Syarat Perlu dan Cukup Struktur Himpunan Transformasi Linear Membentuk Semigrup Reguler[1]

Karyati
Jurusan Pendidikan Matematika
Universitas Negeri Yogyakarta
E-mail: yatiuny@yahoo.com

Abstrak

Pada kajian sebelumnya telah dibuktikan bahwa himpunan transformasi linear dari ruang vektor X ke dirinya sendiri , $L(X)$, membentuk semigrup reguler terhadap operasi biner komposisi fungsi. Dalam hal ini, ruang vektornya berdimensi hingga dan atas lapangan berkarakteristik nol.

Dalam kajian ini, akan diselidiki syarat perlu dan cukup struktur himpunan transformasi linear dari ruang vektor X ke ruang vektor Y masing masing atas lapangan berkarakteristik nol, $\left(L(X,Y), \theta \right)$ untuk θ transformasi linear dari Y ke X , terhadap operasi komposisi fungsi membentuk semigrup reguler.

Dapat dibuktikan bahwa syarat perlu dan cukup agar himpunan transformasi linear dari ruang vektor X ke ruang vektor Y masing masing atas lapangan berkarakteristik nol adalah $X = \{0\}$, $Y = \{0\}$ atau θ isomorphisma dari Y ke X .

Kata kunci : Semigrup reguler, isomorphisma, komposisi fungsi

1. Pendahuluan

Dalam tulisan sebelumnya [3] , telah dibuktikan bahwa himpunan semua transformasi linear dari ruang vektor X ke dirinya sendiri, yang dinotasikan dengan $L(X)$, akan membentuk semigrup reguler terhadap operasi biner komposisi fungsi. Dalam hal ini dibatasi untuk ruang vektor berdimensi hingga dan atas lapangan berkarakteristik nol.

Diperoleh hasil lain oleh Kemprasit [4] bahwa himpunan transformasi linear dari sebarang ruang vektor berdimensi hingga X ke ruang vektor berdimensi hingga

[1] Disampaikan pada Seminar Nasional dalam rangka Pekan Ilmiah Pendidikan Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika, FMIPA UNY, Tanggal 12 Oktober 2004

Y yang dinotasikan dengan $L(X,Y)$ juga membentuk semigrup reguler terhadap komposisi fungsi. Dalam tulisan Kemprasit [2] juga digeneralisasi bahwa $L(X,Y)$ beserta $\theta \in L(Y,X)$ tertentu, himpunan $(L(X,Y),\theta)$ membentuk semigrup $L(X,Y)$ dengan operasi $*$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\alpha * \beta = \alpha \circ \theta \circ \beta$$

untuk setiap $\alpha, \beta \in L(X,Y)$

2. Landasan Teori

Dalam penulisan ini akan dirujuk beberapa definisi terkait dengan semigrup yang diambil dari buku karya Howie. Pertama diberikan pengertian tentang semigrup:

Definisi 1.(Howie: p.1) *Himpunan tak kosong* S *yang dilengkapi dengan operasi biner "*$\bullet$*" dikatakan semigrup jika* $\bullet$ *bersifat asosiatif yaitu :* $(\forall x, y, z \in S)$

$$(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$$

Dari awal tulisan ini telah disinggung mengenai elemen reguler suatu semigrup, sehingga perlu diberikan definisi elemen reguler maupun semigrup reguler yang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2. (Howie: p.5) *Misalkan* $(S,\bullet)$ *semigrup. Elemen* a *di* S *disebut elemen reguler jika terdapat* $x \in S$ *sedemikian sehingga* $a \bullet x \bullet a = a$. *Semigrup* S *disebut semigrup reguler jika setiap elemen di dalam* S *adalah elemen reguler*

Misalkan $(S,.)$, $(T,.)$ masing, masing adalah semigrup. Pemetaan $\phi : S \to T$ dikatakan homomorphisma semigrup jika memenuhi: $(\forall x, y \in S)\ (xy)\phi = (x)\phi(y)\phi$.

Selanjutnya $\mathrm{Im}\,\phi = \{(s)\phi : s \in S\} \subseteq T$ disebut range dari ϕ. Kernel dari ϕ, dinotasikan $\ker\phi$ didefinisikan sebagai : $\ker\phi = \{(a,b) \in S \times S \mid (a)\phi = (b)\phi\}$.

