TEORI ANTRIAN

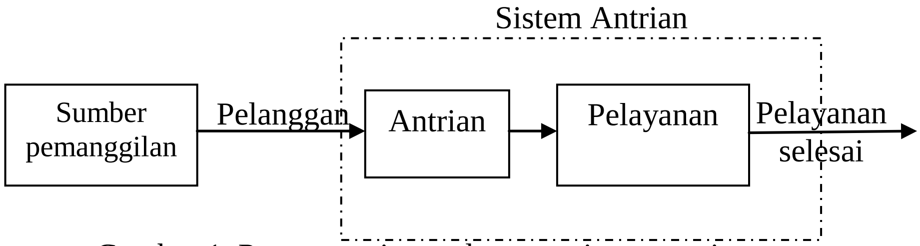
Teori antrian merupakan studi matematis mengenai antrian atau waiting lines yang di dalamnya disediakan beberapa alternatif model matematika yang dapat digunakan untuk menentukan beberapa karakteristik dan optimasi dalam pengambilan keputusan suatu sistem antrian.

A. Definisi dan Unsur-unsur Dasar Model Antrian

Definisi Sistem Antrian. Sistem antrian adalah himpunan pelanggan, pelayan, dan suatu aturan yang mengatur kedatangan para pelanggan dan pelayanannya.

Sistem antrian merupakan “proses kelahiran-kematian” dengan suatu populasi yang terdiri atas para pelanggan yang sedang menunggu pelayanan atau yang sedang dilayani. Kelahiran terjadi jika seorang pelanggan memasuki fasilitas pelayanan, sedangkan kematian terjadi jika pelanggan meninggalkan fasilitas pelayanan tersebut. Keadaan sistem adalah jumlah pelanggan dalam suatu fasilitas pelayanan.

Proses antrian adalah suatu proses yang berhubungan dengan kedatangan pelanggan ke suatu sistem antrian, kemudian menunggu dalam antrian hingga pelayan memilih pelanggan sesuai dengan disiplin pelayanan, dan akhirnya pelanggan meninggalkan sistem antrian setelah selesai pelayanan.



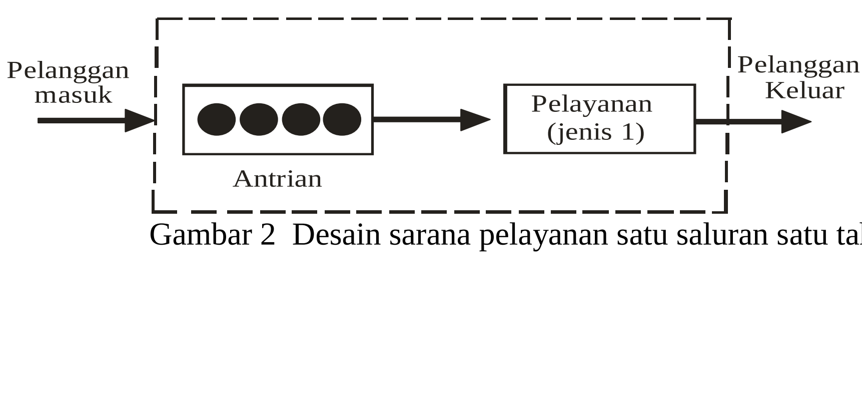
Gambar 1 Proses antrian pada suatu sistem antrian

Unsur-unsur Dasar Model Antrian

Suatu sistem antrian bergantung pada tujuh faktor yaitu :

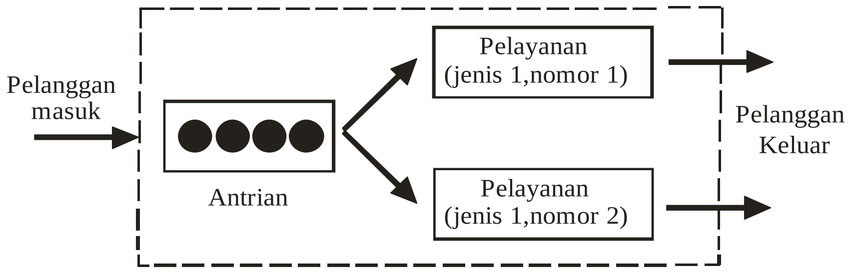
1. Pola Kedatangan adalah banyaknya kedatangan pelanggan selama periode waktu tertentu. Pelanggan dapat datang secara individu maupun kelompok. Namun, jika tidak disebutkan secara khusus maka kedatangan terjadi secara individu. Kedatangan dapat beragam pada suatu periode waktu tertentu, namun dapat juga bersifat acak di mana kedatangan pelanggan tidak bergantung pada waktu. Jika kedatangan bersifat acak maka perlu ditentukan distribusi probabilitas waktu antar kedatangannya. Pola kedatangan dapat dicirikan oleh distribusi probabilitas waktu antar kedatangan atau probabilitas jumlah pelanggan yang datang pada sistem antrian. Waktu antar kedatangan adalah waktu antara dua kedatangan yang berurutan pada suatu fasilitas pelayanan.
2. Pola Kepergian adalah banyaknya kepergian pelanggan selama periode waktu tertentu. Pola kepergian biasanya dicirikan oleh waktu pelayanan, yaitu waktu yang dibutuhkan oleh seorang pelayan untuk melayani seorang pelanggan. Waktu pelayanan dapat bersifat deterministik atau berupa suatu variabel acak dengan distribusi peluang tertentu.
3. Rancangan Sarana Pelayanan atau desain sarana pelayanan berkaitan erat dengan bentuk barisan antrian dan pelayanan pada suatu sistem antrian. Sebuah sarana pelayanan mempunyai jumlah saluran (*channel*) dan jumlah tahap (*phase*) pelayanan tertentu. Saluran (*channel*) adalah jumlah pelayan yang dapat memberikan pelayanan kepada pelanggan pada waktu yang bersamaan, sedangkan tahap (*phase*) adalah jumlah terminal-terminal pelayanan yang harus dilalui oleh pelanggan sebelum pelayanan dinyatakan lengkap atau selesai.

   Rancangan sarana pelayanan terdiri atas empat macam yang diuraikan sebagai berikut.
   1. Satu saluran satu tahap (*single channel single phase*), artinya sarana pelayanan memiliki satu pelayan dan pelayanan kepada pelanggan diselesaikan dalam satu kali proses pelayanan.



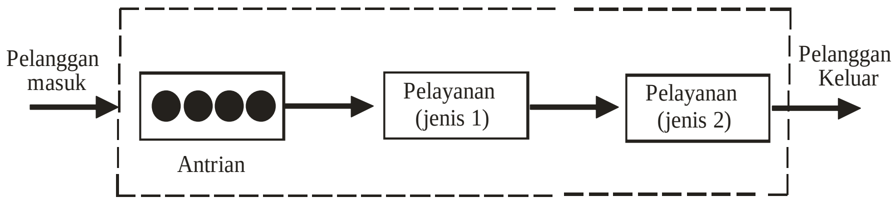
Gambar 2 Desain sarana pelayanan satu saluran satu tahap

2. Banyak saluran satu tahap (*multichannel single phase*), artinya sarana pelayanan memiliki lebih dari satu pelayan dan pelayanan kepada pelanggan diselesaikan dalam satu kali proses pelayanan. Desain ini disebut juga desain pelayanan paralel.



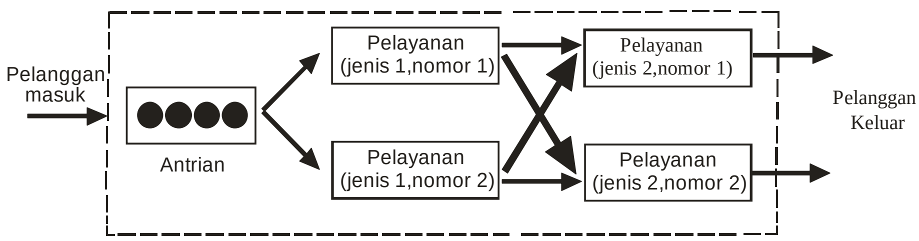
Gambar 3 Desain sarana pelayanan banyak saluran satu tahap

3. Satu saluran banyak tahap (*single channel multiphase*), artinya sarana pelayanan memiliki satu pelayan dan pelayanan kepada pelanggan belum terselesaikan hanya dalam satu kali proses pelayanan. Desain ini disebut juga desain pelayanan seri atau *tandem*.



Gambar 4 Desain sarana pelayanan satu saluran banyak tahap

4. Banyak saluran banyak tahap (*multichannel multiphase*), artinya sarana pelayanan memiliki lebih dari satu pelayan dan pelayanan kepada pelanggan belum terselesaikan hanya dalam satu kali proses pelayanan. Desain ini disebut juga desain pelayanan jaringan atau antrian *network*.



