(\phi) = 0$.

Definisi 2. Kejadian A dikatakan saling bebas dengan kejadian B apabila

$$P(A \cap B) = P(A) \;.\; P(B).$$

Definisi 3. $o(\Delta t)$ merupakan sebuah fungsi $f(\Delta t)$ dengan ketentuan $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{o(\Delta t)}{(\Delta t)} = 0$.

Dua asumsi yang diperlukan dalam pembahasan proses Poisson adalah

1. Kejadian terjadi secara acak

   Acak berarti bahwa:

   a. Semua kejadian pada suatu interval waktu yang sangat pendek (Δt) mempunyai probabilitas yang sama. Apabila sebanyak n pelanggan berada dalam sistem antrian, maka probabilitas sebuah kedatangan terjadi antara waktu t dan $t+\Delta t$ adalah $\lambda_n \Delta t$ dan dinyatakan dengan

   $$P\ \{\text{sebuah kedatangan terjadi antara } t \text{ dan } t+\Delta t\} = \lambda_n \Delta t,\ \forall n \ge 0$$

   sehingga probabilitas nol kedatangan antara waktu t dan $t+\Delta t$ adalah $1-\lambda_n \Delta t$ dan dinyatakan dengan

   $$P\ \{\text{nol kedatangan terjadi antara } t \text{ dan } t+\Delta t\} = 1-\lambda_n \Delta t,\ \forall n \ge 0.$$

   Sedangkan probabilitas sebuah kepergian terjadi antara waktu t dan $t+\Delta t$ adalah $\mu_n \Delta t$ dan dinyatakan dengan

$$P\ \{\text{sebuah kepergian terjadi antara } t \text{ dan } t+\Delta t\} = \mu_n \Delta t\ ,\ \forall n \geq 0.$$

Probabilitas nol kepergian terjadi antara waktu t dan $t+\Delta t$ adalah $1-\mu_n \Delta t$ dan dinyatakan dengan

$$P\ \{\text{nol kepergian terjadi antara } t \text{ dan } t+\Delta t\} = 1-\mu_n \Delta t\ ,\ \forall n \geq 0.$$

Keterangan:

n : banyaknya pelanggan dalam sistem antrian

λ_n : laju kedatangan per satuan waktu jika sebanyak *n* pelanggan berada dalam sistem antrian.

μ_n : laju kepergian per satuan waktu jika sebanyak *n* pelanggan berada dalam sistem antrian.

$\lambda_n\ \Delta t$: probabilitas terdapat satu kedatangan pelanggan pada selang waktu Δt apabila terdapat *n* pelanggan pada sistem antrian.

$\mu_n\ \Delta t$: probabilitas terdapat satu kepergian pelanggan pada selang waktu Δt apabila terdapat *n* pelanggan pada sistem antrian.

b. Probabilitas terjadinya lebih dari satu kejadian pada selang waktu yang sangat pendek adalah sangat kecil sehingga dapat diabaikan. Persamaan tersebut dinyatakan dengan

$$P\ \{\text{lebih dari satu kejadian antara } t \text{ dan } t+\Delta t\} = o(\Delta t).$$

2. Kejadian yang terjadi pada suatu selang waktu tertentu tidak mempengaruhi kejadian sebelumnya atau kejadian yang akan datang. Sebagai contoh, berdasarkan Gambar 5 maka kejadian di A tidak akan mempengaruhi kejadian di B, dan baik kejadian di A maupun kejadian di B mempunyai probabilitas yang sama. Selain itu, probabilitas terjadinya lebih dari satu kejadian di A maupun di B adalah sangat kecil sehingga diabaikan.

Selanjutnya apabila diasumsikan bahwa laju pelayanan tidak mempengaruhi jumlah pelanggan dalam sistem antrian, maka probabilitas terdapat n pelanggan $(n \geq 1)$ pada selang waktu $(t+\Delta t)$ diperoleh dengan menjumlahkan probabilitas kasus-kasus pada Tabel 1.

