BAB I
PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Struktur *ring* (gelanggang) R adalah suatu himpunan R yang kepadanya didefinisikan dua operasi biner yang disebut penjumlahan dan pergandaan yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu, yaitu: terhadap operasi penjumlahan membentuk grup abelian, terhadap operasi pergandaan membentuk struktur semigrup dan memenuhi sifat distributif kiri maupun kanan. Ring disebut ring komutatif jika terhadap operasi pergandaannya, bersifat komutatif.

Himpunan matriks ordo n atas ring R komutatif, yang selanjutnya dinotasikan dengan $M_{n\times n}(R)$, membentuk struktur ring terhadap operasi penjumlahan matriks dan operasi pergandaan matriks baku. Himpunan bagian dari $M_n(R)$ yaitu himpunan matriks di $M_n(R)$ yang invertibel yang selanjutnya dinotasikan dengan $G_n(R)$, yaitu: $G_n(R) = \{A \in M_n(R) \mid A \text{ invertibel}\}$ merupakan semigrup dari $M_n(R)$ terhadap operasi pergandaan matriks baku (Kemprasit & Siripitukdet: p. 409)

Dari sifat matriks $M_n(R)$ diperoleh bahwa matriks $A \in M_n(R)$ invertibel jika dan hanya jika $\det A \in U(R)$, dengan $U(R)$ adalah himpunan semua unit di R. Dengan kata lain $A \in M_n(R)$ invertibel jika dan hanya jika $\det A$ invertible di R (Brown :p.16). Dengan demikian, himpunan $G_n(R)$ dapat dinyatakan sebagai: $G_n(R) = \{A \in M_n(R) \mid \det A \text{ invertibel di } R\}$. Selanjutnya himpunan $\{A \in M_n(R) \mid \det A = \pm 1\} \subseteq G_n(R)$, dan jika R merupakan lapangan, maka himpunan $G_n(R) = \{A \in M_n(R) \mid \det A \neq 0\}$. Sifat determinan yang lain , antara lain: $\det(AB) = \det A . \det B$ untuk setiap $A, B \in M_n(R)$ dan $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$ untuk setiap $A \in M_n(R)$ (Brown : p.16).

Untuk suatu semigrup S, $S^0 = S$ jika semigrup S memuat elemen nol dan $S^0 = S \cup \{0\}$ jika semigrup S tidak memuat elemen nol. Suatu semigrup S dikatakan *admit struktur ring* jika terdapat suatu operasi + pada S^0 sedemikian sehingga $(S^0, +, .)$ membentuk struktur ring (Kemprasit & Siripitukdet : p.409). Dari definisi tersebut, maka semigrup $M_n(R)$ merupakan *admit struktur ring* terhadap operasi standar penjumlahan matriks.

B. Rumusan Masalah

Dari uraian latar belakang masalah di atas, dapat dirumuskan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana karakteristik subsemigrup $M_n(R)$ yang memuat himpunan matriks yang determinannya nol ?
2. Bagaimana karakteristik subsemigrup $G_n(R)$ maupun himpunan bagian dari $G_n(R)$, yaitu himpunan semua matriks yang determinannya ± 1?

C. Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk:

1. Menyelidiki sifat subsemigrup $M_n(R)$ yang memuat himpunan matriks yang determinannya nol
2. Menyelidiki sifat subsemigrup $G_n(R)$ maupun himpunan bagian dari $G_n(R)$, yaitu himpunan semua matriks yang determinannya ± 1

D. Manfaat Hasil Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan dapat bermanfaat untuk membuka wawasan bagi peneliti lain terutama dalam mengkaji struktur semigrup matriks atas ring 'admit' struktur ring, yang merupakan semigrup dengan elemen-elemnnya matriks atas ring yang di dalamnya dapat didefinisikan suatu operasi jumlah sedemikian sehingga membentuk struktur ring. . Selanjutnya diharapkan penelitian ini dapat menjadi sumber ide yang dapat dikembangkan oleh peneliti lain.

E. Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan studi literatur. Seperti pada penelitian demikian, maka dalam penelitian ini ditempuh langkah-langkah sebagai berikut:

1. Dipelajari tentang definisi dan sifat struktur gelanggang
2. Dipelajari tentang definisi dan sifat matriks atas gelanggang
3. Dipelajari tentang definisi dan sifat semigrup
4. Dipelajari tentang definisi semigrup 'admit' struktur gelanggang.
5. Dikaji tentang karakteristik subsemigrup $M_n(R)$ dengan determinannya nol maupun suatu ideal dalam $M_n(R)$
6. Dikaji tentang karakteristik subsemigrup $G_n(R)$ maupun himpunan bagian dari $G_n(R)$, yaitu himpunan semua matriks yang determinannya ± 1

BAB II
LANDASAN TEORI

Untuk keperluan dalam pembahasan masalah yang telah diangkat pada rumusan masalah sebelumnya, maka perlu didukung definisi ***ring*** (gelanggang) sebagai berikut :

Definisi 2.1. (Adkins : p. 49) *Ring (R,+,.) adalah suatu himpunan R bersama dengan dua operasi biner* $+ : RxR \to R$ *(penjumlahan) dan* $. : RxR \to R$ *(pergandaan) yang memenuhi aksioma sebagai berikut:*

(a) (R,+) merupakan grup abelian

(b) a.(b.c) = (a.b).c (asosiatif)

(c) *a.(b + c) = a.b + a.c dan (a + b).c = a.c + b.c (distributif kanan dan kiri)*

Ring *R* dikatakan komutatif, jika terhadap operasi pergandaannya bersifat komutatif, dan dikatakan mempunyai elemen satuan jika terdapat $1 \in R$ sedemikian sehingga *a.1=1.a=a.*. Suatu elemen $a \in R$ dikatakan mempunyai invers $b \in R$ jika berlaku *a.b=b.a=1*. Suatu ring disebut lapangan (***field***) jika komutatif, mempunyai elemen satuan dan setiap elemen tak nolnya mempunyai invers.

Dalam mempelajari suatu struktur aljabar, senantiasa dipelajari suatu sub strukturnya, yang didefinisikan atas himpunan bagiannya. Dalam hal ini, diberikan definisi tentang sub ring sebagai berikut:

Definisi 2.2. (Adkins : p. 51) *Misalkan S himpunan bagian dari ring R, himpunan S dikatakan sub ring dari R jika terhadap operasi biner yang sama pada R , S membentuk ring.*

Matriks yang entri-entrinya anggota suatu ring, disebut matriks atas ring, yang dinotasikan dengan $M_{nxn}(R)$. Dalam hal ini ringnya adalah ring komutatif. Untuk mencari determinan matriks atas ring komutatif analog dengan cara mencari determinan suatu matriks atas lapangan. Beberapa hal terkait dengan matriks atas ring diberikan dalam definisi, teorema maupun lemma sebagai berikut:

Teorema 2.1. (**Brown: p. 16**) (Laplace) Diberikan $A=(a_{ij}) \in M_{nxn}(R)$

(a) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} cof_{kj}(A) = \delta_{ik} \det(A)$, *i,k= 1,2,…,n*

(b) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} cof_{ik}(A) = \delta_{jk} \det(A)$

dengan *cof* adalah kofaktor matriks *A*.

Teorema di atas berguna dalam menentukan determinan suatu matriks dengan menggunakan ekspansi kofaktor dari matriks yang bersangkutan. Selanjutnya diberikan sifat – sifat matriks atas ring, terkait dengan determinannya:

Teorema 2.2. (Brown : p.16) *Diberikan* $A=(a_{ij}) \in M_{nxn}(R)$, *berlaku:*
$A\ adj(A) = adj(A).\ A = \det(A).\ I_n$, *dengan* $[Adj(A)]_{ij} = cof_{ij}(A)$

Selanjutnya, teorema berikut secara eksplisit memberikan syarat cukup dan perlu suatu matriks atas ring mempunyai invers, atau invertibel:

