

Skew- Semifield dan Beberapa Sifatnya¹

K a r y a t i

Jurusan Pendidikan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
E-mail: yatiuny@yahoo.com

Abstrak

Suatu *field* (lapangan) F adalah struktur aljabar yang melibatkan dua operasi biner yang disebut penjumlahan (dinotasikan dengan “ + ”) dan perkalian (yang dinotasikan dengan “ . ”) sedemikian sehingga $(F,+)$ dan $(F,.)$ masing – masing membentuk grup abelian dan memenuhi aksioma distributive. Dengan menghilangkan beberapa aksioma pada *field*, maka diperoleh struktur-struktur baru yang merupakan generalisasi dari *field*.

Pada tulisan ini akan dibahas salah satu generalisasi dari *field* yang disebut dengan *skew-semifield* dan beberapa sifatnya. *Skew-semifield* S adalah *semiring* komutatif terhadap jumlah dengan elemen nol 0 sedemikian sehingga $(S, +)$ merupakan grup.

Dari hasil kajian diperoleh hasil bahwa: Jika S *skew – semifield* yang memuat elemen tak nol yang mempunyai invers jumlah maka S adalah *skew – semifield*. Hasil lain diperoleh bahwa: *Skew semifield* S memuat paling banyak satu elemen a sedemikian sehingga $a \neq 1$ dan $a^2 = 1$. Lebih lanjut jika $a \in S$ mempunyai sifat demikian , maka $ax = xa$ untuk setiap x di S .

Kata Kunci: *Semiring, semifield, skew-field, skew-semifield*

A. Pendahuluan

Dalam kajian struktur aljabar, seringkali dikaji sifat-sifat yang masih berlaku maupun sifat-sifat baru yang muncul pada suatu struktur baru yang diperoleh dengan menghilangkan beberapa aksioma (generalisasi) atau dengan menambah beberapa aksioma pada struktur aljabar sebelumnya.

Misalkan *ring* (gelanggang) R adalah himpunan tak kosong R bersama dua operasi biner ‘+’ (penjumlahan) dan operasi biner ‘.’ (perkalian) sedemikian sehingga $(R,+)$ membentuk grup abelian , $(R,.)$ membentuk semigrup dan berlaku sifat distributif kanan maupun kiri (Adkin & Weintraub: p. 49). *Ring* $(R,+)$ dikatakan mempunyai elemen identitas jika terdapat $1 \in R$ sedemikian sehingga

¹ Disampaikan pada Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan & Penerapan MIPA, Hotel Sahid Yogyakarta, 8 Februari 2005

berlaku $x.1=1.x=x$ untuk setiap $x \in R$. *Division ring* (*skew-field*) adalah suatu ring dengan elemen identitas sedemikian sehingga setiap elemen yang bukan elemen nol mempunyai invers perkalian. Sedangkan *field* (lapangan) adalah *skew field* yang komutatif terhadap operasi perkalian (Adkin & Weintraub: p. 50). Dengan demikian, baik *ring* maupun *skew-field* masing-masing adalah generalisasi dari *field*, atau dapat dikatakan bahwa *skew-field* maupun *field* adalah bentuk khusus dari ring. Sehingga semua sifat yang berlaku pada ring pasti berlaku pada *skew-field* maupun *field*, tetapi tidak sebaliknya. Sehingga ada sifat dalam *skew-field* maupun *field* yang tidak berlaku pada *ring*.

Dalam tulisan Kemprasit & Triphop disebutkan bahwa *semiring* $(S,+,.)$ adalah struktur aljabar dimana $(S,+)$ dan $(S,.)$ masing – masing membentuk struktur semigrup dan berlaku sifat distributif kanan maupun kiri. Elemen 0 pada *semiring* $(S,+,.)$ disebut elemen nol (*zero*) jika $x+0=0+x=x$ dan $x.0=0.x=0$ untuk semua $x \in S$. Sebagai contoh : $M_{2 \times 2} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a,b,c,d \in Z^+ \right\}$, dengan Z^+ himpunan bulat positif. Terhadap operasi penjumlahan dan perkalian matriks, maka $(M_{2 \times 2},+,.)$ membentuk *semiring*.