Tabel 1 Empat Kemungkinan $P_n(t)$ untuk $(n \geq 1)$

Kasus	Jumlah Pelanggan pada Waktu t	Jumlah Kedatangan selama Waktu Δt	Jumlah Kepergian selama Waktu Δt	Jumlah Pelanggan pada Waktu $(t+\Delta t)$
1	n	0	0	n
2	n + 1	0	1	n
3	n - 1	1	0	n
4	n	1	1	n

Karena kasus 1, kasus 2, kasus 3, dan kasus 4 saling asing, maka probabilitas terdapat n pelanggan $(n \geq 1)$ pada waktu $(t+\Delta t)$ dinyatakan dengan

$P_n(t+\Delta t) =\ P$ (kasus 1 atau kasus 2 atau kasus 3 atau kasus 4).

$P_n(t+\Delta t) =$ Probabilitas kasus 1 + Probabilitas kasus 2 + Probabilitas kasus 3 + Probabilitas kasus 4.

$$\begin{aligned} P_n(t+\Delta t) = {} & P_n(t)(1-\lambda_n \Delta t)(1-\mu_n \Delta t) + P_{n+1}(t)(1-\lambda_{n+1}\Delta t)(\mu_{n+1}\Delta t) \\ & + P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1}\Delta t)(1-\mu_{n-1}\Delta t) + P_n(t)(\lambda_n \Delta t)(\mu_n \Delta t). \end{aligned} \quad (2)$$

Berdasarkan Definisi 2 dan asumsi bahwa probabilitas lebih dari satu kejadian adalah $o(\Delta t)$ maka nilai Pn (t) $(\lambda_n \Delta t)$ $(\mu_n \Delta t)$ pada Persamaan (2) dinyatakan dengan

$$P_n(t)(\lambda_n \Delta t)(\mu_n \Delta t) = o(\Delta t), \qquad \forall n \geq 0. \quad (3)$$

Dengan mensubstitusi Persamaan (3) ke Persamaan (2) diperoleh

$$P_n(t+\Delta t) = P_n(t) - P_n(t)(\lambda_n \Delta t) - P_n(t)(\mu_n \Delta t) + P_n(t)(\lambda_n \Delta t)(\mu_n \Delta t)$$

$$+ \quad P_{n+1}(t)(\mu_{n+1}\Delta t) - \quad P_{n+1}(t)(\lambda_{n+1}\Delta t)(\mu_{n+1}\Delta t)$$

$$P_n(t+\Delta t) = P_n(t) - P_n(t)(\lambda_n \Delta t) - P_n(t)(\mu_n \Delta t) + P_{n+1}(t)(\mu_{n+1}\Delta t)$$

$$+ \quad P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1}\Delta t) - P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1}\Delta t)(\mu_{n-1}\Delta t) \quad + \quad o(\Delta t).$$

$$+ P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1}\Delta t) + o(\Delta t). \quad (4)$$

Dengan mengurangkan $P_n(t)$ pada ruas kanan dan kiri Persamaan (2.4) dan selanjutnya membagi kedua ruas dengan (Δt) diperoleh

$$\frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{(\Delta t)} = P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1}) + P_{n+1}(t)(\mu_{n+1}) - P_n(t)(\lambda_n)$$

$$- \ P_n(t)(\mu_n) \ + \frac{o(\Delta t)}{(\Delta t)}. \quad (2.5)$$

Akan didefinisikan suatu persamaan yang akan membantu menyelesaikan Persamaan (5).

Definisi 4. Turunan fungsi *f* adalah *f'* yang nilainya pada sebarang bilangan *t* adalah

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{d\,f(t)}{dt}$$

asalkan limit fungsi tersebut ada.

Karena nilai Δt sangat kecil dan mendekati nol, maka menggunakan Definisi 4 pada Persamaan (4) diperoleh

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1}) + P_{n+1}(t)(\mu_{n+1}) - P_n(t)(\lambda_n) - P_n(t)(\mu_n) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \right]$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = P_{n-1}(t)(\lambda_{n-1}) + P_{n+1}(t)(\mu_{n+1}) - P_n(t)(\lambda_n) - P_n(t)(\mu_n), \quad n \geq 1. \quad (6)$$

Persamaan (6) merupakan dasar perhitungan probabilitas terdapat *n* pelanggan pada proses kedatanan murni dan kepergian murni untuk $n \geq 1$.