Gambar 5 Desain sarana pelayanan banyak saluran banyak tahap

4. Disiplin Pelayanan adalah kebijakan yang mengatur cara memilih pelanggan yang akan dilayani dari suatu antrian. Disiplin pelayanan yang biasa diterapkan dalam kehidupan sehari-hari yakni sebagai berikut:
   1. *First Come First Served* (FCFS) atau *First In First Out* (FIFO), artinya pelayanan didahulukan kepada pelanggan yang lebih awal datang atau mempunyai nomor antrian lebih kecil.
   2. *Last Come First Served* (LCFS), artinya pelayanan didahulukan kepada pelanggan yang lebih akhir datang.
   3. *Service In Random Order* (SIRO), artinya pelayanan dilakukan kepada pelanggan dengan pemilihan secara acak.

   Antrian prioritas (*priority queue*), artinya pelayanan diberikan kepada pelanggan yang mempunyai kepentingan atau prioritas yang sangat tinggi. Terdapat dua macam peraturan dalam antrian prioritas yaitu disiplin preemtif (*preemtive discipline*) yang ditulis PRD dan disiplin non-preemtif (*non-preemtive discipline*) yang ditulis NPD. Disiplin preemtif berlaku ketika pelanggan dengan prioritas lebih tinggi memasuki sistem maka pelanggan tersebut langsung dapat dilayani meskipun pelanggan yang mempunyai prioritas yang lebih rendah berada dalam proses pelayanan. Disiplin non-preemtif berlaku ketika pelanggan dengan prioritas lebih tinggi memasuki sistem, baru akan dilayani setelah sebuah pelayanan yang sedang berlangsung terselesaikan.

5. Kapasitas Sistem adalah jumlah maksimum pelanggan, baik pelanggan yang sedang berada dalam pelayanan maupun dalam antrian, yang dapat ditampung oleh fasilitas pelayanan pada saat yang sama. Suatu sistem antrian yang tidak membatasi jumlah pelanggan dalam fasilitas pelayanannya disebut sistem berkapasitas tak berhingga, sedangkan suatu sistem yang membatasi jumlah pelanggan dalam fasilitas pelayanannya disebut sistem berkapasitas berhingga.

6. Ukuran Sumber Pemanggilan adalah banyaknya populasi yang membutuhkan pelayanan dalam suatu sistem antrian. Ukuran sumber pemanggilan dapat terbatas maupun tak terbatas. Sumber pemanggilan terbatas terjadi ketika banyaknya pelanggan dalam sistem mempengaruhi laju kedatangan pelanggan baru.

7. Perilaku Manusia merupakan perilaku-perilaku yang mempengaruhi suatu sistem antrian ketika manusia mempunyai peran dalam sistem sebagai pelayan atau pelanggan. Pelayan yang berupa manusia dapat bekerja cepat maupun lambat sesuai dengan kemampuannya sehingga mempengaruhi lamanya waktu

tunggu. Selain itu, pelayan juga dapat mempercepat laju pelayanan ketika terjadi antrian yang sangat panjang.

Jika terdapat dua atau lebih jalur antrian maka pelanggan yang berupa manusia dapat berpindah dari jalur yang satu ke jalur yang lain, yang dikenal dengan istilah *jockey habit*. Jika pelanggan melihat antrian yang terlalu panjang ketika akan memasuki sistem maka pelanggan yang sabar tetap memasuki sistem dan bergabung dengan antrian. Namun demikian, pelanggan yang tidak sabar dapat menolak untuk memasuki sistem antrian (*balking*). Pelanggan yang sudah berada dalam sistem antrian, yang bukan merupakan antrian langsung, dapat meninggalkan barisan antrian untuk sementara waktu, bahkan dapat membatalkan antrian (*reneging*) karena barisan masih terlalu panjang.

Perilaku-perilaku manusia tersebut, baik perilaku pelanggan maupun pelayan, diasumsikan tidak terjadi dalam suatu sistem antrian jika tidak disebutkan secara khusus.

B. Notasi Antrian

Notasi baku untuk memodelkan suatu sistem antrian pertama kali dikemukakan oleh D. G. Kendall dalam bentuk $a / b / c$, dan dikenal sebagai notasi Kendall. Namun, A. M. Lee menambahkan simbol d dan e sehingga menjadi $a / b / c / d / e$ yang disebut notasi Kendall-Lee.

Notasi Kendall-Lee tersebut perlu ditambah dengan simbol f. Sehingga, karakteristik suatu antrian dapat dinotasikan dalam format baku $(a / b / c) : (d / e / f)$. Notasi a sampai f berturut-turut menyatakan distribusi waktu antar kedatangan, distribusi waktu pelayanan, jumlah *channel* pelayanan, disiplin pelayanan, kapasitas sistem, dan ukuran sumber pemanggilan.
Notasi a sampai f dapat diganti dengan simbol-simbol yang disajikan dalam Tabel 1.

Tabel 1 Simbol-simbol pengganti notasi a sampai f pada notasi Kendall-Lee

Notasi	Simbol	Keterangan
a dan b	M	Markov, kedatangan atau kepergian berdistribusi Poisson (waktu antar kedatangan atau waktu pelayanan berdistribusi eksponensial)
	D	Deterministik, waktu antar kedatangan atau waktu pelayanan konstan atau deterministik
	E_k	Erlang, waktu antar kedatangan atau waktu pelayanan berdistribusi Erlang
	GI	*General Independent*, distribusi independen umum dari kedatangan atau waktu antar kedatangan
	G	*General*, distribusi umum dari kepergian atau waktu pelayanan
d	FCFS/FIFO	*First Come First Served/First In First Out*
	LCFS	*Last Come First Served*
	SIRO	*Service In Random Order*
	GD	*General Discipline*
	NPD	*Non-preemtive discipline*
	PRD	*Preemtive discipline*
c, e, dan f	1,2, . . ., ∞	

C. Proses Kedatangan dan Kepergian

Proses kedatangan dan kepergian dalam suatu sistem antrian merupakan proses kelahiran dan kematian (*birth-death processes*). Kelahiran terjadi jika seorang pelanggan memasuki sistem antrian dan kematian terjadi jika pelanggan meninggalkan sistem antrian tersebut.

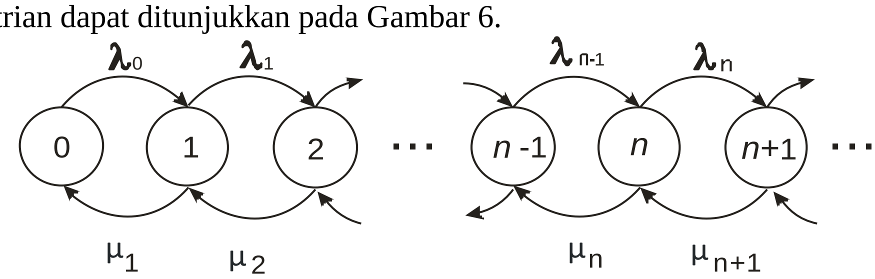
Proses kelahiran dan kematian merupakan proses penjumlahan dalam suatu sistem di mana keadaan sistem selalu menghasilkan n bilangan bulat tak negatif. Keadaan sistem pada saat t didefinisikan sebagai selisih antara banyaknya kelahiran (kedatangan) dan kematian (kepergian) pada saat t, dinotasikan dengan $N(t)$, yaitu banyaknya pelanggan yang berada dalam sistem pada saat t. Misal, banyaknya kedatangan pelanggan pada saat t dinotasikan dengan $X(t)$ dan banyaknya kepergian pada saat t dinotasikan dengan $Y(t)$, maka banyaknya pelanggan yang berada dalam sistem pada saat t adalah $N(t) = X(t) - Y(t)$. Sedangkan peluang terdapat n pelanggan dalam sistem antrian pada saat t dinotasikan dengan $P(N(t) = n)$ atau $P_n(t)$.

Proses kedatangan dan kepergian dalam suatu antrian memiliki asumsi-asumsi sebagai berikut.

1. Peluang terjadi satu kedatangan pada interval waktu $[t, t + \Delta t]$ ditulis
   $P[X(t+\Delta t)-X(t)=1] = \lambda_n \Delta t + o(\Delta t)$, dengan
   n : banyaknya pelanggan dalam sistem antrian
   λ_n : laju kedatangan tiap satuan waktu jika terdapat n pelanggan dalam sistem
   Δt : panjang interval waktu
   $o(\Delta t)$: suatu fungsi yang memenuhi $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{o(\Delta t)}{(\Delta t)} = 0$.

2. Peluang tidak terjadi kedatangan pada interval waktu [t, t + Δt] ditulis
   $P[X(t+\Delta t)-X(t)=0]$ = 1 – $\lambda_n \Delta t$ + $o(\Delta t)$.
3. Peluang terjadi satu kepergian pada interval waktu [t, t + Δt] ditulis
   $P[Y(t+\Delta t)-Y(t)=1]$ = $\mu_n \Delta t$ + $o(\Delta t)$, dengan
   μ_n: laju kepergian tiap satuan waktu jika terdapat n pelanggan dalam sistem.
4. Peluang tidak terjadi kepergian pada interval waktu [t, t + Δt] ditulis
   $P[Y(t+\Delta t)-Y(t)=0]$ = 1 – $\mu_n \Delta t$ + $o(\Delta t)$.
5. Peluang terjadi lebih dari satu kedatangan dan kepergian pada interval waktu [t, t + Δt] adalah $o(\Delta t)$.
6. Kedatangan dan kepergian merupakan kejadian-kejadian yang saling bebas.

