Dual Pada Masalah Maksimum Baku

Setiap masalah program linear terkait dengan masalah dualnya. Kita mulai dengan motivasi masalah ekonomi terhadap dual masalah maksimum baku.

Sebuah industri rumah tangga mempunyai persediaan bahan biji kopi sebanyak m jenis yang berlainan dan masing-masing beratnya b_i kg untuk setiap jenis biji kopi ke_i dengan $i = 1, 2, \ldots, m$. Industri itu memproduksi n macam kopi-campur yang berlainan untuk dijual kepada pengecer. Untuk setiap 1 kg kopi-campur macam ke_j memerlukan a_{ij} kg jenis biji ke i, dan dapat dijual dengan harga c_j rupiah. Industri itu ingin memaksimalkan pendapatan R dari pengecer kopi ini.

Persediaan

Jenis Biji Kopi	1	2	…	m
Persediaan (kg)	b_1	b_2	…	b_m
Harga (Rp)	y_1	y_2	…	y_m

Produksi (setiap kg)

Macam kopi-campur	1	2	…	**n**
Bahan b_1	a_{11} (kg)	a_{12}(kg)	…	a_{1n}(kg)
b_2	a_{21}(kg)	a_{22}(kg)	…	a_{2n}(kg)
…	…	…	…	…
b_m	a_{m1}(kg)	a_{m2}(kg)	…	a_{mn} (kg)
Harga per kg kopi-campur	c_1	c_2	…	c_n

Misalkan x_j adalah berat kopi-campur macam ke_j. Industri itu ingin *memaksimumkan*

$$R = c \,.\, x = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n.$$

terhadap kendala-kendala

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m,$$

dengan kata lain, kendala-kendala itu adalah $Ax \le b$, di mana $A = (a_{ij})$ adalah matriks berordo $m\times n$ dan $x \ge 0$. Kita namakan masalah program linear ini sebagai masalah *primal*:

$$\textit{memaksimumkan } c.x \quad \text{terhadap} \quad Ax \le b, \quad \text{di mana } x \ge 0$$

(1)

Masalah *dual* muncul jika pada industri itu kita memandang harga setiap 1 kg jenis biji kopi ke_i, $y_i \ge 0$. Nilai total cadangan biji kopi menjadi

$$V = b.y = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \tag{2}$$

Oleh karena setiap 1 kg kopi campur ke_j yang dibuat industri itu memerlukan a_{ij} kg jenis biji kopi ke_i dengan $i = 1, 2, \ldots, n$, harga biji kopi dalam setiap kg campuran macam ke_j adalah

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + .. + a_{mj}y_m \tag{3}$$

Selanjutnya kita tahu bahwa 1 kg kopi-campur macam ke_j dapat dijual kepada pengecer dengan harga c_j rupiah, sehingga kita harus mempunyai

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + .. + a_{mj}y_m \ge c_j \tag{4}$$

untuk $j = 1, 2, \ldots, m$. Ketaksamaan (4) dapat ditulis dalam bentuk

$$A^{\mathrm{T}}y \ge c \tag{5}$$

dengan $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$.

Industri itu ingin (dari alasan pajak) mencari nilai minimum untuk persediaan bahan biji-biji kopi. Yakni, industri menginginkan untuk

$$\textit{meminimalkan } b.y \quad \text{terhadap} \quad A^{\mathrm{T}}y^{\mathrm{T}} \ge c \quad \text{dengan} \quad y \ge 0 \tag{6}$$

Masalah program linear (6) disebut *dual* dari masalah program linear *primal* (1).

Misalkan R_{maks} adalah nilai optimal dari masalah (1), dan V_{min} adalah nilai optimal dari masalah (6). Oleh karena R_{maks} adalah pendapatan yang diperoleh apabila biji kopi-campur yang dijual pada pengecer sesuai dengan masalah (1), maka nilai total V paling sedikit adalah R_{maks}. Dengan kata lain $V_{\text{min}} \geq R_{\text{maks.}}$ Tetapi kita juga dapat membuktikan bahwa mempunyai $R_{\text{maks}} \leq V_{\text{min}}$.
[Bukti: R_{maks} = c.x, V_{min} = b.y dengan $Ax \leq b$, $A^T y^T \geq$ c, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Maka kita boleh melakukan dot produk: $y.Ax \leq y.b$ dan $x.A^T y^T \geq x.c$, dan akibatnya, ingat bahwa dalam (6) y adalah vektor baris, $c.x < b.y$ yaitu $R_{\text{maks}} \leq V_{\text{min}}$].
Jadi $V_{\text{min}} \geq R_{\text{maks}}$ dan $R_{\text{maks}} \leq V_{\text{min}}$ sehingga akibatnya ialah $R_{\text{maks}} = V_{\text{min}}$.

