$f+g \in C$ atau $\frac{d(f+g)}{dx}+(f+g)=\underline{0}$. Diperoleh bahwa:

$$\frac{d(f+g)}{dx}+(f+g)=\frac{df+dg}{dx}+(f+g)=\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dx}+f+g$$
$$=\left(\frac{df}{dx}+f\right)+\left(\frac{dg}{dx}+g\right)=\underline{0}+\underline{0}=\underline{0}$$

Selanjutnya dibuktikan tertutup terhadap perkalian skalar:

Ambil $f \in C, \quad \alpha \in R$. Ditunjukkan bahwa $\alpha.f \in C$ atau $\frac{d(\alpha.f)}{dx}+(\alpha.f)=\underline{0}$.

diketahui bahwa $\frac{d(\alpha.f)}{dx}+(\alpha.f)=\frac{\alpha.df}{dx}+(\alpha.f)=\alpha\left(\frac{df}{dx}+f\right)=\alpha.\underline{0}=\underline{0}$.

Jadi terbukti bahwa $C=\left\{f \in F \middle| \frac{df}{dx}+f=\underline{0}\right\}$ adalah sub ruang vektor F.

Contoh 1.2.5.

Apakah himpunan $D=\left\{a+bx+cx^2 \in P_2 \middle| \frac{a}{b}=1\right\}$ sub ruang vektor dari P_2?

Jawab:

Ambil $(a+bx+cx^2) \in D$, sehingga $\frac{a}{b}=1$ dan $\beta \in R$, sehingga:

$\beta(a+bx+cx^2)=\beta.a+\beta.bx+\beta.cx^2$, apakah asil perkalian skalar ini merupakan elemen di D? Ambil $0 \in R$, maka $\beta(a+bx+cx^2)=0.a+0.bx+0.cx^2=0+0x+0x^2=\underline{0}$.

Akan tetapi, $0+0x+0x^2 \notin D$ sebab $\frac{0}{0}\neq 1$. Jadi D bukan sub ruang vektor.

Dalam suatu ruang vektor, pasti dipenuhi sifat tertutup terhadap penjumlahan vektor maupun perkalian skalar. Dari sifat tersebut, himpunan suatu vektor dapat dilihat ada suatu vektor yang dapat dinyatakan sebagai perkalian skalar dari vektor yang lain. Di lain pihak, mungkin saja dapat dinyatakan sebagai penjumlahan dari dua vektor atau lebih. Bahkan mungkin kombinasi dari keduanya. Sebagai contoh, cermati himpunan berikut:

$$A = \{(1,2),(2,4),(0,1),(1,0)\} \subset R^2$$

Dari himpunan vektor di atas , diperoleh hubungan sebagai berikut:

$(1,2) = \frac{1}{2}(2,4)$ atau $(1,2) = 1(1,0) + 2(0,1)$ atau $(1,2) = (2,4) - (1,0) - 2(0,1)$

dan masih banyak lagi cara menyajikan vektor tersebut sebagai penjumlahan sekaligus perkalian skalar secara simultan.

Dari kondisi tersebut, didefinisikan suatu konsep kombinasi linear yang diberikan sebagai berikut:

Definisi 1.2.4. Jika $\underline{a_1}, \underline{a_2}, \underline{a_3}, ..., \underline{a_n}$ adalah vektor – vektor di dalam ruang vektor V , maka kombinasi linear dari $\underline{a_1}, \underline{a_2}, \underline{a_3}, ..., \underline{a_n}$ adalah suatu vektor dalam bentuk :

$$\underline{a} = \alpha_1 \underline{a_1} + \alpha_2 \underline{a_2} + \alpha_3 \underline{a_3} + ... + \alpha_n \underline{a_n}$$

dengan $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n \in R$

Contoh 1.2.6:

Diberikan himpunan vektor – vektor di R^3 : $B = \{(1,-1,2),(-3,2,1),(2,2,2)\}$, maka $(0,7,3)$ adalah kombinasi linear dari himpunan tersebut, sebab:

$$(0,7,3) = (-1)(1,-1,2) + 1.(-3,2,1) + 2.(2,2,2)$$

Contoh 1.2.7 :

Apakah vektor $-2+3x+2x^2$ merupakan kombinasi linear dari vektor – vektor $1-2x+2x^2$, $4+x-x^2$, $2x-x^2$, $-2+2x^2$.

