BAB II
RUANG HASIL KALI DALAM

Dalam ruang vektor R^n, dipelajari tentang hasil kali titik (Hasil Kali dalam Euclid) dari dua vektor $\bar{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ dan $\bar{v} == (v_1, v_2, ..., v_n)$ yang didefinisikan sebagai:

$$\bar{u}.\bar{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + ... + u_nv_n$$

Dari definisi tersebut, mudah dibuktikan bahwa hasil kali titik memenuhi sifat sebagai berikut:

i. $\bar{u}.\bar{v} = \bar{v}.\bar{u}$ (komutatif)

ii. $\bar{u}.(\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u}.\bar{v} + \bar{u}.\bar{w}$ (Distributif)

iii. $(s\bar{u}).\bar{v} = s.(\bar{u}.\bar{v})$, untuk setiap $s \in R$ (Homogen)

iv. $\bar{u}.\bar{u} \geq 0$, $\bar{u}.\bar{u} = 0 \Leftrightarrow \bar{u} = \bar{0}$

Jika diperhatikan, hasil kali dalam merupakan aturan pengawanan dari setiap pasang vektor di R^n ke bilangan real. Selanjutnya, perhatikan contoh berikut:

Contoh 2.1

Diberikan ruang vektor R^3 dan suatu pemetaan $\langle \, , \rangle : R^3 \times R^3 \to R$ yang didefinisikan $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2 + u_3v_3$, dengan $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$ maka pemetaan ini memenuhi sifat (i) – (iv).

Bukti:

(i) Ambil sebarang vektor di R^3, misalkan $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$, maka dipenuhi:

$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2 + u_3v_3$

$= 3v_1u_1 + 2v_2u_2 + v_3u_3$ (Sifat komutatif perkalian bilangan real)

$$= \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle \qquad \text{(definisi pemetaan)}$$

(ii) Ambil sebarang vektor di R^3, misalkan $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\bar{w} = (w_1, w_2, w_3)$, maka dipenuhi:

$$\langle \bar{u}, \bar{v} + \bar{w} \rangle = \langle (u_1, u_2, u_3), (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3 \rangle$$
$$= 3u_1(v_1 + w_1) + 2u_2(v_2 + w_2) + u_3(v_3 + w_3)$$
$$= 3u_1v_1 + 3u_1w_1 + 2u_2v_2 + 2u_2w_2 + u_3v_3 + u_3w_3$$
$$= (3u_1v_1 + 2u_2v_2 + u_3v_3) + (3u_3w_3 + 2u_3w_3 + u_3w_3)$$
$$= \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle + \langle \bar{u}, \bar{w} \rangle$$

(iii) Ambil sebarang vektor di R^3, misalkan $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dan $s \in R$, maka dipenuhi:

$$\langle s\bar{u}, \bar{v} \rangle = \langle (su_1, su_2, su_3), (v_1, v_2, v_3) \rangle = 3su_1v_1 + 2su_2v_2 + su_3v_3$$
$$= s(3v_1u_1 + 2v_2u_2 + v_3u_3)$$
$$= s\langle \bar{v}, \bar{u} \rangle$$

(iv) Ambil sebarang vektor di R^3, misalkan $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$, maka:

$$\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle = 3u_1^2 + 2u_2^2 + u_3^2$$

Jelas bahwa $u_i^2 \geq 0$ untuk setiap $i = 1,2,3$ dengan demikian $\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle = 3u_1^2 + 2u_2^2 + u_3^2 \geq 0$

$u_i^2 = 0 \Leftrightarrow u_i = 0$, akibatnya $\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow u_i^2 = 0$ untuk setiap $i = 1,2,3$ yang dipenuhi jika dan hanya jika $u_i = 0$ untuk setiap $i = 1,2,3$ atau $\bar{u} = (0,0,0) = \bar{0}$.

Dari Contoh 2.1 di atas disimpulkan bahwa, ada suatu pemetaan yang didefinisikan berbeda dengan hasil kali titik, tetapi masih memenuhi semua sifat hasil kali titik. Berangkat dari kondisi demikian, maka diangkat suatu definisi hasil kali dalam yang merupakan generalisasi dari hasil kali titik untuk sebarang ruang vektor. Selengkapnya diberikan sebagai berikut:

Definisi 2.1. Suatu pemetaan yang membawa setiap pasang vektor pada sebarang ruang vektor V atas bilangan real ke bilangan real disebut hasil kali dalam, yang dinotasikan dengan $\langle \ , \ \rangle$ jika memenuhi axioma-axioma sebagai berikut:

(i) Untuk setiap $\bar{u}, \bar{v} \in V$ berlaku $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle$

(ii) Untuk setiap $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$ berlaku $\langle \bar{u}, \bar{v} + \bar{w} \rangle = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle + \langle \bar{u}, \bar{w} \rangle$

(iii) Untuk setiap $\alpha \in R$, $\bar{u}, \bar{v} \in V$ berlaku $\langle \alpha \bar{u}, \bar{v} \rangle = \alpha \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$

(iv) Untuk setiap $\bar{u} \in V$ berlaku $\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle \geq 0$ dan $\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \bar{u} = \bar{0}$

Selanjutnya, ruang vektor yang didalamnya didefinisikan suatu hasil kali dalam disebut ***ruang hasil kali dalam.***