Nilai y_i yang menghasilkan nilai optimal V_{min} disebut *nilai bayangan*.

Contoh 1. Carilah masalah dual dari masalah:

Maksimumkan $P = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3$ terhadap kendala

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 25,$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 51,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Jawab. Dalam soal ini, soal aslinya kita anggap sebagai masalah primal, sehingga dari (1) kita mempunyai $c = (5, 4, 6)$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 25 \\ 51 \end{pmatrix}$.

Maka masalah dualnya, lihat (6), adalah

Meminimalkan $b.y = \begin{pmatrix} 25 \\ 51 \end{pmatrix}.(y_1, y_2) = 25y_1 + 51y_2$,

Dengan kendala $A^T y^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ dengan $y \geq 0$.

Maka kendala masalah dualnya adalah

$$y_1 + 2y_2 \geq 5,$$
$$y_1 + y_2 \geq 4,$$
$$y_1 + 3y_2 \geq 6.$$
$$y_1, y_2 \geq 0.$$

Sekarang perhatikanlah tablo awal pada masalah primal:

	c_j	5	4	6	0	0	b_i	R_i
c_i	x_i \ x_j	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2		
0	y_1	**<u>1</u>**	**<u>1</u>**	**<u>1</u>**	1	0	**<u>25</u>**	
0	y_2	**<u>2</u>**	**<u>1</u>**	**<u>1</u>**	0	1	**<u>51</u>**	
	z_j	0	0	0	0	0	0	
	$z_j - c_j$	**<u>-5</u>**	**<u>-4</u>**	**<u>-6</u>**	0	0	0	

Kemudian perhatikanlah entri-entri yang diberi garis bawah cetak tebal, dengan mengabaikan kolom-kolom pada variabel slack, maka kita memperoleh **tabel ringkas:**

	c_j	5	4	6	b_i	R_i
c_i	$x_i \backslash x_j$	x_1	x_2	x_3		
0	y_1	**1**	**1**	**1**	**25**	
0	y_2	**2**	**1**	**1**	**51**	
	z_j	0	0	0	0	
	z_j -c_j	**-5**	**-4**	**-6**	0	

Selanjutnya perhatikanlah, bahwa jika tabel ringkas dibaca *dari kiri ke kanan,* kita mempunyai data dari masalah primal. Baris terakhir menyajikan fungsi tujuan $Z = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3$. Ingatlah bahwa tanda negatif itu muncul karena kita memandang baris terakhir ini sebagai $Z - 5x_1 - 4x_2 - 6x_3 = 0$ sehingga dengan demikian baris terakhir ini merupakan entri dari fungsi tujuan. Dengan mencongak kita tukarkan tanda pada baris dan kolom terakhir pada tablo yang mana pun, dan kemudian dibaca *dari atas ke bawah* maka kita peroleh data dari masalah dualnya. Kita tempatkan *C* pada sudut kanan atas dari tablo, yang analogi dengan *Z* pada sudut kiri bawah. (Ingat, memaksimalkan berkaitan dengan laba atau *profit*, disingkat *Z*, sedangkan meminimalkan berkaitan dengan biaya atau *cost*, akronim *C*).Tabel ringkas ini memperlihatkan simetrinya masalah maksimum primal dengan masalah minimum dualnya. Ingat juga bahwa variabel nonbasis dari tablo primal adalah variabel basis dari masalah dual dan sebaliknya. Jadi membuat tablo dual mudah saja bukan?

