Beberapa Sifat Semigrup Matriks Atas Daerah Integral *'Admitting'* Struktur Ring[1]

K a r y a t i
Jurusan Pendidikan Matematika
FMIPA, Universitas Negeri Yogyakarta
Email: yatiuny@yahoo.com

Abstrak

Diberikan R adalah daerah integral dan n adalah integer positif dengan $n \geq 2$, serta $M_n(R)$ adalah himpunan semua matriks bujur sangkar dengan orde $n \times n$ atas R. Dibentuk suatu himpunan bagian dari $M_n(R)$ yaitu himpunan matriks di $M_n(R)$ yang invertibel yang selanjutnya dinotasikan dengan $G_n(R)$. Himpunan $M_n(R)$ ini membentuk semigrup terhadap operasi perkalian matriks biasa, $G_n(R)$ membentuk subsemigrup. Untuk suatu semigrup S, $S^0 = S$ jika semigrup S memuat elemen nol dan $S^0 = S \cup \{0\}$ jika semigrup S tidak memuat elemen nol. Suatu semigrup S dikatakan *admit struktur ring* jika terdapat suatu operasi + pada S^0 sedemikian sehingga $(S^0,+,.)$ membentuk struktur ring.

Dalam tulisan ini diselidiki sifat subsemigrup $G_n(R)$, juga subsemigrup dari $M_n(R)$, yaitu semua matriks yang determinannya ± 1.

Diperoleh hasil bahwa: baik $G_n(R)$ maupun subsemigrup dari $G_n(R)$ yaitu himpunan semua matriks yang determinannya ± 1 bukan merupakan semigrup admit struktur ring. Hal ini sebagai suatu akibat bahwa subsemigrup dari $G_n(R)$ yang memuat semua matriks yang determinannya ± 1 bukan merupakan semigrup admit struktur ring.

Kata Kunci: Daerah integral, Semigrup, Semigrup, admit struktur ring

1. Pendahuluan

Dalam penelitian oleh Yupaporn Kemprasit & Manoj Siripitukdet, telah diteliti tentang sifat-sifat suatu semigrup matriks atas ring dengan elemen satuan yang merupakan semigrup admit struktur ring. Daerah integral merupakan ring dengan elemen satuan yang tidak memuat pembagi nol sejati (Adkins : 50). Dengan demikian, daerah integral merupakan ring.

[1] Disampaikan pada Seminar Nasional Jurusan Matematika, FMIPA, UNS, Surakarta 7 Mei 2005

Diberikan R adalah daerah integral dan n adalah integer positif dengan $n \geq 2$, serta $M_n(R)$ adalah himpunan semua matriks bujur sangkar dengan orde $n \times n$ atas R. Dibentuk suatu himpunan bagian dari $M_n(R)$ yaitu himpunan matriks di $M_n(R)$ yang invertible, selanjutnya dinotasikan dengan $G_n(R)$, yaitu:

$$G_n(R) = \{A \in M_n(R) \mid A \text{ invertibel}\}$$

Himpunan ini merupakan semigrup dari $M_n(R)$.

Dari sifat matriks $M_n(R)$ diperoleh bahwa matriks $A \in M_n(R)$ invertibel jika dan hanya jika $\det A \in U(R)$, dengan $U(R)$ adalah himpunan semua unit di R. Dengan kata lain $A \in M_n(R)$ invertibel jika dan hanya jika $\det A$ invertible di R (Brown : 16). Dengan demikian, himpunan $G_n(R)$ dapat dinyatakan sebagai: $G_n(R) = \{A \in M_n(R) \mid \det A \text{ invertibel di } R\}$. Selanjutnya himpunan $\{A \in M_n(R) \mid \det A = \pm 1\} \subseteq G_n(R)$, dan jika R merupakan lapangan, maka himpunan $G_n(R) = \{A \in M_n(R) \mid \det A \neq 0\}$. Sifat determinan yang lain , antara lain: $\det(AB) = \det A . \det B$ untuk setiap $A, B \in M_n(R)$ dan $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$ untuk setiap $A \in M_n(R)$ (Brown :16).

Untuk suatu semigrup S, $S^0 = S$ jika semigrup S memuat elemen nol dan $S^0 = S \cup \{0\}$ jika semigrup S tidak memuat elemen nol. Suatu semigrup S dikatakan *admit struktur ring* jika terdapat suatu operasi + pada S^0 sedemikian sehingga $(S^0,+,.)$ membentuk struktur ring (Kemprasit & Siripitukdet : 409). Dari definisi tersebut, maka semigrup $M_n(R)$ merupakan *admit struktur ring* terhadap operasi standar penjumlahan matriks.

Dalam tulisan ini diselidiki sifat subsemigrup $G_n(R)$ maupun himpunan bagian dari $G_n(R)$, yaitu himpunan semua matriks yang determinannya ± 1.