Semifield adalah *semiring* $(S,+,.)$ sedemikian sehingga $(S,+)$ membentuk semigrup komutatif dan $(S,.)$ grup komutatif dengan elemen nol (*zero*) adalah 0 , yang merupakan elemen identitas terhadap penjumlahan (Mitchell & Sinutoke dalam Kemprasit & Triphop). Struktur *semifield* ini merupakan generalisasi dari *field* dan merupakan bentuk khusus dari *semiring*. Sebagai contoh adalah *semiring* $(\mathbb{R}^+ \cup \{0\},+,.)$ adalah *semifield* terhadap operasi penjumlahan dan perkalian biasa pada bilangan real.

Struktur *semifield* ini dapat digeneralisasi dengan menghilangkan sifat komutatif terhadap perkalian, yang disebut dengan *skew-semifield*. Dengan demikian, *skew-semifield* adalah *semiring* $(S,+,.)$ sedemikian sehingga $(S,+)$ membentuk semigrup komutatif dan $(S,.)$ grup komutatif dengan elemen nol (*zero*) adalah 0 , yang merupakan elemen identitas terhadap penjumlahan (Kemprasit &

Triphop). Dengan kata lain *skew-semifield* adalah *semiring* komutatif dengan elemen nol (*zero*) adalah 0 sedemikian sehingga $(S \setminus \{0\}, \cdot)$ adalah suatu grup dan *semifield* adalah *skew-semifield* komutatif terhadap perkalian. Dalam kenyataannya, *skew-semifield* adalah generalisasi dari *semifield* dan *skew-field*. Sebagai contoh adalah: misalkan n adalah bilangan integer positif yang lebih besar dari 1 dan S adalah himpunan semua matriks ukuran $n \times n$ atas bilangan real dengan bentuk elemen sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & x \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

dengan $a_i > 0$ untuk semua i .

Terhadap operasi jumlah dan perkalian matriks, S merupakan *skew-semifield* yang bukan merupakan *semifield* maupun *skew-field*. Dengan invers perkaliannya dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_1^{-1} & 0 & 0 & \dots & -xa_1^{-1}a_n^{-1} \\ 0 & a_2^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n^{-1} \end{bmatrix}$$

Dalam kajian saat ini akan diselidiki beberapa sifat yang berlaku pada *skew-semifield*.

B. Pembahasan

Dalam bagian ini, beberapa sifat *skew-semifield* dibuktikan. Sepanjang dalam tulisan ini, untuk *skew-semifield* $(S, +, \cdot)$, 1 menotasikan elemen identitas dari grup $(S \setminus \{0\}, \cdot)$.

Sifat berikut memberikan syarat cukup agar suatu *skew-semifield* membentuk suatu *skew-field*:

Teorema 1 (Kemprasit & Triphop) . *Jika suatu skew-semifield $(S,+,\cdot)$ memuat elemen tak nol yang mempunyai invers jumlah, maka $(S,+,\cdot)$ adalah skew-field*

Bukti:

Dalam hal ini diketahui bahwa $(S,+,\cdot)$ skew-semifield dan suatu elemen $a \in S \setminus \{0\}$ mempunyai invers jumlah. Selanjutnya dibuktikan bahwa $(S,+,\cdot)$ skew-field. Dengan demikian tinggal dibuktikan bahwa setiap elemen di $(S,+,\cdot)$ mempunyai invers jumlah. Bukti selengkapnya diberikan sebagai berikut:

Diketahui $a \in S \setminus \{0\}$ mempunyai invers jumlah, misalkan invers tersebut adalah $b \in S$, maka dipenuhi $a + b = 0$. Di lain pihak, $(S \setminus \{0\}, \cdot)$ adalah suatu grup sehingga $a \in S \setminus \{0\}$ mempunyai invers perkalian yang dinotasikan dengan a^{-1} yang juga di dalam $S \setminus \{0\}$. Selanjutnya, ambil sebarang elemen $x \in S$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} x + xa^{-1}b &= xa^{-1}a + xa^{-1}b && (a^{-1}a = 1, S \text{ skew-semifield}) \\ &= xa^{-1}(a + b) && (S \text{ bersifat distributif}) \\ &= xa^{-1}0 && (b \text{ invers jumlah dari } a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Hal ini berlaku untuk setiap $x \in S$ dan untuk setiap $x \in S$ dapat ditemukan $xa^{-1}b \in S$ sedemikian sehingga $x + xa^{-1}b = 0$, maka dapat disimpulkan bahwa setiap elemen pada skew-semifield S mempunyai invers jumlah. Dengan demikian terbukti bahwa $(S,+,\cdot)$ skew-field.