Dual Untuk Masalah Program Linear Umum

Sekarang akan dideskripsikan pembentukan dual dari sebarang masalah program linear. Untuk itu, kita abaikan saja syarat bahwa konstanta pada ruas kanan kendala kita nonnegatif, dan kita tukarkan semua kendala bertanda ≥ dengan kendala bertanda ≤. Umpamanya,

$x_1 - x_2 \geq 5$ kita ubah menjadi $-x_1 + x_2 \leq -5$.

Seterusnya, kendala yang bertanda = kita nyatakan sebagai dua kendala ketaksamaan. Umpamanya,

$2x_1 - 3x_2 = 5$ kita sajikan dalam bentuk $2x_1 - 3x_2 \leq 5$ dan $2x_1 - 3x_2 \geq 5$.

Atau karena harus menggunakan tanda ≤, maka

$2x_1 - 3x_2 = 5$ kita sajikan dalam bentuk $2x_1 - 3x_2 \leq 5$ dan $-2x_1 + 3x_2 \leq -5$.

Dengan demikian masalah pemaksimalan dapat ditukar ke dalam bentuk

Memaksimumkan $\boldsymbol{c.x}$ dengan kendala $\boldsymbol{Ax \leq b}$ dengan $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

(7)

dan entri-entri $\boldsymbol{b}$ dapat positif, nol, atau negatif. Dengan cara sama, sebarang masalah peminimalan dapat ditulis dalam bentuk

Meminimalkan $\boldsymbol{s.y}$ dengan kendala $\boldsymbol{By} \geq \boldsymbol{d}$ dengan $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$.

(8)

Setelah menuliskan masalah program linear (7) atau (8), maka kita dapat dengan mudah menuliskan masalah *dual* sebagai berikut.

Teorema

Masalah program linear

Memaksimalkan $\boldsymbol{c.x}$ dengan kendala $\boldsymbol{Ax \leq b}$ dengan $\boldsymbol{x \geq 0}$

(9)

dan

Meminimalkan $\boldsymbol{b.y}$ dengan kendala $\boldsymbol{A^T y \geq c}$ dengan $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$

(10)

adalah *masalah dual*. Jika masalah (9) adalah primal, maka (10) adalah dualnya, dan jika masalah (10) adalah primal, maka (9) adalah primalnya.

Contoh

Minimalkan $3x_1 + 2x_2$

dengan kendala $x_1 + 2x_2 \leq 10$,

$5x_1 + x_2 \geq 10$,

$x_1 + 10x_2 \geq 20$.

$x_1, x_2 \geq 0$.

Rumuskan masalah dualnya dan kemudian selesaikanlah seperti biasanya.

Jawab: Kita tulis dulu semua kendala dalam bentuk ≤ sebagai berikut :

Minimalkan $3x_1 + 2x_2$

dengan kendala $x_1 + 2x_2 \leq 10$,

$-5x_1 - x_2 \leq -10$,

$-x_1 - 10x_2 \leq 20$.

$x_1, x_2 \geq 0$.

Maka masalah dualnya adalah

Memaksimalkan $10y_1 - 10y_2 + 20y_3$,

dengan kendala $y_1 - 5y_2 - y_3 \geq 3$,

$2y_1 - y_2 - 10y_3 \geq 2$,

$y_1, y_2 \geq 0$.

Kemudian kita bentuk tablo awal *dari soal aslinya*, seperti biasanya dengan memasukkan variabel slack, surplus dan variabel artifisial, dan kemudian disusut dengan operasi Gauss.

	c_j	3	2	0	0	0	-M	-M	b_i
c_i	$x_i \backslash x_j$	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	q_1	q_2	
0	y_1	1	2	1	0	0	0	0	10
-M	q_1	5	1	0	-1	0	1	0	10
-M	q_2	1	$\underline{10}$	0	0	-1	0	1	20
	z_j	-6M	-11M	0	M	M	-M	-M	30M
	z_j-c_j	-6M-3	-11M-2	0	M	M	0	0	30M