2. Pembahasan

Lemma berikut menyatakan salah satu sifat semigrup $(M_n(R),.)$, dengan R adalah daerah integral dengan karakteristiknya tidak sama dengan dua, yang akan berguna untuk pembuktian pada teorema selanjutnya:

Lemma 2.1. (Yupaporn & Siripitukdet: 410). *Misalkan* R *adalah daerah integral dengan karakteristiknya tidak sama dengan dua. Jika* $A \in M_n(R)$ *sedemikian sehingga* $AB = BA$ *untuk setiap* $B \in M_n(R)$ *dengan* $\det B = \pm 1$, *maka* $A = aI$ *untuk suatu* $a \in R$ *dengan* I *adalah matriks identitas* $n \times n$ *atas* R.

Bukti:

Diketahui :

Himpunan R adalah daerah integral dengan karakteristiknya tidak sama dengan dua.

Matriks $A \in M_n(R)$, $AB = BA$ untuk setiap $B \in M_n(R)$ dengan $\det B = \pm 1$

Dibuktikan :

$A = aI$ untuk suatu $a \in R$ dimana I adalah matriks identitas $n \times n$ atas R.

Pembuktian :

Untuk membuktikan lemma ini, maka untuk setiap $k = 1,2,...,n$ dibentuk suatu matriks $C^{(k)} \in M_n(R)$, dengan entri-entrinya didefinisikan sebagai berikut:

$$C_{ij}^{(k)} = \begin{cases} -1 & \text{jika } i = j = k \\ 1, & \text{, jika } i = j \neq k \\ 0, & \text{untukyanglain} \end{cases}$$

Sehingga diperoleh $C^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ .... & .... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$, $C^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -1 & ... & 0 \\ .... & .... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$

dan $C^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ .... & .... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & -1 \end{bmatrix}$.

Dengan demikian diperoleh: $\det C^{(k)} = -1$ untuk setiap $k = 1,2,...,n$.

Menurut yang diketahui, dipenuhi: $AC^{(k)} = C^{(k)}A$ untuk setiap $k = 1,2,...,n$. Selanjutnya, jika $i, j = 1,2,...,n$ dan $i \neq j$ diperoleh:

$$\left(AC^{(j)}\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} C_{kj}^{(j)} = -A_{ij} \quad \text{dan} \quad \left(C^{(j)}A\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} C_{ik}^{(j)} A_{kj} = A_{ij}$$

Sehingga diperoleh $A_{ij} = -A_{ij}$, atau $2A_{ij} = 0$. Dengan mengingat $A_{ij} \in R$ dan R adalah daerah integral dengan karakteristik tidak sama dengan dua, maka persamaan tersebut hanya dipenuhi untuk $A_{ij} = 0$ untuk setiap $i, j = 1,2,...,n$ dan $i \neq j$.

Selanjutnya, untuk setiap $k = 1,2,...,n$ dibentuk suatu matriks $D^{(k)} \in M_n(R)$ dengan entri-entrinya didefinisikan sebagai berikut:

$$D_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 1 & jika \quad i = j \\ 1 & jika \quad i = 1, j = k \\ 0 & untuk \quad yang\,lain \end{cases}$$

Sehingga: $$D^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}, \qquad D^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ .... & .... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}, \dots$$

$$D^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ .... & .... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}.$$

Sehingga $\det D^{(k)} = 1$ untuk setiap $k = 1,2,...,n$. Menurut yang diketahui, maka dipenuhi: $AD^{(k)} = D^{(k)}A$ untuk setiap $k = 1,2,...,n$, dan diperoleh juga:

$$\left(AD^{(i)}\right)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} D_{ki}^{(i)} = A_{ii} \qquad \text{dan} \quad \left(D^{(i)}A\right)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} D_{ik}^{(i)} A_{ki} = A_{ii}$$

Sehingga diperoleh $A_{11} = A_{22} = ... = A_{nn}$.

Dari kondisi $A_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$ dan $A_{11} = A_{22} = ... = A_{nn}$, maka :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & A_{11} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & A_{11} \end{bmatrix} = A_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix} = A_{11} I$$

Sehingga $A = aI$, dengan $a = A_{11}$.

■

Sudah dijelaskan di depan bahwa $(M_n(R),\cdot)$ membentuk semigrup. Sementara itu, dari himpunan $M_n(R)$ dapat dibentuk suatu himpunan bagian, yaitu himpunan semua matriks di $M_n(R)$ yang mempunyai invers, atau invertibel. Selanjutnya himpunan tersebut dinotasikan dengan $G_n(R)$, sehingga $G_n(R) = \{A \in M_n(R) \mid A \text{ invertibel}\}$. Himpunan ini merupakan subsemigrup dari $(M_n(R),\cdot)$. Teorema berikut menjamin bahwa himpunan semua matriks – matriks yang invertible dengan determinannya ± 1 bukanlah suatu semigrup admit struktur ring.