Berikut diberikan definisi dan sifat – sifat transformasi linear yang diacu pada tulisan Cullen:

Definisi 3. (Cullen: p.78) *Misalkan* X *dan* Y *ruang vektor atas lapangan* K *dan* $f : X \to Y$ *adalah suatu pemetaan. Pemetaan* f *disebut transformasi linear apabila memenuhi kondisi:*

$$(\alpha a + \beta b) f = \alpha(a) f + \beta(b) f \;, \quad \forall\, a,b \in X \quad \text{dan} \quad \forall \alpha, \beta \in K$$

Pada definisi berikut memberikan definisi dari suatu notasi terkait dengan suatu transformasi linear:

Definisi 4. (Cullen:p.78) *Misalkan X dan Y adalah ruang vektor atas lapangan K***.** *Jika* $f : X \to Y$ *transformasi linear, maka*

a. $\mathrm{Im}\, f = \left\{ y \in Y \;\middle|\; (x) f = y \text{ untuk suatu } x \in X \right\}$

b. $Ker\ f = \left\{ x \in X \;\middle|\; (x) f = 0 \right\}$

3. Pembahasan

Pada penulisan sebelumnya [3], dibuktikan bahwa $L(X)$ yaitu himpunan semua transformasi linear dari ruang vektor berdimensi hingga X atas lapangan berkarakteristik nol ke dirinya sendiri menbentuk semigrup reguler terhadap operasi biner komposisi fungsi. Berikut digeneralisasi untuk semigrup dari himpunan semua transformasi linear yaitu untuk $\theta \in L(Y, X)$ tertentu dan dibentuk suatu himpunan

$\left(L(X,Y),\theta\right) = L\left(X,Y\right) \cup \left(\theta\right)$ membentuk semigrup $L(X,Y)$ dengan operasi $*$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\alpha * \beta = \alpha \circ \theta \circ \beta$$

untuk setiap $\alpha, \beta \in L(X,Y)$.

Sebelum dibuktikan suatu syarat perlu dan cukup himpunan $\left(L(X,Y),\theta\right)$ membentuk semigrup reguler terhadap komposisi fungsi, diberikan lemma sebagai berikut:

Lemma 1:

Jika θ *suatu isomorphisma dari* Y *ke* X*, maka pemetaan* $\omega : \left(L(X,Y),\theta\right) \to L(X)$ *yang didefinisikan sebagai berikut:*

$$(\alpha)\omega = \alpha \circ \theta$$

untuk semua $\alpha \in \left(L(X,Y),\theta\right)$*, adalah suatu isomorphisma dari* $\left(L(X,Y),\theta\right)$ *ke* $L(X)$*, sehingga* $\left(L(X,Y),\theta\right) \cong L(X)$ *dan* θ^{-1} *adalah identitas pada* $\left(L(X,Y),\theta\right)$*.*

Bukti :

- Dibuktikan ω suatu homorphisma

  Ambil sebarang $\alpha, \beta \in \left(L(X,Y),\theta\right)$, maka $\alpha * \beta = \alpha \circ \theta \circ \beta$ dan diperoleh:

$$\begin{aligned} \left(\alpha * \beta\right)\omega &= \left(\alpha \circ \theta \circ \beta\right)\omega \\ &= \alpha \circ \theta \circ \beta \circ \theta \\ &= (\alpha)\omega \circ (\beta)\omega \end{aligned}$$

- Dibuktikan ω pemetaan 1-1

  Ambil sebarang $\alpha, \beta \in \left(L(X,Y),\theta\right)$ dengan $(\alpha)\omega = (\beta)\omega$, sehingga $\alpha \circ \theta = \beta \circ \theta$.

  Akibatnya $\alpha = \beta \circ \theta \circ \theta^{-1} = \beta$

- Dibuktikan ω pemetaan pada (onto)

Ambil sebarang $\alpha \in \left((X,Y),\theta\right)$, karena θ suatu isomorphisma dari Y ke X, maka ada θ^{-1}, suatu pemetaan dari X ke Y. Sehingga $\theta^{-1} \in \left((X,Y),\theta\right)$, akibatnya $\alpha \circ \theta^{-1} \in \left((X,Y),\theta\right)$ dan diperoleh $(\alpha \circ \theta^{-1})\omega = \alpha \circ \theta^{-1} \circ \theta = \alpha$.

■

Teorema berikut menjelaskan tentang syarat perlu dan cukup suatu semigrup $\left((X,Y),\theta\right)$ membentuk semigrup reguler:

Teorema 1:

Semigrup $\left((X,Y),\theta\right)$ membentuk semigrup reguler jika dan hanya jika $X = \{0\}$, $Y = \{0\}$ atau θ isomophisma dari Y ke X.

