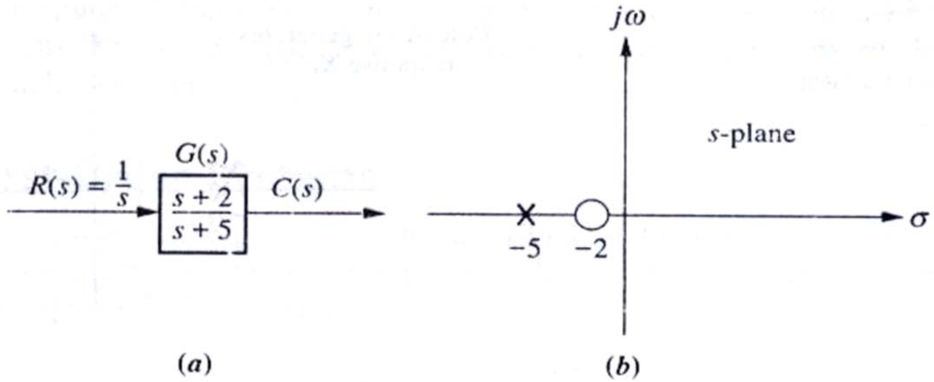
Analisa Kestabilan Sistem

Dr. Fatchul Arifin, MT.
fatchul@uny.ac.id

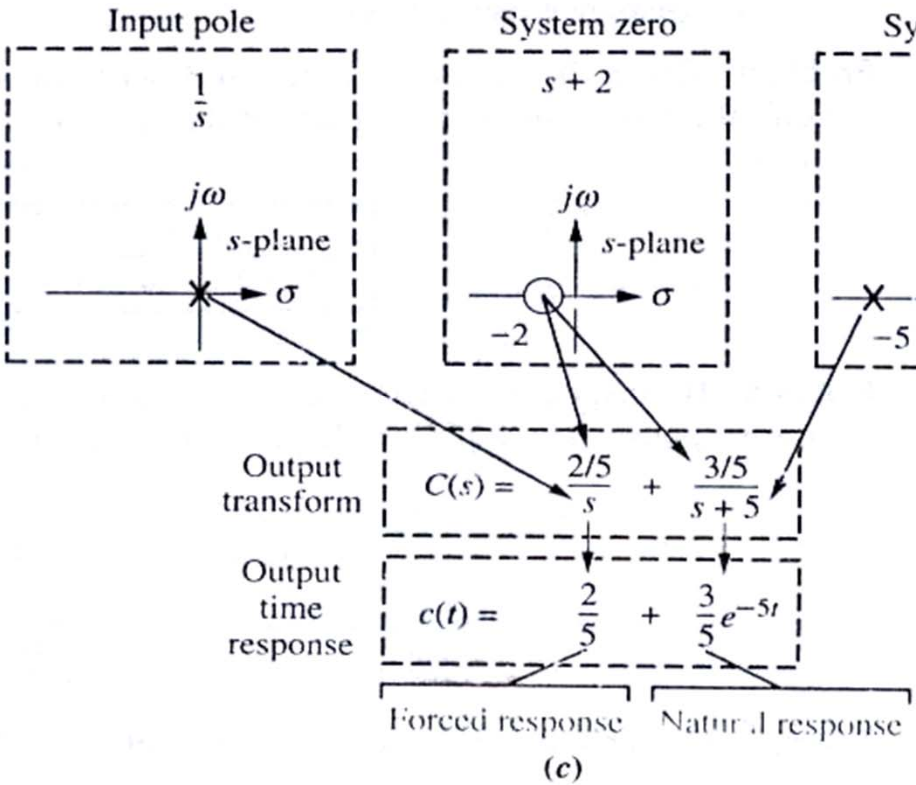
Pole - Zero

- Untuk mempermudah analisa respons suatu sistem digunakan
  - **Pole - Zero**
- Pole :
  - Nilai variabel Laplace **s** yang menyebabkan nilai transfer function tak hingga
  - Akar persamaan dari penyebut (**denominator**) transfer function sistem.
- Zero :
  - Nilai variabel Laplace **s** yang menyebabkan nilai transfer function nol
  - Akar persamaan dari pembilang (**numerator**) transfer function sistem.