Berdasarkan Asumsi 6, kedatangan dan kepergian merupakan kejadian-kejadian yang saling bebas, sehingga kejadian yang terjadi pada interval waktu tertentu tidak mempengaruhi kejadian pada interval waktu sebelumnya atau kejadian pada interval waktu setelahnya. Proses kedatangan dan kepergian dalam suatu sistem antrian dapat ditunjukkan pada Gambar 6.



Gambar 6 Proses kedatangan dan kepergian pada sistem antrian

Berdasarkan Gambar 6, jika terdapat n (n > 0) pelanggan dalam sistem pada waktu (t + Δt) maka kejadian-kejadian saling asing yang mungkin terjadi dapat ditunjukkan pada Tabel 2.

Tabel 2 Banyaknya pelanggan saat t, banyaknya kedatangan selama Δt, dan banyaknya kepergian selama Δt untuk tiga kejadian jika $N(t+\Delta t) = n$ (n > 0)

Kejadian	$N(t)$	$X(t + \Delta t) - X(t)$	$Y(t + \Delta t) - Y(t)$
I	n	0	0
II	n + 1	0	1
III	n - 1	1	0

Keterangan:

$N(t)$: banyaknya pelanggan dalam sistem pada saat t
$N(t+\Delta t)$: banyaknya pelanggan dalam sistem pada saat $t + \Delta t$
$X(t + \Delta t) - X(t)$: banyaknya kedatangan pelanggan selama Δt
$Y(t + \Delta t) - Y(t)$: banyaknya kepergian pelanggan selama Δt

Selain tiga kejadian yang ditunjukkan pada Tabel 2, terdapat kejadian (IV) yaitu keadaan sistem pada saat t kurang dari (n – 1) atau lebih dari (n + 1) serta jumlah kedatangan dan kepergian lebih besar dari 1. Namun menurut Asumsi 5, peluang kejadian ini bernilai $o(\Delta t)$.

Menurut Asumsi 6, kedatangan dan kepergian merupakan kejadian-kejadian yang saling bebas, sehingga peluang dari masing-masing kejadian tersebut adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} P(\text{Kejadian I}) &= P((N(t)=n) \cap (X(t+\Delta t)-X(t)=0) \cap (Y(t+\Delta t)-Y(t)=0)) \\ &= (1-\lambda_n \Delta t + o(\Delta t))\,(1-\mu_n \Delta t + o(\Delta t))\, P(N(t)=n) \\ &= (1-(\lambda_n+\mu_n)\Delta t + o(\Delta t))\, P_n(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{Kejadian II}) &= P((N(t)=n+1) \cap (X(t+\Delta t)-X(t)=0) \cap (Y(t+\Delta t)-Y(t)=1)) \\ &= (1-\lambda_{n+1}\Delta t + o(\Delta t))\,(\mu_{n+1}\Delta t + o(\Delta t))\; P(N(t)=n+1) \\ &= (\mu_{n+1}\Delta t + o(\Delta t))\, P_{n+1}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{Kejadian III}) &= P((N(t)=n-1) \cap (X(t+\Delta t)-X(t)=1) \cap (Y(t+\Delta t)-Y(t)=0)) \\ &= (\lambda_{n-1}\Delta t + o(\Delta t))\,(1-\mu_{n-1}\Delta t + o(\Delta t))\; P((N(t)=n-1) \\ &= (\lambda_{n-1}\Delta t + o(\Delta t))\, P_{n-1}(t) \end{aligned}$$

P(Kejadian IV) = $o(\Delta t)$ (Sesuai Asumsi 5)

Selanjutnya akan dibahas tentang peluang terdapat n (n > 0) pelanggan dalam sistem pada waktu (t + Δt). Peluang terdapat n (n > 0) pelanggan dalam sistem pada waktu (t + Δt) dapat diperoleh dengan menjumlahkan keempat kejadian saling asing di atas, sehingga diperoleh

$P_n(t + \Delta t)$ = P(Kejadian I) + P(Kejadian II) + P(Kejadian III) + P(Kejadian IV)

$= (1 - (\lambda_n + \mu_n)\Delta t + o(\Delta t))\, P_n(t) + (\mu_{n+1}\Delta t + o(\Delta t))\, P_{n+1}(t) + (\lambda_{n-1}\Delta t + o(\Delta t))\, P_{n-1}(t) + o(\Delta t)$

$$= P_n(t) - \lambda_n \Delta t\, P_n(t) - \mu_n \Delta t\, P_n(t) + \mu_{n+1}\Delta t\, P_{n+1}(t) + \lambda_{n-1}\Delta t\, P_{n-1}(t) + o(\Delta t) \quad (1)$$

Selanjutnya masing-masing ruas pada Persamaan (1) dikurangi $P_n(t)$ dan dibagi Δt sehingga diperoleh

$$\frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = -\lambda_n P_n(t) - \mu_n P_n(t) + \mu_{n+1} P_{n+1}(t) + \lambda_{n-1} P_{n-1}(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$= \lambda_{n-1} P_{n-1}(t) - (\lambda_n + \mu_n)\, P_n(t) + \mu_{n+1} P_{n+1}(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

Kemudian dihitung nilai limit dari masing-masing ruas untuk $\Delta t \to 0$, sehingga menjadi

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\lambda_{n-1} P_{n-1}(t) - (\lambda_n + \mu_n) P_n(t) + \mu_{n+1} P_{n+1}(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \right)$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda_{n-1} P_{n-1}(t) - (\lambda_n + \mu_n)\, P_n(t) + \mu_{n+1} P_{n+1}(t) \quad (2)$$

Persamaan (2) hanya berlaku untuk $n > 0$, maka dengan cara yang sama, akan ditentukan $\frac{dP_0(t)}{dt}$. Berdasarkan Gambar 6, jika terdapat $n = 0$ pelanggan dalam sistem pada waktu $(t + \Delta t)$ maka kejadian-kejadian saling asing yang mungkin terjadi ditunjukkan pada Tabel 3.

Tabel 3 Banyaknya pelanggan saat t, banyaknya kedatangan selama Δt, dan banyaknya kepergian selama Δt untuk dua kejadian jika $N(t + \Delta t) = 0$

Kejadian	$N(t)$	$X(t + \Delta t) - X(t)$	$Y(t + \Delta t) - Y(t)$
I	0	0	0
II	1	0	1

<u>Keterangan:</u>

$N(t)$: banyaknya pelanggan di dalam sistem pada saat t

$N(t + \Delta t)$: banyaknya pelanggan di dalam sistem pada saat $t + \Delta t$

$X(t + \Delta t) - X(t)$: banyaknya kedatangan pelanggan selama Δt

$Y(t + \Delta t) - Y(t)$: banyaknya kepergian pelanggan selama Δt

Selain dua kejadian yang ditunjukkan pada Tabel 3, terdapat kejadian (III) yaitu keadaan sistem pada saat t lebih dari satu serta jumlah kedatangan dan kepergian juga lebih besar dari satu. Namun menurut Asumsi 5, peluang kejadian ini bernilai $o(\Delta t)$.

Peluang dari masing-masing kejadian tersebut adalah sebagai berikut.

P(Kejadian I) $= P((N(t) = 0) \cap (X(t + \Delta t - X(t) = 0) \cap (Y(t + \Delta t) - Y(t) = 1)$

$= (1 - \lambda_0 \Delta t + o(\Delta t))\,(1)\, P((N(t)= 0)$

$= (1 - \lambda_0 \Delta t + o(\Delta t))\, P_0(t)$

P(Kejadian II) $= P((N(t) = 1) \cap (X(t + \Delta t - X(t) = 0) \cap (Y(t + \Delta t) - Y(t) = 1)$

$= (1 - \lambda_1 \Delta t + o(\Delta t))\,(\mu_1 \Delta t + o(\Delta t))\, P((N(t) = 1)$

$= (\mu_1 \Delta t + o(\Delta t))\, P_1(t)$

P(Kejadian III) $= o(\Delta t)$ (Sesuai Asumsi 5)

Peluang terdapat $n = 0$ pelanggan dalam sistem pada waktu $(t + \Delta t)$ dapat diperoleh dengan menjumlahkan ketiga kejadian saling asing di atas sebagai berikut.

$P_0(t + \Delta t)$ = P(Kejadian I) + P(Kejadian II) + P(Kejadian III)

$= (1 - \lambda_0 \Delta t + o(\Delta t))\, P_0(t) + (\mu_1 \Delta t + o(\Delta t))\, P_1(t) + o(\Delta t)$

$$= P_0(t) - \lambda_0 \Delta t\, P_0(t) + \mu_1 \Delta t\, P_1(t) + o(\Delta t) \quad (3)$$

Selanjutnya, masing-masing ruas pada Persamaan (3) dikurangi $P_0(t)$ dan dibagi Δt serta dihitung nilai limitnya untuk $\Delta t \to 0$, sehingga

$$\frac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(-\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \right)$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t) \quad (4)$$

D. Distribusi Kedatangan

Distribusi kedatangan berhubungan dengan peluang terdapat n kedatangan palanggan dalam suatu sistem antrian pada interval waktu tertentu. Kedatangan yang dimaksud dalam pembahasan ini adalah kedatangan murni, yaitu kedatangan tanpa disertai kepergian, maka laju kepergian $\mu_n = 0,\ \forall n \geq 0$. Diasumsikan bahwa laju kedatangan tidak tergantung pada banyaknya pelanggan yang berada dalam sistem, sehingga $\lambda_n = \lambda,\ \forall n \geq 0$.