Selanjutnya akan dibahas secara khusus probabilitas terdapat *n* pelanggan untuk nilai $n = 0$. Pada saat jumlah pelanggan dalam sistem adalah nol, maka probabilitas kasus 3 pada Tabel 1 diabaikan dan probabilitas terjadinya nol kepergian pelanggan pada kasus 1 adalah satu. Dengan demikian, probabilitas terdapat n pelanggan untuk nilai $n = 0$ pada selang waktu $(t + \Delta t)$ adalah

$P_n(t+\Delta t)$ = Probabilitas kasus 1 + Probabilitas kasus 2 + Probabilitas kasus 4.

$$P_n(t+\Delta t) = P_n(t)(1-\lambda_n \Delta t)(1) \quad + \quad P_{n+1}(t)(1-\lambda_{n+1}\Delta t)(\mu_{n+1}\Delta t) \quad + \quad P_n(t)(\lambda_n \Delta t)(\mu_n \Delta t).$$

Karena $P_0(t)(\lambda_0 \Delta t)(\mu_0 \Delta t) = o(\Delta t)$ untuk $n \geq 0$ maka

$$\begin{aligned} P_0(t+\Delta t) &= P_0(t)(1-\lambda_n \Delta t)(1) \ + \ P_1(t)(1-\lambda_1 \Delta t)(\mu_1 \Delta t) \ + \ P_0(t)(\lambda_0 \Delta t)(\mu_0 \Delta t) \\ &= P_0(t)(1-\lambda_0 \Delta t)(1) \ + \ P_1(t)(\mu_1 \Delta t) \ - \ P_1(t)(\lambda_1 \Delta t)(\mu_1 \Delta t) \ + \ o(\Delta t) \\ &= P_0(t)(1-\lambda_0 \Delta t)(1) \ + \ P_1(t)(\mu_1 \Delta t) \ - \ o(\Delta t) \ + \ o(\Delta t) \\ &= P_0(t) \ - \ P_0(t)(\lambda_0 \Delta t) \ + \ P_1(t)(\mu_1 \Delta t). \qquad (7) \end{aligned}$$

Dengan mengurangkan $P_0(t)$ pada kedua ruas Persamaan (7) dan selanjutnya membagi kedua ruas dengan (Δt) diperoleh

$$\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{(\Delta t)} = P_1(t)(\mu_1) - P_0(t)(\lambda_0). \qquad (8)$$

Karena nilai (Δt) sangat kecil dan mendekati nol, maka

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{(\Delta t)} = \lim_{\Delta t\to 0}\left[P_1(t)(\mu_1) - P_0(t)(\lambda_0)\right]. \qquad (9)$$

Menggunakan Definisi 4 pada Persamaan (9) diperoleh

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = P_1(t)\mu_1 - P_0(t)\lambda_0, \qquad n=0. \qquad (10)$$

Persamaan (10) merupakan dasar perhitungan probabilitas terdapat *n* pelanggan pada proses kedatangan murni dan kepergian murni untuk $n=0$.

D. Proses Kedatangan Murni *(Pure Birth)*

Proses kedatangan murni merupakan proses kedatangan tanpa disertai kepergian pelanggan sehingga $\mu_n = 0,\ \forall n \geq 0$. Pada proses ini,pelanggan datang dengan laju kedatangan rata-rata tertentu. Dengan laju kedatangan rata-rata pelanggan yang tidak bergantung pada ukuran populasi dalam sistem, maka $\lambda_n = \lambda$, $\forall n \geq 0$.

Probabilitas terdapat *n* kedatangan pelanggan $\forall n \geq 1$ pada waktu *t* dapat diperoleh dengan mensubstitusi syarat $\lambda_n = \lambda$ dan $\mu_n = 0$ ke Persamaan (6) sehingga

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = P_{n-1}(t)\lambda - P_n(t)\lambda, \qquad n = 1, 2, \ldots. \qquad (11)$$

Probabilitas terdapat *n* pelanggan untuk $n=0$ pada waktu *t* dapat diperoleh dengan mensubstitusi syarat $\lambda_n = \lambda$ dan $\mu_n = 0$ ke Persamaan (10) sehingga

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -P_0(t)\lambda, \qquad n=0 \qquad (12)$$

Akan didefinisikan suatu persamaan yang membantu menyelesaikan Persamaan (11) dan Persamaan (12).