Pole - Zero



$R(s) = \frac{1}{s}$
$G(s)$
$\frac{s+2}{s+5}$
$C(s)$
(a)
$j\omega$
s-plane
σ
−5
−2
(b)



Input pole
$\frac{1}{s}$
$j\omega$
s-plane
σ
System zero
$s + 2$
$j\omega$
s-plane
σ
−2
System pole
$\frac{1}{s+5}$
$j\omega$
s-plane
σ
−5
Output transform
$C(s) = \frac{2/5}{s} + \frac{3/5}{s+5}$
Output time response
$c(t) = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}e^{-5t}$
Forced response
Natural response
(c)

Definisi Kestabilan

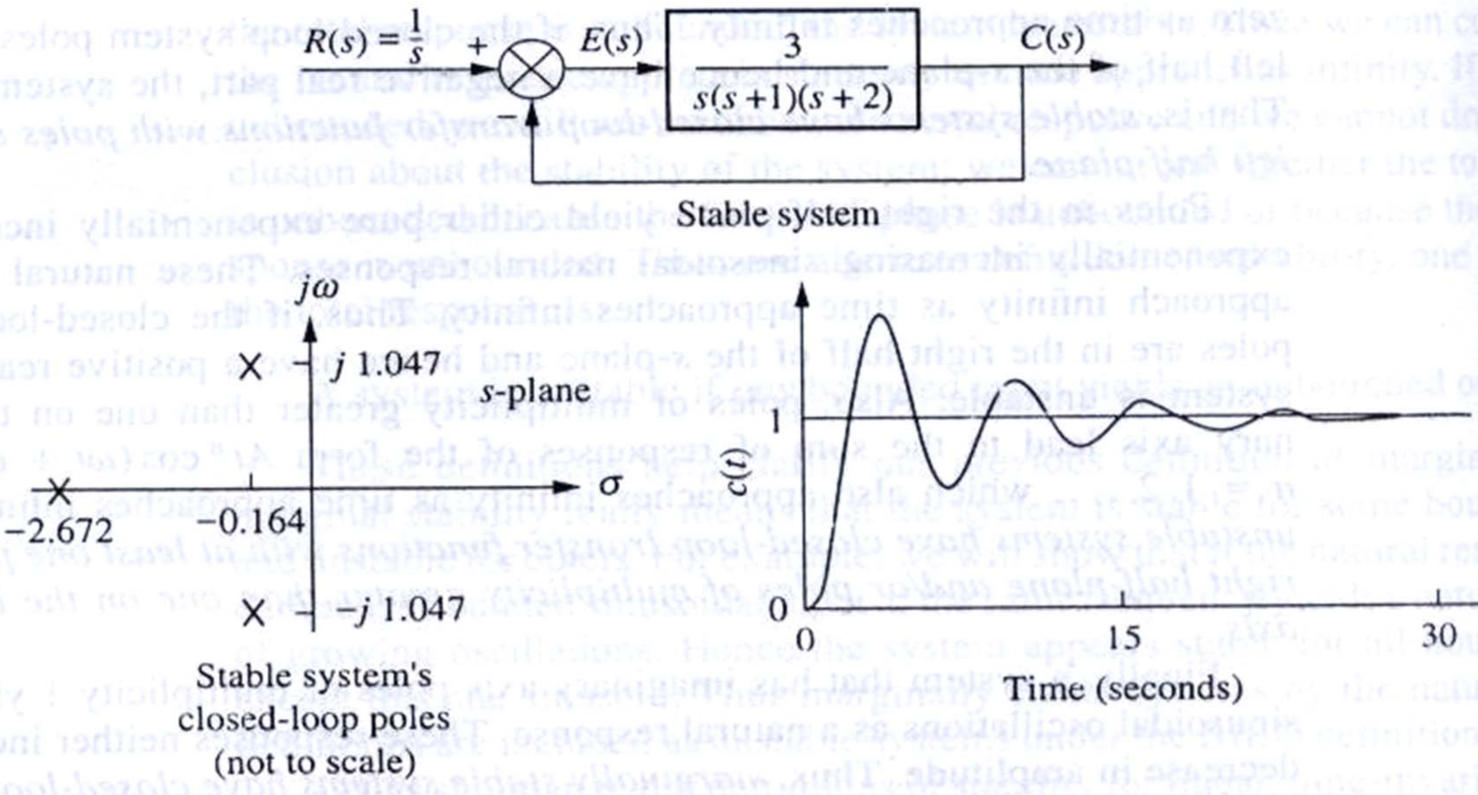
- Total respon output sistem :
  - $$c(t) = c_{forced}(t) + c_{natural}(t)$$
- Definisi kestabilan (berdasar natural response):
  - Sistem **stabil** jika *natural response* mendekati nol saat waktu mendekati tak hingga
  - Sistem **tidak stabil** jika *natural response* mendekati tak hingga saat waktu mendekati tak hingga
  - Sistem **marginally stable** jika *natural response* tetap/konstan atau berosilasi teratur
- Definisi kestabilan (berdasar total response/BIBO):
  - Sistem **stabil** jika setiap input yang dibatasi mengahasilkan output yang terbatas juga.
  - Sistem **tidak stabil** jika setiap input yang dibatasi mengahasilkan output yang tidak terbatas