Peluang terdapat n ($n \geq 0$) kedatangan pada waktu t dapat diperoleh dengan mensubstitusikan $\mu_n = 0$ dan $\lambda_n = \lambda$ ke Persamaan (2) dan Persamaan (4) sebagai berikut.

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) \tag{5}$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t) - \lambda P_n(t),\ n > 0 \tag{6}$$

Persamaan (5) dapat dinyatakan sebagai persamaan differensial linear orde I dengan $P(x) = \lambda$ dan $Q(x) = 0$. Maka, penyelesaiannya adalah $P_0(t) = ce^{-\int \lambda dt} = ce^{-\lambda t}$.

Diasumsikan bahwa proses kelahiran murni dimulai ($t = 0$) pada saat sistem memiliki nol pelanggan ($n = 0$), maka peluang terdapat nol pelanggan dalam sistem pada saat $t = 0$ (ditulis $P_0(0)$) yakni 1. Jika $n > 0$ maka $P_n(0) = 0$. Hal ini dapat dituliskan sebagai berikut.

$$P_n(0) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n > 0 \end{cases} \tag{7}$$

Dengan demikian, $P_0(0) = ce^{-\lambda 0} = 1$, dan diperoleh nilai $c = 1$. Oleh karena itu, didapatkan $P_0(t) = e^{-\lambda t}$ (8)

Persamaan (6) dapat dinyatakan sebagai persamaan differensial linear orde I dengan $P(x) = \lambda$ dan $Q(x) = \lambda P_{n-1}(t)$. Sehingga penyelesaiannya adalah

$$P_n(t) = ce^{-\int \lambda dt} + e^{-\int \lambda dt} \int \lambda e^{\int \lambda dt} P_{n-1}(t)dt = ce^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} \int e^{\int \lambda dt} P_{n-1}(t)dt$$

Untuk nilai $n = 1$ diperoleh

$$P_1(t) = ce^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} \int e^{\lambda t} P_0(t)dt \tag{9}$$

Persamaan (8) disubstitusikan ke Persamaan (9) maka didapatkan

$$P_1(t) = ce^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} \int e^{\lambda t} e^{-\lambda t} dt = ce^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t} \tag{10}$$

Berdasarkan Persamaan (7), didapatkan $P_1(0) = ce^{-\lambda 0} + \lambda.0.e^{-\lambda 0} = 0$

Sehingga diperoleh nilai $c = 0$.

Karena nilai $c = 0$, maka Persamaan (10) menjadi $P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$ (11)

Untuk nilai $n = 2$, maka $P_2(t) = ce^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} \int e^{\lambda t} P_1(t)dt$ (12)

Persamaan (11) disubstitusikan ke Persamaan (12) menjadi

$$P_2(t) = ce^{-\lambda t} + \lambda e^{-\lambda t} \int e^{\lambda t} \lambda t e^{-\lambda t} dt = ce^{-\lambda t} + \lambda^2 e^{-\lambda t} \int t dt = ce^{-\lambda t} + \frac{(\lambda t)^2}{2} e^{-\lambda t} \tag{13}$$

Berdasarkan Persamaan (7), diperoleh $P_2(0) = ce^{-\lambda.0} + \frac{(\lambda.0)^2}{2} e^{-\lambda.0} = 0$. Sehingga diperoleh nilai $c = 0$.

Karena $c = 0$, maka Persamaan (13) menjadi $P_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2} e^{-\lambda t}$ (14)

Dengan induksi matematika, dapat dibuktikan bahwa penyelesaian umum dari Persamaan (5) dan Persamaan (6) adalah sebagai berikut. $P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$ (15)

Langkah-langkah pembuktiannya sebagai berikut.

1. Persamaan (11) yaitu $P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$ membuktikan bahwa Persamaan (15) merupakan penyelesaian Persamaan (6) untuk $n = 1$.
2. Diasumsikan Persamaan (15) merupakan penyelesaian Persamaan (6) untuk $n = k$, maka $P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$.
3. Akan dibuktikan bahwa Persamaan (15) merupakan penyelesaian Persamaan (6) untuk $n = k + 1$.

Persamaan (6) dengan $n = k + 1$ adalah $\frac{dP_{k+1}(t)}{dt} = \lambda P_k(t) - \lambda P_{k+1}(t)$ (16)

Asumsi 2 disubstitusikan ke Persamaan (16) sehingga menjadi

$$\frac{dP_{k+1}(t)}{dt} = \lambda^{k+1} \frac{t^k}{k!} e^{-\lambda t} - \lambda P_{k+1}(t) \tag{17}$$

Persamaan (17) merupakan persamaan differensial linear orde I dengan $P(x) = \lambda$ dan $Q(x) = \lambda^{k+1}\dfrac{t^k}{k!}e^{-\lambda t}$, sehingga penyelesaiannya adalah

$$P_{k+1}(t) = ce^{-\int \lambda dt} + e^{-\int \lambda dt}\int \lambda^{k+1}\frac{t^k}{k!}e^{-\lambda t}e^{\int \lambda dt}dt = ce^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}\int \lambda^{k+1}\frac{t^k}{k!}e^{-\lambda t}e^{\lambda t}dt$$

$$= ce^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}\lambda^{k+1}\frac{t^{k+1}}{(k+1)!} = ce^{-\lambda t} + \frac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!}e^{-\lambda t} \tag{18}$$

Berdasarkan (7), maka $P_{k+1}(0) = ce^{-\lambda .0} + \dfrac{(\lambda .0)^{k+1}}{(k+1)!}e^{-\lambda .0} = 0$. Diperoleh nilai $c = 0$.

Karena $c = 0$, maka (18) menjadi $P_{k+1}(t) = \dfrac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!}e^{-\lambda t}$ (19)

Persamaan (19) merupakan penyelesaian (6) untuk $n = k + 1$ dan memenuhi (15).

Jadi, $P_n(t) = \dfrac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$ merupakan solusi umum dari Persamaan (5) dan Persamaan (6). Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa kedatangan pelanggan berdistribusi Poisson.

Teorema 2. Jika kedatangan pelanggan berdistribusi Poisson maka waktu antar kedatangan pelanggan berdistribusi eksponensial.

Bukti:

Berdasarkan uraian di depan, kedatangan pelanggan berdistribusi Poisson. Misal, T_n ($n > 0$) adalah waktu antara ($n - 1$) kedatangan sampai n kedatangan. Barisan $\{T_n, n = 1, 3, 4, ...\}$ merupakan barisan waktu antar kedatangan yang saling asing dan saling bebas.

Ambil T_1 yang merupakan waktu antara sistem antrian kosong ($n = 0$) dan kedatangan pertama. Akan ditunjukkan bahwa T_1 berdistribusi eksponensial. Ambil $t < T_1$, maka banyaknya kedatangan pada waktu t adalah nol, artinya

$P_n(T_1 > t) = P$(tidak ada kedatangan selama waktu t) $= P_0(t)$ (20)

Berdasarkan Persamaan (8), $P_0(t) = e^{-\lambda t}$ dengan λ menyatakan laju kedatangan rata-rata, maka fungsi distribusi kumulatif dari T_1 dengan $t \geq 0$ adalah

$F(t) = P(T_1 \leq t) = 1 - P(T_1 > t) = 1 - P_0(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ (21)

Berdasarkan Definisi 6, Persamaan (21) merupakan fungsi distribusi kumulatif dari distribusi eksponensial yang secara umum ditulis $F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, t \geq 0 \\ 0, \quad t < 0 \end{cases}$.

Sehingga fungsi densitas peluang dari T_1 untuk $t \geq 0$ adalah $f(t) = \dfrac{dF(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}$ (22)

Berdasarkan Definisi 5, T_1 merupakan peubah acak yang berdistribusi eksponensial dengan parameter λ. Sesuai dengan asumsi bahwa barisan waktu antar kedatangan pada sistem antrian adalah saling bebas, maka pembuktian di atas juga berlaku untuk $\{T_n\}$, $n > 0$. Jadi, terbukti bahwa waktu antar kedatangan berdistribusi eksponensial.

E. Distribusi Kepergian

Distribusi kepergian berhubungan dengan peluang terdapat n kepergian palanggan dalam suatu sistem antrian pada interval waktu tertentu. Kepergian yang dimaksud dalam pembahasan ini adalah kepergian murni, yaitu kepergian yang tanpa disertai kedatangan, sehingga laju kedatangan $\lambda_n = 0$, $\forall n \geq 0$. Diasumsikan bahwa laju kepergian tidak tergantung pada banyaknya pelanggan yang berada dalam sistem, sehingga $\mu_n = \mu$, $\forall n \geq 0$.

