Sifat Pasangan *Adjoin* Relatif Terhadap Bentuk Bilinear[1]

K a r y a t i
Jurusan Pendidikan Matematika
FMIPA, Universitas Negeri Yogyakarta
Email: yatiuny@yahoo.com

Abstract

Let X and Y be vector spaces over a field K, then be constructed a bilinear form $B : X \times Y \longrightarrow K$. This paper discuss the properties of adjoin pairs with respect to the bilinear form B.

The result show that : (f,g) is an Adjoin pairs if and only if $f \circ B_* = B_* \circ g^*$, $g^* \in L(Y^*)$ defined as $(t)g^* = g \circ t$, $\forall t \in Y^*$; (f,g) is Adjoin pairs if and only if $g \circ B^* = B^* \circ f^*$, $f^* \in L(X^*)$ defined as $(t)f^* = f \circ t$, $\forall t \in X^*$; If $B : X \times Y \to K$ is a non degenerate bilinear form and the dimension of X and Y are finite, then for every $f \in L(X)$ there is $g \in L(Y)$ such that (f,g) is Adjoin pairs, $N(g) = \hat{R}(f)$ and $\hat{R}(g) = N(f)$. As the corollary, for every $g \in L(Y)$ there is $f \in L(X)$ such that (f,g) is Adjoin pairs, $N(g) = \hat{R}(f)$ and $\hat{R}(g) = N(f)$.

***Keywords**: Bilinear form, non degenerate, adjoin pairs*

1. Pendahuluan

Dari Aljabar Linear diperoleh beberapa pengertian dan sifat-sifat sebagai berikut (Lang :1970): Misalkan X dan Y ruang vektor berdimensi hingga atas lapangan K. Himpunan $X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$ membentuk ruang vektor atas lapangan K terhadap operasi jumlah dan pergandaan biasa.

Pemetaan $B : X \times Y \longrightarrow K$ disebut bentuk bilinear apabila linear terhadap setiap variabelnya . Pemetaan ini menentukan dua pemetaan linear, yaitu:

[1] Disampaikan pada Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA, Hotel Inna Garuda Yogyakarta, 1 Agustus 2006

$B_* : X \to Y^*$ dan $B^* : Y \to X^*$ yang masing-masing didefinisikan oleh $(x)B_* = (x,-)B$ dan $(y)B^* = (-,y)B$. Dalam tulisan ini fungsi dianggap sebagai operator kanan.

Selanjutnya yang dimaksud dengan $L(X)$ adalah himpunan transformasi linear dari ruang vektor X ke dirinya sendiri. Transformasi $f \in L(X)$ dikatakan *Adjoin* dengan $g \in L(Y)$ relatif terhadap bentuk bilinear B jika $((x)f, y)B = (x,(y)g)B$ untuk semua $x \in X$ dan $y \in Y$. Dalam hal demikian dikatakan juga $g \in L(Y)$ *Adjoin* dengan $f \in L(X)$ relatif terhadap B. Selanjutnya pasangan (f, g) disebut pasangan *Adjoin*.

Dalam penulisan ini akan diselidiki beberapa sifat pasangan adjoin relatif terhadap bentuk bilinear B.

2. Ruang Dual

Misalkan X ruang vektor atas lapangan K; himpunan $X^* = \{f : X \to K \mid f \text{ transformasi linear}\}$ merupakan ruang vektor atas lapangan K terhadap operasi jumlah dua fungsional biasa dan pergandaan skalar. Selanjutnya ruang vektor X^* ini disebut ruang dual dari ruang vektor X. Salah satu sifat ruang dual X^* adalah mempunyai dimensi yang sama dengan ruang vektor X.

3. Sifat Bentuk Bilinear

Bentuk bilinear $B : X \times Y \longrightarrow K$ menentukan dua pemetaan linear yaitu $B_* : X \to Y^*$ dan $B^* : Y \to X^*$ yang didefinisikan oleh: $(x)B_* = (x,-)B$ dan $(y)B^* = (-,y)B$. *Kernel* dari $B_* : X \to Y^*$ adalah $N(B_*) = \{x \in X \mid (x)B_* = \theta_*\}$, dengan θ_* adalah fungsi nol dari Y ke K. Hal yang sama $N(B^*) = \{y \in Y \mid (y)B^* = \theta^*\}$ dan θ^* adalah fungsi nol dari X ke K. Bentuk bilinear B dikatakan *non-degenerate* jika $N(B_*) = N(B^*) = \{\theta\}$.