Apakah Sistem Ini Stabil?

- Suatu sistem dengan pole di sebelah kiri bidang s (e^{-at}) menghasilkan :
  - Respon eksponensial yang meluruh (decay), atau
  - Respon sinusoidal yang teredam

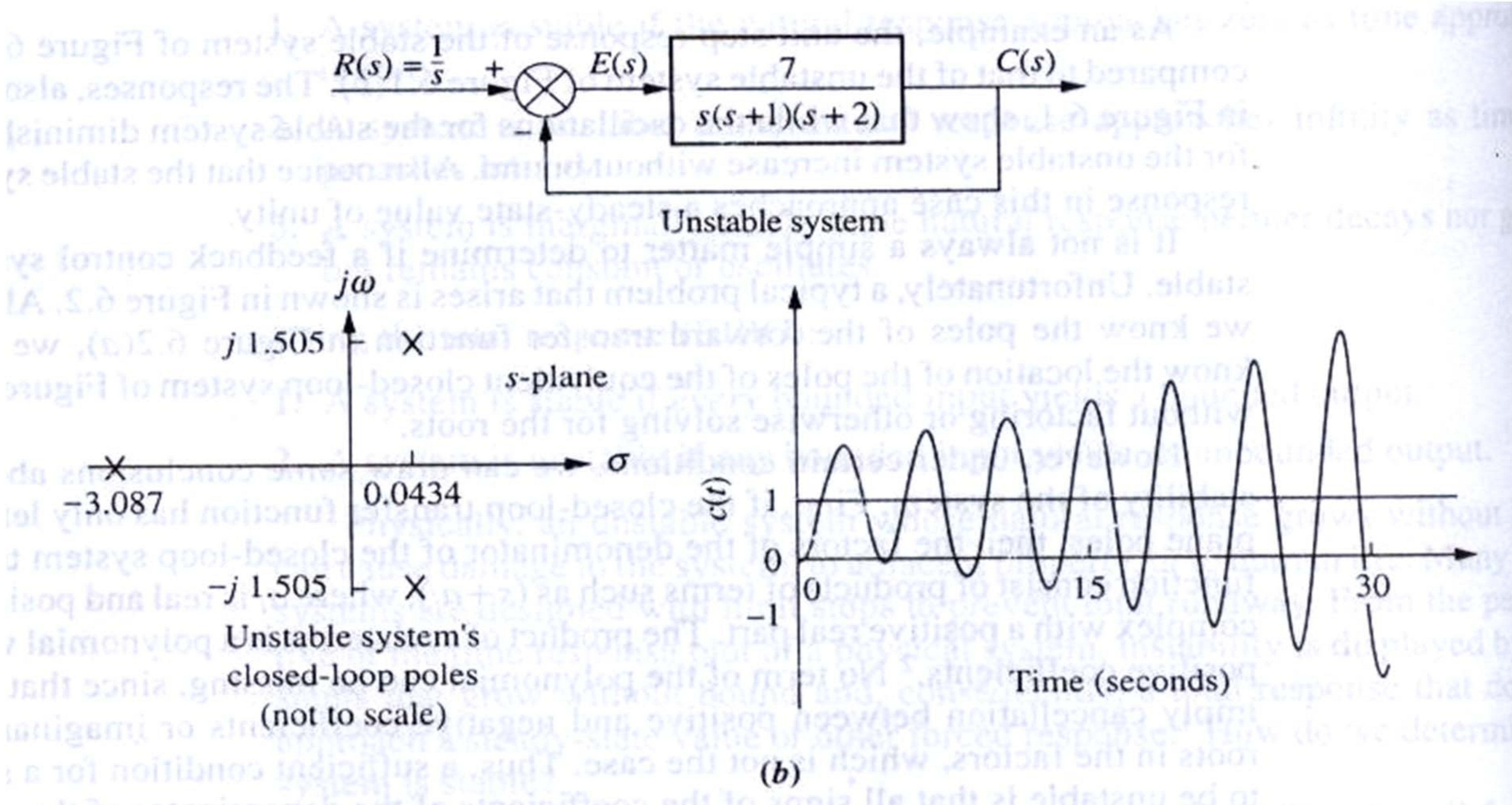
  Berarti *natural response* mendekati nol saat waktu mendekati tak hingga → sistem **stabil**
- Sistem yang **stabil** hanya mempunyai *poles* sistem *close loop* di sebelah kiri bidang s
- Sistem yang **tidak stabil** mempunyai *poles* sistem *close loop* di sebelah kanan bidang s dan atau mempunyai lebih dari 1 *poles* di sumbu imajiner
- Sistem yang **marginally stable** mempunyai 1 *pole* di sumbu imajiner dan *poles* di sebelah kiri