Peluang terdapat n ($n \geq 0$) kepergian selama waktu t dapat diperoleh dengan mensubstitusikan $\lambda_n = 0$ dan $\mu_n = \mu$ ke Persamaan (2) dan Persamaan (4) sebagai berikut.

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \begin{cases} -\mu P_n(t) + \mu P_{n+1}(t), & n > 0 \\ \mu P_{n+1}(t), & n = 0 \end{cases} \tag{23}$$

Jika jumlah pelanggan dalam sistem antrian selama t adalah sebanyak $n = N$, maka $P_{n+1}(t) = 0$, $n \geq N$. Sehingga untuk $n \geq N$ berlaku $\dfrac{dP_n(t)}{dt} = -\mu P_n(t)$ (24)

Sedangkan untuk $0 < n < N$ berlaku $\dfrac{dP_n(t)}{dt} = -\mu P_n(t) + \mu P_{n+1}(t)$ (25)

Berdasarkan Definisi 9, maka Persamaan (24) dan Persamaan (25) merupakan bentuk persamaan differensial linear orde I. Penyelesaian Persamaan (24) adalah $P_n(t) = ce^{-\mu t}$, $n \geq N$ (26)

Diasumsikan bahwa proses kematian murni dimulai (t = 0) pada saat sistem memiliki $n = N$ pelanggan dalam sistem, maka peluang terdapat N pelanggan dalam sistem pada kondisi awal (t = 0) dinotasikan dengan $P(N(0) = N) = P_N(0)$ adalah 1. Jika $0 \le n < N$ maka $P_n(0) = 0$. Hal ini dapat dituliskan sebagai berikut.

$$P_n(0) = \begin{cases} 0, & 0 \le n < N \\ 1, & n = N \end{cases} \quad (27)$$

Dengan demikian, $P_N(0) = ce^{-\mu.0} = 1$, dan diperoleh nilai $c = 1$. Oleh karena itu, $P_N(t) = e^{-\mu t}$ (28)

Penyelesaian Persamaan (25) adalah $P_n(t) = ce^{-\mu t} + \mu e^{-\mu t}\int e^{\mu t}P_{n+1}(t)dt$, $0 < n < N$ (29)

Untuk $n = N - 1$, maka $P_{N-1}(t) = ce^{-\mu t} + \mu e^{-\mu t}\int e^{\mu t}P_N(t)dt$ (30)

Persamaan (28) disubstitusikan ke Persamaan (30) sehingga

$$P_{N-1}(t) = ce^{-\mu t} + \mu e^{-\mu t}\int e^{\mu t}e^{-\mu t}dt = ce^{-\mu t} + \mu te^{-\mu t} \quad (31)$$

Sesuai dengan Persamaan (27), maka $P_{N-1}(0) = ce^{-\mu.0} + \mu.0.e^{-\mu.0} = 0$. Sehingga, diperoleh nilai $c = 0$.

Karena $c = 0$, maka Persamaan (31) menjadi $P_{N-1}(t) = \mu te^{-\mu t}$ (32)

Untuk nilai $n = N - 2$, maka $P_{N-2}(t) = ce^{-\mu t} + \mu e^{-\mu t}\int e^{\mu t}P_{N-1}(t)dt$ (33)

Persamaan (32) disubstitusikan ke Persamaan (33) sehingga

$$P_{N-2}(t) = ce^{-\mu t} + \mu e^{-\mu t}\int e^{\mu t}\mu te^{-\mu t}dt = ce^{-\mu t} + \mu e^{-\mu t}\int \mu tdt = ce^{-\mu t} + \frac{(\mu t)^2}{2}e^{-\mu t} \quad (34)$$

Sesuai dengan Persamaan (27), maka $P_{N-2}(0) = ce^{-\mu.0} + \frac{(\mu.0)^2}{2}e^{-\mu.0} = 0$. Sehingga, diperoleh nilai $c = 0$.

Karena $c = 0$, maka Persamaan (34) menjadi $P_{N-2}(t) = \frac{(\mu t)^2}{2}e^{-\mu t}$ (35)

Sama seperti halnya distribusi kedatangan, dapat dibuktikan dengan induksi matematika bahwa penyelesaian umum dari $P_n(t)$ yang merupakan probabilitas terdapat n kepergian pelanggan selama waktu t adalah sebagai berikut. $P_n(t) = \frac{(\mu t)^n}{n!}e^{-\mu t}$, $0 \le n \le N$ (36)

Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa kepergian pelanggan berdistribusi Poisson.

Teorema 3. Jika kepergian pelanggan berdistribusi Poisson maka waktu pelayanan pelanggan berdistribusi eksponensial.

Bukti:

Berdasarkan uraian di atas, kepergian pelanggan berdistribusi Poisson. Misal, keadaan awal suatu sistem antrian sebanyak $n = N$ pelanggan. Misalkan T_n ($n > 0$) adalah waktu pelayanan kepada pelanggan ke-n, sehingga barisan $\{T_n\}$, $n > 0$ merupakan barisan dari waktu pelayanan yang saling asing dan saling bebas. Ambil T_1 yang merupakan waktu pelayanan kepada pelanggan pertama. Akan ditunjukkan bahwa T_1 berdistribusi eksponensial.

Jika $t < T_1$ maka banyaknya pelayanan pada waktu t adalah nol, artinya

$P_n(T_1 > t) = P$ (tidak ada pelayanan selama waktu t) $= P_N(t)$ (37)

Berdasarkan Persamaan (28), $P_N(t) = e^{-\mu t}$ dengan μ menyatakan laju pelayanan rata-rata, maka fungsi distribusi kumulatif dari T_1 dengan $t \ge 0$ adalah

$$F(t) = P(T_1 \le t) = 1 - P(T_1 > t) = 1 - P_N(t) = 1 - e^{-\mu t} \quad (38)$$

Berdasarkan Definisi 6, Persamaan (38) merupakan fungsi distribusi kumulatif dari distribusi eksponensial. Sehingga fungsi densitas peluang dari T_1 untuk $t \ge 0$ adalah

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \mu e^{-\mu t} \quad (39)$$

Berdasarkan Definisi 5, T_1 merupakan peubah acak yang berdistribusi eksponensial dengan parameter μ. Sesuai dengan asumsi bahwa barisan waktu pelayanan pada sistem antrian adalah saling bebas, maka pembuktian di atas juga berlaku untuk $\{T_n\}$, $n > 0$. Jadi, terbukti bahwa waktu pelayanan berdistribusi eksponensial.

F. Proses Kedatangan dan Kepergian *Steady State*

Kondisi *steady state* yaitu keadaan sistem yang tidak tergantung pada keadaan awal maupun waktu yang telah dilalui. Jika suatu sistem antrian telah mencapai kondisi *steady state* maka peluang terdapat n pelanggan dalam sistem pada waktu t ($P_n(t)$) tidak tergantung pada waktu. Kondisi *steady state* terjadi ketika $\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$ dan $\lim_{t\to\infty} P_n(t) = P_n$, sehingga $P_n(t) = P_n$ untuk semua t, artinya P_n tidak tergantung pada waktu.

Proses kedatangan dan kepergian pada Subbab sebelumnya menghasilkan Persamaan (2) dan Persamaan (4). Dalam kondisi *steady state*, Persamaan (2) dan Persamaan (4) disubstitusikan dengan $\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$ dan $P_n(t) = P_n$, sehingga diperoleh

$$0 = \begin{cases} \lambda_{n-1}P_{n-1} - (\lambda_n + \mu_n)P_n + \mu_{n+1}P_{n+1}, & n > 0 \\ -\lambda_n P_n + \mu_{n+1}P_{n+1}, & n = 0 \end{cases} \text{ atau } \begin{cases} P_{n+1} = \frac{(\lambda_n + \mu_n)}{\mu_{n+1}}P_n - \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_{n+1}}P_{n-1}, \ n > 0 \\ P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}P_0 \end{cases} \quad (40)$$

Untuk n = 1, maka $P_2 = \frac{(\lambda_1 + \mu_1)}{\mu_2}P_1 - \frac{\lambda_0}{\mu_2}P_0$ (41)

Selanjutnya Persamaan (40) dengan n = 0 disubstitusikan ke Persamaan (41), sehingga diperoleh

$$P_2 = \frac{(\lambda_1 + \mu_1)}{\mu_2}\frac{\lambda_0}{\mu_1}P_0 - \frac{\lambda_0}{\mu_2}P_0 = \frac{\lambda_1\lambda_0 + \mu_1\lambda_0}{\mu_2\mu_1}P_0 - \frac{\lambda_0}{\mu_2}P_0 = \frac{\lambda_1\lambda_0}{\mu_2\mu_1}P_0 \quad (42)$$

Untuk n = 2, maka $P_3 = \frac{(\lambda_2 + \mu_2)}{\mu_3}P_2 - \frac{\lambda_1}{\mu_3}P_1$ (43)

Jika Persamaan (42) dan Persamaan (40) dengan n = 0 disubstitusikan ke Persamaan (43), diperoleh

$$P_3 = \frac{\lambda_2 + \mu_2}{\mu_3}\frac{\lambda_1\lambda_0}{\mu_2\mu_1}P_0 - \frac{\lambda_1}{\mu_3}\frac{\lambda_0}{\mu_1}P_0 = \frac{\lambda_2\lambda_1\lambda_0 + \mu_2\lambda_1\lambda_0}{\mu_3\mu_2\mu_1}P_0 - \frac{\lambda_1\lambda_0}{\mu_3\mu_1}P_0 = \frac{\lambda_2\lambda_1\lambda_0}{\mu_3\mu_2\mu_1}P_0 \quad (44)$$

Akan dibuktikan menggunakan induksi matematika bahwa peluang terdapat n pelanggan dalam keadaan *steady state* $P_n(t)$ adalah sebagai berikut.

$$P_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2} \cdots \lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1} \cdots \mu_1}P_0 = P_0\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \quad (45)$$

Langkah-langkah pembuktian dari Persamaan (45) adalah sebagai berikut.