Definisi 5. Persamaan Differensial orde I yang berbentuk

$$\frac{dy}{dx} = Q(x) - yP(x)$$

mempunyai penyelesaian

$$y = c.e^{-\int P(x)\ dx} + e^{-\int P(x)\ dx}\int Q(x)\ .\ e^{\int P(x)\ dx}dx.$$

Berdasarkan Definisi 5 maka Persamaan (11) dan Persamaan (12) secara umum dapat dinyatakan sebagai Persamaan Differensial orde I. Oleh sebab itu penyelesaian Persamaan (11) adalah

$$P_n(t) = c.e^{-\int \lambda\ dt} + e^{-\int \lambda\ dt}\int \lambda e^{\int \lambda\ dt} P_{n-1}(t)\ \ dt$$

$$= c.e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}\int \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t)\ \ dt. \qquad (13)$$

dan penyelesaian Persamaan (12) adalah

$$P_0(t) = c.e^{-\lambda t}. \qquad (14)$$

$P_n(t)$ akan berdistribusi Poisson jika memenuhi syarat-syarat berikut:

$$P_n(0) = \begin{cases} 1 & untuk \quad n=0 \\ 0 & untuk \quad n \geq 1. \end{cases} \qquad (15)$$

Dengan mensubtitusi Persamaan (15) ke Persamaan (14) diperoleh

$$P_0(0) = c.e^{-\lambda 0}$$

$$c = 1, \qquad n = 0. \qquad (16)$$

Dengan demikian, nilai $P_0(t)$ pada Persamaan (14) adalah $P_0(t)=e^{-\lambda t}$. (17)

Akan ditentukan nilai $P_n(t), \forall n \geq 1$ dengan langkah-langkah di bawah ini.

1. Untuk nilai $n=1$

   Berdasarkan Persamaan (14) diperoleh

$$P_1(t)=c.e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}\int \lambda e^{\lambda t} P_0(t) \quad dt. \tag{18}$$

   Dengan mensubstitusi nilai $P_0(t)=e^{-\lambda t}$ ke Persamaan (18) diperoleh

$$\begin{aligned} P_1(t) &= c.e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}\int \lambda e^{\lambda t}\, e^{-\lambda t} \quad dt \\ &= c.e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}\, \lambda t. \end{aligned}$$

   Sebagaimana telah disyaratkan pada Persamaan (15) bahwa nilai $P_n(0)=0$ untuk $n \geq 1$ sehingga

$$\begin{aligned} P_1(t) &= c.e^{-\lambda (0)} + e^{-\lambda (0)} \lambda(0) \\ 0 &= c.1 + 0 \\ c &= 0. \end{aligned}$$

   Dengan demikian $c=0$ untuk $\forall n \geq 1$.

   Karena nilai $c=0$ untuk $n=1$, maka nilai $P_1(t)$ pada Persamaan (12) adalah

$$P_1(t)=\lambda\, t\, e^{-\lambda t}. \tag{19}$$

2. Untuk nilai $n=2$

   Berdasarkan Persamaan (13) diperoleh $P_2(t)=c.e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}\int \lambda e^{\lambda t} P_1(t) \quad dt$. (20)

   Dengan mensubstitusi nilai $P_0(t)=e^{-\lambda t}$ ke Persamaan (20) diperoleh

$$\begin{aligned} P_2(t) &= c.e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}\int \lambda e^{\lambda t}\, \lambda t\, e^{-\lambda t} \quad dt \\ &= c.e^{-\lambda t} + \frac{(\lambda t)^2}{2!} e^{-\lambda t}. \end{aligned} \tag{21}$$

   Karena nilai $c=0$ untuk $n>0$, maka nilai $P_2(t)$ pada Persamaan (21) adalah

$$P_2(t)=\frac{(\lambda t)^2}{2} e^{-\lambda t}.$$

   Dengan induksi matematika didapatkan nilai $P_n(t)$ yang didefinisikan sebagai probabilitas terdapat *n* kedatangan pelanggan pada waktu *t* sebagai berikut

$$\boxed{P_n(t)=\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \qquad n \geq 0} \tag{22}$$

   Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa pola kedatangan pelanggan berdistribusi Poisson dengan mean λt pada saat proses kedatangan murni terjadi.

