Semigrup Matriks *'Admitting'* Struktur Ring

K a r y a t i
Jurusan Pendidikan Matematika
FMIPA, Universitas Negeri Yogyakarta
Email: yatiuny@yahoo.com

Abstrak

Diberikan R adalah ring komutatif dengan elemen satuan dan n adalah bilangan integer positif dengan $n \geq 2$, serta $M_n(R)$ adalah himpunan semua matriks bujur sangkar dengan orde $n \times n$ atas R. Dibentuk suatu himpunan bagian dari $M_n(R)$ yaitu himpunan matriks di $M_n(R)$ yang invertibel yang selanjutnya dinotasikan dengan $G_n(R)$. Himpunan $M_n(R)$ ini membentuk semigrup terhadap operasi perkalian matriks biasa. Untuk suatu semigrup S, $S^0 = S$ jika semigrup S memuat elemen nol dan $S^0 = S \cup \{0\}$ jika semigrup S tidak memuat elemen nol. Suatu semigrup S dikatakan *admit struktur ring* jika terdapat suatu operasi + pada S^0 sedemikian sehingga $(S^0,+,.)$ membentuk struktur ring.

Dalam tulisan ini diselidiki sifat subsemigrup $M_n(R)$ dengan determinannya nol maupun suatu ideal dalam $M_n(R)$.

Diperoleh hasil bahwa: Misalkan S subsemigrup $M_n(R)$ yang setiap elemennya mempunyai determinan nol, jika S adalah *admit struktur ring* maka $S = M_n(R)$. Sebagai akibatnya, dapat dibuktikan bahwa ideal $\{A \in M_n(R) \mid \det A = 0\}$ dari $M_n(R)$ bukan merupakan *admit struktur ring.*

Kata Kunci: Semigrup,Ring, ideal, admit struktur ring

A. Pendahuluan

Diberikan R adalah ring komutatif dengan elemen satuan dan n adalah bilangan integer positif dengan $n \geq 2$. Selanjutnya $M_n(R)$ menotasikan himpunan semua matriks bujur sangkar dengan orde $n \times n$ atas R. Dibentuk suatu himpunan bagian dari $M_n(R)$ yaitu himpunan matriks di $M_n(R)$ yang invertibel . Selanjutnya himpunan tersebut dinotasikan dengan $G_n(R)$, yaitu:

$$G_n(R) = \{A \in M_n(R) \mid A \text{ invertibel}\}$$

Dalam tulisan ini diselidiki sifat subsemigrup $M_n(R)$ dengan determinannya nol maupun suatu ideal dalam $M_n(R)$.

B. Matriks Atas Ring

Matriks atas ring adalah matriks yang elemen-elemennya elemen suatu ring. Dari sifat matriks $M_n(R)$ diperoleh bahwa matriks $A \in M_n(R)$ invertibel jika dan hanya jika $\det A \in U(R)$, dengan $U(R)$ adalah himpunan semua unit di R. Dengan kata lain $A \in M_n(R)$ invertibel jika dan hanya jika $\det A$ invertible di R (Brown : 16). Dengan demikian, himpunan $G_n(R)$ dapat dinyatakan sebagai : $G_n(R) = \{A \in M_n(R) \mid \det A \text{ invertibel di } R\}$. Selanjutnya himpunan $\{A \in M_n(R) \mid \det A = \pm 1\} \subsetneq G_n(R)$, dan jika R merupakan lapangan, maka himpunan $G_n(R) = \{A \in M_n(R) \mid \det A \neq 0\}$. Sifat determinan yang lain , antara lain: $\det(AB) = \det A . \det B$ untuk setiap $A, B \in M_n(R)$ dan $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$ untuk setiap $A \in M_n(R)$ (Brown :16).

C. Semigrup

Himpunan S disebut semigrup terhadap operasi biner $*$, apabila operasi tersebut bersifat asosiatif. Semigrup S disebut mempunyai elemen nol apabila terdapat $0 \in S$ sedemikian sehingga $a * 0 = 0$ dan $0 * a = 0$ untuk setiap $a \in S$.

Untuk suatu semigrup S, $S^0 = S$ jika semigrup S memuat elemen nol dan $S^0 = S \cup \{0\}$ jika semigrup S tidak memuat elemen nol. Suatu semigrup S dikatakan *admit struktur ring* jika terdapat suatu operasi + pada S^0 sedemikian sehingga $(S^0, +, .)$ membentuk struktur ring (Kemprasit, Y &

Siripitukdet, M: 409). Dari definisi tersebut, maka semigrup $M_n(R)$ merupakan *admit struktur ring* terhadap operasi standar penjumlahan matriks.

D. Pembahasan

Untuk suatu matriks $A \in M_n(R)$ dan $i, j : 1,2,...,n$, misalkan A_{ij} menotasikan elemen dari matriks A pada baris ke-i dan kolom ke$-j$. Untuk $k,l : 1,2,...,n$, didefinisikan suatu matriks E^{kl}, dengan entri-entrinya didefinisikan sebagai berikut:

$$E_{ij}^{kl} = \begin{cases} 1 & jika \quad k = i, \ j = l \\ 0 & untuk \quad yang \ \ lain \end{cases}$$

Dapat diberikan beberapa contoh webagai berikut:

$$E^{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \qquad E^{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga matriks E^{kl} selalu memuat kolom maupun baris nol. Dengan demikian matriks ini memenuhi $\det E^{kl} = 0$ untuk semua $k,l : 1,2,...,n$ (Kemprasit, Y & Siripitukdet, M: 409).