1. Telah dibuktikan pada Persamaan (42) bahwa Persamaan (45) berlaku untuk n = 1.
2. Diasumsikan bahwa untuk $n = k$, maka $P_{k+1} = \frac{\lambda_k\lambda_{k-1} \cdots \lambda_0}{\mu_{k+1}\mu_k \cdots \mu_1}P_0$.
3. Akan dibuktikan bahwa Persamaan (45) berlaku untuk $n = k + 1$.

Berdasarkan Persamaan (40), untuk $n = k + 1$ maka

$$P_{k+2} = \frac{(\lambda_{k+1} + \mu_{k+1})}{\mu_{k+2}}P_{k+1} - \frac{\lambda_k}{\mu_{k+2}}P_k = \frac{(\lambda_{k+1} + \mu_{k+1})}{\mu_{k+2}}\frac{\lambda_k\lambda_{k-1} \cdots \lambda_0}{\mu_{k+1}\mu_k \cdots \mu_1}P_0 - \frac{\lambda_k}{\mu_{k+2}}\frac{\lambda_{k-1}\lambda_{k-2} \cdots \lambda_0}{\mu_k\mu_{k-1} \cdots \mu_1}P_0$$

$$= \frac{\lambda_{k+1}\lambda_k\lambda_{k-1} \cdots \lambda_0 + \mu_{k+1}\lambda_k\lambda_{k-1} \cdots \lambda_0}{\mu_{k+2}\mu_{k+1}\mu_k \cdots \mu_1}P_0 - \frac{\lambda_k\lambda_{k-1}\lambda_{k-2} \cdots \lambda_0}{\mu_{k+2}\mu_k\mu_{k-1} \cdots \mu_1}P_0 = \frac{\lambda_{k+1}\lambda_k\lambda_{k-1} \cdots \lambda_0}{\mu_{k+2}\mu_{k+1}\mu_k \cdots \mu_1}P_0$$

Terbukti Persamaan (45) berlaku untuk $n = k + 1$. Jadi, Persamaan (45) menyatakan peluang terdapat n pelanggan dalam keadaan *steady state* (P_n), $n > 0$.

Selanjutnya akan dicari P_0 yang merupakan peluang *steady state* terdapat nol pelanggan dalam suatu sistem antrian.

Berdasarkan Definisi 2, $P(S) = 1$, dengan S adalah jumlah total suatu peluang. Dapat ditulis $\sum_{n=0}^{\infty}P_n = 1$, sehingga $\sum_{n=0}^{\infty}P_n = 1 = P_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2} \cdots \lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1} \cdots \mu_1}P_0$

Dengan demikian, diperoleh $P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2} \cdots \lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1} \cdots \mu_1}}$ (46)

Jadi, probabilitas terdapat n pelanggan dalam keadaan *steady state* (P_n), $n > 0$ adalah

$$P_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2} \cdots \lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1} \cdots \mu_1}P_0 = P_0\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} \text{ dengan } P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2} \cdots \lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1} \cdots \mu_1}} \quad (47)$$

G. Model Antrian $(M/M/c):(FCFS/\infty/\infty)$

Model Antrian $(M/M/c):(FCFS/\infty/\infty)$ merupakan salah satu model antrian yang penotasiannya berdasarkan pada notasi Kendall-Lee. Pada model antrian ini, M menyatakan kedatangan dan kepergian berdistribusi Poisson, ekuivalen dengan waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan berdistribusi eksponensial, c menyatakan jumlah *channel* pelayanan, disiplin pelayanan FCFS, kapasitas sistem tak terbatas, dan ukuran sumber pemanggilan tak terbatas.

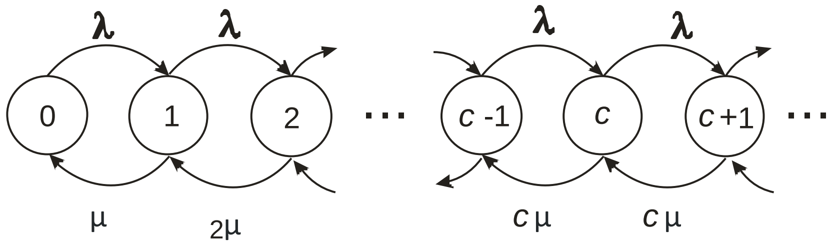
Model antrian $(M/M/c):(FCFS/\infty/\infty)$ mempunyai kedatangan berdistribusi Poisson dan waktu pelayanan berdistribusi eksponensial. Oleh karena itu, proses dalam sistem ini sesuai dengan proses kelahiran dan kematian (*birth death processes*) yang telah dibahas pada Subbab sebelumnya. Sehingga $\lambda_n = \lambda,\ \forall n \geq 0$, artinya laju kedatangan selalu konstan dan tidak tergantung pada banyaknya pelanggan yang berada dalam sistem.

Jumlah *channel* pelayanan pada sistem antrian $(M/M/c):(FCFS/\infty/\infty)$ adalah c pelayan. Jika jumlah pelanggan yang berada dalam sistem adalah n ($n \geq c$) maka sebanyak c pelayan berada dalam kondisi sibuk dengan laju pelayanan per pelayan adalah μ. Sehingga laju pelayanan rata-rata seluruh pelayan $\mu_T = c\mu$. Namun, jika jumlah pelanggan yang berada dalam sistem adalah sebanyak n ($n \leq c$) maka sebanyak n ($n \leq c$) pelayan berada dalam kondisi sibuk. Sehingga laju pelayanan rata-rata seluruh pelayan adalah $\mu_T = n\mu$. Secara umum dapat ditulis sebagai berikut.

$$\lambda_n = \lambda,\ \forall n \geq 0 \tag{48}$$

$$\mu_T = \begin{cases} c\mu, & 0 \leq n \leq c \\ n\mu, & n \geq c \end{cases} \tag{49}$$

Berdasarkan Persamaan (48) dan Persamaan (49), proses kedatangan dan kepergian pada model antrian $(M/M/c):(FCFS/\infty/\infty)$ dapat disajikan pada Gambar 7.



Gambar 7 Proses kedatangan dan kepergian pada model $(M/M/c):(FCFS/\infty/\infty)$

Probabilitas terdapat n pelanggan dalam sistem antrian sederhana pada keadaan *steady state* menghasilkan Persamaan (45) dan Persamaan (46). Pada model antrian $(M/M/c):(FCFS/\infty/\infty)$, probabilitas *steady state* terdapat n, $n > 0$ pelanggan dapat diperoleh dengan mensubstitusikan Persamaan (48) dan Persamaan .49) ke Persamaan (45), maka

Untuk $0 < n \leq c$, diperoleh

$$P_n = P_0 \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\frac{\lambda_1}{\mu_2} \ \cdots\ \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} P_0 = \frac{\lambda}{\mu}\frac{\lambda}{2\mu} \ \cdots\ \frac{\lambda}{n\mu} P_0 = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \tag{50}$$

untuk $n \geq c$, diperoleh $P_n = P_0 \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} = \underbrace{\frac{\lambda_0}{\mu_1}\frac{\lambda_1}{\mu_2} \ \cdots\ \frac{\lambda_{c-1}}{\mu_c}}_{\mu_T = n\mu} \underbrace{\frac{\lambda_c}{\mu_{c+1}}\frac{\lambda_{c+1}}{\mu_{c+2}} \ \cdots\ \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}}_{\mu_T = c\mu} P_0$

$$= \frac{\lambda}{\mu}\frac{\lambda}{2\mu} \ \cdots\ \frac{\lambda}{c\mu}\underbrace{\frac{\lambda}{c\mu}\frac{\lambda}{c\mu} \ \cdots\ \frac{\lambda}{c\mu}}_{\text{sebanyak } (n-c)} P_0 = \frac{1}{c!c^{n-c}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \tag{51}$$

P_0 yang merupakan probabilitas terdapat nol pelanggan dalam keadaan *steady state* dapat diperoleh dengan mensubstitusikan Persamaan (48) dan Persamaan (49) ke Persamaan (46).