Dst, kita akan menggunakan kalkulator:

	c_j	3	2	0	0	0	-M	-M	b_i	R_i
c_i	$x_i \backslash x_j$	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	q_1	q_2		
0	y_1	0,8	0	1	0	0,2	0	-0,2	10	
-M	q_1	**$\underline{4{,}9}$**	0	0	-1	0,1	1	-0,1	10	
2	x_2	0,1	1	0	0	-0,1	0	0,1	20	
	z_j	-4,9M +0,2	2	0	M	-0,1M -0,2	-M	0,1M+0,2	-10M +40	
	z_j-c_j	-4,9M -2,8	0	0	M	-0,1M -0,2	0	1,1M+0,2	-10M +40	

	c_j	3	2	0	0	0	-M	-M	b_i	R_i
c_i	x_i \ x_j	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	q_1	q_2		
0	y_1	0	0	1	**0,1633**	0,1837	-0,1633	-0,1837	4,6939	
3	x_1	1	0	0	-0,2041	0,0204	0,2041	-0,0204	1,6327	
2	x_2	0	1	0	0,0204	-0,102	-0,0204	0,102	1,8367	
	z_j	3	2	0	-0,5715	-0,1428	0,5715	0,1428	8,5715	
	z_j-c_j	0	0	0	-0,5715	-0,1428	0,5715 +M	0,1428 +M	8,5715	

	c_j	3	2	0	0	0	-M	-M	b_i	R_i
c_i	x_i \ x_j	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	q_1	q_2		
0	y_2	0	0	6,125	1	1,125	-1	-1,125	28,75	
3	x_1	1	0	1,25	0	0,25	0	-0,25	7,5	
2	x_2	0	1	-0,125	0	-0,125	0	0,125	1,25	
	z_j	3	2	3,49	0	0,5	0	-0,5	25	
	z_j-c_j	0	0	3,49	0	0,5	M	-0,5+M	25	

Dari tablo terakhir ini tampaklah bahwa nilai maksimum dari fungsi tujuan pada masalah primal $3x_1 + 2x_2$ adalah 25, dicapai pada solusi layak basis $x_1 = 7{,}5$ dan $x_2 = 1{,}25$. Kita juga memperoleh nilai minimum fungsi tujuan pada masalah dual $10y_1 - 10y_2 - 20y_3$ adalah 25, dicapai pada solusi layak basis $y_1 = 3{,}5$; $y_2 = 0$, dan $y_3 = 0{,}5$. Nilai-nilai ini dapat anda baca pada baris terakhir dari kolom-kolom yang berlabel y_1, y_2, y_3.

Biasanya kita mengerjakan dengan variabel-variabel x_j sebagai variabel soal dalam tablo simpleks. Jika diketahui masalah program linear yang dinyatakan dengan variabel x_j, kita dapat mencoba menyelesaikan langsung dengan metode simpleks atau kita dapat memilih bentuk masalah dualnya dan mencoba menyelesaikan masalah dual juga dengan metode simpleks. Dalam kasus terakhir, disarankan agar masalah dual diungkapkan kembali, dengan menggunakan variabel y_i. Kemudian label dalam tablo akan dalam posisi seperti biasanya.

Dualitas menjadi sungguh berfaedah jika masalah program linear mempunyai m kendala yang besar jika dibandingkan dengan n variabelnya. Dengan memasukkan variabel slack atau surplus dalam setiap kendala, kita akan memperoleh matriks data dalam tablo awal dari masalah dualnya hanya dengan $n + 1$ baris dan lagi paling sedikit ada $n + m + 1$ kolom. Jika m lebih besar daripada n, maka penggunaan dual lebih menguntungkan.

Contoh. Minimumkan fungsi $C = 2y_1 + y_2$, terhadap kendala

$$\begin{aligned} 10y_1 + \quad y_2 &\geq 10, \\ 2y_1 + \quad y_2 &\geq 8 \\ y_1 + \quad y_2 &\geq 6, \\ y_1 + 2y_2 &\geq 10, \\ y_1 + 12y_2 &\geq 12. \end{aligned}$$

dengan $y_1, y_2 \geq 0$.

Penyelesaian. Agar kita bekerja dengan tablo yang lebih kecil, kita memilih mengerjakan dualnya. Masalah dualnya adalah:

Memaksimumkan $10x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 10x_4 + 12x_5$

dengan kendala: $10x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 2$

$x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 12x_5 \leq 1$

dengan $x_1, x_2 \geq 0$.