E. Proses Kepergian Murni *(Pure Death)*

Proses kepergian murni merupakan proses kepergian tanpa disertai kedatangan pelanggan sehingga $\lambda_n=0, \forall n \geq 0.$ Pada proses ini pelanggan pergi dengan laju kepergian rata-rata. Laju kepergian rata-rata merupakan banyaknya pelanggan yang dapat dilayani seorang pelayan tiap satuan waktu. Dengan demikian, $\mu_n=\mu, \forall n \geq 0.$

Berdasarkan Persamaan (6) diperoleh probabilitas terdapat *n* kepergian pelanggan pada selang waktu *t* dan dinyatakan dengan

$$\frac{dP_n(t)}{dt}=P_{n+1}(t)\,\mu - P_n(t)\,\mu, \qquad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots. \tag{23}$$

Bila jumlah pelanggan dalam antrian dalam selang waktu t adalah sebanyak $n=N,$ maka $P_{n+1}(t)=0$ untuk $n \geq N$ sehingga

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -P_n(t)\,\mu\,, \qquad n \geq N. \tag{24}$$

Dengan demikian, Persamaan (23) hanya berlaku untuk $1 \leq n \leq N-1$ sehingga

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = P_{n+1}(t)\,\mu - P_n(t)\,\mu\,, \qquad 1 \leq n \leq N-1 \tag{25}$$

Probabilitas terdapat *n* pelanggan dengan $n = 0$ dalam selang waktu *t* dapat diperoleh dengan mensubstitusi syarat $\mu_n = \mu$ dan $\lambda_n = 0$ ke Persamaan (10) sehingga

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = P_1(t)\,\mu\,, \qquad n = 0. \tag{26}$$

Berdasarkan Definisi 5, maka Persamaan (24), Persamaan (25), dan Persamaan (26) secara umum merupakan Persamaan Differensial orde I. Dengan demikian, penyelesaian Persamaan (24) adalah $P_N(t) = c.e^{-\mu t}$. (27)

Penyelesaian Persamaan (25) adalah

$$\begin{aligned} P_n(t) &= c.e^{-\int \mu \ dt} + \ e^{-\int \mu \ dt} \int P_{n+1}(t)\,\mu\,.\,e^{\int \lambda \ dt} dt \\ &= c.e^{-\mu t} + \ e^{-\mu t}\ \mu \int e^{\mu t} P_{n+1}(t) \ \ dt. \end{aligned} \tag{28}$$

$P_n(t)$ akan berdistribusi Poisson jika memenuhi syarat-syarat berikut:

$$P_n(0) = \begin{cases} 0 & untuk \quad n = 0, 1, ..., N-2, N-1 \\ 1 & untuk \quad n = N. \end{cases} \tag{29}$$

Secara rekursif akan dicari nilai $P_n(t)$ dengan langkah- langkah di bawah ini.

1. Untuk $n = N$

   Dengan mensubstitusi Persamaan (29) ke Persamaan (27) diperoleh

$$\begin{aligned} P_N(0) &= \ c.e^{-\mu(0)} \\ 1 &= c.1 \end{aligned}$$

   Karena $c = 1.$ $c = 1$ untuk $n = N$ maka nilai $P_N(t)$ pada Persamaan (27) adalah

$$P_N(t) = e^{-\mu t}. \tag{30}$$

2. Untuk $n = N-1$

   Berdasarkan Persamaan (2.28) diperoleh

$$P_{N-1}(t) = c.e^{-\mu t} + \ e^{-\mu t} \int \mu e^{-\mu t} P_N(t) \ \ dt. \tag{2.31}$$