Teorema 2.3. (Brown : p. 18) *Diberikan* $A=(a_{ij}) \in M_{nxn}(R)$, *maka A invertibel jika dan hanya jika det(A) adalah unit di R.*

Teorema berikutnya menyajikan sifat determinan yang lain, terkait dengan determinan matriks tranposenya:

Teorema 2.4. (Brown : p. 18) *Diberikan* $A=(a_{ij}) \in M_{nxn}(R)$, *maka* $\det(A) = \det(A^t)$

Berikut diberikan definisi rank matriks atas ring, yang secara spesifik diberikan sebagai berikut:

Definisi 2.3. (**Brown : p. 18)** *Diberikan* $A=(a_{ij}) \in M_{nxn}(R)$, *Rank dari matriks A adalah bilangan integer sebagai berikut:* $rank(A) = \max \{ t \mid Ann_R(I_t(A)) = 0 \}$

Teorema berikut memberikan sifat determinan suatu matriks terkait dengan rank matriksnya:

Teorema 2.5. (Brown : p.18) *Misalkan* $A \in M_{n\times n}(R)$, $rank(A) < n$ *jika dan hanya jika* $\det(A) \in Z(R)$

Sistem persamaan linear, dengan setiap koefisien masing-masing variabel (termasuk nilai ruas kanan persamaan) merupakan elemen dari suatu ring, dapat direpresentasikan dengan suatu matriks atas ring. Teorema berikut menjamin adanya penyelesaian non trivial dari suatu SPL homogen :

Teorema 2.6.(Brown : p. 19) *Misalkan* $A \in M_{n\times n}(R)$ *,sistem persamaan linear homogen* $AX = O$ *mempunyai penyelesaian non trivial jika dan hanya jika* $rank(A) < n$.

Untuk pengertian dasar dan sifat-sifat semigrup dirujuk pada **Howie** yang selengkapnya diberikan sebagai berikut:

Definisi 2.4. (Howie: p.1) *Himpunan tak kosong* S *yang dilengkapi dengan operasi biner "*$\bullet$*" dikatakan semigrup jika* $\bullet$ *bersifat asosiatif yaitu :*

$(\forall x, y, z \in S)\ (x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$

Definisi 2.5. (Howie: p.1) *Misalkan* S *suatu semigrup. Himpunan bagian tak kosong* T *dari* S *dikatakan semigrup bagian dari* S *jika* T *tertutup terhadap operasi binernya.*

Selanjutnya diberikan definisi elemen reguler maupun semigrup reguler yang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.6. (Howie:p.44) *Misalkan* $(S, \bullet)$ *semigrup. Elemen* a *di* S *disebut elemen reguler jika terdapat* $x \in S$ *sedemikian sehingga* $a \bullet x \bullet a = a$. *Semigrup* S *disebut semigrup reguler jika setiap elemen di dalam* S *adalah elemen reguler .*

Semigrup S dengan elemen satuan, jika terdapat elemen $e \in S$, sedemikian sehingga $e \cdot a = a \cdot e = a$ untuk setiap $a \in S$. Selanjutnya, $b \in S$ disebut elemen kesatuan (unit) kiri di S jika terdapat $a \in S$ sehingga $ba = e$, dan merupakan elemen kesatuan (unit) kanan jika terdapat $a \in S$ sehingga $ab = e$.

Definisi 2.7. (Kemprasit& Siripitukdet: p. 409) *Diberikan* S *adalah semigrup, maka* $S^0 = S$ *jika* S *memuat elemen nol, dan* $S^0 = S \cup \{0\}$ *jika* S *tidak memuat elemen nol.*

Definisi 2.8. (Kemprasit& Siripitukdet: p. 409) *Semigrup* S *disebut 'admit struktur ring jika terdapat operasi* $+$ *pada* S^0 *sedemikian sehingga* S^0 *membentuk ring*

