BEBERAPA SIFAT QUASI-IDEAL MINIMAL PADA RING TRANSFORMASI LINEAR $(L_F(V,W,k),+,\theta)$[1]

K a r y a t i
Jurusan Pendidikan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
e-mail : yatiuny@yahoo.com

Abstrak

Misalkan R adalah ring, $Q \subseteq R$ disebut quasi-ideal dari R jika $RQ \cap QR \subseteq Q$, dengan Q adalah ring bagian. Quasi-ideal R yang dibangun oleh suatu himpunan $X \subseteq R$ adalah irisan semua quasi-ideal dari R yang memuat X, yang selanjutnya dinotasikan dengan $(X)_q$. Quasi-ideal Q disebut quasi-ideal minimal jika dan hanya jika $Q = (x)_q$ untuk semua $x \in Q \setminus \{0\}$.

Misalkan V dan W adalah ruang vektor atas lapangan F dan $L_F(V,W)$ menotasikan himpunan semua transformasi linear $\alpha : V \to W$. Misalkan k adalah bilangan kardinal tak hingga dan $L_F(V,W,k) = \{\alpha \in L_F(V,W) \mid \text{rank}\,\alpha < k\}$. Himpunan $(L_F(V,W,k),+)$ membentuk grup abelian terhadap operasi jumlah biasa pada transformasi linear. Selanjutnya, untuk suatu $\theta \in L_F(V,W)$ tertentu didefinisikan suatu operasi $*$ pada $L_F(V,W,k)$, yaitu: $\alpha * \beta = \alpha \circ \theta \circ \beta$ untuk semua $\alpha, \beta \in L_F(V,W,k)$. Himpunan $L_F(V,W,k)$ bersama operasi '+' dan '*' tersebut membentuk ring, yang selanjutnya dinotasikan dengan $(L_F(V,W,k),+,\theta)$. Dalam tulisan ini akan diselidiki sifat-sifat quasi-ideal minimal pada ring $(L_F(V,W,k),+,\theta)$.

Diperoleh hasil sebagai berikut :Misal $\alpha \in L_F(V,W)$ sedemikian sehingga $Ran\,\alpha = Fu$ untuk suatu $u \in W$, Jika $\beta, \gamma \in L_F(W,W)$ sedemikian sehingga $u\beta = u\gamma$ maka $\alpha \circ \beta = \alpha \circ \gamma$ dan Jika $\beta \in L_F(W,W)$ sedemikian sehingga $u\beta = au$ untuk suatu $a \in F$ maka $\alpha \circ \beta = a\alpha$. Hasil lain yang berhasil diselidiki adalah: Misal $\alpha, \beta \in L_F(V,W,k)$, jika $\beta \in (\alpha)_q$ dalam ring $(L_F(V,W,k),+,\theta)$ maka $Ran\,\beta \subseteq Ran\,\alpha$. Misal $\alpha \in L_F(V,W,k)$ sedemikian sehingga memenuhi $Ran\,\alpha \not\subset Ker\,\theta$ dan $Ran\,\theta \not\subset Ker\,\alpha$. Jika rank $\alpha = 1$, maka $(\alpha)_q = F\alpha$ dalam $(L_F(V,W,k),+,\theta)$. Misal $\alpha \in L_F(V,W,k)$ sedemikian sehingga memenuhi $Ran\,\alpha \not\subset Ker\,\theta$ dan $Ran\,\theta \not\subset Ker\,\alpha$. Jika rank $\alpha = 1$, maka $(\alpha)_q$ adalah quasi- ideal minimal dalam $(L_F(V,W,k),+,\theta)$.

***Kata Kunci**: ring, quasi-ideal, quasi – ideal minimal*

1. Pendahuluan

Ring merupakan struktur aljabar yang melibatkan dua operasi biner yang disebut operasi jumlah dan operasi perkalian. Terhadap operasi jumlah, ring membentuk grup abelian, sementara itu terhadap operasi perkalian membentuk semigrup. Selain itu harus bersifat distributif kiri maupun kanan. Ring terhadap operasi perkalian bersifat komutatif disebut ring komutatif.