Kita bentuk tablo awal

	c_j	10	8	6	10	12	0	0	b_i	R_i
c_i	x_i \ x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2		
0	y_1	10	2	1	1	1	1	0	2	
0	y_2	1	1	1	2	**12**	0	1	1	
	z_j	0	0	0	0	0	0	0	0	
	z_j-c_j	-10	-8	-6	-10	-12	0	0	0	

	c_j	10	8	6	10	12	0	0	b_i	R_i
c_i	x_i \ x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2		
0	y_1	**9,9167**	1,9176	0,9167	0,8333	0	1	-0,0833	1,9167	
12	x_5	0,0833	0,0833	0,0833	0,1667	1	0	0,0833	0,0833	
	z_j	0,9996	0,9996	0,9996	2,0004	12	0	0,9996	0,9996	
	z_j-c_j	-9,0004	-7,0004	-5,0004	-7,9996	0	0	0,9996	0,9996	

	c_j	10	8	6	10	12	0	0	b_i	R_i
c_i	x_i \ x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2		
10	y_1	1	0.1579	0.0526	1	-0.5263	0.1053	-0.0526	0.1578	
12	x_5	0	**0.4211**	0.4737	0	6.2632	-0.0526	0.5263	0.4211	
	z_j	10	6,6322	6,2104	10	69,8954	0,4218	5,7896	6,6312	
	z_j-c_j	0	-1,3678	0,2104	0	57,8954	0,4218	5,7896	6,6312	

	c_j	10	8	6	10	12	0	0	b_i	R_i
c_i	x_i \ x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2		
10	x_1	1	0	-0,125	-0,38	-2,875	0,125	-0,25	0	
8	x_2	0	1	1,125	2,375	14,875	-0,125	1,25	1	
	z_j	10	8	7,75	15,2	90,25	0,25	7,5	8	
	z_j-c_j	0	0	1,75	5,2	78,25	0,25	7,5	8	

Jadi, fungsi tujuan $2y_1 + y_2$ dari masalah primal aslinya mempunyai nilai minimum 8 pada solusi layak basis $y_1 = 0,25$ dan $y_2 = 7,5$.

Perhatikanlah pada tablo tepat sebelum tablo terakhir, kita dapat memilih baris pertama sebagai baris pivot dengan 0,1579 sebagai entri pivot. Perhatikanlah bahwa rasio 0,1579/0,1579 maupun 0,4211/0,4211 menentukan pivot baris adalah 1. Dalam kasus demikian program SIMPLEKS selalu memilih calon baris pivot yang terdekat pada ujung atas. Dengan menggunakan SIMPLEKS, dapat dilihat bahwa pilihan yang lain akan menghasilkan $y_1 = 2$ dan $y_2 = 4$. Dan akan diperoleh nilai fungsi obyektif yang sama.

Jika dikerjakan soal aslinya kita akan mempunyai 13 kolom dalam tablo simpleks.

Contoh (lagi)

Maksimumkan $3x_1 + 5x_2$ terhadap kendala

$-x_1 + x_2 \leq 2$; $x_2 \leq 4$; $x_1 + 3x_2 \leq 15$;

$x_1 + 2x_2 \leq 12$; $x_1 + x_2 \leq 10$; $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

Penyelesaian. Dualnya adalah

Minimalkan $2y_1 + 4y_2 + 15y_3 + 12y_4 + 10y_5$

dengan kendala $-y_1 + 0y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \geq 2,$

$y_1 + y_2 + 3y_3 + 2y_4 + y_5 \geq 5,$

$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0.$

Tablo awal (Soal aslinya)

	c_j	3	5	0	0	0	0	0	b_i	R_i
c_i	$x_i \backslash x_j$	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5		
0	y_1	-1	1	1	0	0	0	0	2	
0	y_2	0	1	0	1	0	0	0	4	
0	y_3	1	3	0	0	1	0	0	15	
0	y_4	1	2	0	0	0	1	0	12	
0	y_5	1	1	0	0	0	0	1	10	
	z_j	0	0	0	0	0	0	0	0	
	z_j-c_j	-3	-5	0	0	0	0	0	0	