   Dengan mensubstitusi $P_N(t) = e^{-\mu t}$ ke persamaan (2.31) diperoleh

$$\begin{aligned} P_{N-1}(t) &= c.e^{-\mu t} + \ e^{-\mu t} \int \mu e^{-\mu t} e^{-\mu t} \ \ dt \\ &= c.e^{-\mu t} + \ e^{-\mu t}\ \mu t. \end{aligned} \tag{2.32}$$

   Karena $P_n(0) = 1$ untuk $n = 0, 1, ..., N-2, N-1$ maka

$$\begin{aligned} P_{N-1}(0) &= c.e^{-\mu 0} + \ e^{-\mu 0}\ \mu(0). \\ 1 &= c.1 + 0. \\ c &= 1. \end{aligned}$$

   Dengan demikian, nilai $P_{N-1}(t)$ pada Persamaan (2.32) adalah

$$P_{N-1}(t) = e^{-\mu t} + \ e^{-\mu t}\ \mu t.$$

   Dengan induksi matematika didapatkan nilai $P_n(t)$ yang didefinisikan sebagai probabilitas terdapat *n* kepergian pelanggan pada waktu *t* sebagai berikut

$$\boxed{P_n(t) = \frac{(\mu t)^n}{n!} e^{-\mu t}, \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1, N} \tag{2.33}$$

Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa pola kepergian pelanggan berdistribusi Poisson pada saat proses kepergian murni terjadi.

F. Distribusi Eksponensial

Di dalam teori antrian, hubungan antara distribusi Poisson dengan distribusi Eksponensial ditunjukkan pada keterkaitan proses kedatangan pelanggan dengan waktu antar kedatangan pelanggan dan juga pada pola kepergian pelanggan dengan waktu pelayanan kepada pelanggan.

Keterkaitan antara distribusi Poisson dengan distribusi Eksponensial tersebut akan ditunjukkan pada Teorema 2.1 dan Teorema 2.2. Namun, sebelumnya akan disajikan definisi distribusi Eksponensial.

Definisi 2.6 (Hines, 1990: 175) Peubah acak T dikatakan berdistribusi Eksponensial dengan parameter λ dengan $(\lambda > 0)$ apabila mempunyai fungsi densitas berbentuk

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & (t \geq 0) \\ 0, & (t < 0). \end{cases}$$

Teorema 2.1 (Bhat, 1984: 197)

Apabila kedatangan pelanggan berdistribusi Poisson, maka waktu antar kedatangan pelanggan berdistribusi Eksponensial.

<u>Bukti:</u>

Ambil T_1 sebagai waktu antar kedatangan pelanggan ke nol hingga pelanggan pertama dan T_n sebagai waktu antar kedatangan pelanggan ke $n-1$ hingga pelanggan ke n. Dengan demikian, barisan $\{T_n\}$ dengan $n = 1, 2, \ldots$ merupakan barisan waktu antar kedatangan. Akan ditunjukkan bahwa T_n berdistribusi Eksponensial apabila kedatangan pelanggan berdistribusi Poisson.

Apabila $t < T_1$, maka jumlah kedatangan pada waktu t adalah nol sehingga

$$P_n(T_1 > t) = P\{\text{tidak ada kedatangan selama waktu } t\}$$

$$P_n(T_1 \leq t) = 1 - P_0(t).$$

$$P_n(T_1 \leq t) = 1 - P_0(t) \tag{2.34}$$

$$= 1 - e^{-\lambda t}, \qquad t \geq 0.$$

Persamaan (2.34) merupakan fungsi kumulatif distribusi Eksponensial yang secara umum ditulis

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & (t \geq 0) \\ 0, & (t < 0). \end{cases}$$

Fungsi densitas dari T_1 adalah

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lambda . e^{-\lambda t}, \qquad t \geq 0. \tag{2.35}$$

Sesuai dengan asumsi bahwa kejadian-kejadian pada sistem antrian adalah saling bebas, maka pembuktian berlaku untuk $\forall T_n, \forall n \geq 1.$ Berdasarkan Definisi 2.5 dan Persamaan (2.35) terbukti bahwa T_n berdistribusi Eksponensial.

Teorema 2.2 (Wagner, 1978: 850)

Jika kepergian pelanggan berdistribusi Poisson, maka waktu pelayanan berdistribusi Eksponensial.