[1] Disampaikan pada Seminar Nasional KNM XIII, di Jurusan Matematika FMIPA UNNES, 24 – 27 Juli 2006

Selanjutnya jika memuat elemen satuan disebut ring dengan elemen satuan. Jika R adalah ring dan $S \subseteq R$ disebut sub ring jika S terhadap operasi yang sama pada R membentuk ring. Definisi ini ekuivalen dengan S membentuk sub grup terhadap operasi jumlah dan membentuk sub semigrup terhadap operasi perkaliannya.

Misalkan R adalah ring, maka $Q \subseteq R$ disebut quasi-ideal dari R jika $RQ \cap QR \subseteq Q$, dengan Q adalah ring bagian. Quasi-ideal R yang dibangun oleh suatu himpunan $X \subseteq R$ adalah irisan semua quasi-ideal dari R yang memuat X. Selanjutnya, quasi-ideal demikian dinotasikan dengan $(X)_q$. Quasi-ideal Q disebut quasi-ideal minimal jika dan hanya jika $Q = (x)_q$ untuk semua $x \in Q \setminus \{0\}$.

Diberikan V dan W adalah ruang vector atas lapangan F dan $L_F(V,W)$ menotasikan himpunan semua transformasi linear $\alpha : V \rightarrow W$. Misalkan k adalah bilangan kardina tak hingga dan $L_F(V,W,k) = \{\alpha \in L_F(V,W) \mid \mathrm{rank}\,\alpha < k\}$. Diketahui bahwa $\mathrm{rank}(\alpha + \beta) \leq \mathrm{rank}\,\alpha + \mathrm{rank}\,\beta$ untuk semua $\alpha, \beta \in L_F(V,W)$. Himpunan $(L_F(V,W,k),+)$ membentuk grup abelian terhadap operasi jumlah biasa pada transformasi linear ([1]: p. 318). Selanjutnya, untuk suatu $\theta \in L_F(V,W)$ tertentu didefinisikan suatu operasi $*$ pada $L_F(V,W,k)$, yaitu: $\alpha * \beta = \alpha \circ \theta \circ \beta$ untuk semua $\alpha, \beta \in L_F(V,W,k)$. Terhadap operasi ini, $L_F(V,W,k)$ membentuk semigrup ([1]: p.619). Juga berlaku distributif kiri dan kanan. Selanjutnya himpunan demikian dinotasikan dengan $(L_F(V,W,k),+,\theta)$ ([1]: p.317). Jelas bahwa himpunan ini membentuk ring. Dalam tulisan ini akan diselidiki karakterisasi semua quasi-ideal minimal dalam suatu ring $(L_F(V,W,k),+,\theta)$ dan mengindikasikan bilamana ring tersebut mempunyai quasi-ideal minimal. Perlu diingat bahwa semua quasi-ideal minimal dalam suatu ring adalah ideal utama ([1]: p.318).

2. Kajian Teori

Pada bagian ini akan diberikan beberapa istilah dan sifat-sifat yang mendukung dalam pembahasan artikel ini.

Definisi 1. ([2] : p.1) *Himpunan tak kosong* S *yang dilengkapi dengan operasi biner "$\bullet$" dikatakan semigrup jika* $\bullet$ *bersifat asosiatif yaitu :* $(\forall x, y, z \in S)\ (x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$

Definisi 2. ([2] : p.1) Misalkan S *suatu semigrup,* $P \subset S$ *disebut sub semigrup jika terhadap operasi yang didefinisikan pada* S, P *membentuk semigrup.*

Definisi tersebut ekuivalen dengan P tertutup terhadap operasi yang didefinisikan pada S.

Berikut diberikan definisi quasi-ideal suatu ring:

Definisi .3. ([1]: p.317). *Misalkan R adalah ring, maka $Q \subseteq R$ disebut quasi-ideal dari R jika $RQ \cap QR \subseteq Q$, dengan Q adalah ring bagian.*

Quasi-ideal R yang dibangun oleh suatu himpunan $X \subseteq R$ adalah irisan semua quasi-ideal dari R yang memuat X. Selanjutnya, quasi-ideal demikian dinotasikan dengan $(X)_q$. Quasi-ideal Q disebut quasi-ideal minimal jika dan hanya jika $Q = (x)_q$ untuk semua $x \in Q \setminus \{0\}$.