	c_j	3	5	0	0	0	0	0	b_i	R_i
c_i	$x_i \backslash x_j$	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5		
5	x_2	-1	1	1	0	0	0	0	2	
0	y_2	**1**	0	-1	1	0	0	0	2	
0	y_3	4	0	-3	0	1	0	0	9	
0	y_4	3	0	-2	0	0	1	0	8	
0	y_5	2	0	0	0	0	0	1	8	
	z_j	-5	5	5	0	0	0	0	10	
	z_j-c_j	-8	0	5	0	0	0	0	10	

	c_j	3	5	0	0	0	0	0	b_i	R_i
c_i	$x_i \backslash x_j$	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5		
5	x_2	0	1	0	1	0	0	0	4	
3	x_1	1	0	-1	1	0	0	0	2	
0	y_3	0	0	**1**	-4	1	0	0	1	
0	y_4	0	0	1	-3	0	1	0	2	
0	y_5	0	0	1	-2	0	0	1	4	
	z_j	3	5	-3	8	0	0	0	26	
	z_j-c_j	0	0	-3	8	0	0	0	26	

	c_j	3	5	0	0	0	0	0	b_i	R_i
c_i	x_i \ x_j	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5		
5	x_2	0	1	0	1	0	0	0	4	
3	x_1	1	0	0	-3	1	0	0	3	
0	y_1	0	0	1	-4	1	0	0	1	
0	y_4	0	0	0	**1**	-1	1	0	1	
0	y_5	0	0	0	2	-1	0	1	3	
	z_j	3	5	0	-4	3	0	0	29	
	z_j-c_j	0	0	0	-4	3	0	0	29	

	c_j	3	5	0	0	0	0	0	b_i	R_i
c_i	x_i \ x_j	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5		
5	x_2	0	1	0	0	1	-1	0	3	
3	x_1	1	0	0	0	-2	3	0	6	
0	y_1	0	0	1	0	-3	4	0	5	
0	y_2	0	0	0	1	-1	1	0	1	
0	y_5	0	0	0	0	**1**	-2	1	1	
	z_j	3	5	0	0	-1	4	0	33	
	z_j-c_j	0	0	0	0	-1	4	0	33	

	c_j	3	5	0	0	0	0	0	b_i	R_i
c_i	x_i \ x_j	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5		
5	x_2	0	1	0	0	0	1	-1	2	
3	x_1	1	0	0	0	0	-1	2	8	
0	y_1	0	0	1	0	0	-2	3	8	
0	y_2	0	0	0	1	0	-1	1	2	
0	y_3	0	0	0	0	1	-2	1	1	
	z_j	3	5	0	0	0	2	1	34	
	z_j-c_j	0	0	0	0	0	2	1	34	

Jadi maksimum dari $3x_1 + 5x_2 = 26$ tercapai pada $x_1 = 8$ dan $x_2 = 2$. Minimum dari $2y_1 + 4y_2 + 15y_3 + 12y_4 + 10y_5$ diperoleh solusi layak yang dapat dibaca dari atas ke bawah: $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, $y_4 = 2$, dan $y_5 = 1$ sehingga $2y_1 + 4y_2 + 15y_3 + 12y_4 + 10y_5 = 0 + 0 + 0 + 24 + 10 = 34$, cocok dengan tabel terakhir dan teorema dual.

Teori Metode Simpleks

Diasumsikan masalah PL mempunyai m ketaksamaan dan n variabel, dengan m ketaksamaan tersebut merupakan kendala yang bebas linear. Masalah PL bentuk kanonik memaksimumkan $P = \bar{c}^T \bar{x}$ terhadap kendala $A\bar{x} = \bar{b}$, $\bar{x} \geq 0$.

Jika $\bar{x}$ adalah solusi layak basis dengan variabel terurut $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{bmatrix}$

dengan $\bar{x}_B$ adalah vektor variabel basis, dan

$\bar{x}_N$ adalah vektor variabel non basis (yang bernilai nol).

Akibatnya vektor biaya $\bar{c}^T$ dalam variabel terurut menjadi $\bar{c}^T = [\bar{c}_B \quad \bar{c}_N]^T$

dengan $\bar{c}_B$ adalah vektor biaya variabel basis $\bar{x}_B$,

$\bar{c}_N$ adalah vektor biaya variabel non basis $\bar{x}_N$.