Annihilator dari U (relatif terhadap B), dengan U suatu ruang bagian dari X , adalah $\hat{U} = \{ y \in Y \mid B(u, y) = 0, \forall u \in U \}$. Dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa $\hat{U}$ adalah ruang bagian ruang vektor Y, yaitu: untuk setiap $a, b \in \hat{U}$, maka $B(u, a+b) = B(u, a) + B(u, b) = 0 + 0 = 0$ untuk setiap $u \in U$. Sehingga $a + b \in \hat{U}$. Untuk setiap $\alpha \in K$ dan untuk setiap $a \in \hat{U}$, maka $B(u, \alpha a) = \alpha B(u, a) = \alpha 0 = 0$. Sehingga $\alpha a \in \hat{U}$.

Hal yang sama didefinisikan *annihilator* ruang bagian V, dengan V ruang bagian dari ruang Y , yaitu : $\hat{V} = \{ x \in X \mid B(x, v) = 0, \forall v \in V \}$. Secara analog, dapat ditunjukkan bahwa $\hat{V}$ adalah ruang bagian ruang vektor X . Jika ruang vektor X dan Y berdimensi hingga dan bentuk bilinear $B : X \times Y \to K$ merupakan bentuk bilinear yang *non degenerate*, maka dimensi X sama dengan dimensi Y (Karyati: 2002).

Dalam bagian berikut akan dibicarakan syarat perlu dan cukup Pasangan Adjoin yang penulis kembangkan dari tulisan Rajendran dan Nambooripad (2000).

4. Sifat Pasangan *Adjoin* relatif terhadap Bentuk Bilinear

Lemma dan akibat berikut memberikan syarat perlu dan cukup agar (f, g) merupakan pasangan *Adjoin:*

Lemma 1. *Jika* $(f, g) \in L(X) \times L(Y)$ *maka kondisi berikut ekuivalen:*

a. (f, g) *adalah pasangan adjoin*

b. $f \circ B_* = B_* \circ g^*$, *dengan* $g^* \in L(Y^*)$ *yang didefinisikan* $(t)g^* = g \circ t$, $\forall t \in Y^*$

Bukti:

($\Rightarrow$)

Dari yang diketahui dipenuhi : $(B_*)g^* = g \circ B_*$.

(f,g) pasangan *adjoin* $\Rightarrow B((x)f,y)=B(x,(y)g)$ (definisi padangan adjoin)

$\Rightarrow (y)B_{(x)f}=((y)g)B_X$ ($\forall y\in Y$, B menentukan dua pemetaan linear)

$\Rightarrow (y)B_{(x)f}=(y)(g\circ B_X)$ ($\forall y\in Y$)

$\Rightarrow B_{(x)f}=g\circ B_X$ ($\forall x\in X$)

$\Rightarrow ((x)f)B_*=g\circ (x)B_*$ (definisi B_*)

$\Rightarrow ((x)f)B_*=((x)B_*)g^*$ (definisi g^*)

$\Rightarrow (x)(f\circ B_*)=(x)(B_*\circ g^*)$ (definisi komposisi fungsi)

$\Rightarrow f\circ B_*=B_*\circ g^*$.