BAB III

PEMBAHASAN

Untuk suatu matriks $A \in M_n(R)$ dan $i, j : 1,2,...,n$, A_{ij} menotasikan elemen dari matriks A pada baris ke-i dan kolom ke$-j$. Untuk $k,l : 1,2,...,n$, didefinisikan suatu matriks E^{kl}, dengan entri-entrinya didefinisikan sebagai berikut:

$$E_{ij}^{kl} = \begin{cases} 1 & jika \quad k = i,\ j = l \\ 0 & untuk \quad yang\ \ lain \end{cases}$$

Dapat diberikan beberapa contoh webagai berikut:

$$E^{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \qquad E^{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga matriks E^{kl} selalu memuat kolom maupun baris nol. Dengan demikian matriks ini selalu memenuhi $\det E^{kl} = 0$ untuk semua $k,l : 1,2,...,n$ (Kemprasit, Y & Siripitukdet, M: 409).

Pada awalnya , akan diberikan teorema untuk menunjukkan bahwa tidak ada semigrup S yang memuat matriks-matriks di $M_n(R)$ yang determinannya nol, yaitu $\{A \in M_n(R) \mid \det A = 0\} \subseteq S \subset M_n(R)$, yang merupakan semigrup *admit struktur ring.*

Teorema 3.1. *Misalkan S adalah sub semigrup dari $M_n(R)$ yang memuat setiap matriks $A \in M_n(R)$ dengan* $\det A = 0$. *Jika S admit struktur ring , maka $S = M_n(R)$.*

Bukti:

Dari definisi matriks E^{kl} di atas, diperoleh bahwa $\det E^{kl} = 0$ untuk setiap $k,l : 1,2,3,...,n$, sehingga $E^{kl} \in S$. Diketahui S *admit struktur ring*, sehingga dapat diasumsikan terdapat suatu operasi $\oplus$ pada S sedemikian sehingga $(S,\oplus,.)$ membentuk struktur ring dimana '.' adalah operasi perkalian pada S. Selanjutnya ditunjukkan bahwa $S = M_n(R)$.

Misalkan matriks $B, C \in M_n(R)$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & ... & A_{1,n-1} & 0 \\ A_{21} & ... & A_{2,n-1} & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{n1} & ... & A_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{dan} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & ... & 0 & A_{1n} \\ 0 & ... & 0 & A_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Diperoleh bahwa $\det B = 0$ dan $\det C = 0$. Dengan demikian $B, C \in S$. Diketahui S *admit struktur ring*, maka $B \oplus C \in S$.

Selanjutnya, diperoleh juga bahwa:

$$E^{nn} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga dipenuhi:

$$CE^{nn} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & A_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & A_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & A_{nn} \end{bmatrix} = C$$

dan

$$BE^{nn} = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1,n-1} & 0 \\ A_{21} & \dots & A_{2,n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Serta $CE^{kl} = 0$, $k : 1,2,3,\dots,n-1$

Sehingga berlaku:

$(B \oplus C)E^{nn} = BE^{nn} \oplus CE^{nn} = 0 + C = C$, dan

$(B \oplus C)E^{kl} = BE^{kl} \oplus CE^{kl} = BE^{kl} + 0 = BE^{kl}$ untuk setiap $k : 1,2,3,\dots,n-1$

Sehingga untuk $i : 1,2,3,\dots,n$, berlaku:

$$(B \oplus C)_{in} = \sum_{k=1}^{n} (B \oplus C)_{ik} E_{kn}^{nn} = \left((B \oplus C)E^{nn}\right)_{in} = C_{in} = A_{in}$$

Untuk $i : 1,2,3,\dots,n$ dan $j : 1,2,3,\dots,n-1$, berlaku:

$$\begin{aligned} (B \oplus C)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} (B \oplus C)_{ik} E_{k1}^{j1} = \left((B \oplus C)E^{j1}\right)_{i1} \\ &= \left(BE^{j1}\right)_{i1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} B_{ik} E_{k1}^{j1} = B_{ij} = A_{ij} \end{aligned}$$