Sehingga fungsi tujuan P yaitu

$$P = \bar{c}^T \bar{x} = [\bar{c}_B \quad \bar{c}_N]^T \begin{bmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{bmatrix} = \bar{c}_B^T \bar{x}_B + \bar{c}_N^T \bar{x}_N .$$

Matriks diperluas A yaitu matriks koefisien dari variabel asli (soal) dan variabel tambahan (slack, surplus, atifiasial), dalam variabel terurutnya menjadi

$A\bar{x} = \bar{b}$, dengan $A = [B \quad N]$.

B adalah matriks koefisien variabel-variabel basis berordo $m \times m$.

A matriks berordo $m \times (m+n)$.

N matriks koefisien variabel-variabel non basis berordo $m \times n$.

Matriks B invertibel sebab B matriks basis, jadi B^{-1} ada, sehingga kendala

$A\bar{x} = \bar{b}$, dengan $A = [B \quad N]$, maka kendala menjadi

$[B \quad N] \begin{bmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{bmatrix} = \bar{b}$ atau

$B\bar{x}_B + N\bar{x}_N = \bar{b}$, karena B^{-1} ada

maka $B^{-1}(B\bar{x}_B + N\bar{x}_N) = B^{-1}\bar{b}$ atau

$B^{-1}B\bar{x}_B + B^{-1}N\bar{x}_N = B^{-1}\bar{b}$,

$I\bar{x}_B + B^{-1}N\bar{x}_N = B^{-1}\bar{b}$, sehingga

$\bar{x}_B + B^{-1}N\bar{x}_N = B^{-1}\bar{b}$.

Karena $P = \bar{c}_B^T \bar{x}_B + \bar{c}_N^T \bar{x}_N$, jika $\bar{x}_B = B^{-1}\bar{b} - B^{-1}N\bar{x}_N$ ....(1)

maka

$$P = \bar{c}_B^T (B^{-1}\bar{b} - B^{-1}\bar{c}_N^T \bar{x}_N) + \bar{c}_N^T \bar{x}_N$$

$$= \bar{c}_B^T B^{-1}\bar{b} + (\bar{c}_N^T - B^{-1}\bar{c}_N^T)\bar{x}_N$$ ....(2)

Karena $\bar{x}_N$ variabel non basis maka $\bar{x}_N$ =0.

Sehingga (1) menjadi

$\bar{x}_B = B^{-1}\bar{b}$, yaitu menjadi p.l.b dan akibatnya (2) yaitu fungsi tujuan

$P = \bar{c}_B^T B^{-1}\bar{b}$, menjadi nilai optimal fungsi tujuan.

Dengan Tabel Simpleks

$\left[\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline -c^T & 0 \end{array}\right]$ dalam bentuk terurut atau kanonik adalah $\left[\begin{array}{cc|c} B & N & b \\ \hline -\bar{c}_B^T & -\bar{c}_N^T & 0 \end{array}\right]$, karena B^{-1} ada maka $\left[\begin{array}{cc|c} B^{-1}B & B^{-1}N & B^{-1}\bar{b} \\ \hline -\bar{c}_B^T & -\bar{c}_N^T & 0 \end{array}\right]$ atau $\left[\begin{array}{cc|c} I & B^{-1}N & B^{-1}b \\ \hline -\bar{c}_B^T & -\bar{c}_N^T & 0 \end{array}\right]$ dengan OBE $R_2' = R_2 + \bar{c}_B^T R_1$ diperoleh $\left[\begin{array}{cc|c} I & B^{-1}N & B^{-1}\bar{b} \\ \hline 0 & -\bar{c}_N^T + \bar{c}_B^T B^{-1}N & \bar{c}_B^T B^{-1}b \end{array}\right]$.

Tabel dikatakan optimal jika $-\bar{c}_N^T + \bar{c}_B^T B^{-1} N \geq 0$. Nilai optimum $P = \bar{c}_B^T B^{-1} b$ dengan p.l.b $\bar{x}_B = B^{-1}\bar{b}$.