Teorema 2.1. (Yupaporn & Siripitukdet: 411) *Misalkan R adalah daerah integral dengan karakteristiknya tidak sama dengan dua. Jika S subsemigrup dari $G_n(R)$ yang memuat semua matriks $A \in G_n(R)$ dengan $\det A = \pm 1$, maka S bukan semigrup admit struktur ring.*

Bukti:

Diketahui :

R adalah daerah integral dengan karakteristiknya tidak sama dengan dua.

S subsemigrup dari $G_n(R)$ yang memuat semua matriks $A \in G_n(R)$ dengan $\det A = \pm 1$

Dibuktikan : S bukan semigrup admit struktur ring

Pembuktian : Misalkan terdapat operasi biner $\oplus$ pada S^0 sedemikian sehingga $(S^0, \oplus, \cdot)$

membentuk suatu ring. Jelas bahwa $\det I = 1$, sehingga $I \in S$ dengan I adalah matriks identitas dengan ukuran $n \times n$ atas daerah integral R. Sehingga terdapat matriks $A \in S$ sedemikian sehingga dipenuhi $I \oplus A = 0$, dan untuk setiap $B \in S$ berlaku:

$$B \oplus AB = (I \oplus A)B = 0 = B(I \oplus A) = B \oplus BA$$

Hal ini berakibat $AB = BA$ untuk setiap $B \in S$. Dengan menggunakan **Lemma 2.1,** maka dipenuhi $A = aI$ untuk suatu $a \in R$. Dengan demikian dipenuhi juga $I \oplus aI = 0$.

Selanjutnya dibentuk $C \in M_n(R)$, dengan entri-entrinya didefinisikan sebagai berikut:

$$C_{ij} = \begin{cases} 1 & , jika \quad i = 1, j = 2 \\ 1 & , jika \quad i = 2, j = 1 \\ 1 & , jika \quad i = j \geq 3 \\ 0 & , untuk \quad yang\ lain \end{cases}$$

yaitu:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Jelas bahwa $C \neq I, C \neq aI, C^2 = I, \det C = -1$, sehingga $C \in S$. Diketahui bahwa $I \oplus aI = 0$ dan $C \neq aI$, sehingga dipenuhi $I \oplus C \neq 0$. Diketahui bahwa S subsemigrup dari $G_n(R)$, sehingga:

$$C(I \oplus C) = C \oplus C^2 = C \oplus I = I \oplus C$$

Dipenuhi pula $I \oplus C \neq 0$, sehingga persamaan tersebut hanya dipenuhi $C = I$. Hal ini kontradiksi dari yang dibentuk., yaitu $C \neq I$. Akibatnya S bukan semigrup admit struktur ring

■

Akibat dari **Teorema 2.1** menyatakan bahwa grup $G_n(R)$ dan suatu subgrup $G_n(R)$, yaitu himpunan matriks di $G_n(R)$ yang determinannya adalah ± 1 bukan merupakan semigrup admit struktur ring. Selengkapnya diberikan sebagai berikut:

Akibat 2.1. *Jika R adalah daerah integral dengan karakteristik tidak sama dengan dua, maka $G_n(R)$ dan subgrup $G_n(R)$, yaitu himpunan matriks di $G_n(R)$ yang determinannya adalah ± 1 bukan merupakan semigrup admit struktur ring.*

Bukti:

Diketahui : R daerah integral dengan karakteristik tidak sama dengan dua,
$G_n(R)$ suatu grup
$U = \{A \in G_n(R) \mid \det A = \pm 1\}$

Dibuktikan : $G_n(R)$ dan $\{A \in G_n(R) \mid \det A = \pm 1\}$ bukan semigrup admit stuktur ring

Pembuktian :

- Diketahui $G_n(R)$ suatu grup, maka dengan sendirinya merupakan semigrup, yang sekaligus merupakan subsemigrup trivialnya. Diketahui pula $G_n(R)$ memuat $U = \{A \in G_n(R) \mid \det A = \pm 1\}$. Sehingga menurut Teorema 2.1 berakibat $G_n(R)$ bukan merupakan semigrup admit struktur ring.
- Diketahui $U = \{A \in G_n(R) \mid \det A = \pm 1\}$ suatu subgrup, maka dengan sendirinya merupakan subsemigrup. Jelas bahwa U memuat semua matriks dengan determinannya ± 1. Sehingga menurut Teorema 2.1 berakibat $U = \{A \in G_n(R) \mid \det A = \pm 1\}$ bukan merupakan semigrup admit struktur ring.

■

DAFTAR PUSTAKA

[1] Adkins & Weintraub. 1992. *Algebra: An Approach via Module Theory*. Springer-Verlag, New York.

[2] Brown, W.C. 1993. *Matrices Over Commutative Rings.* Marcel Dekker, Inc, New York.

[2] Kemprasit, Y and Siripitukdet, M. 2002. Matrix Semigroup Admitting Ring Structure. *Bulletin Calcutta Mathematics Soc. Volume 5 (2002) 409 - 412*