Konsekuensinmya, $A = B \oplus C \in M_n(R)$

■

Sebagai akibatnya, subsemigrup $\{A \in M_n(R) \mid \det A = 0\}$ dari semigrup $M_n(R)$ bukan merupakan *admit struktur ring* atau dengan kata lain, tidak ada operasi penjumalahan yang didefinisikan pada $\{A \in M_n(R) \mid \det A = 0\}$ sedemikian sehingga $\{A \in M_n(R) \mid \det A = 0\}$ membentuk struktur ring. Sifat tersebut selengkapnya diberikan pada akibat sebagai berikut:

Akibat 3.1. *Subsemigrup* $\{A \in M_n(R) \mid \det A = 0\}$ *dari semigrup* $M_n(R)$ *bukan merupakan admit struktur ring.*

Bukti:

Akan dibuktikan dengan kontraposisinya:

Misalkan himpunan $T = \{A \in M_n(R) \mid \det A = 0\}$ merupakan *admit struktur ring*, jelas bahwa T memuat semua matriks di $M_n(R)$ yang determinannya nol. Menurut Teorema 3.1, maka berakibat $T = M_n(R)$. Hal ini kontradiksi dengan yang diketahui bahwa $T = \{A \in M_n(R) \mid \det A = 0\} \neq M_n(R)$, karena tidak semua matriks di $M_n(R)$ determinannya nol.

■

Lema berikut menyatakan salah satu sifat semigrup $(M_n(R), \cdot)$, dengan R adalah daerah integral dengan karakteristiknya tidak sama dengan dua, yang akan berguna untuk pembuktian pada teorema selanjutnya:

Lema 3.1. (Yupaporn & Siripitukdet: 410). *Misalkan R adalah daerah integral dengan karakteristiknya tidak sama dengan dua. Jika $A \in M_n(R)$ sedemikian sehingga $AB = BA$ untuk setiap $B \in M_n(R)$ dengan* $\det B = \pm 1$, *maka $A = aI$ untuk suatu $a \in R$ dimana I adalah matriks identitas $n \times n$ atas R.*

Bukti:

Untuk membuktikan lema ini, maka untuk setiap $k = 1, 2, ..., n$ dibentuk suatu matriks $C^{(k)} \in M_n(R)$, dengan entri-entrinya didefinisikan sebagai berikut:

$$C_{ij}^{(k)} = \begin{cases} -1 & \text{jika } i = j = k \\ 1, & \text{, jika } i = j \neq k \\ 0, & \text{untukyanglain} \end{cases}$$

Sehingga diperoleh :

$$C^{(1)}=\begin{bmatrix}-1&0&...&0\\0&1&...&0\\....&....&...&...\\0&0&...&1\end{bmatrix},\ C^{(2)}=\begin{bmatrix}1&0&...&0\\0&-1&...&0\\....&....&...&...\\0&0&...&1\end{bmatrix}\text{ dan } C^{(n)}=\begin{bmatrix}1&0&...&0\\0&1&...&0\\....&....&...&...\\0&0&...&-1\end{bmatrix}.$$

Dengan demikian diperoleh: $\det C^{(k)}=-1$ untuk setiap $k=1,2,...,n$. Menurut yang diketahui, maka dipenuhi: $AC^{(k)}=C^{(k)}A$ untuk setiap $k=1,2,...,n$. Selanjutnya, jika $i,j=1,2,...,n$ dan $i\neq j$ diperoleh:

$$\left(AC^{(j)}\right)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}C_{kj}^{(j)}=-A_{ij}\ \text{ dan }\ \left(C^{(j)}A\right)_{ij}=\sum_{k=1}^{n}C_{ik}^{(j)}A_{kj}=A_{ij}$$

Dengan demikian diperoleh $A_{ij}=-A_{ij}$, atau $2A_{ij}=0$. Dengan mengingat $A_{ij}\in R$ dan R adalah daerah integral dengan karakteristik tidak sama dengan dua, maka persamaan tersebut hanya dipenuhi untuk $A_{ij}=0$ untuk setiap $i,j=1,2,...,n$ dan $i\neq j$.