$(\Leftarrow)$

Dipenuhi $f\circ B_*=B_*\circ g^*$, dengan $g^*\in L(Y^*)$ yang didefinisikan $(t)g^*=g\circ t$, $\forall t\in Y^*$, sehingga:

$f\circ B_*=B_*\circ g^*\Rightarrow (x)(f\circ B_*)=(x)(B_*\circ g^*)$ ($\forall x\in X$)

$\Rightarrow ((x)f)B_*=((x)B_*)g^*$ (definisi komposisi fungsi)

$\Rightarrow ((x)f)B_*=g\circ (x)B_*$ (definisi g^*)

$\Rightarrow B_{(x)f}=g\circ B_X$ (definisi B_*)

$\Rightarrow (y)B_{(x)f}=(y)(g\circ B_X)$ ($\forall y\in Y$)

$\Rightarrow (y)B_{(x)f}=((y)g)B_X$ (definisi komposisi fungsi)

$\Rightarrow B((x)f,y)=B(x,(y)g)$

$\Rightarrow (f,g)$ pasangan *adjoin*

■

Akibat 2. *Lemma di atas berakibat pernyataan berikut juga ekuivalen:*

a. (f, g) *adalah pasangan adjoin*

b. $g \circ B^* = B^* \circ f^*$, *dengan* $f^* \in L(X^*)$ *didefinisikan oleh:* $(t)f^* = f \circ t$, $\forall t \in X^*$

Bukti:

$(\Rightarrow)$

(f, g) pasangan *adjoin* $\Rightarrow B((x)f, y) = B(x, (y)g)$ (definisi padangan adjoin)

$$\Rightarrow B((x)f, y) = (x)B_{(y)g}$$

$$\Rightarrow (x)(f \circ B_y) = (x)B_{(y)g}$$

$$\Rightarrow f \circ B_y = B_{(y)g}$$

$$\Rightarrow f \circ (y)B^* = ((y)g)B^*$$

$$\Rightarrow ((y)B^*)f^* = (y)(g \circ B^*)$$

$$\Rightarrow (y)(B^* \circ f^*) = (y)(g \circ B^*)$$

$$\Rightarrow B^* \circ f^* = g \circ B^*$$

Dengan membalik arah buktyi tersebut dapat dibuktikan jika $g \circ B^* = B^* \circ f^*$, dengan $f^* \in L(X^*)$ didefinisikan oleh: $(t)f^* = f \circ t$, $\forall t \in X^*$, maka (f, g) pasangan *adjoin* .

■

Teorema dan akibat berikut merupakan konsekuensi dari **Lemma 1** , **Akibat 2** dan salah satu sifat ruang dual.

Teorema 3. *Misalkan* X *dan* Y *ruang-ruang vektor berdimensi hingga. Jika* $B : X \times Y \rightarrow K$ *non degenerate, maka untuk setiap* $f \in L(X)$ *terdapat* $g \in L(Y)$ *sedemikian sehingga* g *adjoin dengan* f *dan* $N(g) = R(\hat{f})$ *serta* $R(\hat{g}) = N(f)$.

Bukti:

Bentuk bilinear $B: X \times Y \to K$ *non degenerate,* sehingga berlaku $\dim X = \dim Y$. Sementara itu berlaku juga $\dim X = \dim X^*$, sehingga $\dim Y = \dim X^*$. Diketahui $N(B^*) = \{0\}$, sehingga B^* injektif. Berlaku juga $\dim Y = \dim(N(B^*)) + \dim(R(B^*))$, sehingga $\dim R(B^*) = \dim X^*$. Akibatnya B^* surjektif. Jadi B^* isomorphisma.

Ambil sebarang $f \in L(X)$. Selanjutnya dibentuk $g = B^* \circ f^* \circ (B^*)^{-1}$, $f^* \in L(X^*)$ yang didefinisikan oleh: $(t)f^* = f \circ t$ untuk semua $t \in X^*$, suatu ruang dual dari ruang X. Jelas bahwa $g \in L(Y)$ dan $g \circ B^* = B^* \circ f^* \circ (B^*)^{-1} \circ B^* = B^* \circ f^*$. Menurut **Akibat 2** diperoleh g *Adjoin* dengan f.

Ambil $x \in N(f)$, sehingga $(x)f = 0$ dan $((x)f, y)B = (0, y)B = 0$, untuk semua $y \in Y$. Diketahui g *Adjoin* dengan f, sehingga: $((x)f, y)B = (x, (y)g)B = 0$, sehingga $x \in \hat{R}(g)$. Jadi $N(f) \subseteq \hat{R}(g)$ (1)

Ambil $x \in \hat{R}(g)$ sehingga $(x, (y)g)B = 0$ untuk semua $y \in Y$. Diketahui g *Adjoin* dengan f, sehingga $((x)f, y)B = (x, (y)g)B = 0$, untuk semua $y \in Y$. Diketahui B *non degenerate*, sehingga $(x)f = 0$ atau $x \in N(f)$.