Berikutnya akan diberikan sifat lain dari struktur skew – semifield. Sifat ini menjamin bahwa suatu skew – semifield hanya memiliki paling banyak satu elemen yang mempunyai sifat $a \neq 1$ dan $a^2 = 1$ untuk suatu elemen $a \in S$. Teorema berikut juga sekaligus memberikan akibat dari suatu elemen skew-semifield yang mempunyai sifat demikian, yang selengkapnya diberikan pada teorema sebagai berikut:

Teorema 2. (Kemprasit & Triphop). Suatu skew-semifield S memuat paling banyak satu elemen yang mempunyai sifat $a \neq 1$ dan $a^2 = 1$. Lebih lanjut, jika $a \in S$ mempunyai sifat demikian, maka $ax = xa$ untuk setiap $x \in S$.

Bukti:

Untuk pembuktian pada bagian pertama, diambil elemen $b \in S$ yang juga mempunyai sifat $b \neq 1$ dan $b^2 = 1$. Selanjutnya dibuktikan bahwa $b = a$.

Untuk $a \in S$, dengan sifat $a \neq 1$ dan $a^2 = 1$, maka diperoleh:

$$a(1 + a) = a + a^2 = a + 1$$

Diketahui $(S \setminus \{0\}, +)$ adalah grup, maka $1 + a \neq 0$. Akibatnya, pada persamaan di atas hanya dipenuhi untuk $a = 1$. Akan tetapi diketahui bahwa $a \neq 1$ sehingga $a + 1 = 0$. Dari sini diperoleh bahwa 1 adalah invers jumlah dari a . Dengan demikian dimiliki kondisi bahwa S adalah skew-semifield yang memuat elemen tak nol yang mempunyai invers jumlah. Menurut Teorema 1, kondisi ini berakibat S adalah skew-field.

Jika $b \in S$ yang juga mempunyai sifat $b \neq 1$ dan $b^2 = 1$, secara sama akan diperoleh bahwa $b + 1 = 0$. Dengan demikian diperoleh persamaan $a + 1 = b + 1$, dan diperoleh $a = b$.

Selanjutnya dibuktikan bahwa jika elemen $a \in S$, dengan sifat $a \neq 1$ dan $a^2 = 1$, maka berlaku $ax = xa$, untuk setiap $x \in S$. Untuk membuktikan hal ini, ambil sebarang elemen $x \in S$, maka :

$$x + ax = (1 + a)x = 0 \cdot x = 0 = x \cdot (1 + a) = x + xa$$

Dari persamaan tersebut diperoleh bahwa $ax = xa$ yang berlaku untuk setiap $x \in S$.

C. Kesimpulan

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa ada 2 sifat dari suatu skew-semifield yaitu:

1. Jika suatu skew-semifield $(S, +, \cdot)$ memuat elemen tak nol yang mempunyai invers jumlah, maka $(S, +, \cdot)$ adalah skew-field.

2. Suatu *skew-semifield* S memuat paling banyak satu elemen yang mempunyai sifat $a \neq 1$ dan $a^2 = 1$. Lebih lanjut, jika $a \in S$ mempunyai sifat demikian, maka $ax = xa$ untuk setiap $x \in S$.

D. Daftar Pustaka:

Adkins, W.A and Weintraub, S.H. 1992. *Algebra: An Approach via Module Theory*. Springer – Verlag, New York.

Kemprasit, Y and Triphop, N. 2001. Some Matrix Groups Admitting Skew-Semifield Structure. *East-West Journal of Mathematics: Vol 3 No. 1 (2001) pp.11-22*