Beberapa sifat yang berlaku bahwa:

Proposisi .1. ([1] : p.317). *Misal Q suatu quasi-ideal ring R, maka berlaku:*

i. Jika Q quasi-ideal minimal maka Q adalah sub ring nol atau sub ring pembagi dari R.

ii. Jika Q sub ring pembagi dari R, maka Q adalah quasi-ideal minimal dari R.

Proposisi.2. ([1] : p.318). *Untuk suatu himpunan tak kosong $X \subseteq R$, maka berlaku $(X)_q = ZX + (RX \cap XR)$, dengan Z adalah himpunan semua bilangan integer.*

Dari **Proposisi 2** diperoleh akibat sebagai berikut:

Akibat 1. ([1] : p.318). Dalam $(L_F(V,W,k),+,\theta)$, berlaku:

$(\alpha)_q = Z\alpha + (L_F(V,W,k)\circ\theta\circ\alpha \cap \alpha\circ\theta\circ L_F(V,W,k))$ untuk setiap $\alpha \in L_F(V,W,k)$

Bukti:

Menurut **Proposisi 2** berlaku bahwa untuk suatu himpunan bagian tak kosong X dari suatu ring R berlaku $(X)_q = ZX + (RX \cap XR)$. Dalam hal ini $(L_F(V,W,k),+,*)$ adalah ring dan $\alpha \in (L_F(V,W,k),+,\theta)$ sehingga $(L_F(V,W,k),+,\theta) * \alpha = (L_F(V,W,k),+,\theta)\circ\theta\circ\alpha$ serta $\alpha * (L_F(V,W,k),+,\theta) = \alpha\circ\theta\circ(L_F(V,W,k),+,\theta)$, akibatnya dipenuhi persamaan sebagai berikut : $(\alpha)_q = Z\alpha + (L_F(V,W,k)\circ\theta\circ\alpha \cap \alpha\circ\theta\circ L_F(V,W,k))$

3. Pembahasan

Misalkan F adalah suatu lapangan dan α suatu transformasi linear dari ruang vektor atas lapangan F, V ke W, serta $Ran\,\alpha = \{w \in W \mid (v)\alpha = w, \textit{untuk suatu } v \in V\}$. Lemma berikut sebagai akibat dari kondisi $Ran\,\alpha = Fu$ untuk suatu $u \in W$.

Lemma 1 . ([1] : p.318). *Misal* $\alpha \in L_F(V,W)$ *sedemikian sehingga* $Ran\alpha = Fu$ *untuk suatu* $u \in W$

i. *Jika* $\beta,\gamma \in L_F(W,W)$ *sedemikian sehingga* $u\beta = u\gamma$ *maka* $\alpha \circ \beta = \alpha \circ \gamma$

ii. *Jika* $\beta \in L_F(W,W)$ *sedemikian sehingga* $u\beta = au$ *untuk suatu* $a \in F$ *maka* $\alpha \circ \beta = a\alpha$

Bukti:

(i). Ambil sebarang $c \in F$, sehingga berlaku $(cu)\beta = c(u\beta) = c(u\gamma) = (cu)\gamma$. Diketahui bahwa

$Ran\alpha = \{w \in W \mid (v)\alpha = w, \text{ untuk suatu } v \in V\} = \{cu \in W \mid (v)\alpha = cu \text{ untuk setiap } c \in F \text{ dan suatu } u \in W\}$

$Ran\alpha = \{cu \mid \forall c \in F, \text{ untuk suatu } u \in W\}$.

Selanjutnya, diperoleh bahwa $\beta|_{Ran\alpha} : cu \to (cu)\beta = (cu)\gamma$ sehingga berlaku $\beta|_{Ran\alpha} = \gamma|_{Ran\alpha}$. Hal ini mempunyai konsekuensi :

Untuk sebarang $v \in V$ berlaku $(v)(\alpha \circ \beta) = ((v)\alpha)\beta = (cu)\beta = (cu)\gamma = ((v)\alpha)\gamma = (v)(\alpha \circ \gamma)$.