Pada walnya , akan diberikan teorema untuk menunjukkan bahwa tidak ada semigrup S dimana $\{A \in M_n(R) \mid \det A = 0\} \subseteq S \subset M_n(R)$ dan *admit struktur ring.*

Teorema 1. *Misalkan* S *adalah sub semigrup dari* $M_n(R)$ *yang memuat setiap matriks* $A \in M_n(R)$ *dengan* $\det A = 0$. *Jika* S *admit struktur ring* , *maka* $S = M_n(R)$.

Bukti:

Dari definisi matriks E^{kl} di atas, diperoleh bahwa $\det E^{kl} = 0$ untuk setiap $k,l : 1,2,3,...,n$, sehingga $E^{kl} \in S$. Diketahui S *admit struktur ring*, sehingga dapat diasumsikan terdapat suatu operasi $\oplus$ pada S sedemikian sehingga $(S,\oplus,.)$ membentuk struktur ring dimana '.' adalah operasi perkalian pada S. Selanjutnya ditunjukkan bahwa $S = M_n(R)$.

Misalkan matriks $B,C \in M_n(R)$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & ... & A_{1,n-1} & 0 \\ A_{21} & ... & A_{2,n-1} & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{n1} & ... & A_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & ... & 0 & A_{1n} \\ 0 & ... & 0 & A_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Diperoleh bahwa $\det B = 0$ dan $\det C = 0$. Dengan demikian $B,C \in S$. Diketahui S *admit struktur ring*, maka $B \oplus C \in S$.

Selanjutnya, diperoleh juga bahwa:

$$E^{nn} = \begin{bmatrix} 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga dipenuhi:

$$CE^{nn} = \begin{bmatrix} 0 & ... & 0 & A_{1n} \\ 0 & ... & 0 & A_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & ... & 0 & A_{1n} \\ 0 & ... & 0 & A_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & A_{nn} \end{bmatrix} = C$$

dan

$$BE^{nn} = \begin{bmatrix} A_{11} & ... & A_{1,n-1} & 0 \\ A_{21} & ... & A_{2,n-1} & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{n1} & ... & A_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Serta $CE^{kl} = 0$, $k : 1,2,3,...,n-1$

Sehingga berlaku:

$(B \oplus C)E^{nn} = BE^{nn} \oplus CE^{nn} = 0 + C = C$, dan

$(B \oplus C)E^{kl} = BE^{kl} \oplus CE^{kl} = BE^{kl} + 0 = BE^{kl}$ untuk setiap $k: 1,2,3,...,n-1$

Sehingga untuk $i: 1,2,3,...,n$, berlaku:

$$(B \oplus C)_{in} = \sum_{k=1}^{n} (B \oplus C)_{ik} E_{kn}^{nn} = ((B \oplus C)E^{nn})_{in} = C_{in} = A_{in}$$

Untuk $i: 1,2,3,...,n$ dan $j: 1,2,3,...,n-1$, berlaku:

$$\begin{aligned}(B \oplus C)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} (B \oplus C)_{ik} E_{k1}^{j1} = ((B \oplus C)E^{j1})_{i1} \\ &= (BE^{j1})_{i1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} B_{ik} E_{k1}^{j1} = B_{ij} = A_{ij}\end{aligned}$$

Konsekuensinmya, $A = B \oplus C \in M_n(R)$

■

Sebagai akibatnya, subsemigrup $\{A \in M_n(R) \mid \det A = 0\}$ dari semigrup $M_n(R)$ bukan merupakan *admit struktur ring* atau dengan kata lain, tidak ada operasi penjumalahan yang didefinisikan pada $\{A \in M_n(R) \mid \det A = 0\}$ sedemikian sehingga $\{A \in M_n(R) \mid \det A = 0\}$ membentuk struktur ring. Sifat tersebut selengkapnya diberikan pada akibat sebagai berikut:

Akibat 2. *Subsemigrup $\{A \in M_n(R) \mid \det A = 0\}$ dari semigrup $M_n(R)$ bukan merupakan admit struktur ring.*

Bukti:

Akan dibuktikan dengan kontraposisinya:

Misalkan himpunan $T = \{A \in M_n(R) \mid \det A = 0\}$ merupakan *admit struktur ring*, jelas bahwa T memuat semua matriks di $M_n(R)$ yang determinannya nol. Menurut Teorema 1, maka berakibat $T = M_n(R)$. Hal ini kontradiksi dengan yang diketahui bahwa $T = \{A \in M_n(R) \mid \det A = 0\} \neq M_n(R)$, karena tidak semua matriks di $M_n(R)$ determinannya nol.

$\blacksquare$

E. Kesimpulan

Dari pembahasan di atas disimpulkan bahwa:

1. Misalkan S adalah sub semigrup dari $M_n(R)$ yang memuat setiap matriks $A \in M_n(R)$ dengan $\det A = 0$. Jika S *admit struktur ring* , maka $S = M_n(R)$.
2. Subsemigrup $\{A \in M_n(R) \mid \det A = 0\}$ dari semigrup $M_n(R)$ bukan merupakan *admit struktur ring*

DAFTAR PUSTAKA

[1] Brown, W.C. 1993. *Matrices Over Commutative Rings.* Marcel Dekker, Inc, New York.

[2] Kemprasit, Y and Siripitukdet, M. 2002. Matrix Semigroup Admitting Ring Structure. *Bulletin Calcutta Mathematics Soc. Volume 5 (2002) 409 - 412*