<u>Bukti:</u>

Ambil T_1 sebagai waktu pelayanan pelanggan pertama, dan untuk $n > 1$, T_n menunjukkan waktu pelayanan kepada pelanggan ke n sehingga barisan $\{T_n\}$ dengan $n = 1, 2, \ldots$ merupakan barisan dari waktu pelayanan. Akan ditunjukkan bahwa T_n berdistribusi Eksponensial.

Apabila $t < T_1$, maka jumlah pelayanan pada waktu t adalah nol sehingga

$$P_n(T_1 > t) = P \quad \{\text{tidak ada pelayanan selama waktu } t\}$$
$$= P_0(t).$$

Dengan μ menyatakan laju pelayanan rata-rata tiap satuan waktu, maka berdasarkan Persamaan (2.33) diperoleh $P_0(t) = e^{-\mu t}$ sehingga

$$P_n(T_1 \le t) = 1 - P_0(t) = 1 - e^{-\mu t}, \qquad t \ge 0. \qquad (2.36)$$

Persamaan (2.36) merupakan fungsi kumulatif distribusi Eksponensial yang secara umum ditulis

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu t}, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Fungsi densitas dari T_n adalah

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \mu . e^{-\mu t}, \qquad t \ge 0. \qquad (2.37)$$

Sesuai dengan asumsi bahwa kejadian-kejadian pada sistem antrian adalah saling bebas, maka pembuktian berlaku untuk $T_n, \forall n \ge 1.$ Berdasarkan Definisi 2.5 dan Persamaan (2.37) terbukti bahwa T_n berdistribusi Eksponensial.

G. Probabilitas *Steady State*

Suatu sistem dikatakan *stedy state* apabila keadaan sistem tersebut *independent* (tidak tergantung) pada waktu dan keadaan awal. Apabila sistem antrian telah *steady state*, maka probabilitas $P_n(t)$ menjadi konstan dan *independent* terhadap waktu. Probabilitas *steady state* untuk $P_n(t)$ bisa didapat dengan menetapkan $\lim_{t\to\infty} P_n(t) = P_n$ dan $\lim_{t\to\infty} \frac{dP_n(t)}{dt} = 0.$

Dengan mensubstitusi $\lim_{t\to\infty} \frac{dP_n(t)}{dt} = 0$ ke Persamaan (2.6) diperoleh

$$0 = P_{n-1}(\lambda_{n-1}) + P_{n+1}(\mu_{n+1}) - P_n(\lambda_n + \mu_n), \qquad n \ge 1.$$

$$P_{n+1} = \frac{(\lambda_n + \mu_n)}{\mu_{n+1}} P_n - \frac{(\lambda_{n-1})}{\mu_{n+1}} P_{n-1}, \qquad n \ge 1. \qquad (2.38)$$

Berdasarkan Persamaan (2.10) diperoleh

$$0 = P_1 \mu_1 - P_0 \lambda_0, \qquad n = 0.$$

$$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0, \qquad n = 0. \qquad (2.39)$$

Akan dicari nilai P_n untuk nilai $n \ge 1$ dengan langkah–langkah di bawah ini:

1. Untuk nilai $n = 1$

   Berdasarkan Persamaan (2.38) diperoleh

   $$P_2 = \frac{\lambda_1 + \mu_1}{\mu_2} P_1 - \frac{\lambda_0}{\mu_2} P_0.$$

   Karena $P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$ maka

   $$P_2 = \frac{\lambda_1 + \mu_1}{\mu_2} \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0 - \frac{\lambda_0}{\mu_2} P_0$$
   $$= \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} P_0.$$

2. Untuk nilai $n = 1$

Berdasarkan Persamaan (2.38) diperoleh

$$P_3 = \frac{\lambda_2 + \mu_2}{\mu_3} P_2 - \frac{\lambda_1}{\mu_3} P_1.$$

Karena $P_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} P_0$ maka

$$P_3 = \frac{\lambda_2 + \mu_2}{\mu_3} \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} P_0 - \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} P_0$$

$$= \frac{\lambda_2 \lambda_1 \lambda_0}{\mu_3 \mu_2 \mu_1} P_0.$$

Dengan induksi matematika diperoleh nilai P_n yang didefinisikan sebagai "probabilitas *steady state* terdapat *n* pelanggan"

$$\boxed{\begin{aligned} P_n &= \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \ldots\ldots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \ldots\ldots \mu_1} P_0, \qquad (n \geq 1) \\ &= P_0 \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \end{aligned}} \tag{2.40}$$