Sebagai akibatnya berlaku $\alpha \circ \beta = \alpha \circ \gamma$

(ii). Dapat dipandang bahwa $a = (a)1_W$ dengan 1_W adalah pemetaan identitas di $L_F(W,W)$. Sehingga $u\beta = au.1_W$. Menurut bagian (i) sebelumnya berakibat $\alpha \circ \beta = \alpha \circ (a)1_W = a.\alpha$

■

Lemma berikut memberikan hubungan antara suatu transformasi dalam quasi-ideal minimal dengan transformasi pembangun quasi-idealnya:

Lemma 2. . ([1] : p.318). *Misal* $\alpha, \beta \in L_F(V,W,k)$, *jika* $\beta \in (\alpha)_q$ *dalam ring* $(L_F(V,W,k),+,\theta)$ *maka* $Ran\beta \subseteq Ran\alpha$.

Bukti:

Diketahui $\beta \in (\alpha)_q$, sehingga menurut Akibat 1 berlaku $\beta = t\alpha + \gamma \circ \theta \circ \alpha$ untuk suatu $t \in Z$ dan suatu $\gamma \in L_F(V,W,k)$.

Selanjutnya ambil $w \in Ran\beta$, maka terdapat $v \in V$ sedemikian sehingga berlaku:

$$\begin{aligned} w = (v)\beta &= (v)(t\alpha + \gamma \circ \theta \circ \alpha) \\ &= (vt)\alpha + ((v)(\gamma \circ \theta))\alpha \\ &= (vt + (v)(\gamma \circ \theta))\alpha \end{aligned}$$

Akibatnya $w \in Ran\alpha$. Dengan demikian $Ran\beta \subseteq Ran\alpha$

■

Lemma berikutnya menjelaskan suatu kondisi yang menjamin bilamana quasi-ideal minimal $(\alpha)_q = F\alpha$:

Lemma .3. ([1] : p.318). *Misal* $\alpha \in L_F(V,W,k)$ *sedemikian sehingga memenuhi kondisi* $Ran\alpha \not\subset Ker\theta$ *dan* $Ran\theta \not\subset Ker\alpha$. *Jika* $rank\,\alpha = 1$, *maka* $(\alpha)_q = F\alpha$ *dalam* $(L_F(V,W,k),+,\theta)$.

Bukti:

(i). Dibuktikan $F\alpha \subseteq (\alpha)_q$

Misal $u \in Ran\alpha \setminus Ker\theta$ dan $u' \in Ran\theta \setminus Ker\alpha$, maka $(u)\theta \neq 0, (u)\theta \in V$ dan $(u')\alpha \neq 0, (u')\alpha \in W$ dan $(z)\theta = u'$ untuk suatu $z \in W \setminus \{0\}$. Karena rank $\alpha = 1$, maka $Ran\alpha = Fu$ dan akibatnya $(u')\alpha = a.u$ untuk suatu $a \in F$ dan $a \neq 0$

Misal B adalah basis untuk V yang memuat $(u)\theta$ dan B' adalah basis untuk W yang memuat u. Selanjutnya didefinisikan suatu transformasi linear sebagai berikut:

$$(v)\beta = \begin{cases} u & jika\ v = (u)\theta \\ 0 & jika\ v \in B \setminus \{(u)\theta\} \end{cases} \qquad (w)\gamma = \begin{cases} a^{-1}z & jika\ \ w = u \\ 0 & jika\ w \in B' \setminus \{u\} \end{cases}$$

Jelas bahwa $\beta \in L_F(V,W)$ dan $\gamma \in L_F(W,W)$. Dari definisi terebut diperoleh bahwa $\alpha \circ \gamma \in L_F(V,W)$, rank $\beta = 1$, rank $\alpha \circ \gamma \leq 1$ sehingga $\beta, \alpha \circ \gamma \in L_F(V,W,k)$. Berdasarkan definisi tersebut juga diperoleh:

$$(u)(\gamma \circ \theta \circ \alpha) = (a^{-1}z)(\theta \circ \alpha) = a^{-1}((z)\theta)\alpha = a^{-1}(u')\alpha = a^{-1}au = u = ((u)\theta)\beta = (u)(\theta \circ \beta).$$