Selanjutnya, untuk setiap $k=1,2,...,n$ dibentuk suatu matriks $D^{(k)}\in M_n(R)$ dengan entri-entrinya didefinisikan sebagai berikut:

$$D_{ij}^{(k)}=\begin{cases}1 & jika \quad i=j\\ 1 & jika \quad i=1,\ j=k\\ 0 & untuk \quad yang\,lain\end{cases}$$

Sehingga: $D^{(1)}=\begin{bmatrix}1&0&...&0\\0&1&...&0\\...&...&...&...\\0&0&...&1\end{bmatrix},\ D^{(2)}=\begin{bmatrix}1&1&...&0\\0&1&...&0\\....&....&...&...\\0&0&...&1\end{bmatrix},\dots\ D^{(n)}=\begin{bmatrix}1&0&...&1\\0&1&...&0\\....&....&...&...\\0&0&...&1\end{bmatrix}.$

Sehingga $\det D^{(k)}=1$ untuk setiap $k=1,2,...,n$. Menurut yang diketahui, maka dipenuhi: $AD^{(k)}=D^{(k)}A$ untuk setiap $k=1,2,...,n$, dan diperoleh juga:

$$\left(AD^{(i)}\right)_{ii}=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}D_{ki}^{(i)}=A_{ii}\ \text{ dan }\ \left(D^{(i)}A\right)_{ii}=\sum_{k=1}^{n}D_{ik}^{(i)}A_{ki}=A_{ii}$$

Sehingga diperoleh $A_{11}=A_{22}=...=A_{nn}$.

Dari kondisi $A_{ij}=0$ untuk $i\neq j$ dan $A_{11}=A_{22}=...=A_{nn}$, maka :

$$A=\begin{bmatrix}A_{11}&0&...&0\\0&A_{11}&...&0\\...&...&...&...\\0&0&...&A_{11}\end{bmatrix}=A_{11}\begin{bmatrix}1&0&...&0\\0&1&...&0\\...&...&...&...\\0&0&...&1\end{bmatrix}=A_{11}I$$

Sehingga $A=aI$, dengan $a=A_{11}$.

■

Sudah dijelaskan di depan bahwa $\langle M_n(R), \cdot \rangle$ membentuk semigrup. Sementara itu, dari himpunan $M_n(R)$ dapat dibentuk suatu himpunan bagian, yaitu himpunan semua matriks di $M_n(R)$ yang mempunyai invers, atau invertibel. Selanjutnya himpunan tersebut dinotasikan dengan $G_n(R)$, sehingga $G_n(R) = \{A \in M_n(R) \mid A \text{ invertibel}\}$. Himpunan ini merupakan sub semigrup dari $\langle M_n(R), \cdot \rangle$.

Teorema 3.2. (Yupaporn & Siripitukdet: 411) *Misalkan R adalah daerah integral dengan karakteristiknya tidak sama dengan dua. Jika S sub semigrup dari $G_n(R)$ yang memuat semua matriks $A \in G_n(R)$ dengan $\det A = \pm 1$, maka S bukan semigrup admit struktur ring.*

Bukti:

Misalkan terdapat operasi biner $\oplus$ pada S^0 sedemikian sehingga $\langle S^0, \oplus, \cdot \rangle$ membentuk suatu ring. Jelas bahwa $\det I = 1$, sehingga $I \in S$ dengan I adalah matriks identitas dengan ukuran $n \times n$ atas daerah integral R. Sehingga terdapat matriks $A \in S$ sedemikian sehingga dipenuhi $I \oplus A = 0$. Sehingga untuk setiap $B \in S$ berlaku:

$$B \oplus AB = (I \oplus A)B = 0 = B(I \oplus A) = B \oplus BA$$

Hal ini berakibat $AB = BA$ untuk setiap $B \in S$. Dengan menggunakan Lema 2.1, maka dipenuhi $A = aI$ untuk suatu $a \in R$. Dengan demikian dipenuhi $I \oplus aI = 0$. Selanjutnya dibentuk $C \in M_n(R)$, dengan entri-entrinya didefinisikan sebagai berikut:

$$C_{ij} = \begin{cases} 1 & , jika \quad i = 1, j = 2 \\ 1 & , jika \quad i = 2, j = 1 \\ 1 & , jika \quad i = j \geq 3 \\ 0 & , untuk \quad yang\ lain \end{cases}$$