H. Ukuran Keefektifan Sistem Antrian

Ukuran keefektifan suatu sistem antrian dapat ditentukan setelah probabilitas *steady state* diketahui. Ukuran keefektifan kinerja sistem antrian yang biasa digunakan untuk keperluan analisis yaitu:

1. nilai harapan banyaknya pelanggan dalam sistem antrian,
2. nilai harapan banyaknya pelanggan dalam antrian,
3. nilai harapan waktu tunggu pelanggan dalam sistem antrian,
4. nilai harapan waktu tunggu pelanggan dalam antrian.

Sebelum membahas lebih lanjut, akan diuraikan lima definisi yang mendukung pembahasan ukuran keefektifan suatu sistem.

Definisi 2.7 (Taha, 1993: 596) Jumlah pelanggan dalam sistem antrian adalah jumlah pelanggan dalam antrian ditambah jumlah pelanggan yang sedang mendapat pelayanan.

Definisi 2.8 (Taha,1993: 596) Laju kedatangan efektif adalah jumlah dari perkalian laju kedatangan pelanggan pada keadaan tertentu dengan probabilitasnya. Laju kedatangan efektif dinotasikan dengan λ_{eff} dan dinyatakan dengan

$$\lambda_{eff} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \; P_n.$$

Definisi 2.9 (Purcell & Varberg, 1987: 49) Andaikan $S(x)$ adalah jumlah sebuah deret pangkat pada sebuah selang I sehingga

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\cdots$$

maka, apabila x ada di dalam selang I, berlakulah

$$\frac{d\,S(x)}{dx} = \frac{d \sum_{n=0}^{\infty} x^n}{dx} = \frac{d \sum_{n=0}^{\infty} x^n}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1}.$$

Definisi 2.10 (Purcell & Varberg, 1987: 12) Deret geometri berbentuk $\sum_{n=1}^{\infty} a\, x^{n-1}$ dengan $n \neq 0$ akan konvergen dan mempunyai jumlah $S = \dfrac{a}{(1-x)}$ apabila $|x| < 1$.

Definisi 2.8 (Dimyati, 2003: 373) Laju pelayanan rata-rata untuk seluruh pelayan dalam sistem antrian adalah laju pelayanan rata-rata dimana pelanggan yang sudah mendapat pelayanan meninggalkan sistem antrian. Laju pelayanan rata-rata untuk seluruh pelayan dinyatakan dengan μ_T .

Nilai harapan banyaknya pelanggan dalam sistem antrian merupakan jumlah dari perkalian keseluruhan pelanggan dalam sistem dengan probabilitas terdapat *n* pelanggan (Hillier & Lieberman, 2001: 850), dan dinyatakan dengan

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} n\, P_n . \tag{2.41}$$

Nilai harapan banyaknya pelanggan dalam antrian merupakan jumlah dari perkalian pelanggan dalam antrian dengan probabilitas terdapat *n* pelanggan (Ecker & Kupferschmid, 1988: 384), dan dinyatakan dengan

$$L_q = \sum_{n=c}^{\infty} (n-c)\, P_n . \tag{2.42}$$

Apabila W_s merupakan waktu menunggu pelanggan dalam sistem antrian dan W_q merupakan waktu menunggu pelanggan dalam antrian, maka hubungan antara W_s , W_q , L_s , dan L_q dinyatakan dengan

$$L_s = \lambda_{eff} \; W_s . \tag{2.43}$$

$$L_q = \lambda_{eff} \; W_q . \tag{2.44}$$

Persamaan (2.43) dan Persamaan (2.44) dikenal dengan rumus *Little*, diperkenalkan pertama kali oleh John D.C Little pada tahun 1961 (Taha, 1982: 600)