Karena $Ran\alpha = Fu$, menurut **Lemma 1**, diperoleh $\alpha \circ \gamma \circ \theta \circ \alpha = \alpha = \alpha \circ \theta \circ \beta$. Sehingga untuk setiap $b \in F$, maka berlaku :

$(b)\alpha = (b)(\alpha \circ \gamma \circ \theta \circ \alpha) = ((b)\alpha \circ \gamma)(\theta \circ \alpha)$, sehingga $(b)\alpha \in L_F(V,W,k) \circ \theta \circ \alpha$ dan $(b)\alpha = (b)(\alpha \circ \theta \circ \beta) = (\theta \circ \alpha)((b)\beta)$, sehingga $(b)\alpha \in \alpha \circ \theta \circ L_F(V,W,k)$. Akibatnya $(b)\alpha \in L_F(V,W,k) \circ \theta \circ \alpha \cap \alpha \circ \theta \circ L_F(V,W,k)$

Dengan kata lain jika $(b)\alpha \in F\alpha$, maka $(b)\alpha \in L_F(V,W,k) \circ \theta \circ \alpha \cap \alpha \circ \theta \circ L_F(V,W,k)$ dan menurut Akibat 1 maka $(b)\alpha \in (\alpha)_q$. Dengan demikian terbukti $F\alpha \subseteq (\alpha)_q$.

(ii). Dibuktikan $(\alpha)_q \subseteq F\alpha$

Ambil $\lambda \in (\alpha)_q$, maka menurut **Lemma 2** berakibat $Ran\,\lambda \subseteq Ran\,\alpha$, dan menurut **Akibat 1** berlaku $\lambda = t\alpha + \alpha \circ \theta \circ \chi$ untuk suatu $t \in Z$ dan untuk suatu $\chi \in L_F(V,W,k)$. Akibat selanjutnya : $Ran\,(\alpha \circ \theta \circ \chi) = Ran\,(\lambda - t\alpha) \subseteq Ran\,\alpha$.

Akan tetapi $u \in Ran\,\alpha = Fu$ (sebab rank $\alpha = 1$), maka terdapat $v \in V$ sedemikian sehingga $(v)\alpha = u$. Akibat selanjutnya $(v)(\alpha \circ \theta \circ \chi) = ((v)\alpha)(\theta \circ \chi) = (u)(\theta \circ \chi) = cu$ untuk suatu $c \in F$.

Dengan demikian dipenuhi kondisi:

$\alpha \in L_F(V,W)$, $Ran\,\alpha = Fu$, $\theta \circ \chi \in L_F(W,V)$ sehingga $(u)(\theta \circ \chi) = cu$ untuk suatu $c \in F$, sehingga menurut Lemma 1 (ii) berlaku $\alpha \circ \theta \circ \chi = c\alpha$. Akibatnya diperoleh: $\lambda = t\alpha + \alpha \circ \theta \circ \chi = t\alpha + c\alpha = (t + c)\alpha \in F\alpha$. Dengan demikian dipenuhi $(\alpha)_q \subseteq F\alpha$

Dari (i) dan (ii) maka terbukti $(\alpha)_q = F\alpha$

■

Sebagai hasil akhir dari penelitian ini diperoleh hasil suatu kondisi yang dapat menjamin bilamana $(\alpha)_q$ membentuk quasi- ideal minimal dalam $(L_F(V,W,k),+,\theta)$.

Lemma .4. ([1]: p.318). *Misal $\alpha \in L_F(V,W,k)$ sedemikian sehingga memenuhi kondisi $Ran\alpha \not\subset Ker\theta$ dan $Ran\theta \not\subset Ker\alpha$. Jika rank $\alpha = 1$, maka $(\alpha)_q$ adalah quasi- ideal minimal dalam $(L_F(V,W,k),+,\theta)$.*

Bukti:

Menurut **Lemma 3**, kondisi ini berakibat $(\alpha)_q = F\alpha$. Ambil $\beta \in (\alpha)_q \setminus \{0\}$, maka $\beta = a\alpha$ untuk suatu $a \in F$, $a \neq 0$

Akibatnya $Ker\,\beta = Ker\,\alpha$, sebab:

