Sudut Dan Orthogonalitas Pada Ruang Hasil Kali Dalam

Dalam bagian ini akan didefinisikan besarnya sudut antara dua vektor dalam ruang hasil kali dalam, dan konsep ini akan digunakan untuk memperoleh kaitan antara vektor-vektor pada ruang hasil kali dalam.

Pertidaksamaan Cauchy-Schwarz

Perlu diingat kembali, pada ruang hasil kali titik (dot product) berlaku bahwa jika $\bar{v}$, $\bar{u}$ merupakan vektor-vektor tak nol di R^2 atau R^3 dan θ adalah sudut antara dua vektor tersebut, maka :

$$\bar{u}.\bar{v} = \|\bar{u}\| \, \|\bar{v}\| \cos\theta$$

atau:

$$\cos\theta = \frac{\bar{u}.\bar{v}}{\|\bar{u}\| \, \|\bar{v}\|}$$

Tujuan utama dalam bagian ini adalah mendefinisikan konsep suatu sudut antara dua vektor pada sebarang ruang hasil kali dalam. Seperti pada generalisasi dari hasil kali titik, maka konsep inipun analog dengan pendefinisian hasil kali dalam pada sebarang ruang vektor, sehingga definisi sudut antara dua vektor tak nol pada sebarang ruang hasil kali dalam adalah sebagai berikut:

$$\cos\theta = \frac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{\|\bar{u}\| \, \|\bar{v}\|}$$

Diketahui bahwa $|\cos\theta| \le 1$, sehingga setiap pasangan vektor pada ruang hasil kali dalam memenuhi pertidaksamaan :

$$\left| \frac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{\|\bar{u}\| \, \|\bar{v}\|} \right| \le 1$$

Teorema 2.2. Pertidaksamaan Cauchy-Schwarz

Jika $\bar{u}$, $\bar{v}$ vektor-vektor dalam ruang hasil kali dalam real, maka berlaku $|\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle| \le \|\bar{u}\| \, \|\bar{v}\|$

E-mail: karyati@uny.ac.id

Bukti

- Jika $\bar{u} = \bar{0}$, sehingga $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 0$ dan $\|\bar{u}\| = 0$, sehingga kedua ruas sama. Dengan demikian dipenuhi.
- Asumsikan bahwa $\bar{u} \neq \bar{0}$. Misalkan $a = \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle$, $b = 2\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$, $c = \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle$, dan t sebarang bilangan real. Dengan menggunakan aksioma kepositifan , hasil kali dalam dari suatu vektor dengan dirinya sendiri selalu non negatif, sehingga:

  $$0 \leq \langle t\bar{u} + \bar{v}, t\bar{u} + \bar{v} \rangle = \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle t^2 + 2\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle t + \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = at^2 + bt + c$$

  Pertidaksamaan ini berakibat bahwa polinomial kuadratik ini tidak mempunyai akar real atau akar kembar. Sehingga diskriminannya harus memenuhi pertidaksamaan $b^2 - 4ac \leq 0$. Jika dinyatakan dengan pemisalan $a = \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle$, $b = 2\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$, $c = \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle$, maka diperoleh:

  $$4\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle^2 - 4\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle \leq 0$$

  Atau:

  $$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle^2 \leq \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle$$

  Dengan mencari akar kuadrat dari kedua ruas dan kenyataan dari sifat nonnegatif dari hasil kali dalam, maka diperoleh:

  $$\left| \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle \right| \leq \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle^{1/2} \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle^{1/2}$$

  Atau

  $$\left| \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle \right| \leq \|\bar{u}\| \, \|\bar{v}\|$$

Selanjutnya, diberikan sifat-sifat panjang dan jarak suatu vektor yang dirangkum dalam teorema berikut:

Teorema 2.3

Jika $\bar{u}$, $\bar{v}$ vektor-vektor dalam ruang hasil kali dalam real V dan jika k sebarang skalar, maka:

a. $\|\bar{u}\| \geq 0$

b. $\|k\bar{u}\| = |k|\,\|\bar{u}\|$

c. $\|\bar{u}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{u} = \bar{0}$

d. $\|\bar{u} + \bar{v}\| \leq \|\bar{u}\| + \|\bar{v}\|$

Teorema 2.4

Jika $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ vektor-vektor dalam ruang hasil kali dalam real V dan jika k sebarang skalar, maka:

a. $d(\bar{u}, \bar{v}) \geq 0$

b. $d(\bar{u}, \bar{v}) = d(\bar{v}, \bar{u})$

c. $d(\bar{u}, \bar{v}) = 0 \Leftrightarrow \bar{u} = \bar{v}$

d. $d(\bar{u}, \bar{v}) \leq d(\bar{u}, \bar{w}) + d(\bar{w}, \bar{v})$

Orthogonalitas

Jika vektor $\bar{u}$, $\bar{v}$ bukan vektor nol pada ruang hasil kali dalam dan θ adalah sudut yang dibentuk antara kedua vektor tersebut, maka $\cos\theta = 0$ jika dan hanya jika $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 0$ dan $\theta = \pi/2$ jika dan hanya jika $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 0$. Dari kondisi tersebut selanjutnya didefinisikan dua vektor tak nol dikatakan orthogonal adalah sebagai berikut:

Definisi 2.2

Dua vektor $\bar{u}$, $\bar{v}$ pada ruang hasil kali dalam disebut orthogonal jika $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 0$

Berikutnya merupakan teorema yang berisi tentang generalisasi dari teorema Pythagoras:

Teorema 2.5

Jika vektor $\bar{u}$, $\bar{v}$ merupakan vektor-vektor yang orthogonal pada ruang hasil kali dalam, maka:

$$\|\bar{u}+\bar{v}\|^2 = \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2$$

Definsi berikut memberikan generalisasi daari orthogonalitas antara dua vektor, yaitu tentang orthogonalitas suatu vektor ke suatu sub ruang vektor dan antara himpunan vektor pada suatu ruang hasil kali dalam dengan suatu sub ruangnya, yang selengkapnya adalah:

Definisi 2.3

Misalkan W adalah subruang dari ruang hasil kali dalam V. Suatu vektor $\bar{u}$ di V dikatakan orthogonal dengan W, jika $\bar{u}$ orthogonal dengan setiap vektor di W, dan himpunan semua vektor di V yang orthogonal dengan W disebut komplemen orthogonal dari W, yang selanjutnya dinotasikan dengan $W^{\perp}$.

Teorema berikut memberikan sifat-sifat dari komplemen orthogonal:

Teorema 2.6

Jika W adalah subruang dari ruang hasil kali dalam berdimensi hingga V, maka:

a. $W^{\perp}$ adalah subruang dari V

b. $W^{\perp} \cap W = \{0\}$

c. Komplemen dari $W^{\perp}$ adalah W, yaitu $\left(W^{\perp}\right)^{\perp} = W$