BAB III
TRANSFORMASI LINEAR

A. DEFINISI TRANSFORMASI LINEAR

Jika V,W masing masing adalah ruang vektor, maka V,W masing – masing merupakan himpunan. Dengan demikian dapat dibuat suatu fungsi antara V dan W. Terkait dengan struktur dari V dan W, maka didefinisikan suatu operasi penjumlahan vektor dan perkalian skalar. Definisi operasi tersebut, dapat berbeda. Suatu fungsi dari ruang vektor ke ruang vektor yang mengawetkan (preserve) sifat keterjumlahan dan perkalian skalarnya disebut transformasi linear. Untuk lebih jelasnya diberikan definisi transformasi linear sebagai berikut:

Definisi 3.1. *Diberikan* $(V,+,\bullet)$ *dan* $(W,\oplus,*)$ *masing-masing adalah ruang vektor. Suatu fungsi* $T:V\to W$ *yaitu suatu fungsi dari* V *ke* W *disebut transformasi linear jika dipenuhi:*

(i). $(\forall \bar{u},\bar{v}\in V)\ T(\bar{u}+\bar{v})=T(\bar{u})\oplus T(\bar{v})$

(ii). $(\forall \bar{u}\in V)(\forall \alpha\in R)\ T(\alpha\bullet\bar{u})=\alpha * T(\bar{u})$

Contoh 3.1:

Diberikan ruang vektor $M_{2\times 2}$ dan R^2 relatif terhadap operasi standard -nya. Selanjutnya didefinisikan suatu fungsi T dari $M_{2\times 2}$ ke R^2 yaitu: $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=(a+d,b-2c)$. Fungsi T dari $M_{2\times 2}$ ke R^2 merupakan transformasi linear.

Bukti:

(i). Ambil sebarang vektor di $M_{2\times 2}$, misal $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$ sehingga:

$$T(A+B) = T\begin{bmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{bmatrix} = \left((a+a')+(d+d'), (b+b')-2(c+c')\right)$$

$$= \left((2a+d)+(2a'+d'), (b-2c)+(b'-2c')\right)$$

$$= \left(a+d, b-2c\right)+(2a'+d', b'-2c')$$

$$= T(A)+T(B)$$

(ii). Ambil sebarang vektor di $M_{2\times 2}$, misal $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan skalar $\alpha \in R$ sehingga

$$T\left(\alpha A\right) = T\left(\begin{bmatrix} \alpha.a & \alpha.b \\ \alpha.c & \alpha.d \end{bmatrix}\right) = \left(\alpha.a+\alpha.d, \alpha.b-2\alpha.c\right) = \alpha.\left(a+d, b-2c\right) = \alpha.T(A)$$

Latihan soal 3.1

Selidikilah apakah fungsi berikut merupakan transformasi linear:

1. $T: R^2 \to R^3$, dengan aturan sebagai berikut:
   a. $T\left((x,y)\right) = (x^2 - y, x+y, 2y)$
   b. $T\left((x,y)\right) = (x-y, x+y, \sqrt{x})$
   c. $T\left((x,y)\right) = (x-y, x+y+1, 2y)$
   d. $T\left((x,y)\right) = (2x-y, x+y, 2y)$
2. $T: P_2 \to R^3$, dengan aturan sebagai berikut:
   a. $T(a+bx+cx^2) = (a+2b, b+c, a+b+c^2)$
   b. $T(a+bx+cx^2) = (\sqrt{a}+2b, b+2c, -2a+b+c)$
   c. $T(a+bx+cx^2) = (a+2b, b+c, a+b+2)$
   d. $T(a+bx+cx^2) = (a+2b, 3b+c, -a+b-3c)$
3. $T: P_2 \to M_{2\times 2}$ dengan aturan sebagai berikut:
   a. $T(a+bx+cx^2) = \left(\begin{bmatrix} a+b & 2b+c \\ 2a-c & b-c \end{bmatrix}\right)$
   b. $T(a+bx+cx^2) = \left(\begin{bmatrix} a+b+1 & 2b+c \\ 2a-b+c & b-c \end{bmatrix}\right)$

E_mail: karyati@uny.ac.id

4. Himpunan bilangan real R merupakan ruang vektor terhadap operasi penjumlahan yang didefinisikan dengan $x + y = x.y$ dan perkalian skalar yang didefinisikan dengan: $\alpha.x = x^{\alpha}$. Jika dibentuk P_1 merupakan ruang vektor terhadap operasi standard-nya. Selanjutnya dibentuk suatu pemetaan dengan aturan sebagai berikut: $T : P_1 \to R$, $T(a + bx) = 2a + b$

B. SIFAT TRANSFORMASI LINEAR; KERNEL DAN JANGKAUAN

Dari defnisi transformasi linear sebelumnya, maka sifat-sifat transformasi yang terangkum dalam teorema berikut dipenuhi untuk setiap transformasi linear.