Untuk menyelesaikan masalah ini, sama halnya kita mencari skalar $\alpha, \beta, \gamma, \lambda \in R$, sehingga dipenuhi :

$$-2+3x+2x^2 = \alpha\ (1-2x+2x^2) + \beta\,(4+x-x^2) + \gamma\,(2x-x^2) + \lambda\,(-2+2x^2)$$

Berdasarkan pada definisi perjumlahan dan perkalian skalar pada P_2, diperoleh:

$\alpha + 4\beta - 2\lambda = -2$

$-2\alpha + \beta + 2\gamma = 3$

$2\alpha - \beta - \gamma + 2\lambda = 2$

Sehingga dipunyai suatu sistem persamaan linear dengan 3 persamaan dan 4 variabel. Untuk menyelesaikannya dapat digunakan operasi baris elementer, yang pernah dipelajari pada Aljabar Linear Elementer:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & -2 & -2 \\ 4 & 7 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -9 & 0 & 8 & 11 \\ 4 & 7 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -9 & -4 & 0 & -9 \end{array}\right] \cong \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -\frac{9}{8} & 0 & 1 & \frac{11}{8} \\ 1 & \frac{7}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{9}{4} & 1 & 0 & \frac{9}{4} \end{array}\right]$$

Jadi didapatkan penyelesaian selengkapnya sebagai berikut:

$-\frac{9}{8}\beta+\lambda=\frac{11}{8}$ $\qquad\qquad$ $\lambda=\frac{11}{8}+\frac{9}{8}\beta$

$\alpha+\frac{7}{4}\beta=\frac{3}{4}$ $\qquad$ atau $\qquad$ $\alpha=\frac{3}{4}-\frac{7}{4}\beta$

$\frac{9}{4}\beta+\gamma=\frac{9}{4}$ $\qquad\qquad$ $\gamma=\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\beta$

sehingga, untuk nilai beta tertentu, senantiasa dapat ditemukan nilai α,γ,λ. Dengan demikian vektor $-2+3x+2x^2$ merupakan kombinasi linear dari vektor – vektor $1-2x+2x^2$, $4+x-x^2$, $2x-x^2$, $-2+2x^2$.

Contoh 1.2.8

Apakah vektor $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}$ merupakan kombinasi linear dari vektor – vektor $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$?

Sejalan dengan bukti pada contoh soal sebelumnya diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$2=\alpha$

$-2=\alpha+\beta$, atau $\beta=-4$

$3=\alpha+\beta+\gamma$, atau $\gamma=5$

$1=\alpha+\beta+\gamma+\lambda$, atau $\lambda=-1$

Definisi 1.2.5. Andaikan $\underline{a_1}, \underline{a_2}, \underline{a_3}, ..., \underline{a_n}$ adalah vektor – vektor di dalam ruang vektor V, maka vektor-vektor $\underline{a_1}, \underline{a_2}, \underline{a_3}, ..., \underline{a_n}$ dikatakan merentang (span) ruang vektor V, yang dinotasikan dengan $rt(V)$ jika semua vektor di V merupakan kombinasi linear dari vektor – vektor $\underline{a_1}, \underline{a_2}, \underline{a_3}, ..., \underline{a_n}$.

Contoh 1.2.9.

Apakah vektor-vektor $(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)$ merentang runag vektor R^3 ?