yaitu:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Jelas bahwa $C \neq I, C \neq aI, C^2 = I, \det C = -1$, sehingga $C \in S$. Diketahui bahwa $I \oplus aI = 0$ dan $C \neq aI$, sehingga dipenuhi $I \oplus C \neq 0$. Diketahui bahwa S sub semigrup dari $G_n(R)$, sehingga:

$$C(I \oplus C) = C \oplus C^2 = C \oplus I = I \oplus C$$

Dipenuhi $I \oplus C \neq 0$, sehingga persamaan tersebut hanya dipenuhi $C = I$. Hal ini kontradiksi dari yang dibentuk.

■

Akibat dari Teorema 3.2 menyatakan bahwa grup $G_n(R)$ dan sub grup $G_n(R)$, yaitu himpunan matriks di $G_n(R)$ yang determinannya adalah ± 1 bukan merupakan semigrup admit struktur ring. Selengkapnya diberikan sebagai berikut:

Akibat 3.2 *Jika R adalah daerah integral dengan karakteristik tidak sama dengan dua, maka $G_n(R)$ dan sub grup $G_n(R)$, yaitu himpunan matriks di $G_n(R)$ yang determinannya adalah ± 1 bukan merupakan semigrup admit struktur ring.*

Bukti:

- Diketahui $G_n(R)$ suatu grup, maka dengan sendirinya merupakan semigrup, yang sekaligus merupakan sub semigrup trivialnya. Diketahui pula $G_n(R)$ memuat $U = \{A \in G_n(R) \mid \det A = \pm 1\}$. Sehingga menurut Teorema 2.1 berakibat $G_n(R)$ bukan merupakan semigrup admit struktur ring.
- Diketahui $U = \{A \in G_n(R) \mid \det A = \pm 1\}$ suatu sub grup, maka dengan sendirinya merupakan sub semigrup. Jelas bahwa U memuat semua matriks dengan determinannya ± 1. Sehingga menurut Teorema 2.1 berakibat $U = \{A \in G_n(R) \mid \det A = \pm 1\}$ bukan merupakan semigrup admit struktur ring.

■

BAB IV
KESIMPULAN DAN SARAN

A. Kesimpulan

Dari pembahasan di atas disimpulkan bahwa:

1. Misalkan S adalah sub semigrup dari $M_n(R)$ yang memuat setiap matriks $A \in M_n(R)$ dengan $\det A = 0$. Jika S *admit struktur ring* , maka $S = M_n(R)$.
2. Subsemigrup $\{A \in M_n(R) \mid \det A = 0\}$ dari semigrup $M_n(R)$ bukan merupakan *admit struktur ring*
3. Misalkan R adalah daerah integral dengan karakteristiknya tidak sama dengan dua. Jika S sub semigrup dari $G_n(R)$ yang memuat semua matriks $A \in G_n(R)$ dengan $\det A = \pm 1$, maka S bukan semigrup admit struktur ring.
4. Jika R adalah daerah integral dengan karakteristik tidak sama dengan dua, maka $G_n(R)$ dan sub grup $G_n(R)$, yaitu himpunan matriks di $G_n(R)$ yang determinannya adalah ± 1 bukan merupakan semigrup admit struktur ring.

B. Saran

Pada penelitian ini difokuskan hanya pada semigrup matriks, untuk penelitian selanjutnya dapat dikembangkan pada semigrup semigrup lain

BAB V
DAFTAR PUSTAKA

Adkins, Weintraub. 1992. *Algebra: An Approach via Module Theory*. Spinger – Verlag, New York.

Brown, W.C. 1992. *Matrices Over Commutative Rings*. Marcel Dekker, Inc, New York.

Howie. J.M, 1976. *An Introduction to Semigroup Theory*. Academic Press, Ltd. London

Kemprasit, Y & Siripitukdet. 2002. Matrix Semigroups Admitting Ring Structure. *Bulletin Cal. of Mathematics 94 (5). p: 409 - 412.*