Teorema 3.1. *Jika $T : V \to W$ merupakan transformasi linear, maka berlaku*:

a. $T(\bar{0}) = \bar{0}$

b. $T(-\bar{v}) = -T(\bar{v})$

c. $T(\bar{v} - \bar{w}) = T(\bar{v}) - T(\bar{w})$

Selanjutnya, masih terkait dengan transformasi linear. Transformasi linear merupakan suatu fungsi, sehingga juga dikenal suatu image (jangkauan) dari transformasi linear, maupun kernel yang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 3.2. *Jika $T : V \to W$ merupakan transformasi linear, maka himpunan vektor-vektor di V yang dipetakan ke vektor nol di W disebut kernel (ruang nol) dari T dan selanjutnya dinotasikan dengan $\ker(T)$. Himpunan semua vektor-vektor di W yang merupakan bayangan T disebut sebagai jangkauan dari T, dan selanjutnya dinotasikan dengan $R(T)$.*

Berdasarkan definisi tersebut, maka $\ker(T) = \left\{ \bar{v} \in V \mid T(\bar{v}) = \bar{0} \right\}$. Himpunan $\ker(T)$ bukan merupakan himpunan kosong, sebab paling tidak beranggotakan $\bar{0} \in V$. Hal ini sesuai dengan sifat transformasi linear Teorema 3.1.a. Selanjutnya jangkauan dari T dapat dinyatakan sebagai himpunan : $R(T) = \left\{ \bar{w} \in W \mid T(\bar{v}) = \bar{w}, \text{untuk suatu } \bar{v} \in V \right\}$. Himpunan

$R(T)$ juga bukan merupakan himpunan kosong, hal ini sesuai dengan Teorema 3.1.a, jadi paling tidak memuat $\bar{0} \in W$. Himpunan $\ker(T)$ merupakan himpunan bagian dari V, dan $R(T)$ adalah himpunan bagian dari W. Kedua himpunan ini merupakan sub ruang vektor, yang selengkapnya diberikan pada Teorema berikut:

Teorema 3.2. *Jika* $T : V \to W$ *merupakan transformasi linear, maka:*

a. Himpunan $\ker(T)$ *merupakan sub ruang vektor dari* V

b. Himpunan $R(T)$ *merupakan sub ruang vektor dari* W

Kedua himpunan tersebut membentuk sub ruang vektor, maka dengan sendirinya himpunan-himpunan itu memenuhi seluruh aksioma untuk runag vektor. Dengan demikain keduanya merupakan ruang vektor, sehingga mempunyai dimensi.

Contoh 3.2

Dari Contoh 2.1, diketahui bahwa $T : M_{2\times 2} \to R^2$, dengan $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (2a + d, b - 2c)$ merupakan transformasi linear. Selanjutnya, tentukan $R(T)$ dan $\ker(T)$.

Jawab:

$$\ker(T) = \{A \in M_{2\times 2} \mid T(A) = \bar{0}\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid (2a + d, b - 2c) = (0,0) \right\}$$

Dari kondisi tersebut, diperoleh: $2a + d = 0$ atau $d = -2a$ dan $b - 2c = 0$ atau $b = 2c$. Dengan demikian, diperoleh:

$$\ker(T) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid d = -2a, b = 2c \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2c \\ c & -2a \end{bmatrix} \mid a, c \in R \right\}$$

Basis dari $\ker(T)$ adalah $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$, dan dimensi dari $\ker(T)$ =2

$$R(T)=\left\{(x,y)\in R^2 \,\middle|\, T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=(x,y), \quad \text{untuk suatu} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in M_{2\times 2}\right\}$$

$$=\{(x,y)\in R^2 \mid (2a+d, b-2c)=(x,y)\}$$

Jadi dari kondisi tersebut diperoleh $x=2a+d, \quad y=b-2c$. Dalam hal ini nilai $a,b,c,d\in R$ bebas, dalam arti berlaku untuk semua nilai R. Dengan demikian nilai x,y ada untuk nilai $a,b,c,d\in R$ manapun. Sehingga $R(T)=R^2$. Dimensi dari $R(T)=2$. Basisnya sama dengan basis untuk R^2.

Latihan 3.2

Tentukan $\ker(T)$, $R(T)$, dimensi dan basis untuk $\ker(T)$ maupun $R(T)$ dari transformasi linear berikut:

1. $T: M_{2\times 2}\to P_2$, dengan aturan sebagai berikut:

   a. $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=(a+d)+(2b-c)x+(a+2b-c+d)x^2$

   b. $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=(a-2d)+(-b+c)x+(a+b+c+d)x^2$

2. $T: R^2\to M_{2\times 2}$, dengan aturan sebagai berikut:

   a. $T(x,y)=\begin{bmatrix} x-y & 2x+y \\ y & -x \end{bmatrix}$

   b. $T(x,y)=\begin{bmatrix} x+3y & 2x-y \\ -x+2y & -2x \end{bmatrix}$