Untuk menjawab pertanyaan di atas, maka perlu dibuktikan, apakah semua vektor di R^3 merupakan kombinasi linear dari vektor – vektor tersebut. Dengan demikian, ambil sebarang vektor di R^3, sebut (x, y, z). Sekarang tinggal diuji, vektor (x, y, z) ini merupakan kombinasi linear dari $(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)$ atau bukan:

$$(x, y, z) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,0,0)$$

diperoleh:

$$\alpha = z$$

$$y = \alpha + \beta \text{ atau } \beta = y - z$$

$$x = \alpha + \beta + \gamma \text{ atau } \gamma = x - y$$

Jadi setiap vektor di R^3 merupakan kombinasi linear dari $(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)$ atau vektor-vektor $(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)$ merentang runag vektor R^3.

Proposisi berikut memberikan sifat-sifat yang berlaku terkait dengan definisi vektor – vektor yang merentang suatu ruang vektor:

Proposisi 1.2.6. Andaikan $\underline{a_1}, \underline{a_2}, \underline{a_3}, ..., \underline{a_n}$ adalah vektor – vektor di dalam ruang vektor V, maka $rt\,(\underline{a_1}, \underline{a_2}, \underline{a_3}, ..., \underline{a_n})$ adalah sub ruang vektor dari V.

Bukti :

- Dibuktikan $rt\,(\underline{a_1}, \underline{a_2}, \underline{a_3}, ..., \underline{a_n})$ tertutup terhadap penjumlahan vektor:

  Ambil sebarang vektor $\underline{a}, \underline{b} \in rt\,(\underline{a_1}, \underline{a_2}, \underline{a_3}, ..., \underline{a_n})$, sehingga

  $\underline{a} = \alpha_1 \underline{a_1} + \alpha_2 \underline{a_2} + \alpha_3 \underline{a_3} + ... + \alpha_n \underline{a_n}$ dan $\underline{b} = \beta_1 \underline{a_1} + \beta_2 \underline{a_2} + \beta_3 \underline{a_3} + ... + \beta_n \underline{a_n}$

  $\underline{a} + \underline{b} = (\alpha_1 \underline{a_1} + \alpha_2 \underline{a_2} + \alpha_3 \underline{a_3} + ... + \alpha_n \underline{a_n}) + (\beta_1 \underline{a_1} + \beta_2 \underline{a_2} + \beta_3 \underline{a_3} + ... + \beta_n \underline{a_n})$

  $= (\alpha_1 + \beta_1)\underline{a_1} + (\alpha_2 + \beta_2)\underline{a_2} + (\alpha_3 + \beta_4)\underline{a_3} + ... + (\alpha_n + \beta_n)\underline{a_n}$

  Jadi $\underline{a} + \underline{b} \in rt\,(\underline{a_1}, \underline{a_2}, \underline{a_3}, ..., \underline{a_n})$.

- Dibuktikan $rt\,(\underline{a_1}, \underline{a_2}, \underline{a_3}, ..., \underline{a_n})$ tertutup terhadap perkalian skalar

  Ambil sebarang $\delta \in R$ dan $\underline{a} \in rt\,(\underline{a_1}, \underline{a_2}, \underline{a_3}, ..., \underline{a_n})$, sehingga

  $\underline{a} = \alpha_1 \underline{a_1} + \alpha_2 \underline{a_2} + \alpha_3 \underline{a_3} + ... + \alpha_n \underline{a_n}$,

  $\delta\ \underline{a} = \delta(\alpha_1 \underline{a_1} + \alpha_2 \underline{a_2} + \alpha_3 \underline{a_3} + ... + \alpha_n \underline{a_n})$

  $= \delta\alpha_1 \underline{a_1} + \delta\,\alpha_2 \underline{a_2} + \delta\,\alpha_3 \underline{a_3} + ... + \delta\alpha_n \underline{a_n}$

  Karena $\delta\,\alpha_i \in R$, $i = 1,2,3,...,n$ sehingga $\delta \underline{a} \in rt\,(\underline{a_1}, \underline{a_2}, \underline{a_3}, ..., \underline{a_n})$