Bukti :

$(\Leftrightarrow)$

Diasumsikan $X \neq \{0\}$, $Y \neq \{0\}$ dan θ bukan isomorphisma, sehingga $\operatorname{Im}\theta \neq X$ atau $\ker\theta \neq \{0\}$.

Kasus 1 : $\operatorname{Im}\theta \neq X$

Karena $|Y| > 1$, maka Y memuat vektor tak nol, sebut y. Andaikan B_1 adalah basis untuk $\operatorname{Im}\theta$ dan B_2 adalah basis untuk X, sehingga $B_1 \subseteq B_2$. Karena $\operatorname{Im}\theta \neq X$, maka $B_1 \neq B_2$. Selanjutnya bentuk suatu transformasi linear $\alpha : X \rightarrow Y$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$(x)\alpha = \begin{cases} 0 & x \in B_1 \\ y & x \in B_2 \setminus B_1 \end{cases}$$

Maka diperoleh $\operatorname{Im}\alpha = span\{y\}$, suatu sub ruang dari Y yang dibangun / direntang oleh y.

Karena $\operatorname{Im}\theta = span\, B_1$ dan $(B_1)\alpha = 0$, sebagai akibat dari $\theta \circ \alpha = \bar{0}$ dengan $\bar{0}$ adalah transformasi nol dari $L(Y)$. Konsekuensinya $\alpha \circ \theta \circ \beta \circ \theta \circ \alpha = \bar{0} \in L(X,Y)$ untuk setiap $\beta \in L(X,Y)$. Sehingga α bukan elemen reguler dalam $\left\langle L(X,Y),\theta \right\rangle$, atau $\left\langle L(X,Y),\theta \right\rangle$ bukan semigrup reguler.

Kasus 2 : $\ker\theta \neq \{0\}$

Sehingga terdapat $y \in Y$ dengan $y \neq 0$. Misalkan B basis untuk X. Karena $X \neq \{0\}$ maka $B \neq \phi$. Bentuk suatu transformasi linear $\alpha : X \rightarrow Y$ yang didefinisikan sebagai $(x)\alpha = y$ untuk setiap $x \in B$ sehingga $\operatorname{Im}\alpha = span\{y\}$. Karena $(y)\theta = 0 \in X$, maka diperoleh $\alpha \circ \theta = \bar{0} \in L(X)$, sehingga $\alpha \circ \theta \circ \beta \circ \theta \circ \alpha = \bar{0} \in \left\langle L(X,Y),\theta \right\rangle$ untuk semua $\beta \in L(X,Y)$. Sehingga α bukan elemen reguler dalam $\left\langle L(X,Y),\theta \right\rangle$, atau $\left\langle L(X,Y),\theta \right\rangle$ bukan semigrup reguler.

$(\Leftarrow)$

Diasumsikan $X = \{0\}$, atau $Y = \{0\}$, maka $\left| \left\langle L(X,Y),\theta \right\rangle \right| = 1$ sehingga dengan sendirinya terbukti. Selanjutnya diasumsikan bahwa θ adalah isomophisma dari Y ke X.. Dengan menggunakan Lemma 1 diperoleh bahwa $\left\langle L(X,Y),\theta \right\rangle \cong L(X)$. Karena $L(X)$ semigrup reguler, maka $\left\langle L(X,Y),\theta \right\rangle$ semigrup reguler juga.

■

4. Kesimpulan

Berdasarkan uraian dalam pembahasan tersebut, dapat disimpulkan bahwa semirgrup $\left\langle L(X,Y),\theta \right\rangle$ membentuk semigrup reguler jika dan hanya jika $X = \{0\}$, $Y = \{0\}$ atau θ isomophisma dari Y ke X.

5. Daftar Pustaka

[1] Cullen, C.G. 1966. *Matrices and Linear Transformation*. Addison-Wesley Publishing Company, Ontario.

[2] Howie, J. M**.** 1976. *An Introduction to Semigroup Theory*. Academic Press, Ltd. London.

[3] Karyati, Semigrup Reguler Transformasi Linear , *Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan , Penerapan MIPA , UNY, 2 Agustus 2004.*

[4] Kemprasit, Yupaporn, Regularity and Unit-regularity of Generalized Semigrups of Linear Transformations, *Southeast Asian Bulletin of Mathematics (2002) 25: 617-622.*