$v \in Ker\,\beta \Rightarrow (v)\beta = 0 \Rightarrow (v)(a\alpha) = (va)\alpha = 0 \Rightarrow va = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow v \in Ker\,\alpha$

$v' \in Ker\,\alpha \Rightarrow (v')\alpha = 0$, tetapi $v' = av''$ untuk suatu $v'' \in V$. Akibatnya : $(av'')\alpha = (v'')(a\alpha) = (v'')\beta = 0$, sehingga $v'' \in Ker\,\beta$ dan karena $v' = av''$ sehingga $a^{-1}v' \in Ker\,\beta$ atau $(a^{-1}v')\beta = 0$ atau $a^{-1}(v')\beta = 0$. Diketahui $a \neq 0$, sehingga $a^{-1} \neq 0$. Dengan demikian $(v')\beta = 0$ atau $v' \in Ker\,\beta$

Akibat lain adalah $Ran\,\beta = Ran\,\alpha$, sebab:

Ambil $w \in Ran\beta$, sehingga terdapat $v \in V$ yang memenuhi $(v)\beta = w$, akibatnya $w = (v)(a\alpha) = (va)\alpha$. Disimpulkan bahwa $w \in Ran\,\alpha$.

Ambil $w' \in Ran\,\alpha$, sehingga terdapat $v' \in V$ yang memenuhi, $(v')\alpha = w'$. Karena $v' \in V$, maka terdapat $a \in F$, $a \neq 0$ dan $v \in V$ sedemikian sehingga $v' = av$. Akibatnya $w' = (av)\alpha = (v)(a\alpha) = (v)\beta$. Dengan kata lain $w' \in Ran\,\beta$

Karena $Ran\,\beta = Ran\,\alpha$, maka rank $\beta = 1$ (sebab rank $\alpha = 1$). Menurut Lemma 3, berakibat $(\beta)_q = F\alpha$, sehingga berlaku juga $F\beta = F(a\alpha) = (Fa)\alpha = F\alpha$. Akibatnya $(\beta)_q = (\alpha)_q$.

■

4. Simpulan

Berdasarkan hasil penyelidikan di atas dapat disimpulkan bahwa:

i. Misal $\alpha \in L_F(V,W)$ sedemikian sehingga $Ran\,\alpha = F\,u$ untuk suatu $u \in W$, maka berlaku:

   a. Jika $\beta, \gamma \in L_F(W,W)$ sedemikian sehingga $u\beta = u\gamma$ maka $\alpha \circ \beta = \alpha \circ \gamma$

   b. Jika $\beta \in L_F(W,W)$ sedemikian sehingga $u\beta = a\,u$ untuk suatu $a \in F$ maka $\alpha \circ \beta = a\alpha$

ii. Misal $\alpha, \beta \in L_F(V,W,k)$, jika $\beta \in (\alpha)_q$ dalam ring $(L_F(V,W,k),+,\theta)$ maka $Ran\,\beta \subseteq Ran\,\alpha$.

iii. Misal $\alpha \in L_F(V,W,k)$ sedemikian sehingga memenuhi $Ran\alpha \not\subset Ker\theta$ dan $Ran\theta \not\subset Ker\alpha$. Jika rank $\alpha = 1$, maka $(\alpha)_q = F\alpha$ dalam $(L_F(V,W,k),+,\theta)$.

iv. Misal $\alpha \in L_F(V,W,k)$ sedemikian sehingga memenuhi $Ran\alpha \not\subset Ker\theta$ dan $Ran\theta \not\subset Ker\alpha$. Jika rank $\alpha = 1$, maka $(\alpha)_q$ adalah quasi- ideal minimal dalam $(L_F(V,W,k),+,\theta)$.

5. Daftar Pustaka

[1] Chinram, R., Kemprasit, Y. 2002. Minimal Quasi-Ideals of Generalized rings of Linear Transformations. *PU.M.A Vol. 13, No. 3, p: 317 – 324.*

[2] Howie, J.M, 1976. *An Introduction to Semigroup Theory*. Academic Press, Ltd, London

[3] Kemprasit, Y. 2002. Regularity and Unit-Regularity of Generalized Semigroup of Linear Transformations. *Shoutheast Asian Bulletin of Mathematics 25, p:617 – 622*