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2} \ \cdots\ \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \ \cdots\ \mu_1}} = \left[1 + \sum_{n=1}^{c-1} \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2} \ \cdots\ \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \ \cdots\ \mu_1} + \sum_{n=c}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2} \ \cdots\ \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \ \cdots\ \mu_1}\right]^{-1}$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=c}^{\infty} \frac{1}{c!c^{n-c}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]^{-1}$$

Misal, $\frac{\lambda}{\mu} = \rho$, maka $P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \sum_{n=c}^{\infty} \frac{\rho^n}{c!c^{n-c}}\right]^{-1} = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!}\sum_{n=c}^{\infty}\left(\frac{\rho}{c}\right)^{n-c}\right]^{-1}$ (52)

Berdasarkan Definisi 8, Persamaan (52) menjadi $P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!\left(1 - \frac{\rho}{c}\right)}\right]^{-1}$ dengan $\frac{\rho}{c} < 1$ (53)

Berdasarkan uraian di atas, dapat disimpulkan bahwa probabilitas *steady state* terdapat n ($n > 0$) pelanggan pada model antrian $(M/M/c):(FCFS/\infty/\infty)$ adalah

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0, \; 0 < n \le c \\ \dfrac{1}{c!c^{n-c}}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0, \; n \ge c \end{cases} \tag{54}$$

$$\text{Dengan } P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1}\frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!\left(1-\dfrac{\rho}{c}\right)}\right]^{-1}, \; \frac{\rho}{c} < 1 \tag{55}$$

Probabilitas dalam keadaan *steady state* ini akan digunakan dalam menentukan ukuran keefektifan sistem.

H. Ukuran Keefektifan Model Antrian $(M/M/c):(FCFS/\infty/\infty)$

Definisi 2.10. Jika $S(x)$ adalah jumlah sebuah deret pangkat pada interval I = $\{x \mid -1 < x < 1\}$ sehingga $S(x)$ = $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ = 1 + x + x^2 + x^3 + . . . dengan x berada pada interval I tersebut, maka berlaku $\dfrac{dS(x)}{dx} = \dfrac{d\sum_{n=0}^{\infty} x^n}{dx}$ = $\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}$ = $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$

Definisi 2.11. Banyaknya pelanggan dalam sistem antrian adalah hasil penjumlahan antara banyaknya pelanggan dalam antrian dan banyaknya pelanggan yang sedang dalam proses pelayanan.

Definisi 2.12. Waktu menunggu dalam sistem antrian adalah jumlah antara waktu menunggu dalam antrian dan waktu pelayanan.

Ukuran keefektifan sistem antrian $(M/M/c):(FCFS/\infty/\infty)$ dapat ditentukan dengan menggunakan probabilitas *steady state* terdapat n, $n \ge 0$ pelanggan yang berada dalam sistem (P_n) pada Persamaan (54) dan Persamaan (55). Ukuran keefektifan sistem ini digunakan untuk menganalisis situasi sistem antrian dengan tujuan untuk merancang sistem yang optimal. Ukuran keefektifan sistem dalam kondisi *steady state* meliputi ekspektasi jumlah pelanggan dalam antrian (L_q), ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem (L_s), ekspektasi waktu menunggu dalam antrian (W_q), ekspektasi waktu menunggu dalam sistem (W_s), dan ekspektasi jumlah pelayan yang sibuk $(\bar{c})$.

1. Ekspektasi jumlah pelanggan dalam antrian (L_q)

Berdasarkan Definisi 11, banyaknya pelanggan dalam antrian adalah selisih antara banyaknya pelanggan dalam sistem antrian dan banyaknya pelanggan yang sedang dalam proses pelayanan. Jika banyaknya pelanggan dalam sistem adalah n dan banyaknya pelanggan yang sedang dalam proses pelayanan adalah sebanyak jumlah pelayannya, yaitu c maka ekspektasi jumlah pelanggan dalam antrian (L_q) adalah sebagai berikut.

$$L_q = \sum_{n=0}^{\infty} nP_{n+c} = \sum_{n=c}^{\infty}(n-c)P_n \tag{56}$$

Jika Persamaan (54) disubstitusikan ke Persamaan (56) maka diperoleh

$$\begin{aligned} L_q &= \sum_{n=c}^{\infty}(n-c)\frac{1}{c!c^{n-c}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = \frac{\rho^c P_0}{c!}\sum_{n=c}^{\infty}(n-c)\left(\frac{\rho}{c}\right)^{n-c} \\ &= \frac{\rho^{c+1}P_0}{c!c}\sum_{n=c}^{\infty}(n-c)\left(\frac{\rho}{c}\right)^{n-c-1} = \frac{\rho^{c+1}P_0}{c!c}\frac{d}{d\left(\dfrac{\rho}{c}\right)}\sum_{n=c}^{\infty}\left(\frac{\rho}{c}\right)^{n-c} \end{aligned} \tag{57}$$

Menurut Definisi 8, Persamaan (57) menjadi

$$L_q = \frac{\rho^{c+1}P_0}{c!c}\frac{d}{d\left(\dfrac{\rho}{c}\right)}\left(\frac{1}{1-\dfrac{\rho}{c}}\right), \; \frac{\rho}{c} < 1 = \frac{\rho^{c+1}P_0}{c!c}\frac{1}{\left(1-\dfrac{\rho}{c}\right)^2} = \frac{\rho^{c+1}}{(c-1)!c^2}\frac{c^2}{(c-\rho)^2}P_0$$

Dengan demikian, ekspektasi jumlah pelanggan dalam antrian (L_q) adalah

$$L_q = \frac{\rho^{c+1} P_0}{(c-1)!(c-\rho)^2}, \text{ dengan } \rho = \frac{\lambda}{\mu} \tag{58}$$

2. Ekspektasi waktu menunggu dalam antrian (W_q)

Sebelum membahas lebih lanjut, berikut diberikan rumus Little yang menyatakan hubungan antara L_s dan W_s serta L_q dan W_q.

$$L_s = \lambda_{\text{eff}} W_s \tag{59}$$

$$L_q = \lambda_{\text{eff}} W_q \tag{60}$$

dengan λ_{eff} merupakan laju kedatangan efektif dalam sistem dan dinyatakan dengan

$$\lambda_{\text{eff}} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n \tag{61}$$

Waktu menunggu dalam suatu antrian artinya waktu yang diperlukan oleh seorang pelanggan sejak memasuki antrian hingga mendapat pelayanan, namun tidak termasuk waktu pelayanan. Ekspektasi waktu menunggu dapat ditentukan dengan menggunakan rumus Little pada Persamaan (59).

Berdasarkan Persamaan (48), pada model antrian $(M/M/c):(FCFS/\infty/\infty)$ berlaku $\lambda_n = \lambda$, $\forall n \geq 0$, sehingga diperoleh laju kedatangan efektif sebagai berikut.

$$\lambda_{\text{eff}} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n P_n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda P_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} P_n = \lambda.1 = \lambda \tag{62}$$

Sehingga, Persamaan (59) menjadi $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda}$ (63)

Jika Persamaan (58) disubstitusikan ke Persamaan (63) maka didapatkan ekspektasi waktu menunggu dalam antrian sebagai berikut.

$$W_q = \frac{\dfrac{\rho^{c+1} P_0}{(c-1)!(c-\rho)^2}}{\lambda} = \frac{\rho^c P_0}{(c-1)!\,\mu(c-\rho)^2}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} \tag{64}$$

3. Ekspektasi waktu menunggu dalam sistem (W_s)

Waktu menunggu dalam sistem antrian artinya waktu yang diperlukan oleh seorang pelanggan sejak memasuki antrian hingga pelayanan yang diberikan kepadanya selesai. Berdasarkan Definisi 12, dapat dinyatakan persamaan berikut.

Waktu menunggu dalam sistem	=	waktu menunggu dalam antrian	+	waktu pelayanan

Jika laju pelayanan per satuan waktu adalah μ maka waktu pelayanan untuk seorang pelanggan adalah $\dfrac{1}{\mu}$ satuan waktu. Sehingga persamaan di atas menjadi

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} \tag{65}$$

Selanjutnya Persamaan (64) disubstitusikan ke Persamaan (65), maka diperoleh ekspektasi waktu menunggu dalam sistem antrian sebagai berikut.

$$W_s = \frac{\rho^c P_0}{(c-1)!\,\mu(c-\rho)^2} + \frac{1}{\mu}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} \tag{66}$$

4. Ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem (L_s)

Berdasarkan Definisi 11, banyaknya pelanggan dalam sistem artinya hasil penjumlahan antara banyaknya pelanggan dalam antrian dan banyaknya pelanggan yang sedang dalam proses pelayanan. Ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem dapat ditentukan dengan menggunakan rumus Little pada Persamaan (60).