Jadi $\hat{R}(g) \subseteq N(f)$ (2)

Dari persamaan (1) dan (2) terbukti bahwa $\hat{R}(g) = N(f)$.

Ambil $y \in N(g)$, sehingga $(y)g = 0$ dan $(x, (y)g)B = (x, 0)B = 0$, diketahui g *Adjoin* dengan f, sehingga $((x)f, y)B = (x, (y)g)B = 0$, untuk semua $x \in X$, sehingga $y \in \hat{R}(f)$. Jadi $N(g) \subseteq \hat{R}(f)$ (3)

Ambil $y \in \hat{R}(f)$ maka $((x)f, y)B = 0$, untuk semua $x \in X$. Diketahui g *Adjoin* dengan f, sehingga $((x)f, y)B = (x, (y)g)B = 0$ untuk semua $x \in X$. Diketahui B *non degenerate*, sehingga $(y)g = 0$ atau $y \in N(g)$.

Jadi $R(f)^{\perp} \subseteq N(g)$ (4)

Dari persamaan (3) dan (4) terbukti bahwa $N(g) = R(f)^{\perp}$.

■

Akibat 4 . *Misalkan* X *dan* Y *ruang-ruang vektor berdimensi hingga. Jika* $B: X \times Y \rightarrow K$ *non degenerate, maka untuk setiap* $B: X \times Y \rightarrow K$ *terdapat* $f \in L(X)$ *sedemikian sehingga* f *Adjoin dengan* g *dan* $N(g) = R(f)^{\perp}$ *serta* $R(g)^{\perp} = N(f)$.

Bukti:

Bukti analog dengan lemma sebelumnya. Pemetaan B_* juga isomorphisma, sehingga dapat dibentuk $f = B_* \circ g^* \circ (B_*)^{-1}$. Bukti selanjutnya analog.

5. Kesimpulan

Dari uraian di atas diperoleh beberapa sifat pasangan adjoin sebagai berikut:

Jika $(f, g) \in L(X) \times L(Y)$ maka kondisi berikut ekuivalen berlaku: (f, g) pasangan adjoin jika dan hanya jika $f \circ B_* = B_* \circ g^*$, dengan $g^* \in L(Y^*)$ yang didefinisikan $(t)g^* = g \circ t$, $\forall t \in Y^*$, sebagai akibatnya berlaku juga: (f, g) pasangan adjoin jika dan hanya jika $g \circ B^* = B^* \circ f^*$, dengan $f^* \in L(X^*)$ didefinisikan oleh: $(t) f^* = f \circ t$, $\forall t \in X^*$. Sifat lain diperoleh : Jika $B: X \times Y \rightarrow K$ non degenerate, maka untuk setiap $f \in L(X)$ terdapat $g \in L(Y)$ sedemikian sehingga g adjoin dengan f dan $N(g) = R(f)^{\perp}$ serta $R(g)^{\perp} = N(f)$. Sebagai akibatnya dipenuhi sifat: Jika $B: X \times Y \rightarrow K$ non degenerate, maka untuk setiap $f \in L(X)$ terdapat $g \in L(Y)$ sedemikian sehingga g adjoin dengan f dan $N(g) = R(f)^{\perp}$ serta $R(g)^{\perp} = N(f)$.

Kepustakaan

Karyati, 2002. *Semigrup yang dikonstuksikan dari Bentuk Bilinear*. Tesis. Program Pasca Sarjana, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta

Lang, S. 1970. *Linear Algebra*. Addison –Wesley Publishing Company, Inc, New York.

Rajendran, D., Nambooripad, K.S.S., 2000. Bilinear Forms and a Semigrup of Linear Transformations. *Shoutheast Asian Bulletin of Mathematics 24:609-616.*