Apakah Sistem Ini Stabil?



(a)

Apakah Sistem Ini Stabil?



Kriteria Kestabilan Routh

- Transfer function dari suatu sistem **loop tertutup** berbentuk :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

- Hal pertama → memfaktorkan A(s)
  - A(s) : persamaan karakteristik
- Pemfaktoran polinomial dengan orde lebih dari 2 cukup sulit, sehingga digunakan
  - **Kriteria Kestabilan Routh**
- Kriteria kestabilan Routh memberi informasi **ada tidaknya** akar positif pada persamaan karakterisitik bukan **nilai** akar tersebut

Prosedur Kriteria Kestabilan Routh

1. Tulis persamaan karakteristik sistem dalam bentuk polinomial s:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

2. Semua koefisien persamaan karakteristik harus positif. Jika tidak, sistem tidak stabil.
3. Jika semua koefisien positif, susun koefisien polinomial dalam baris dan kolom dengan pola:

Prosedur Kriteria Kestabilan Routh

$$
\begin{array}{cccccc}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & . \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & . \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & . \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & . \\
s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & . \\
. & . & . & & & \\
. & . & . & & & \\
. & . & . & & & \\
s^2 & e_1 & e_2 & & & \\
s^1 & f_1 & & & & \\
s^0 & g_1 & & & &
\end{array}
$$

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

$$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$$

$$c_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}$$

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}$$

$$d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1}$$

Prosedur Kriteria Kestabilan Routh

- Proses ini diteruskan sampai baris ke-n secara lengkap. Susunan lengkap dari koefisien berbentuk segitiga.
- Syarat perlu dan syarat cukup agar sistem stabil (memenuhi kriteria kestabilan Routh)
  - Koefisien persamaan karakteristik semua **positif** (jika semua negatif maka masing – masing ruas dikalikan minus 1 sehingga hasilnya positif)
  - Semua suku kolom pertama pada tabel Routh mempunyai **tanda positif.**
    - Jika ada nilai nol lihat pada bagian “kondisi khusus”

Contoh Soal

- Contoh 4-3

  Terapkan kriteria kestabilan Routh untuk :

$$a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0$$

  Dengan semua koefisien positif. Susunan koefisien menjadi

$$\begin{array}{lcc} s^3 & a_0 & a_2 \\ s^2 & a_1 & a_3 \\ s^1 & \dfrac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} & \\ s^0 & a_3 & \end{array}$$

  Syarat agar semua akar mempunyai bagian real negatif diberikan :

$$a_1 a_2 > a_0 a_3$$

Contoh Soal

- Contoh 4-4
  Perhatikan polinomial berikut :

$$s^4 + 2s^3 + 3s^2 4s + 5 = 0$$

Ikuti prosedur untuk membuat susunan koefisien.

$$\begin{array}{llll}
s^4 & 1 & 3 & 5 \\
s^3 & 2 & 4 & 0 \\
 & & & \\
s^2 & 1 & 5 & \\
s^1 & -6 & & \\
s^0 & 5 & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llll}
s^4 & 1 & 3 & 5 \\
s^3 & \cancel{2} & \cancel{4} & \cancel{0} \\
 & 1 & 2 & 0 \\
s^2 & 1 & 5 & \\
s^1 & -3 & & \\
s^0 & 5 & &
\end{array}$$

Baris ke dua dibagi dengan 2

Pada kolom 1, terjadi dua kali perubahan tanda. Ini berarti ada dua akar positif dan sistem tidak stabil.