Berdasarkan Persamaan (62), diperoleh $L_s = \lambda W_s$ (67)

Jika Persamaan (66) disubstitusikan ke Persamaan (67) maka diperoleh ekspektasi jumlah pelanggan dalam sistem sebagai berikut.

$$L_s = \lambda\left(\frac{\rho^c P_0}{(c-1)!\,\mu(c-\rho)^2} + \frac{1}{\mu}\right) = \frac{\lambda\rho^c P_0}{(c-1)!\,\mu(c-\rho)^2} + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$= \frac{\frac{\lambda}{\mu}\rho^c P_0}{(c-1)!\left(c-\rho\right)^2} + \frac{\lambda}{\mu} = \rho + \frac{\rho^{c+1}P_0}{(c-1)!\left(c-\rho\right)^2}, \ \rho = \frac{\lambda}{\mu} \tag{68}$$

Jika Persamaan (58) disubtitusi ke Persamaan (68) maka diperoleh hubungan antara L_q dan L_s sebagai berikut, $L_s = \rho + L_q,\ \rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ (69)

5. Ekspektasi jumlah pelayan yang sibuk $(\bar{c})$

Banyaknya pelayan yang sibuk adalah selisih antara banyaknya pelanggan yang berada dalam sistem dan banyaknya pelanggan yang berada dalam antrian. Dengan demikian, banyaknya pelayan yang sibuk adalah

$$\bar{c} = L_s - L_q \tag{70}$$

Jika Persamaan (69) disubstitusikan ke Persamaan (70) maka diperoleh $\bar{c} = \rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ (71)

Sedangkan persentase pemanfaatan suatu sarana pelayanan dengan *c channel* pelayanan adalah sebagai berikut.

$$\text{Persentase pemanfaatan} = \frac{\bar{c}}{c}\times 100\% = \frac{\lambda}{\mu c}\times 100\% \tag{72}$$

Jika ekspektasi jumlah pelayan yang sibuk dinyatakan dengan Persamaan (71) maka ekspektasi jumlah pelayan yang menganggur atau tidak sedang melayani pelanggan adalah banyaknya pelayan dikurangi jumlah pelayan yang sibuk dan dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\text{Pelayan yang menganggur (kosong)} = c - \bar{c} = c - \frac{\lambda}{\mu} \tag{73}$$

Akibatnya, persentase waktu kosong para pelayan atau sarana pelayanan yakni sebagai berikut.

$$X = \frac{c-\bar{c}}{c}\times 100\% = \frac{c-\frac{\lambda}{\mu}}{c}\times 100\% = \left(1-\frac{\lambda}{c\mu}\right)\times 100\% = \left(1-\frac{\rho}{c}\right)\times 100\%, \text{ dengan } \rho = \frac{\lambda}{\mu} \tag{74}$$

I. Model Tingkat Aspirasi

Model keputusan antrian merupakan suatu model yang bertujuan meminimumkan biaya total yang berkaitan dengan suatu sistem antrian. Oleh karena itu, keputusan yang diambil melalui model keputusan ini diharapkan dapat diterapkan dan mampu mengoptimalkan sistem antrian tersebut.

Sifat dari situasi antrian mempengaruhi pemilihan model keputusan yang akan digunakan. Oleh karena itu, situasi antrian dapat digolongkan ke dalam tiga kategori berikut.

1. Sistem manusia, yaitu sistem antrian yang pelanggan dan pelayannya manusia. Misalnya: sistem antrian di Bank.
2. Sistem semiotomatis, yaitu sistem antrian yang pelanggan atau pelayannya manusia. Misalnya: sistem pelayanan ATM (*Automatic Teller Machine*), dengan pelanggan manusia dan pelayan berupa ATM.
3. Sistem otomatis, yaitu sistem antrian yang pelanggan dan pelayannya bukan manusia. Misalnya: data yang menunggu diolah oleh suatu program komputer, dengan pelanggan berupa data dan pelayan berupa program.

Ada dua macam model keputusan antrian yang dapat digunakan untuk mengoptimalkan suatu sistem antrian, yaitu model biaya dan model tingkat aspirasi. Model biaya dapat dipilih untuk mengoptimalkan sistem dengan memperkirakan parameter-parameter biaya terlebih dahulu. Semakin tepat penentuan parameter-parameter biaya, semakin optimal rancangan sarana pelayanan yang dihasilkan. Namun, tidak semua parameter biaya dalam sistem antrian dapat diperkirakan dengan mudah, misalnya biaya menunggu pelanggan pada suatu bank.

Model tingkat aspirasi merupakan suatu model yang bertujuan menyeimbangkan aspirasi pelanggan dan pelayan dalam suatu sistem antrian. Model ini secara langsung memanfaatkan karakteristik yang terdapat dalam sistem dengan tujuan merancang sistem antrian yang optimal. Optimalitas dicapai jika tingkat aspirasi pelanggan dan pelayan dipenuhi. Tingkat aspirasi yaitu batas atas dari nilai-nilai yang saling bertentangan, yang ditentukan oleh pengambil keputusan.

Penerapan model tingkat aspirasi untuk menentukan jumlah pelayan *c* yang optimum memiliki dua parameter yang bertentangan yaitu:

1. ekspektasi waktu menunggu dalam sistem (W_s), sebagai aspirasi pelanggan,
2. persentase waktu kosong para pelayan (X), sebagai aspirasi pelayan.

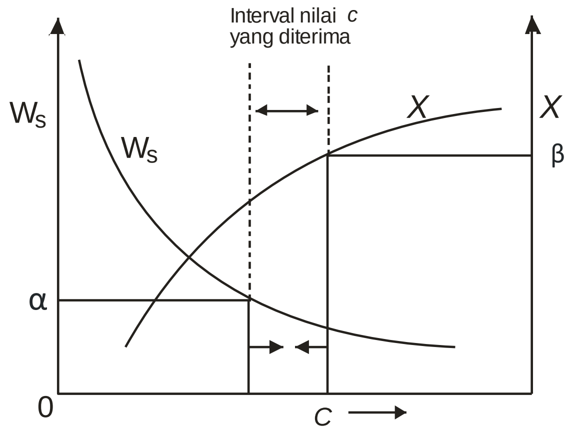
Berdasarkan parameter W_s dan X yang saling bertentangan, jumlah pelayan c telah optimum jika memenuhi persyaratan berikut.

$$W_s \leq \alpha \tag{75}$$

dan $$X \leq \beta \tag{76}$$

Dengan α : batas atas dari W_s
β : batas atas dari X

Penyelesaian masalah ini juga dapat ditentukan dengan cara menggambar W_s dan X sebagai fungsi dari c seperti ditunjukkan pada Gambar 8.



Gambar 8 Interval nilai c yang diterima

Dengan menempatkan α dan β pada grafik, dapat ditentukan kisaran c optimal yang memenuhi kedua batasan tersebut. Jika Persamaan (75) dan Persamaan (76) tidak dipenuhi secara simultan maka salah satu atau kedua batasan perlu dilonggarkan sebelum keputusan diambil.

Teori Pendukung

Akan dicari peluang terdapat n pelanggan dalam suatu sistem antrian pada saat t. Namun sebelumnya, diberikan beberapa definisi yang akan digunakan pada pembahasan selanjutnya.

Definisi 1. Kejadian $A_1, A_2, ..., A_k$ dikatakan kejadian-kejadian yang saling asing jika $A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j$.

Definisi 2. Pada sebuah percobaan, $A_1, A_2, A_3, ...$ adalah kejadian-kejadian yang mungkin pada ruang sampel S. Fungsi peluang merupakan fungsi yang mengawankan setiap kejadian A dengan bilangan real $P(A)$ dan $P(A)$ disebut peluang kejadian A jika memenuhi ketentuan berikut. $P(A) \geq 0$; 2. $P(S) = 1$; 3. Jika A_1, A_2, A_3, ... adalah kejadian-kejadian yang saling asing maka $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ...) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + ...$

Definisi 3. Kejadian A dan B dikatakan saling bebas jika dan hanya jika $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Jika kejadian A dan B tidak memenuhi kondisi tersebut maka disebut kejadian bergantung.

Definisi 4. Suatu variabel acak diskret T dikatakan berdistribusi Poisson dengan parameter $\lambda > 0$ jika mempunyai fungsi densitas peluang berbentuk $P(T = k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, dengan $k \geq 0$.

Definisi 5. Suatu variabel acak kontinu T dikatakan berdistribusi eksponensial dengan parameter $\lambda > 0$ jika mempunyai fungsi densitas peluang berbentuk

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & (t \geq 0) \\ 0, & (t < 0) \end{cases}.$$

Definisi 6. Suatu variabel acak kontinu T berdistribusi eksponensial dengan parameter $\lambda > 0$ jika fungsi distribusi kumulatifnya yaitu

$$P(T \leq t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}.$$

Definisi 7. Turunan fungsi f adalah fungsi f' yang nilainya pada sebarang bilangan t adalah

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$, asal nilai limitnya ada.

Definisi 8. Jika $0 < x < 1$ maka $\sum_{n=1}^{\infty} ax^{n-1} = \dfrac{a}{1-x}$, dengan $n \neq 0$.

Definisi 9. Persamaan differensial orde I yang dapat dinyatakan sebagai $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ disebut persamaan differensial linear dan mempunyai penyelesaian:

$$y = ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx.$$