Keadaan khusus K.K.Routh
0 di kolom pertama

- Bila salah satu suku kolom pertama dalam suatu baris adalah nol, maka suku nol ini diganti dengan bilangan positif ε yang sangat kecil.
- Contoh :

  $s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0$

  Susunan koefisiennya :

$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 2 & 2 \\ s^1 & 0 \approx \varepsilon & \\ s^0 & 2 & \end{array}$$

Bila tanda koefisiennya sama, berarti terdapat pasangan akar imajiner pada sistem. Pada persamaan di atas ada akar di $\pm j$

Keadaan khusus K.K.Routh
0 di kolom pertama

- Bila tanda koefisien (ε) berlawanan, berarti ada akar positif persamaan karakteristik.
- Contoh :

  $s^3 - 3\,s + 2 = (s - 1)^2\,(s + 2) = 0$

  Susunan koefisiennya adalah

	s^3	1	-3
berubah tanda	s^2	$0 \approx \varepsilon$	2
berubah tanda	s^1	$-3 - (2/\varepsilon)$	
	s^0	2	

Terdapat dua perubahan tanda koefisien di kolom pertama, berarti ada dua akar positif di pers. karakteristik. Sesuai dengan persamaan awalnya → sistem tidak stabil

Keadaan khusus K.K.Routh
0 di seluruh suku baris

- Jika semua koefisien pada suatu baris adalah nol maka koefisien itu menunjukkan
  - akar – akar besaran yang sama tapi letaknya berlawanan
- Penyelesaian : menggantinya dengan turunan *suku banyak pembantu* → P(s)
  - P(s) berasal dari suku pada baris sebelumnya
- Contoh :

$$s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$$

Susunan koefisiennya adalah

s^5	1	24	-25	
s^4	2	48	-50	← Suku banyak pembantu P(s)
s^3	0	0		

Keadaan khusus
0 di seluruh suku baris

Susunan koefisiennya adalah

s^5	1	24	-25	
s^4	2	48	-50	← Suku banyak pembantu P(s)
s^3	0	0		

$$P(s) = 2s^4 + 48s^2 - 500$$
$$dP(s)/ds = 8s^3 + 96s$$

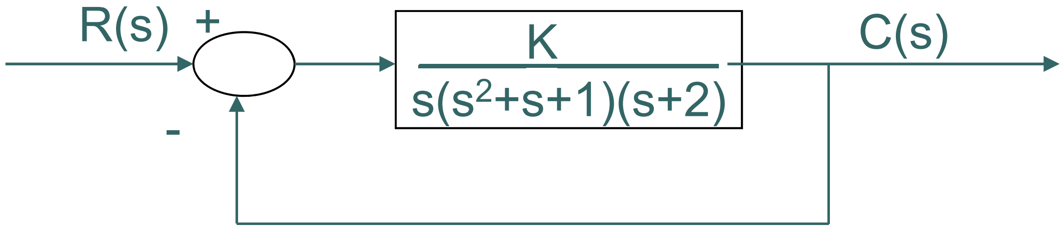
Sehingga susunan koefisiennya:

s^5	1	24	-25	
s^4	2	48	-50	
s^3	8	96		← Koefisien dari dP(s)/ds
s^2	24	-50		
s^1	112,7	0		
s^0	-50			

Ada satu perubahan tanda, berarti ada satu akar positif. Sistem tidak stabil.

Aplikasi K.K.Routh
untuk analisa sistem Kontrol

- Tinjau sistem berikut



- Fungsi alih loop tertutup

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s^2+s+1)(s+2)+K}$$

Persamaan karakteristik

$$s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

- Susunan koefisien

s^4	1	3	K
s^3	3	2	0
s^2	$\frac{7}{3}$	K	
s^1	$2-\frac{9}{7}K$		
s^0	K		

Untuk kestabilan, K harus positif dan semua koefisien pada kolom pertama harus positif. Oleh karena itu,

14/9 > K > 0